Annales de l'institut Fourier

Adrien Douady

Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 1 (1966), p. 1-95

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 1 (1966), 1-95.

LE PROBLÈME DES MODULES POUR LES SOUS-ESPACES ANALYTIQUES COMPACTS D'UN ESPACE ANALYTIQUE DONNÉ

par Adrien DOUADY

Introduction.

Soit X un espace analytique complexe [1].

Le but de ce travail est de munir son auteur du grade de docteur ès-sciences mathématiques et l'ensemble H (X) des sous-espaces analytiques compacts de X d'une structure d'espace analytique.

Pour formuler de façon plus précise le second problème, on a besoin de la notion de famille analytique de sous-espaces compacts de X. Nous appellerons famille de sous-espaces compacts de X paramétrée par un espace analytique S tout sous-espace analytique Y de $S \times X$ propre et plat sur S.

Le problème universel posé est de montrer que le foncteur contravariant Φ qui à un espace analytique S associe l'ensemble des familles de sous-espaces analytiques compacts de X paramétrées par S est représentable.

Nous posons et résolvons au § 9 un problème plus général (ça ne coûte pas plus cher !) : le problème des modules pour les faisceaux

[1] Les anneaux locaux peuvent avoir des éléments nilpotents.

analytiques cohérents à support compact quotients d'un faisceau analytique cohérent donné.

Pous obtenir ce résultat, nous avons été amené à sortir du cadre des espaces analytiques de dimension finie usuels pour considérer des espaces analytiques « banachiques ». Ces espaces ne sont que des intermédiaires : l'espace X d'où l'on part et l'espace H (X) ou H ($\mathcal{E}$) que l'on construit sont, bien entendu, de dimension finie.

Le théorème des voisinages privilégiés (§ 7) permet d'associer, à des faisceaux analytiques cohérents, des espaces de Banach à partir desquels on construit, par un procédé décrit au § 4, de nouveaux espaces analytiques banachiques.

L'espace X étant toujours supposé de dimension finie, on étend le foncteur Φ à la catégorie des espaces analytiques banachiques (§ 8). On montre qu'il est représentable dans cette catégorie, puis, en utilisant le critère de finitude du § 3, n° 4, que l'espace analytique qui le représente est (localement) de dimension finie.

Le problème de modules traité ici a été posé par Grothendieck dans [16] (Conjecture 1), sous une forme légèrement plus générale (au-dessus de S). Les méthodes de la géométrie algébrique (Polynômes de Hilbert) permettent d'en donner une solution dans le cas où X est un espace projectif (Chow-Van der Waerden [9], Grothendieck [15]). Grothendieck pose également dans [16] le problème des modules locaux pour un espace analytique compact (conjecture 2). Ce problème, plus difficile, a été résolu pour les *variétés* analytiques par Kodaira-Nirenberg-Spencer [23] moyennant une hypothèse cohomologique ($H^2(V_0 ; \Theta) = 0$), puis par Kuranishi [24], [11], sans cette hypothèse. Ces auteurs considèrent des familles de structures complexes sur une variété analytique réelle fixe. On ne peut plus adopter ce point de vue quand la fibre initiale a des singularités. De nouvelles méthodes devront être mises en œuvre; nous espérons que cet article constitue un pas dans cette direction.

Tous les élèves d'Henri Cartan connaissent son exigence de rigueur, parfois jusque dans le détail, et savent le profit qu'ils en ont retiré. Par son enseignement à l'Ecole Normale, par la direction de son séminaire, par les nombreux entretiens qu'il m'a accordés, il a été l'inspirateur de cette thèse. Je n'aurais probablement jamais résolu ce problème sans les encouragements et les directives de Bernard Malgrange, qui, dans les moments difficiles, m'a indiqué plusieurs voies dont l'une devait mener au résultat. A l'un comme à l'autre je tiens à exprimer ma gratitude.

Je remercie également le professeur J. Leray qui, en m'ouvrant son séminaire du Collège de France sur les équations aux dérivées partielles, m'a permis d'exposer et de rédiger une première version de ce travail, qui a été reproduite par les soins de Mademoiselle Caron, dont on ne peut que louer l'amabilité. Je suis heureux aussi de remercier Aldo Andreotti, qui m'a invité à exposer ce travail à Pise et m'a aidé dans la rédaction des § 4, 8 et 9.

Ma reconnaissance va également à mes camarades Jean-Luc Verley, Christian Houzel, David Fowler et surtout Luc Illusie qui ont accepté de passer un temps considérable à m'écouter exposer des idées encore confuses, me permettant ainsi de les clarifier, et parfois ont pris des notes qui ont constitué un premier état de rédaction.

TABLE DES MATIÈRES

1. VARIÉTÉS ANALYTIQUES BANACHIQUES

Ce paragraphe contient un exposé sommaire de la théorie, maintenant classique, ([25], [14], [3]) des variétés analytiques banachiques.

Jusqu'au paragraphe 4, le corps de base pourra être **R** (corps des réels) ou **C** (corps des complexes), la plupart des résultats étant d'ailleurs valables pour un corps valué complet quelconque. A partir du paragraphe 5, le corps de base sera toujours **C**.

1. Applications polynomiales.

Soient E et F deux espaces de Banach. Une application f de E dans F est dite polynomiale homogène de degré n s'il existe une application n-linéaire u de $\mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E}$ dans F telle que $f(x) = u(x, \ldots, x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Il existe alors une application n-linéaire symétrique $\tilde{f}$ et une seule de $\mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E}$ dans F possédant cette propriété, et $\tilde{f}$ est déterminée de la façon suivante : en posant, pour toute fonction h,

$$\Delta_x h(y) = \frac{1}{2}(h(y + x) - h(y - x)),$$

la fonction $\Delta_{x_n} \ldots \Delta_{x_1} f$ est constante et sa valeur est $n!\,\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposition 1. — *Pour une application polynomiale homogène f de* E *dans* F, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est continue;*

b) *f est continue en* 0;

c) *f est bornée sur la boule unité* $\mathrm{B_E}$ *de* E;

$\tilde{\mathrm{a}}$) *$\tilde{f}$ est continue;*

$\tilde{\mathrm{b}}$) *$\tilde{f}$ est continue en* $(0, \ldots, 0)$;

$\tilde{\mathrm{c}}$) *$\tilde{f}$ est bornée sur* $\mathrm{B_E} \times \ldots \times \mathrm{B_E}$.

Les implications $\tilde{b} \Longleftrightarrow \tilde{c} \Longrightarrow \tilde{a} \Longrightarrow a \Longrightarrow b \Longrightarrow c$ sont immédiates, montrons que $c \Longrightarrow \tilde{c}$. Plus précisément, en posant

$$\|f\| = \sup_{x \in B_E} \|f(x)\| \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| = \sup_{\substack{x_1 \in B_E \\ x_n \in B_E}} \|\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)\|,$$

on a l'inégalité :

$$(1) \qquad \|f\| \leqslant \|\tilde{f}\| \leqslant \frac{n^n}{n!} \|f\|.$$

En effet f est bornée par $n^n \|f\|$ sur la boule de rayon n; soient $x_1, \dots, x_n \in B_E$, on voit par récurrence sur k que $\Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} f$ est bornée par $n^n \|f\|$ sur la boule de rayon $n - k$, et pour $k = n$, on trouve :

$$n! \|\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)\| = \|\Delta_{x_n} \dots \Delta_{x_1} f(0)\| \leqslant n^n \|f\|.$$

2. Applications analytiques.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit U un ouvert de E. Une application h de U dans F est dite analytique en un point a de U s'il existe une suite (f_n), où, pour tout n, f_n est une application polynomiale homogène continue de degré n de E dans F, et un nombre réel $r > 0$ tels que

$$(2) \qquad \sum \|f_n\| r^n < \infty$$

et que
$h(a + x) = \sum f_n(x)$ pour x suffisamment petit. Les f_n sont alors uniquement déterminés (unicités des développements limités).

La borne supérieure R des nombres r vérifiant (2) est appelée rayon de convergence de h en a. On appelle rayon de convergence strict de h en a la borne supérieure $\tilde{R}$ des nombres r vérifiant

$$(\tilde{2}) \qquad \sum \|\tilde{f}_n\| r^n < \infty.$$

Il résulte de (1) et de la formule de Stirling donnant une majoration de $\frac{n^n}{n!}$ que R et $\tilde{R}$ sont reliés par les inégalités

$$(3) \qquad \frac{R}{e} \leqslant \tilde{R} \leqslant R \quad (^2).$$

(2) Ces inégalités m'ont été communiquées par N. Bourbaki.

Exemples. — 1. Soit A une algèbre de Banach ayant un élément unité 1 tel que $\|1\| = 1$. L'ensemble GA des éléments inversibles de A est ouvert dans A et l'application $x \mapsto x^{-1}$ de GA dans lui-même est analytique : si $a \in$ GA, $a + x$ est inversible dès que $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ et $(a + x)^{-1} = a^{-1} - a^{-1} x a^{-1} + a^{-1} x a^{-1} x a^{-1} - \ldots + \ldots = \sum (-1)^n f_n(x)$, où $f_n(x) = a^{-1} x \ldots a^{-1} x a^{-1}$ est polynomiale homogène de degré n en x, car $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a^{-1} x_1 \ldots a^{-1} x_n a^{-1}$ est n-linéaire.

On a $\| a \|^{-n-1} \leqslant \| f_n(1) \| \leqslant \| \tilde{f}_n \| \leqslant \| a^{-1} \|^{n+1}$, d'où $\| a^{-1} \|^{-1} \leqslant \tilde{\mathrm{R}} \leqslant \mathrm{R} \leqslant \| a \|$; en particulier, si $a = 1$, $\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} = 1$. Si A est commutative, $f_n(x) = a^{-n-1} x^n$ et $\tilde{f}_n(x_1, \ldots, x_n) = a^{-n-1} x_1 \ldots x_n$, d'où $\|f_n\| = \|\tilde{f}_n\| = \|a^{-n-1}\|$, et $\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}} = \lim_n \| a^{-n} \|^{\frac{-1}{n}}$ est l'inverse du rayon spectral de a^{-1}.

2. Prenons pour E l'espace l^1 des suites sommables, $x = (x_1 \ldots, x_n \ldots)$ muni de la norme $\| x \| = \sum | x_i |$, et pour $f_n(x)$ le produit $x_1 \ldots x_n$ des n premières coordonnées. On a $\|f_n\| \leqslant \dfrac{1}{n^n}$, car le maximum de $|f_n|$ pour $\sum | x_i | \leqslant 1$ est atteint pour $| x_1 | = \ldots = | x_n | = \dfrac{1}{n}$. D'autre part,

$$\tilde{f}_n(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \frac{1}{n\,!} \sum_{\sigma \in \sigma(n)} x^{(1)}_{\sigma(1)} \ldots x^{(n)}_{\sigma(n)} ,$$

d'où en prenant pour $x^{(i)}$ l'élément δ^i de Kronecker, $\| \tilde{f}_n \| \geqslant \dfrac{1}{n\,!}$, et l'inégalité (1) montre que $\| \tilde{f}_n \| = \dfrac{1}{n!}$. Pour la série $h = \sum n!\, f_n$, on a $\tilde{\mathrm{R}} = 1$ et $\mathrm{R} = e$.

3. Cas complexe.

Proposition 2 [18]. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach complexes,* U *un ouvert de* E, *et h une application de* U *dans* F. *Supposons que h soit localement bornée et que, pour toute droite affine complexe* D $\subset$ E *et toute forme linéaire continue v sur* F, $v \circ h$ *induise une fonction holomorphe sur* D $\cap$ U. *Alors h est* **C**-*analytique. Si h est bornée sur une boule de centre a et de rayon r contenue dans* U, *le rayon de convergence* R *de h en a vérifie* R $\geqslant r$, *et le développement de h en a converge vers h normalement sur toute boule de centre a et de rayon $r' < r$.*

Démonstration. — Cette proposition est connue dans le cas où E est de dimension finie et $F = \mathbf{C}$; et le développement $h(a+x) = \sum f_n(x)$ est alors donné par la formule

$$(4) \qquad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta} x)\, e^{-ni\theta}\, d\theta \quad \text{pour } \| x \| \leqslant r.$$

Dans le cas général, définissons $f_n(x)$ pour $\| x \| \leqslant r$ par la formule (4) (intégrale à valeurs dans l'espace de Banach F). Si $\| h \|$ est majorée par M sur la boule de centre a et de rayon r, on a $\| f_n(x) \| \leqslant M$ pour $\| x \| \leqslant r$. Pour montrer que f_n est polynomiale homogène de degré n, il suffit de vérifier que $\tilde{f}_n$ définie par (1) est n-linéaire et que $f_n(x) = \tilde{f}_n(x, \ldots, x)$; il suffit même de vérifier ces relations pour la restriction de $v \circ f_n$ à E′ pour toute forme linéaire continue v sur F et tout sous-espace E′ de dimension finie de E, ce qui nous ramène au cas particulier connu. Il en résulte que la série $\sum f_n$ converge normalement sur toute boule de rayon $r' < r$, et de la relation $v(h(a+x)) = v(\sum f_n(x))$ pour toute forme v, on déduit $h(a+x) = \sum f_n(x)$. Ceci démontre la proposition.

Il résulte de cette proposition que l'ensemble des applications $\mathbf{C}$-analytiques bornées de U dans F est fermé dans l'espace de Banach des applications continues bornées.

Soit h une fonction $\mathbf{C}$-analytique en a, soit R_a son rayon de convergence en a, et supposons que le développement de h en a converge vers h en tout point de la boule de centre a et de rayon R_a. Alors

(i) h est analytique en tout point b tel que $\| b - a \| < R_a$;

(ii) son rayon de convergence R_b en b vérifie $R_b \geqslant R_a - \| b - a \|$ (3).

4. Variétés.

Soit X un ensemble. Une *carte de* X est une bijection d'une partie U de X sur un ouvert U′ d'un espace de Banach. Deux cartes $\varphi_1 : U_1 \to U'_1$

(3) La propriété (i) subsiste dans le cas réel, mais sa démonstration est plus délicate. J'ignore si la propriété (ii) subsiste, mais on a l'inégalité

$$\sqrt{R_b} \geqslant \sqrt{R_a} - \sqrt{\| b - a \|}.$$

Il est immédiat que les rayons de convergence stricts vérifient $\tilde{R}_b \geqslant \tilde{R}_a - \| b - a \|$ dans les deux cas.

et $\varphi_2 : U_2 \to U'_2$ sont dites compatibles si

$$U'_{1,2} = \varphi_1 (U_1 \cap U_2) \text{ et } U'_{2,1} = \varphi_2 (U_2 \cap U_1)$$

sont ouverts dans U'_1 et U'_2 et si l'application $\gamma_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ de $U'_{2,1}$ dans $U'_{1,2}$ (changement de carte) est analytique ainsi que son inverse. Un atlas sur X est une famille de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. Deux atlas sur X sont dits équivalents si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre. Une structure de variété (analytique banachique) sur X est une classe d'équivalence d'atlas.

Etant donné un atlas sur X, il existe une topologie et une seule sur X telle que toute carte de cet atlas soit un homéomorphisme défini sur un ouvert de X. Cette topologie est la même pour deux atlas équivalents et est appelée topologie sous-jacente à la structure de variété. Pour que cette topologie soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout couple de cartes ($\varphi_1 : U_1 \to U'_1$, $\varphi_2 : U_2 \to U'_2$) de l'atlas, le graphe du changement de cartes γ_{12} soit fermé dans $U'_1 \times U'_2$.

Soit X une variété. On appelle carte de X une carte d'un atlas de X. Soient X et Y deux variétés, f une application de X dans Y, $\varphi : U \to U'$ une carte de X, $\psi : V \to V'$ une carte de Y. L'application $f' = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de $U'' = \varphi (U \cap f^{-1} (V))$ dans V' est appelée l'*expression* de f dans les cartes données. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que, pour tout couple de cartes ($\varphi : U \to U'$, $\psi : V \to V'$), l'expression de f soit une application continue d'un ouvert de U' dans V'. On dit que f est analytique si f est continue et si son expression dans tout couple de cartes est analytique. Pour que f soit analytique (resp. continue), il suffit qu'il existe un atlas de X et un atlas de Y tels que les propriétés ci-dessus soient satisfaites pour tout couple formé d'une carte de chacun de ces atlas.

5. Sous-variétés, sous-variétés directes, espace tangent.

Si E est un espace de Banach, on appellera *sous-espace direct* de E tout sous-espace vectoriel admettant un supplémentaire topologique ou, ce qui revient au même en vertu du théorème de Banach, tout sous-espace vectoriel fermé admettant un supplémentaire fermé.

Soient X une variété, $\varphi : U \to U'$ une carte de X et Y une partie de X. La partie $\varphi (Y \cap U)$ de U' est appelée l'*expression* de Y dans la carte φ. On dira que Y est une *sous-variété* (resp. une *sous-variété directe*) de X si pour tout point $y \in Y$, il existe une carte $\varphi : U \to U'$ de X telle que $y \in U$ et $\varphi(y) = 0$ et que l'expression de Y dans cette carte soit la trace sur U′ d'un sous-espace vectoriel fermé (resp. direct) de l'espace de Banach dont U′ est un ouvert.

Avec cette définition, les sous-variétés sont nécessairement localement fermées. Si Y est une sous-variété de X, il existe une structure de variété et une seule sur Y dont la topologie sous-jacente soit induite par celle de X et telle que l'injection canonique $Y \to X$ soit analytique. On l'appelle structure induite.

Soient X et Y deux variétés. On appelle *plongement* (resp. *plongement direct*) de X dans Y toute application analytique de X dans Y qui est un isomorphisme de X sur une sous-variété (resp. une sous-variété directe) de Y.

Soit X une variété. Si Y est une sous-variété *directe* de X, toute sous-variété (resp. sous-variété directe) de Y est une sous-variété (resp. sous-variété directe) de X. Si Y est une sous-variété non directe de X, il peut exister des sous-variétés directes de Y qui ne soient pas des sous-variétés de X. Exemple : soient E un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel fermé de E, h une forme quadratique continue sur F; le graphe Γ de h est une sous-variété directe de $F \times \mathbf{C}$, qui est une sous-variété de $E \times \mathbf{C}$, mais on peut montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que Γ n'est une sous-variété de $E \times \mathbf{C}$ que si h peut se prolonger en une forme quadratique continue sur E.

Soient X une variété et x un point de X. On appelle espace tangent à X en x et on note $T_x X$ le quotient de l'ensemble des couples (φ, t), où φ est une carte de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E telle que $\varphi(x) = 0$, et t un vecteur de E, par la relation d'équivalence $(\varphi, t) \sim (\varphi', t')$ si $t' = \alpha(t)$, où α est la partie linéaire du développement de l'application de changement de carte $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ en 0. C'est de façon naturelle un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel topologique normable complet. Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y, x un point de X et $y = f(x)$. On définit l'application linéaire tangente à f en x,

$$T_x f : T_x X \to T_y Y \text{ par } T_x f(u) = v$$

si u est représenté par (φ, t), et v par $(\psi, \alpha(t))$, où α est la partie linéaire du développement de l'expression de f dans les cartes φ, ψ.

6. Le théorème des fonctions implicites.

Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y, a un point de X, et $b = f(a) \in$ Y. On dit que f est un *isomorphisme local* en a s'il existe des voisinages ouverts V et W de a et b dans X et Y respectivement tels que f induise un isomorphisme de V sur W pour la structure de variété, i.e. un homéomorphisme dont l'inverse soit analytique.

THÉORÈME 1. — *Soient* X *et* Y *deux variétés, f une application analytique de* X *dans* Y, *a un point de* X *et $b = f(a) \in$* Y. *Si* $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a \mathrm{X} \to \mathrm{T}_b \mathrm{Y}$ *est un isomorphisme, f est un isomorphisme local en a.*

Remarque. — D'après le théorème de Banach, il est équivalent de supposer que $\mathrm{T}_a f$ est bijectif ou que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Démonstration du théorème 1. — En prenant des cartes de X et Y, on se ramène au cas où X et Y sont des ouverts d'espaces de Banach E et F, et où $a = 0$, $b = 0$. Pour tout r, on pose $\| h \|_r^\sim = \sum \| \tilde{f}_n \| r^n$ si $h = \sum f_n$; on a donc $\| h \|_r^\sim < \infty$ si $r < \tilde{\mathrm{R}}$, où $\tilde{\mathrm{R}}$ est le rayon de convergence strict de h en 0. Si g est une application d'un voisinage de 0 dans F, à valeurs dans un espace de Banach G, analytique en 0, $g \circ h$ est analytique en 0 et $\| g \circ h \|_r^\sim \leqslant \| g \|_s^\sim$, où $s = \| h \|_r^\sim$.

Soit f_1 le terme linéaire du développement de h, posons $c = \| f_1^{-1} \|^{-1}$, et soit $k \in \,]0,1[$. Posons $\eta(x) = x - f_1^{-1} \circ h(x)$; η est analytique en $0 \in$ E, d'ordre $\geqslant 2$. Il existe un $r > 0$ tel que $\| \eta \|_r^\sim \leqslant kr$. Posons $r' = c(1 - k)r$, et soit B$'$ la boule de rayon r' dans F. On définit par récurrence une suite (g_n) d'applications analytiques de B$'$ dans E par

$$g_0(y) = 0 \; ; \; g_{n+1}(y) = f_1^{-1}(y) + \eta \circ g_n(y).$$

On voit par récurrence que $\| g_n \|_{r'}^\sim \leqslant r$ et que $g_{n+1} - g_n$ et $h \circ g_n - 1$ sont d'ordre $> n$. La série g telle que $g - g_n$ soit d'ordre $> n$ pour tout n vérifie $\| g \|_{r'}^\sim \leqslant r$, et $h \circ g = 1$. L'application analytique h est donc localement inversible à droite, et pour la même raison g est localement inversible à droite. On voit donc que h est localement inversible, et le théorème est démontré.

7. Immersions et submersions directes.

Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F. On dit que u est un homomorphisme strict si u induit un isomorphisme topologique de $E/\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$, ou, ce qui revient au même en vertu du théorème de Banach, si $\operatorname{Im} u$ est fermé. On dira que u est un *homomorphisme direct* si $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espaces directs de E et F respectivement. Tout homomorphisme direct est donc strict. Contrairement aux conventions générales des catégories, on réserve le nom de monomorphisme aux homomorphismes stricts injectifs et le nom d'épimorphisme aux homomorphismes surjectifs (qui sont tous stricts).

Soient X et Y deux variétés, f une application analytique de X dans Y, x un point de X et $y = f(x)$. On dit que f est une immersion (resp. une immersion directe, resp. une submersion, resp. une submersion directe) en x s'il existe une carte φ de X représentant un voisinage de x sur un ouvert d'un espace de Banach E et une carte ψ de Y représentant un voisinage de y sur un ouvert d'un espace de Banach F telles que l'expression de f dans ces cartes soit induite par un monomorphisme (resp. un monomorphisme direct, resp. un épimorphisme, resp. un épimorphisme direct) de E dans F.

Dire que f est une immersion en x signifie que f induit un plongement dans Y d'un voisinage de x dans X. Si f est une submersion, l'image réciproque de tout point de Y est une sous-variété de X. Si f est une submersion directe, l'image réciproque de toute sous-variété (resp. sous-variété directe) de Y est une sous-variété (resp. sous-variété directe) de X.

On utilise souvent le Théorème des fonctions implicites sous la forme suivante :

COROLLAIRE. — *Soient* X *et* Y *deux variétés, f une application analytique de* X *dans* Y, $x \in X$.

a) *Si* $T_x f$ *est un monomorphisme direct, f est une immersion directe en x.*

b) *Si* $T_x f$ *est un épimorphisme direct, f est une submersion directe en x.*

Soient $\varphi : U \to U' \subset E$ et $\psi = V \to V' \subset F$ des cartes de X et Y respectivement avec $\varphi(x) = 0$, $\psi(y) = 0$, où $y = f(x)$; notons f' l'expression de f dans ces cartes.

a) Supposons que $T_x f$ soit un monomorphisme direct, et soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F. L'application analytique g de $U' \times G$ dans F définie par $g(x, y) = f(x) + y$ est un isomorphisme local d'après le théorème 1, et $g^{-1} \circ \psi$ est une carte de Y au voisinage de y. L'expression de f dans les cartes φ, $g^{-1} \circ \psi$ est l'injection canonique de E dans $E \oplus G$.

b) Supposons que $T_x f$ soit un épimorphisme direct, soit K son noyau, et soit p une projection de E sur K parallèlement à un supplémentaire. L'application g de U' dans $V' \times K$ définie par

$$g(x) = (f'(x), p(x))$$

p (x)) est un isomorphisme local d'après le théorème 1 et $g \circ \varphi$ est une carte de X au voisinage de x. L'expression de f dans les cartes $g \circ \varphi$, ψ est la projection de $F \times K$ sur F. Le corollaire est démontré.

8. Un contre-exemple.

Avec les notations du corollaire, montrons par un exemple que $T_x f$ peut être un épimorphisme sans que f soit une submersion.

Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé tel que E ne soit pas isomorphe à $F \oplus E/F$, et notons p l'application canonique de E sur E/F. Définissons l'application analytique f de $\mathbf{C} \times E \times E/F$ dans E/F par $f(t, x, y) = p(x) + ty$. Pour $z = (0, 0, 0)$, on a

$$T_z f(t, x, y) = p(x), \text{ et } \operatorname{Ker} T_z f = \mathbf{C} \oplus F \oplus E/F.$$

Pour $z = (t_0, 0, 0)$, on a

$$T_z f(t, x, y) = p(x) + t_0 y, \text{ et } \operatorname{Ker} T_z f = \mathbf{C} \oplus G,$$

où G est le graphe de $\dfrac{-1}{t_0} p : E \to E/F$, donc $\operatorname{Ker} T_z f \approx \mathbf{C} \oplus E$. Les espaces $\mathbf{C} \oplus F \oplus E/F$ et $\mathbf{C} \oplus E$ ne sont pas isomorphes, car des hyperplans de deux espaces isomorphes sont toujours isomorphes. Il en résulte que f n'est pas une submersion, car si f était une submersion, $f^{-1}(0)$ serait une sous-variété V de $\mathbf{C} \times E \times E/F$, et on aurait, en tout point z de V, $T_z V = \operatorname{Ker} T_z f$. Or l'espace tangent à une variété reste constamment isomorphe à lui-même sur une composante connexe.

Reste à montrer qu'il existe un espace de Banach E et un sous-espace fermé F de E tels que $E \not\approx F \oplus E/F$. Prenons pour E l'espace l^1 des suites sommables. Pour tout espace de Banach séparable H, il existe un épimorphisme u de E sur H, et en posant $F = \operatorname{Ker} u$, on a $E/F \approx H$. Mais les sous-espaces vectoriels fermés de l^1 jouissent de propriétés très particulières, par exemple : « toute suite faiblement convergente est convergente » (Théorème d'Orlicz). Si H ne possède pas cette propriété, par exemple si H est un espace de Hilbert, E/F n'est isomorphe à aucun sous-espace fermé de E et $E \not\approx F \oplus E/F$.

2. VARIÉTÉ GRASSMANNIENNE D'UN ESPACE DE BANACH

1. La variété grassmannienne.

Soit E un espace de Banach; nous allons munir l'ensemble $\mathfrak{G}(E)$ des sous-espaces directs de E d'une structure de variété analytique banachique. Pour tout couple (F, G) de sous-espaces fermés supplémentaires de E, notons U_G l'ensemble des sous-espaces F' de E admettant G comme supplémentaire; on définit une bijection $\psi_{F,G}$ de U_G sur l'espace de Banach $\mathbf{L}(F; G)$ des applications linéaires continues de F dans G en associant à $F' \in U_G$ l'application de F dans G ayant pour graphe le sous-espace F' de $E = F \times G$. Les $\psi_{F,G}$ sont des cartes de $\mathfrak{G}(E)$ dont les domaines recouvrent $\mathfrak{G}(E)$. Pour étudier le changement de cartes,

$\gamma = \psi_{F_1, G_1} \circ \psi^{-1}_{F_0, G_0}$, considérons d'abord deux cas particuliers :

(i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas γ est un isomorphisme affine.

(ii) $F_0 = F_1$. Notons j l'application de G_0 dans F_0 dont le graphe est G_1, soit $j = \psi_{G_0, F_0}(G_1)$, et i l'isomorphisme de G_0 sur G_1 défini par $i(x) = x + j(x)$. Soit $F \in U_{G_0}$, et $f = \psi_{F_0, G_0}(F)$; F est l'ensemble des $x + f(x)$ pour $x \in F_0$. La décomposition de $x + f(x)$ suivant F_0 et G est $x' + y'$, où $x' = x - j(f(x)) \in F_0$ et $y' = i(f(x)) \in G_1$. Pour que $F \in U_{G_1}$, il faut et il suffit que la projection de F sur F_0 parallèlement à G_1 soit un isomorphisme, c'est-à-dire que $I - jf$ soit inversible. Alors $\gamma(f) = if(I - jf)^{-1}$. On constate que l'ensemble de définition de γ est ouvert et que γ y est analytique.

(iii) Cas général : Si $U_{G_0} \cap U_{G_1} \neq \varnothing$, soit F un supplémentaire commun à G_0 et G_1. En passant par l'intermédiaire de ψ_{F, G_0} et ψ_{F, G_1}, le changement de carte se décompose en trois facteurs dont deux rentrent dans le cas (i) et un dans le cas (ii).

Les cartes $\psi_{F, G}$ forment un atlas qui munit $\mathfrak{G}(E)$ d'une structure de variété.

On définit une distance d sur l'ensemble $\hat{\mathfrak{G}}(E)$ de tous les sous-espaces vectoriels fermés de E en posant

$$d(F, F') = \sup(\theta(F, F'), \theta(F', F)),$$

où $$\theta(F, F') = \sup_{x \in F, \|x\| \leqslant 1} \inf_{y \in F', \|y\| \leqslant 1} \|x - y\|.$$

L'ensemble $\mathfrak{G}(E)$ est ouvert dans $\hat{\mathfrak{G}}(E)$ [4] et on peut vérifier que la topologie sous-jacente à la structure de variété coïncide avec la topologie induite par d. En particulier cette topologie est séparée (ce qu'on pourrait également vérifier en utilisant le critère du § 1 n° 4).

Soit $F \in \mathfrak{G}(E)$ et G un supplémentaire fermé de F. La carte $\psi_{F, G}$ définit un isomorphisme de l'espace tangent $T_F \mathfrak{G}(E)$ sur $\mathbf{L}(F ; G)$, qui s'identifie à $\mathbf{L}(F ; E/F)$; la formule donnant le changement de carte dans le cas (ii) montre que l'isomorphisme $T_F \mathfrak{G}(E) \to \mathbf{L}(F ; E/F)$ ainsi obtenu ne dépend pas du choix de G; nous identifierons donc ces deux espaces.

2. Applications Ker et Im pour les monomorphismes et épimorphismes directs.

Soient E et E′ deux espaces de Banach, notons $\mathfrak{S}(0, E, E')$ et $\mathfrak{S}(E, E', 0)$ respectivement l'ensemble des monomorphismes directs et des épimorphismes directs de E dans E′.

PROPOSITION 1. — a) *L'ensemble* $\mathfrak{S}(E, E', 0)$ *est ouvert dans* $\mathbf{L}(E ; E')$ *et l'application*

$$\mathrm{Ker} : \mathfrak{S}(E, E', 0) \to \mathfrak{G}(E)$$

qui à f *associe* Ker f *est une submersion directe.*

(4) L'exemple du paragraphe 1, n° 8 montre également que $\mathfrak{G}(E)$ n'est pas nécessairement fermé dans $\hat{\mathfrak{G}}(E)$. J'ignore si $\mathfrak{G}(E)$ est dense dans $\hat{\mathfrak{G}}(E)$ en général.

b) *L'ensemble* $\mathfrak{S}(0, E, E')$ *est ouvert dans* $\mathbf{L}(E, E')$ *et l'application*

$$\mathrm{Im} : \mathfrak{S}(0, E, E') \to \mathfrak{G}(E')$$

est une submersion directe.

Démonstration. — a) Soit $f_0 \in \mathfrak{S}(E, E', 0)$ un épimorphisme direct de E dans E′, posons $T = \mathrm{Ker}\, f_0$, et soit S un supplémentaire de T dans E. Soit

$$f = (a, b) : \ E = T \oplus S \to E',$$

où $a : T \to E'$ et $b : S \to E'$. Pour que $\mathrm{Ker}\, f \in U_S$, il faut et il suffit que b soit inversible, ce qui a lieu sur un ouvert de $\mathbf{L}(E; E')$ contenant f_0. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, f$ est le graphe de $-b^{-1}\, a : T \to S$; l'expression de l'application Ker dans la carte $f : (a, b) \mapsto (-b^{-1}\, a, b)$ de $\mathbf{L}(E\,; E')$, définie au voisinage de f_0, et la carte $\psi_{T, S}$ de $\mathfrak{G}(E)$ est la projection sur le premier facteur.

b) Soit $f_0 \in \mathfrak{S}(0, E, E')$, posons $T' = \mathrm{Im}\, f_0$ et soit S′ un supplémentaire de T′ dans E′. Si $f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : E \to T' \oplus S'$, on a

$\psi_{T', S'}(\mathrm{Im}\, f) = b\, a^{-1}$; or $f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto (a, b\, a^{-1})$ est une carte de $\mathbf{L}(E\,; E')$ au voisinage de f_0.

3. Variété d'homomorphismes directs.

Soient E et E′ deux espaces de Banach, notons $\mathfrak{S}(E, E')$ l'ensemble des triplets $(F, h, F') \in \mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E\,; E') \times \mathfrak{G}(E')$ tels que $F = \mathrm{Ker}\, h$ et $F' = \mathrm{Im}\, h$.

PROPOSITION 2. — a) *Soient* E *et* E′ *deux espaces de Banach. L'ensemble* $\mathfrak{S}(E, E')$ *est une sous-variété directe de*

$$\mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E\,; E') \times \mathfrak{G}(E').$$

La projection p_2 *induit une immersion directe injective de* $\mathfrak{S}(E, E')$ *dans* $\mathbf{L}(E\,; E')$. *Les projections* p_{12} *et* p_{23} *induisent des plongements directs de* $\mathfrak{S}(E, E')$ *dans* $\mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E; E')$ *et* $\mathbf{L}(E; E') \times \mathfrak{G}(E')$ *respectivement. La projection* p_{13} *induit une submersion directe de* $\mathfrak{S}(E, E')$ *dans* $\mathfrak{G}(E) \times \mathfrak{G}(E')$.

b) *Soient* E, E′ *et* E″ *trois espaces de Banach. Le produit fibré*

$$\mathfrak{S}(E, E', E'') = \mathfrak{S}(E, E') \times_{\mathfrak{G}(E')} \mathfrak{S}(E', E'')$$

est une sous-variété directe de

$$\mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E; E') \times \mathfrak{G}(E') \times \mathbf{L}(E'; E'') \times \mathfrak{G}(E'').$$

La projection p_{24} *induit un plongement direct de* $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ *dans* $\mathbf{L}(E; E') \times \mathbf{L}(E'; E'')$, *qui identifie* $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ *à un ouvert de l'ensemble* $\mathfrak{D}(E, E', E'')$ *des couples* $(h, h') \in \mathbf{L}(E; E') \times \mathbf{L}(E'; E'')$ *tels que* $h' \circ h = 0$. *La projection* p_{135} *induit une submersion directe de* $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ *dans* $\mathfrak{G}(E) \times \mathfrak{G}(E') \times \mathfrak{G}(E'')$.

Démonstration. — a) Soient (F_0, G_0) et (F_0', G_0') des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E′ respectivement. L'expression de $\mathfrak{S}(E, E')$ dans la carte

$$\psi_{F_0, G_0} \times I_{\mathbf{L}(E;E')} \times \psi_{F_0', G_0'} : U_{G_0} \times \mathbf{L}(E; E') \times U_{G_0'} \to W,$$

où

$$W = \mathbf{L}(F_0; G_0) \times \mathbf{L}(E; E') \times \mathbf{L}(F_0'; G_0'),$$

est l'ensemble des triplets $\left(f, h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, f'\right)$ vérifiant les conditions :

$$\begin{aligned} &(i) : c \text{ inversible;} \\ &(ii) : b = dc^{-1} a; \\ &(iii) : f = -c^{-1} a; \\ &(iv) : f' = dc^{-1}. \end{aligned}$$

En identifiant W à V × V′, où

$$V = \{(a, c, d)\} \qquad \text{et} \qquad V' = \{(b, f, f')\},$$

on voit que l'expression de $\mathfrak{S}(E, E')$ est le graphe d'une application analytique d'un ouvert de V dans V′. Ceci montre que $\mathfrak{S}(E, E')$ est une sous-variété directe de $\mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E; E') \times \mathfrak{G}(E')$ et que p_2 est une immersion. L'injectivité de p_2 est évidente. Les projections p_{12} et p_{23} sont donc aussi des immersions injectives, nous devons voir que ce sont des homéomorphismes sur leurs images. Cela résulte de ce que deux des conditions :

$$\operatorname{Ker} h \in U_{G_0}; \qquad c \text{ inversible}; \qquad \operatorname{Im} h \in U_{G_0'};$$

entraînent la troisième.

En identifiant W à $V_1 \times V_1'$, où $V_1 = \{(f, f', c)\}$ et $V_1' = \{(a, b, d)\}$, on voit que l'expression de $\mathfrak{S}(E, E')$ est le graphe d'une application analytique de V_1 dans V_1', On en déduit que p_{13} est une submersion directe.

b) Le fait que $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ soit une sous-variété directe de

$$\mathfrak{G}(E) \times \mathbf{L}(E; E') \times \mathfrak{G}(E') \times \mathbf{L}(E'; E'') \times \mathfrak{G}(E'')$$

résulte de ce que $p_3 : \mathfrak{S}(E, E') \to \mathfrak{G}(E')$ et $p_1 : \mathfrak{S}(E', E'') \to \mathfrak{G}(E')$ sont des submersions directes. Il est également immédiat que p_{135} est une submersion directe et que p_{24} est une immersion directe injective. Nous devons voir que p_{24} induit un homéomorphisme de $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ sur un ouvert de $\mathfrak{D}(E, E', E'')$. Si (F_0, G_0), (F_0', G_0'), (F_0'', G_0'') sont des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E, E', E'' respectivement, et si

$$h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{L}(E; E') \qquad \text{et} \qquad h' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \in \mathbf{L}(E'; E''),$$

les relations

$$\text{« } h' \circ h = 0; \qquad c \text{ inversible;} \qquad c' \text{ inversible; »}$$

entraînent

$$\text{« } \operatorname{Ker} h \in U_{G_0}; \qquad \operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} h' \in U_{G_0}; \qquad \operatorname{Im} h' \in U_{G_0} \text{ »}.$$

Notre dernière assertion en découle et la proposition est démontrée.

Remarques. — 1. En définissant $\mathfrak{S}(E, E', E'')$ comme l'ensemble des couples (f, g) tels que $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$ soit une suite exacte directe (i.e. une suite exacte d'homomorphismes directs), la partie b) de la proposition 2 peut s'énoncer de la façon suivante :

L'ensemble $\mathfrak{S}(E, E' E'')$ *est ouvert dans* $\mathfrak{D}(E, E', E'')$ *et est une sous-variété directe de* $\mathbf{L}(E, E') \times \mathbf{L}(E', E'')$; *l'application*

$$\chi : \mathfrak{S}(E, E', E'') \to \mathfrak{G}(E) \times \mathfrak{G}(E') \times \mathfrak{G}(E'')$$

définie par $\chi(f, g) = (\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g, \operatorname{Im} g)$ *est une submersion directe.*

2. La proposition 1 n'est qu'un cas particulier de la proposition 2.

4. Interprétation en termes de fibrés.

Soient X une variété et E un espace de Banach; on peut considérer $E_X = X \times E$ comme un fibré vectoriel trivial sur X. Un homomorphisme de fibrés $f : E_X \to E'_X$ est une application de la forme $(x, t) \mapsto (x, f_x(t))$, où $x \mapsto f_x$ est une application analytique de X dans $\mathbf{L}(E, E')$. La somme directe de deux fibrés triviaux est définie par $F_X \oplus G_X = (F \oplus G)_X$.

PROPOSITION 3. — *Soient* X *une variété,* E, E′, E″ *trois espaces de Banach,* $f : E_X \to E'_X$ *et* $g : E'_X \to E''_X$ *des homomorphismes de fibrés tels que* $g \circ f = 0$, *et* $x \in X$ *un point tel que* $E \xrightarrow{f_x} E' \xrightarrow{g_x} E''$ *soit une suite exacte directe. Alors il existe un voisinage* U *de* x *dans* X, *des espaces de Banach* F, F′, F″, G, G′, G″, *et un diagramme commutatif d'homomorphismes de fibrés*

$$\begin{array}{ccccc} F_U \oplus G_U & \xrightarrow{u} & F'_U \oplus G'_U & \xrightarrow{v} & F''_U \oplus G''_U \\ \downarrow j & & \downarrow j' & & \downarrow j'' \\ E_U & \xrightarrow{f} & E'_U & \xrightarrow{g} & E''_U \end{array}$$

tel que j, j', j'' *soient des isomorphismes, que* u *soit nul sur* F_U *et induise un isomorphisme de* G_U *sur* F'_U, *et que* v *soit nul sur* F'_U *et induise un isomorphisme de* G'_U *sur* F''_U.

Démonstration. — L'application $y \mapsto (f_y, g_y)$ est une application analytique de X dans $\mathbf{L}(E, E') \times \mathbf{L}(E', E'')$ qui prend ses valeurs dans $\mathfrak{D}(E, E', E'')$. D'après la proposition 2, cette application induit une application analytique $W \to \mathfrak{S}(E, E', E'')$, où W est un voisinage de x dans X. Soient (F, G), (F′, G′), (F″, G″) des couples de sous-espaces supplémentaires de E, E′, E″ respectivement, et U l'ouvert de W formé des y tels que $\chi(f_y, g_y) \in U_G \times U_{G'} \times U_{G''}$. On peut supposer que $x \in U$. Définissons $j : F_U \oplus G_U \to F_U \oplus G_U = E_U$ par $j_y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ b_y & I \end{pmatrix}$ où

$$b_y = \psi_{F,G}(\operatorname{Ker} f_y).$$

En définissant j' et j'' de façon analogue et u et v par la commutativité du diagramme, on obtient des morphismes qui répondent à la question et la proposition est démontrée.

Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition 3, l'ensemble des points y de* X *tels que* $E \xrightarrow{f_y} E' \xrightarrow{g_y} E''$ *soit une suite exacte directe est ouvert dans* X.

3. NOTION D'ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

La structure d'espace annelé dont on munit les espaces analytiques de dimension finie est insuffisante pour décrire les espaces analytiques banachiques : se donner le faisceau d'anneaux revient à se donner les morphismes dans **C**, donc dans $\mathbf{C}^n$ pour tout n; en dimension infinie, il convient de se donner les morphismes dans tous les espaces de Banach (d'un univers sous-entendu). La structure d'espace foncté qui répond à cette exigence est d'un maniement assez lourd, mais le canular fondamental, le fait qu'un morphisme n'est pas déterminé par son application sous-jacente, se rencontre déjà pour les espaces analytiques de dimension finie non réduits (i.e. avec nilpotents), espaces qu'on ne saurait s'abstenir, après Grothendieck, de considérer.

On sait que les paragraphes de sorites ont une tendance naturelle à s'enfler. On s'est efforcé de lutter contre cette tendance, aux dépens de la rigueur, sinon de la clarté.

1. Les modèles.

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f une application analytique de U dans F, et posons $X = f^{-1}(0)$.

Pour tout espace de Banach G, notons $\mathcal{H}(U, G)$ l'espace vectoriel des applications analytiques de U dans G. Si on a une application bilinéaire continue $G' \times G'' \to G$, notée comme un produit, il lui correspond un produit bilinéaire

$$\mathcal{H}(U, G') \times \mathcal{H}(U, G'') \to \mathcal{H}(U, G).$$

Appliquons ceci au produit $\mathbf{L}(F, G) \times F \to G$; nous noterons $\mathcal{N}(f, G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(U, G)$ formé des fonctions de la forme $\lambda . f$ avec $\lambda \in \mathcal{H}(U, \mathbf{L}(F, G))$. Si $g \in \mathcal{N}(f, G)$, on a $g(x) = 0$ pour $x \in X$.

Remarquons que, si $F = \mathbf{C}^p$, $f = (f_1, ..., f_p)$, $G = \mathbf{C}^q$, l'espace $\mathcal{N}(f, G)$ est l'espace des fonctions $g = (g_1, ..., g_q)$ telles que $g_1, ..., g_q$ appartiennent à l'idéal engendré par $f_1, ..., f_p$.

Pour tout ouvert U′ de U, posons

$$\Psi(U', G) = \mathcal{H}(U', G)/\mathcal{N}(f|_{U'}, G).$$

On obtient ainsi un préfaisceau $U' \to \Psi(U', G)$ sur U. Le faisceau associé à ce préfaisceau a pour support X; notons $\Phi(G)$ ce faisceau, restreint à X. A une section de $\Phi(G)$ sur un ouvert de X correspond une fonction continue à valeur dans G définie sur le même ouvert, appelée fonction (ensembliste) sous-jacente. Deux sections différentes peuvent avoir même fonction sous-jacente, comme toujours dans les théories « avec nilpotents ».

Si W est un ouvert de G, notons $\Phi(W)$ le sous-faisceau d'ensembles de $\Phi(G)$ ayant pour sections les sections de $\Phi(G)$ dont la fonction sous-jacente prend ses valeurs dans W.

Soient G et G′ deux espaces de Banach, W et W′ des ouverts de G et G′ respectivement, h une application analytique de W dans W′. Nous allons associer à h un morphisme $h_* : \Phi(W) \to \Phi(W')$ de faisceaux d'ensembles. Pour cela, nous aurons besoin du

LEMME 1. — *Soit Ω un ouvert de* $U \times F$ *contenant* $X \times 0$, *et η une application analytique de Ω dans* G, *nulle sur* $(U \times 0) \cap \Omega$. *Il existe alors un voisinage ouvert* U′ *de* X *dans* U *tel que $(x, f(x)) \in \Omega$ pour $x \in U'$ et que la fonction $g \in \mathcal{H}(U', G)$ définie par $g(x) = \eta(x, f(x))$ appartienne à* $\mathcal{N}(f|_{U'}, G)$.

Démonstration. — Pour $(x, y) \in \Omega$, soit $\eta'_2(x, y) \in \mathbf{L}(F, G)$ la dérivée partielle de η par rapport à y. Si $(x, ty) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\eta(x, y) = \int_0^1 \eta'_2(x, ty) \cdot y \, dt = \left(\int_0^1 \eta'_2(x, ty)\, dt\right) \cdot y.$$

Soit U′ l'ensemble des x tels que $(x, tf(x)) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a $g(x) = \lambda(x) \cdot f(x)$ pour $x \in U'$ en posant

$$\lambda(x) = \int_0^1 \eta'_2(x, tf(x))\, dt,$$

ce qui démontre le lemme.

Revenons à l'application analytique h de W dans W'. Soient $x_0 \in X$ et $\varphi \in \Phi_{x_0}(W)$ un germe de section du faisceau $\Phi(W)$. Soit $\gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U, W)$ un représentant de φ. On a $h \circ \gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U, W')$, et l'image $h_*(\varphi)$ de $h \circ \gamma$ dans $\Phi_{x_0}(W')$ ne dépend pas du choix de γ. En effet, soit $\gamma' = \gamma + \lambda \cdot f$ un autre représentant, définissons $\eta \in \mathcal{H}_{(x_0, 0)}(U \times F, G')$ par

$$h(\gamma(x) + \lambda(x) \cdot y) = h(\gamma(x)) + \eta(x, y) ;$$

et $g \in \mathcal{H}_{x_0}(U, G')$ par $g(x) = \eta(x, f(x))$ on a $h \circ \gamma' = h \circ \gamma + g$ et $g \in \mathcal{N}_x(f, G')$ d'après le lemme 1, ce qui démontre notre assertion.

Ceci permet d'associer h_* à h, et la correspondance $W \to \Phi(W)$ devient un *foncteur* de la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X.

Nous dirons que l'espace topologique X, muni de ce foncteur, est le *modèle* d'espace analytique banachique défini par (U, F, f) et nous le noterons $\mu(U, F, f)$ ou $\mu(f)$.

Remarques.

1) Posons $\mathcal{O} = \Phi(\mathbf{C})$; aux lois de composition $+$ et $\bullet : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ correspondent des lois de compositions qui munissent $\mathcal{O}$ d'une structure de faisceau d'anneaux.

2) Si $f = 0$, on a $X = U$ et le foncteur Φ n'est autre que celui qui associe à W le faisceau des applications analytiques dans W. On dit alors que le modèle $(X, \Phi) = (U, \mathcal{H})$ est lisse.

3) Si $U = E$, et si $f : E \to F$ est linéaire continue, $X = \operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. Le modèle $\mu(E, F, f)$ s'identifie au modèle lisse défini par l'espace de Banach X si *et seulement si* f est un homomorphisme direct.

2. Définition des espaces analytiques banachiques.

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie, on appelle *espace $\mathcal{K}$-foncté* un espace topologique X muni d'un foncteur Φ de $\mathcal{K}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X. Soient (X, Φ) et (X', Φ') deux espaces $\mathcal{K}$-finctés, un morphisme de (X, Φ) dans (X', Φ') est un couple (f_0, f_1) où f_0 est une application continue de X dans X′ et f_1 un morphisme de foncteurs de $f_0^* \circ \Phi'$ dans Φ, où f_0^* est le foncteur « image réciproque par f_0 » de la catégorie des faisceaux sur X′ dans la catégorie des faisceaux sur X.

Prenant pour $\mathcal{K}$ la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques, on appelle *espace analytique banachique* un espace $\mathcal{K}$-foncté dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe, pour la structure induite, à un modèle.

Tout espace analytique banachique $X = (X, \Phi)$ a un espace annelé sous-jacent, obtenu en prenant le faisceau $\mathcal{O}_X = \Phi(\mathbf{C})$ (cf. n° 1, remarque 1).

PROPOSITION 1. — *Soit* (X, Φ) *un espace analytique banachique et* W *un ouvert d'un espace de Banach. L'ensemble des morphismes de* (X, Φ) *dans le modèle lisse* W *s'identifie à* $\Phi(X, W)$.

La démonstration est asinitrottante (une page). Nous ne la ferons pas ici.

PROPOSITION 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert de* E, *f une application analytique de* U *dans* F. *Pour tout espace analytique banachique* $X = (X, \Phi)$, *l'ensemble des morphismes de* X *dans le modèle* $\mu(f)$ *s'identifie à l'ensemble des morphismes u de* X *dans* U *tels que* $f \circ u = 0$.

Remarque.

La proposition 2 peut aussi s'énoncer en disant que $\mu(U, F, f)$ est noyau de la double flèche $U \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F$ dans la catégorie des espaces analytiques banachiques.

Démonstration. — Posons $(X_0, \Phi_0) = \mu(f)$, et soit i le morphisme canonique de X_0 dans U. Comme $f \in \mathfrak{N}(f, F)$, l'image de f dans

$$H^0(X_0 ; \Phi_0(F))$$

est nulle, et $f \circ i = 0$ d'après la proposition 1.

Soit $u = (u_0, u_1)$ un morphisme de X dans U tel que $f \circ u = 0$. On a $u_0(X) \subset X_0$, et quels que soient l'espace de Banach G, l'ouvert U′ de U et $g \in \mathfrak{N}(f|_{U'}, G)$ on a $u_1(g) = 0$. L'homomorphisme $u_1(G)$ du faisceau $u_0(\mathcal{H}_u(\mathrm{G}))$ dans $\Phi(\mathrm{G})$ se factorise donc de façon unique par $u_0^*(\Phi_0(\mathrm{G}))$, et cette propriété subsiste si on remplace G par un de ses ouverts W. Ceci démontre la proposition.

Si X est un espace analytique banachique dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe à un modèle lisse, on dira que X est lisse. La notion d'espace analytique banachique lisse est équivalente à celle de variété analytique banachique.

3. Produits, sous-espaces analytiques, etc.

Le produit de deux modèles $\mathrm{X}' = \mu(\mathrm{U}', \mathrm{F}', f')$ et $\mathrm{X}'' = \mu(\mathrm{U}'', \mathrm{F}'', f'')$ est par définition le modèle $\mathrm{X} = \mu(\mathrm{U}' \times \mathrm{U}'', \mathrm{F}' \times \mathrm{F}'', f' \times f'')$. C'est un produit dans la catégorie des espaces analytiques banachiques : on a des morphismes $p' : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ et $p'' : \mathrm{X} \to \mathrm{X}''$, et pour tout espace analytique banachique Y, quels que soient les morphismes $h' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ et $h'' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}''$, il existe un morphisme et un seul $h : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tel que $h' = p' \circ h$ et $h'' = p'' \circ h$. Cela résulte des propositions 1 et 2.

Soient maintenant X′ et X″ deux espaces analytiques banachiques, nous allons munir l'espace topologique produit $\mathrm{X} = \mathrm{X}' \times \mathrm{X}''$ d'une structure d'espace analytique banachique; pour cela, pour tout ouvert W d'un espace de Banach, nous allons construire un faisceau $\Phi(\mathrm{W})$ sur X.

Si U est un ouvert de X de la forme $\mathrm{U}' \times \mathrm{U}''$, où U′ et U″ sont des ouverts de X′ et X″ isomorphes à des modèles, on peut transporter sur U le faisceau associé à W sur le produit de ces modèles. A un isomorphisme canonique près, le faisceau ainsi obtenu sur U ne dépend pas du choix de ces modèles, et les faisceaux ainsi construits localement se recollent en un faisceau sur X. En faisant varier W, on obtient sur X une structure d'espace analytique banachique. Muni de cette structure, X est produit de X′ et X″ dans la catégorie des espaces analytiques banachiques.

Soit (X, Φ) un espace analytique. Un *sous-espace analytique* de (X, Φ) est un espace analytique (X', Φ') tel que X′ soit un sous-espace de X, que pour tout objet W de $\mathcal{K}$, le faisceau $\Phi'(\mathrm{W})$ soit un faisceau quotient du faisceau induit sur X′ par $\Phi(\mathrm{W})$, et que pour tout morphisme $h : \mathrm{W} \to \mathrm{W}'$ de $\mathcal{K}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi(\mathrm{W}) & \xrightarrow{\Phi(h)} & \Phi(\mathrm{W}') \\ \downarrow & \Phi(h') & \downarrow \\ \Phi'(\mathrm{W}) & \rightarrow & \Phi'(\mathrm{W}'), \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques, soit commutatif.

Exemples.

1) Avec nos définitions, une sous-variété d'une variété analytique banachique en est un sous-espace analytique si *et seulement si* c'en est une sous-variété directe.

2) Le modèle $\mu(\mathrm{U}, \mathrm{F}, f)$ est un sous-espace analytique de U. Pour que $\mu(\mathrm{U}, \mathrm{F}, f)$ soit un sous-espace analytique de $\mu(\mathrm{U}, \mathrm{F}', f')$, il faut et il suffit que tout point $x \in \mathrm{U}$ possède un voisinage ouvert U′ tel que $f'|_{\mathrm{U}'} \in \mathfrak{N}(f|_{\mathrm{U}'}, \mathrm{F}')$.

Si X est un espace analytique et X′ un sous-espace analytique de X, le morphisme d'inclusion $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est un monomorphisme, donc pour tout espace analytique Y, on peut considérer l'ensemble des morphismes de Y dans X′ comme contenu dans l'ensemble des morphismes de Y dans X.

Soient u et v deux morphismes de X dans X_1. Rappelons qu'on appelle noyau de la double flèche (u, v) un sous-espace analytique X′ de X tel que, pour tout espace analytique Y, les morphismes de Y dans X′ soient les morphismes h de Y dans X tels que $u \circ h = v \circ h$. Nous allons montrer qu'un tel noyau existe toujours; l'unicité est évidente.

(i) : *cas particulier.* Supposons que $\mathrm{X} = \mu(\mathrm{U}, \mathrm{F}, f)$ et $\mathrm{X}_1 = \mu(\mathrm{U}_1, \mathrm{F}_1, f_1)$ soient des modèles, U_1 ouvert dans l'espace de Banach E_1, et que u et v se prolongent en des applications analytiques de U dans E_1. Il résulte alors de la proposition 2 que le modèle $\mathrm{X}' = \mu(\mathrm{U}, \mathrm{F} \times \mathrm{E}_1, (f, v - u))$ répond à la question.

(ii) : *cas général.* Localement, on est dans la situation (i), on peut donc construire X′ localement et les solutions locales se recollent.

Dans la catégorie des espaces analytiques banachiques, les produits finis et les noyaux de doubles flèches existent; on a donc aussi des produits fibrés et des limites projectives finies. Le produit fibré de X et X′ au-dessus de Y se note $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}'$.

Un morphisme $Y \to X$ est dit *lisse* si, pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage V de l'image x de y dans X et un voisinage W de y dans Y tels que l'image de W soit dans V et que W soit isomorphe, comme espace analytique au-dessus de V, à un produit $V \times U$, où U est un ouvert d'un espace de Banach. Tout morphisme lisse admet des sections locales; en particulier un morphisme lisse surjectif est un *épimorphisme effectif.*

(Dans une catégorie avec produits fibrés, on dit qu'un morphisme $Y \to X$ est un épimorphisme effectif si X est conoyau de la double flèche $Y \times_X Y \rightrightarrows Y$).

4. Un critère de finitude.

Un espace analytique banachique X sera dit *de dimension finie* en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert de x isomorphe à un modèle $\mu(U, F, f)$ où U est un ouvert d'un espace de dimension finie. On verra au § 7, n° 5 (Proposition 7) que, dans ce cas, on peut également supposer F de dimension finie.

Soient X et X′ deux espaces analytiques banachiques, h un morphisme de X dans X′, et x un point de X; posons $x' = h(x)$. On dira que h est *compact* en x s'il existe un isomorphisme φ d'un voisinage ouvert de x sur un modèle $\mu(U, F, f)$, un isomorphisme φ' d'un voisinage ouvert de x' sur un modèle $\mu(U', F', f')$ et un germe $\bar{h}$ en $\varphi(x)$ d'application analytique de U dans U′ tels que :

a) le diagramme de germes :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi'}\downarrow \\ U & \xrightarrow{\bar{h}} & U' \end{array}$$

soit commutatif,

b) l'application linéaire tangente à $\bar{h}$ en $\varphi(x)$ soit compacte.

Si $h : X \to X'$ est un morphisme compact en x, quels que soient les isomorphismes φ_1 et φ'_1 de voisinages de x et $x' = h(x)$ respectivement sur des modèles $\mu(U_1, F_1, f_1)$ et $\mu(U'_1, F'_1, f'_1)$, il existe un germe $\bar{h}_1$ d'application analytique de U_1 dans U'_1 satisfaisant aux conditions a) et b).

En effet, si φ, φ' et $\overline{h}$ vérifient a) et b), il existe des germes de morphismes $\gamma : U_1 \to U$ et $\gamma' : U' \to U'_1$ tels que les diagrammes de germes

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U_1 \arrow[rr, "\gamma"'] & & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi'_1"] & \\ U' \arrow[rr, "\gamma'"'] & & U'_1 \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, et $\overline{h}_1 = \gamma' \circ \overline{h} \circ \gamma$ répond à la question.

Proposition 3. — *Soit* X *un espace analytique banachique et* x *un point de* X. *Si le morphisme identique de* X *est compact en* x, *alors* X *est de dimension finie en* x.

Démonstration. — Dans le diagramme (1), où $h = I$, on peut supposer $U' = U$ et $\varphi' = \varphi$. Notons E l'espace de Banach dont U est un ouvert, et $\lambda : E \to E$ l'application linéaire tangente à $\overline{h}$ en $\varphi(x)$. Comme λ est compact par hypothèse, Ker $(I - \lambda)$ et Coker $(I - \lambda)$ sont de dimension finie et $I - \lambda$ est un homomorphisme direct. Posons $E' = \mathrm{Im}\,(I - \lambda)$ et soit $p : E \to E'$ une projection linéaire. On a $p \circ \overline{h} \circ \varphi = p \circ \varphi$, ce qui montre que le modèle $\varphi(X_1)$ est un sous-espace analytique de

$$\mu\,(U, E', p \circ (I - \overline{h})).$$

Or $p \circ (I - \overline{h})$ est une submersion directe en $\varphi(x)$ et le modèle

$$\mu\,(U, E', p \circ (I - \overline{h}))$$

est lisse de dimension finie au voisinage de $\varphi(x)$. Ceci démontre la proposition.

4. L'ESPACE ANALYTIQUE DES SOUS-MODULES D'UN MODULE DE BANACH

1. L'espace analytique des sous-modules directs d'un module de Banach.

Soient A une algèbre de Banach à unité, et E un A-module de Banach. On appellera sous A-module direct de E tout sous A-module fermé de E qui admette un supplémentaire topologique *en tant qu'espace vectoriel* [5]. Nous allons munir l'ensemble $\mathfrak{G}_A(E)$ des sous A-modules directs de E d'une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathfrak{G}(E)$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E; définissons une application analytique φ de l'ouvert U_G de $\mathfrak{G}(E)$ (formé des sous-espaces de E admettant G comme supplémentaire) dans $\mathbf{L}(A) \hat{\otimes} F, G)$ (qui n'est autre que l'espace des applications bilinéaires continues de $A \times F$ dans G, la topologie dont on munit le produit tensoriel étant ici la topologie π), en posant

$$\varphi(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}),$$

où $p_{F'}$ désigne la projection de E sur G de noyau F', où $m : A \hat{\otimes} E \to E$ est la multiplication, et où $j_{F'}$ est l'injection de F dans E d'image F' telle que $j_{F'}(x) - x \in G$ pour $x \in F$. On a $\varphi^{-1}(0) = \mathfrak{G}_A(E) \cap U_G$.

Soient (F_0, G_0) et (F_1, G_1) deux couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E, et définissons φ_0 et φ_1 comme ci-dessus. Posons $U_i = U_{G_i}$. Les structures de sous-espace analytique banachique de $\mathfrak{G}(E)$ induites sur $\mathfrak{G}_A(E) \cap U_0 \cap U_1$ par les modèles $\mu(U_0, \mathbf{L} \hat{\otimes} F_0 G_0), \varphi_0)$ et $\mu(U_1, \mathbf{L}(A \hat{\otimes} F_1, G_1), \varphi_1)$ coïncident, comme on le voit en se ramenant comme au § 2, n° 1 aux deux cas particuliers suivants :

(i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas, $\varphi_1 = \varepsilon^* \circ \varphi_0$, où ε est l'isomorphisme de F_1 sur F_0 parallèlement à $G = G_0 = G_1$, et

$$\varepsilon^* : \mathbf{L}(A \hat{\otimes} F_0, G) \to \mathbf{L}(A \hat{\otimes} F_1, G)$$

l'isomorphisme associé à ε.

(ii) $F_0 = F_1$. Dans ce cas, $\varphi_1(F') = \varepsilon(F') \circ \varphi_0(F') \circ (I_A \hat{\otimes} \gamma(F'))$ pour $F' \in U_0 \cap U_1$, où $\varepsilon(F')$ est l'isomorphisme de G_0 sur G_1 parallèlement à F' et $\gamma(F') = j_0(F')^{-1} \circ j_1(F')$, en notant $j_i(F')$ l'isomorphisme de F sur F' parallèlement à G_i. Les applications ε et γ de $U_0 \cap U_1$ dans $\mathbf{L}(G_0, G_1)$ et $\mathbf{L}(F, F)$ respectivement sont analytiques.

Il existe donc sur $\mathfrak{G}_A(E)$ une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathfrak{G}(E)$ et une seule qui, pour tout couple (F, G) de sous-espaces supplémentaires de E, induise sur $\mathfrak{G}_A(E) \cap U_G$ la structure décrite ci-dessus. L'ensemble $\mathfrak{G}_A(E)$ sera toujours muni de cette structure.

[5] De même, quand nous parlerons d'homomorphisme direct, suite exacte directe, etc., le mot « direct » se rapportera toujours à la structure d'espace de Banach sous-jacente.

2. Le morphisme Im.

Soit A une algèbre de Banach, et soient E et E′ deux A-modules de Banach. On notera $\mathfrak{S}_A(E, E')$ l'espace analytique banachique

$$\mathrm{Hom}_A(E, E') \times_{\mathbf{L}(E, E')} \mathfrak{S}(E, E').$$

PROPOSITION 1. — *L'application analytique* $p_3 : \mathfrak{S}(E, E') \to \mathfrak{G}(E')$ *induit un morphisme* $\mathfrak{S}_A(E, E') \to \mathfrak{G}_A(E')$.

Remarque. — Ensemblistement, cette proposition dit seulement que l'image d'une application A-linéaire de E dans E′ est un sous A-module de E′.

Démonstration (6). — Soient (F_0, G_0) et (F_0', G_0') des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E′ respectivement et soit

$$s = (F, f, F') \in \mathfrak{S}_A(E, E'),$$

avec

$$F \in U_{G_0} \subset \mathfrak{G}(E),\ f \in \mathrm{Hom}_A(E, E'),\ F' \in U_{G_0'} \subset \mathfrak{G}(E').$$

Il s'agit de montrer que $F' \in \mathfrak{G}_A(E')$. La question étant locale, cela suffira et en vertu de la proposition 2 cela se ramène à montrer que $\varphi'(F') = 0$, où $\varphi' : U_{G_0'} \to \mathbf{L}(A \hat{\otimes} F_0', G_0')$ est l'application définie au numéro précédent, soit

$$\varphi'(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}).$$

Or $j_{F'} = f|_{G_0} \circ u(f)^{-1}$ où u est l'application composée

$$\mathrm{Hom}_A(E, E') \to \mathbf{L}(E, E') \to \mathbf{L}(G_0, F_0').$$

On a donc

$$\begin{aligned}\varphi'(F') &= p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} f|_{G_0}) \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1}) \\ &= p_{F'} \circ f \circ m|_{A \hat{\otimes} G_0'} \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1}) = 0,\end{aligned}$$

car $p_{F'} \circ f = 0$ dès que $(F, f, F') \in \mathfrak{S}(E, E')$. Ceci démontre la proposition.

(6) Dans le calcul qui suit, nous ferons l'abus de notation suivant : on se fixe un espace analytique banachique T quelconque; quand nous écrirons $x \in X$, cela signifiera que x est un morphisme de T dans X; si $\varphi : X \to Y$ est un morphisme, nous écrirons $\varphi(x)$ pour $\varphi \circ x$, etc.

On démontrerait de même que l'application analytique

$$p_1 : \mathfrak{S}(E, E') \to \mathfrak{G}(E)$$

induit un morphisme $\mathfrak{S}_A(E, E') \to \mathfrak{G}_A(E)$.

PROPOSITION 2. — *Si* E *est de la forme* $A \hat{\otimes} L$, *où* L *est un espace de Banach, le morphisme*

$$\mathfrak{S}_A(E, E') \to \mathfrak{G}_A(E')$$

est lisse.

Remarque. — On n'appliquera cette proposition que dans le cas où E est un A-module libre de type fini : $E \approx A^r$.

Démonstration (7). — Soit (F'_0, G'_0) un couple de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E′, et notons π la projection de E′ sur F'_0 de noyau G'_0.

(i) Définissons un morphisme

$$\alpha : \mathfrak{S}_A(E, E') \to \mathfrak{G}_A(E') \times \mathbf{L}(L, F'_0)$$

par $\alpha(s) = (F', \pi \circ f|_L)$ pour $s = (F, f, F') \in \mathfrak{S}_A(E, E')$.

(ii) Définissons un morphisme

$$\beta : U_{G_0} \times \mathbf{L}(L, F'_0) \to \mathrm{Hom}_A(E, E') \times U_{G_0}$$

par $\beta(F', u) = (f, F')$, où $f = m \circ (I_A \otimes (j_{F'} \circ u))$.

Si $F' \in \mathfrak{G}_A(E')$, on a

$$p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) = 0,$$

d'où

$$p_{F'} \circ f = p_{F'} \circ m \circ (I_A \otimes j_{F'}) \circ (I_A \hat{\otimes} u) = 0.$$

Il en résulte que β induit un morphisme de Ω dans $\mathfrak{S}_A(E, E')$, où Ω désigne l'ouvert de $\mathfrak{G}_A(E') \times \mathbf{L}(L, F'_0)$ formé des couples (F', u) tels que F′ appartienne à U_{G_0} et que $\pi \circ f \in \mathbf{L}(E, F'_0)$ soit un épimorphisme direct, et où $\mathfrak{S}_A(E, E')$ est plongé dans $\mathrm{Hom}_A(E, E') \times \mathfrak{G}(E')$.

(7) Voir note précédente.

(iii) Il est immédiat que $\alpha \circ \beta = I_\Omega$. Montrons que $\beta \circ \alpha$ est l'identité de l'ouvert W de $\mathfrak{S}_A(E, E')$ formé des couples (f, F') tels que F' appartienne à U_{G_0}. Pour $s = (f, F') \in W$, posons $\beta(\alpha(s)) = t = (g, F')$. On a $\alpha(t) = \alpha \circ \beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$, soit $\pi \circ g|_L = \pi \circ f|_L$. Comme $f = j_{F'} \circ \pi \circ f$ et $g = j_{F'} \circ \pi \circ g$, ceci entraîne $g|_L = f|_L$ d'où $g = f$ car $\mathrm{Hom}_A(E, E') = \mathbf{L}(L, E')$.

La proposition est démontrée.

Si $F_1, ..., F_n$ sont des A-modules de Banach, on pose

$$\mathfrak{S}_A(F_1, ..., F_n) = \mathfrak{S}_A(F_1, F_2) \times_{\mathfrak{G}_A(F_2)} \cdots \times_{\mathfrak{G}_A(F_{n-1})} \mathfrak{S}_A(F_{n-1}, F_n).$$

COROLLAIRE. — *Soient* A *une algèbre de Banach,* E *un* A-*module de Banach. Le morphisme canonique* $\mathfrak{S}_A(A^{r_n}, ..., A^{r_0}, E) \to \mathfrak{G}_A(E)$ *est lisse.*

Démonstration par récurrence sur n. — Le morphisme

$$\mathfrak{S}_A(A^{r_n}, ..., A^{r_0}, E) \to \mathfrak{S}_A(A^{r_{n-1}}, ..., A^{r_0}, E)$$

se déduit du morphisme $\mathfrak{S}_A(A^{r_n}, A^{r_{n-1}}) \to \mathfrak{G}_A(A^{r_{n-1}})$ par changement de base. Il est donc lisse. Comme le morphisme

$$\mathfrak{S}_A(A^{r_{n-1}}, ..., A^{r_0}, E) \to \mathfrak{G}_A(E)$$

est lisse par hypothèse de récurrence, le morphisme

$$\mathfrak{S}_A(A^{r_n}, ..., A^{r_0}, E) \to \mathfrak{G}_A(E),$$

composé de deux morphismes lisses, est lisse.

3. Présentations finies directes.

Soit A une algèbre de Banach. Un A-module de Banach F sera dit de type fini direct s'il existe un épimorphisme direct A-linéaire $\varepsilon : A^r \to F$, où $r \in \mathbf{N}$.

Si F est de type fini direct, tout épimorphisme A-linéaire $\varepsilon' : A^{r'} \to F$ est direct. En effet, soit $\varepsilon : A^r \to F$ un épimorphisme direct, on peut construire une application A-linéaire, nécessairement continue, $f : A^r \to A^{r'}$ telle que $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$; si $\sigma \in \mathbf{L}(F, A^r)$ est une section de ε, l'application

$\sigma' = f \circ \sigma \in \mathbf{L}(F, A^{r'})$ est une section de ε'. Plus généralement, si F est de type fini direct, tout épimorphisme A-linéaire $E \to F$, où E est un A-module de Banach, est direct.

Si F admet une présentation finie directe, i.e. une suite exacte directe A-linéaire $A^q \to A^r \to F \to 0$, toute présentation finie de F est directe. En effet, si $\varepsilon : A^r \to F$ et $\varepsilon' : A^{r'} \to F$ sont deux épimorphismes directs, considérons $\varepsilon'' = (\varepsilon, \varepsilon') : A^{r+r'} \to F$; on a

$$\operatorname{Ker} \varepsilon'' \approx \operatorname{Ker} \varepsilon \oplus A^{r'} \approx A^r \oplus \operatorname{Ker} \varepsilon',$$

donc si Ker ε est de type fini direct, il en est de même de Ker ε'.

Soit E un A-module de Banach. Il résulte du corollaire de la proposition 2 que l'ensemble des sous A-modules directs de E admettant une présentation finie directe est ouvert dans $\mathfrak{G}_A(E)$.

4. Résolutions finies directes.

DÉFINITION. — *Soient* A *une algèbre de Banach et* E *un* A-*module de Banach. Une résolution finie directe de* E *est une suite exacte directe de la forme :* $0 \to A^{r_n} \to \dots \to A^{r_0} \to E \to 0$.

Il résulte du corollaire de la proposition 2 que l'ensemble des sous-modules de E admettant une résolution finie directe est ouvert dans $\mathfrak{G}_A(E)$. La proposition qui suit montre que, si E admet une résolution finie directe, cet ensemble coïncide avec l'ensemble des sous-modules tels que le quotient admette une résolution finie directe.

PROPOSITION 3. — *Soit* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *une suite exacte directe de* A-*modules de Banach. Si deux des trois modules* E, E′, E″ *admettent une résolution finie directe, il en est de même du troisième.*

Démonstration. — Faisons d'abord trois remarques :

1) Soit F un A-module de Banach. Toute application A-linéaire de A^r dans F est continue.

2) Soit $F_\bullet : 0 \to F_n \to \dots \to F_0 \to 0$ un complexe d'espaces de Banach. Pour que $F_\bullet$ soit acyclique direct, il faut et il suffit que pour tout espace de Banach S, le complexe $\mathbf{L}(S; F_\bullet)$ soit acyclique. Plus générale-

ment, pour que F_* soit direct, il faut et il suffit que, pour tout i, $H_i(F_*)$ soit séparé et $H_i(\mathbf{L}(S; F_*)) = \mathbf{L}(S; H_i(F_*))$ pour tout espace de Banach S.

3) Soit F un A-module de Banach. S'il existe un complexe direct $L_* : 0 \to L_p \to \ldots \to L_q \to 0$, avec $q \leqslant 0$, $L_i = A^{r_i}$, acyclique en degré $\neq 0$, tel que $H_0(L_*) = F$, le A-module F admet une résolution finie directe. Considérons la suite exacte directe $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$.

a) Si L'_* et L''_* sont des résolutions finies directes de E' et E'', on peut construire une résolution L_* de E et une suite exacte directe $0 \to L'_* \to L_* \to L''_* \to 0$.

b) Si L_* et L'_* sont des résolutions finies directes de E et E', on peut construire une résolution L''_* de E'' et une suite exacte directe $0 \to L_* \to L''_* \to \sigma L'_* \to 0$, où $\sigma L'$ est le complexe obtenu à partir de L'_* en décalant les degrés.

c) Si L_* et L''_* sont des résolutions finies directes de E et E'', on peut construire un complexe L'_* (avec un terme de degré -1) tel que $H_0(L'_*) = E'$, et une suite exacte directe $0 \to \sigma^{-1} L''_* \to L'_* \to L_* \to 0$.

Dans le cas a) pour tout espace de Banach S, les complexes $\mathbf{L}(S; L'_*)$ et $\mathbf{L}(S; L''_*)$ sont acycliques en degré $\neq 0$, et on a $H_0(\mathbf{L}(S; L'_*)) = \mathbf{L}(S; E')$, $H_0(\mathbf{L}(S; L''_*)) = \mathbf{L}(S; E'')$. La suite exacte d'homologie montre que le complexe $\mathbf{L}(S; L_*)$ est acyclique en degré $\neq 0$ et que $H_0(\mathbf{L}(S; L_*)) = \mathbf{L}(S; E)$. Il en résulte que le complexe L_* est direct.

De même les complexes L''_* dans le cas b) et L'_* dans le cas c) sont directs. Dans le cas c), on conclut en appliquant la remarque 3. La proposition est démontrée.

5. Changement d'algèbre.

Soient A et A' deux algèbres de Banach, E un A-module de Banach, E' un A'-module de Banach, $\rho_0 : A \to A'$ un homomorphisme d'algèbres continu, qu'on ne suppose pas d'image fermée, et $\rho_1 : E \to E'$ une application continue ρ_0-linéaire (i.e. A-linéaire quand on considère E' comme un A-module au moyen de ρ_0), de sorte que $\rho = (\rho_0, \rho_1)$ est un dimorphisme.

Ce qui suit est une tentative pour définir un morphisme $\rho_* : \mathfrak{G}_A(E) \to \mathfrak{G}_{A'}(E')$ tel que, pour $F \in \mathfrak{G}_A(E)$, $F' = \rho_*(F)$ soit le sous-

A′-module de E′ engendré par ρ_1 (F). Nous parviendrons seulement à définir un morphisme ρ_* d'un ouvert W de $\mathfrak{G}_A$ (E) dans $\mathfrak{G}_{A'}$ (E′).

Soit $F \in \mathfrak{G}_A(E)$ un sous A-module admettant une présentation finie directe, que nous considérerons comme un point $s \in \mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E)$. L'espace analytique banachique $\mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E)$ s'identifie à un ouvert du sous-espace $\mathfrak{D}_A(A^q, A^r, E)$ de $\mathrm{Hom}_A(A^q, A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r, E)$ formé des couples (u, v) tels que $v \circ u = 0$ [8].

On définit

$\rho_* : \mathrm{Hom}_A(A^q, A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r, E) \to \mathrm{Hom}_A(A'^q, A'^r) \times \mathrm{Hom}_A(A'^r, E')$ par extension des scalaires de A à A′ et au moyen de ρ_1, et ρ_* induit un morphisme de $\mathfrak{D}_A(A^q, A^r, E)$ dans $\mathfrak{D}_{A'}(A'^q, A'^r, E')$.

Considérons l'hypothèse suivante :

(H) $$\rho_*(s) \in \mathfrak{S}_{A'}(A'^q, A'^r, E').$$

Remarquons que cette hypothèse porte seulement sur F : elle signifie que ρ_1 identifie $A' \otimes_A F$ à un sous A′-module direct F′ de E′ admettant une présentation finie directe.

PROPOSITION 4. — *L'ensemble* W *des* $F \in \mathfrak{G}_A(E)$ *vérifiant* (H) *est ouvert dans* $\mathfrak{G}_A(E)$, *et il existe un morphisme et un seul* ρ_* *de* W *dans* $\mathfrak{G}_{A'}(E')$ *tel que, quels que soient q et r, le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E)\,|_W & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{S}_{A'}(A'^q, A'^r, E') \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\rho_*} & \mathfrak{G}_A(E') \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — Pour tous q, r le morphisme

$$p : \mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E) \to \mathfrak{G}_A(E)$$

est lisse, donc ouvert, et en posant

$$X_{q,r} = \mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E) \cap \rho_*^{-1}(\mathfrak{S}_{A'}(A'^q, A'^r, E')),$$

$W_{q,r} = p(X_{q,r})$ est ouvert dans $\mathfrak{G}_A(E)$. Donc $W = \bigcup W_{q,r}$ est ouvert.

(8) Comme $\mathrm{Hom}_A(A^q, E)$ est un sous-espace direct de $\mathbf{L}(A^q, E)$, les modèles définis par la multiplication

$$m : \mathrm{Hom}_A(A^q, A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r, E) \to \mathrm{Hom}_A(A^q, E)$$

et par $i \circ m$, où :

$$i : \mathrm{Hom}_A(A^q, E) \to \mathbf{L}(A^q, E)$$

est l'injection canonique, coïncident.

Le morphisme $X_{q,r} \to W_{q,r}$ étant lisse et surjectif, c'est un *épimorphisme effectif* dans la catégorie des espaces analytiques banachiques, et pour montrer l'existence et l'unicité d'un morphisme $\rho_{q,r} : W_{q,r} \to \mathfrak{G}_A(E')$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{q,r} & \to & \mathfrak{S}_{A'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{q,r} & \to & \mathfrak{G}_{A'} \end{array}$$

commutatif, il suffit de montrer que $\rho_* \times \rho_*$ induit un morphisme de $X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r}$ dans $\mathfrak{S}_{A'} \times_{\mathfrak{G}_A} \mathfrak{S}_A$.

Considérons l'ensemble H des sextuplets (u, v, u', v', f_0, f_1) d'applications A-linéaires tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^q & \xrightarrow{f_1} & A^q \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ A^r & \xrightarrow{f_0} & A^r \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v'} & \\ & E & \end{array}$$

soit commutatif et que les couples (u, v) et (u', v') appartiennent à $\mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E)$. On munit de façon évidente H d'une structure d'espace analytique banachique.

LEMME. — *On a un morphisme lisse surjectif* φ *d'un ouvert* Y *de* H *dans*

$$\mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E) \times_{\mathfrak{G}_A(E)} \mathfrak{S}_A(A^q, A^r, E)$$

défini par

$$\varphi(u, v, u', v', f_0, f_1) = ((u, v), (u', v')).$$

Démonstration du lemme [9]. — Soit $h = (u, v, u', v', f_0, f_1) \in H$, et supposons qu'il existe un couple (F_0, G_0) de sous-espaces supplémentaires de E tel que $\operatorname{Im} v \in U_{G_0}$ et $F' = \operatorname{Im} v' \in U_{G_0}$. Soit $p_{F'} \in L(E, G)$ la projection de noyau F'; on a $p_{F'} \circ v = p_{F'} \circ v' \circ f_0 = 0$, ce qui entraîne $F = F'$. Il en résulte qu'on a un morphisme φ d'un ouvert de Y de H dans $\mathfrak{S}_A \times_{\mathfrak{G}_A} \mathfrak{S}_A$ défini par la formule de l'énoncé. La surjectivité est un résultat classique. Nous nous contenterons de montrer que φ a des

[9] Même convention que pour la démonstration des propositions 1 et 2.

sections locales, ce qui nous suffira pour démontrer la proposition, laissant au lecteur le soin de montrer qu'il est lisse.

Soit $((u, v), (u', v')) \in \mathfrak{S}_A \times_{\mathfrak{G}_A} \mathfrak{S}_A$; soient (F_0, G_0), (T_0, S_0) et (T_1, S_1) des couples de sous-espaces supplémentaires de E, A^r et A^q respectivement, et supposons que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} v' \in U_{G_0}$; $\operatorname{Ker} v' \in U_{S_0}$ et $\operatorname{Ker} v' \in U_{S_1}$. Nous allons construire

$$f_0 \in \operatorname{Hom}_A(A^r, A^r) \text{ et } f_1 \in \operatorname{Hom}_A(A^q, A^q)$$

tels que $(u, v, u', v', f_0, f_1) \in H$. Vu les conventions faites, cela suffira.

Notons π les projections $E \to F_0$, $A^r \to T_0$ et $A^q \to T_1$ de noyau G_0, S_0 et S_1 respectivement, et notons i les injections canoniques $G_0 \to E$, $S_0 \to A^r$ et $S_1 \to A^q$. Alors

$$a = \pi \circ u' \circ i \in \mathbf{L}(S_1, T_0) \quad \text{et} \quad b = \pi \circ v' \circ i \in \mathbf{L}(S_0, F_0)$$

sont inversibles. Définissons $f_0 \in \operatorname{Hom}_A(A^r, A^r)$ et $f_1 \in \operatorname{Hom}_A(A^q, A^q)$ par

$$f_0 \mid_{\mathbf{C}^r} = i \circ b^{-1} \circ \pi \circ v \in \mathbf{L}(\mathbf{C}^r, A^r)$$

et

$$f_1 \mid_{\mathbf{C}^q} = i \circ a^{-1} \circ \pi \circ f_0 \circ u \in \mathbf{L}(\mathbf{C}^q, A^q).$$

Maintenant f_0 et f_1 répondent à la question, ce qui démontre notre assertion.

Fin de la démonstration de la proposition 4. — Soient Y' et φ' les analogues de Y et φ relativement au A'-module E'. Notons Z l'ouvert

$$\varphi^{-1}(X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r})$$

de Y. On définit par extension des scalaires et au moyen de ρ_1 un morphisme ρ_* de Z et Y'. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{\rho_*} & Y' \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r} & & \mathfrak{S}_{A'} \times_{\mathfrak{G}_{A'}} \mathfrak{S}_{A'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{q,r} \times X_{q,r} & \xrightarrow[\rho_* \times \rho_*]{} & \mathfrak{S}_{A'} \times \mathfrak{S}_{A'}
\end{array}$$

Comme φ est surjectif et admet des sections locales, on voit que $\underset{*}{\rho} \times \underset{*}{\rho}$ induit un morphisme de $X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r}$ dans $\mathfrak{S}_{A'} \times_{\mathfrak{G}_{A'}} \mathfrak{S}_{A'}$, ce qui permet comme on l'a vu de construire un morphisme $\rho_{q,r}$ de $W_{q,r}$ dans $\mathfrak{G}_{A'}(E')$. Si $r' \geqslant r$ et $q' - r' \geqslant q - r$, on a $W_{q',r'} \supset W_{q,r}$, et on vérifie immédiatement que $\rho_{q',r'}$ et $\rho_{q,r}$ coïncident sur $W_{q,r}$. Ceci permet de construire ρ par recollement et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 5. — *Avec les notations de la proposition* 4, *si les applications ρ_0 et ρ_1 sont compactes, le morphisme ρ_* de* W *dans* $\mathfrak{G}_{A'}(E')$ *est compact en tout point.*

Démonstration. — L'application

$$\rho_* : \mathrm{Hom}_A(A^q, A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r, E) \to \mathrm{Hom}_{A'}(A'^q, A'^r) \times \mathrm{Hom}_{A'}(A'^r, E')$$

est compacte. Le morphisme $\rho_* : \mathfrak{S}_A|_W \to \mathfrak{S}_{A'}$ est donc compact en tout point, et comme le morphisme $\mathfrak{S}_A|_W \to W$ est surjectif et admet des sections locales, il en résulte que $\rho_* : W \to \mathfrak{G}_{A'}$ est compact en tout point et la proposition est démontrée.

5. L'ESPACE B (K)

1. Espaces B (K;F).

DÉFINITION. — *On appellera* polycylindre *toute partie* K *de* $\mathbf{C}^n$ *de la forme* $K_1 \times \ldots \times K_n$, *où pour tout i,* K_i *est une partie compacte convexe de* $\mathbf{C}$.

Soit K un polycylindre; si F est un espace de Banach, on notera $\mathcal{O}(K;F)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques au voisinage de K à valeurs dans F, $\mathcal{C}(K;F)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur K à valeurs dans F, et B (K ; F) l'adhérence de l'image de $\mathcal{O}(K;F)$ dans $\mathcal{C}(K;F)$.

On notera B (K) l'algèbre de Banach B (K; **C**). Si l'intérieur $\mathring{K}$ de K n'est pas vide, B (K ; F) est l'espace des fonctions continues sur K, analytiques sur $\mathring{K}$, à valeurs dans F. En effet, une telle fonction f peut s'approcher, uniformément sur K, par la fonction analytique f_t définie au voisinage de K par $f_t(x) = f(ta + (1-t)x)$, où $a \in \mathring{K}$, $t > 0$.

PROPOSITION 1. — *On a* $B(K; F) = B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon F$.

Démonstration. — Rappelons que la norme ε sur un produit tensoriel $E \otimes F$ d'espaces de Banach est la norme induite par celle de $\mathbf{L}(F^*, E)$, où $F^* = \mathbf{L}(F; \mathbf{C})$, au moyen de l'injection de Kronecker $E \otimes F \to \mathbf{L}(F^*, E)$. On peut identifier $B(K) \otimes F$ au sous-espace vectoriel de $B(K; F)$ formé des fonctions f prenant leurs valeurs dans un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. La norme induite sur $B(K) \otimes F$ par celle de $B(K; F)$ est

$$\| f \| = \sup_{x \in K} \| f(x) \| = \sup_{x \in K,\ u \in F^*} | u(f(x)) | = \| f \|_\varepsilon ,$$

et $B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon F$ s'identifie à un sous-espace fermé de $B(K, F)$. Reste à montrer que $B(K) \otimes F$ est dense dans $B(K; F)$, soit que toute fonction $f \in \mathcal{O}(K; F)$ peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions prenant leurs valeurs dans des sous-espaces vectoriels de F de dimension finie. Ceci peut se faire en représentant f par une intégrale de Cauchy et en approchant celle-ci par des sommes de Riemann. Ceci démontre la proposition.

PROPOSITION 2. — *Si* $K = K' \times K''$, *où* $K' \subset \mathbf{C}^{n'}$, $K'' \subset \mathbf{C}^{n''}$ *sont des polycylindres; on a* $B(K) = B(K', B(K'')) = B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon B(K'')$.

Démonstration. — On a des applications naturelles

$$\mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K'; B(K'')) \to B(K'; B(K''))$$

et la norme induite sur $\mathcal{O}(K)$ par celle de $B(K'; B(K''))$ coïncide avec celle de $B(K)$, donc $B(K)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $B(K'; B(K''))$. Mais $\mathcal{O}(K)$ contient $\mathcal{O}(K') \otimes \mathcal{O}(K'')$, qui est dense dans $B(K'; B(K''))$ d'après la proposition 1. Ceci démontre la proposition.

2. Morphismes d'un espace analytique dans B (K).

Soit K un polycylindre. La fonction δ définie sur $B(K) \times \mathring{K}$ par $\delta(f, x) = f(x)$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, est analytique. Elle est en effet continue et partiellement analytique en f et en x, donc analytique d'après la proposition 2 du § 1. Si S est un espace analytique banachique et f un morphisme de S dans B (K), on peut considérer le morphisme $\delta \circ (f \times I_K) : S \times \mathring{K} \to \mathbf{C}$ comme une section du faisceau $\mathcal{O}_{S \times \mathring{K}}$, qu'on appellera *section associée à f*.

Inversement, soient U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $K \subset U$ un polycylindre, S un espace analytique banachique, h une section de $\mathcal{O}_{S \times U}$; nous allons associer à h un morphisme de S dans B (K). Ceci est assez délicat, et se fera en trois pas, dont le troisième ne sera justifié qu'au § 6, n° 1.

1) *Cas où* S *est lisse*. Dans ce cas, l'application qui à $s \in S$ associe $h_s \in B(K)$ définie par $h_s(x) = h(s, x)$ est analytique. En effet, cette application est continue car h est continue, et pour montrer l'analyticité on se ramène au cas où S est de dimension 1, ce cas pouvant se traiter avec une intégrale de Cauchy.

2) *Germes en* (s, x).

Proposition 3. — *Soient* $S = (S, \Phi)$ *un espace analytique banachique,* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ et (s, x) *un point de* $S \times U$. *Alors*

$$\varinjlim_{K} \Phi_{S,s}(B(K)) = \mathcal{O}_{S \times U,\,(s,x)},$$

la limite inductive étant prise sur les polycylindres K *qui sont des voisinages de x.*

Démonstration. — Pour tout voisinage S′ de s dans S, on a associé à tout morphisme de S′ dans B (K) une section de $\mathcal{O}_{S' \times K}$; en passant à la limite inductive, on obtient une application naturelle

$$\varepsilon : \varinjlim \Phi_{S,s}(B(K)) \to \mathcal{O}_{(S,x)}.$$

Montrons que cette application est bijective. On peut supposer que S est un modèle : $\mu(W, G, g)$.

Surjectivité. Un élément $h \in \mathcal{O}_{S \times U,\,(s,x)}$ peut être prolongé en fonction analytique sur un voisinage $W' \times U'$ de (s, x) dans $W \times U$. Si $K \subset U'$, cette fonction définit une application analytique de W′ dans B (K) (cas 1), qui induit un morphisme de $S' = S \cap W'$ dans B (K). Il est clair que l'image de l'élément correspondant de $\lim \Phi_{S,s}(B(K))$ est h.

Injectivité. Soit f un germe en s de morphisme de S dans B (K); on peut trouver un voisinage W′ de s dans W et une application analytique $\bar{f}$ de W′ dans B (K) induisant f. A l'application $\bar{f}$ est associée une fonction analytique h sur $W' \times \mathring{K}$. Si $\varepsilon(f) = 0$, l'image de cette fonction dans $\mathcal{O}_{S \times U\,(s,x)}$ est nulle, donc il existe un voisinage $W'' \times U'$ de (s, x) dans $W \times U$ et une application λ de $W'' \times U'$ dans $\mathbf{L}(G, \mathbf{C})$ telle que $h = \lambda \cdot g$. Par une généralisation immédiate du cas 1 aux applications à valeurs dans un espace de Banach pour $K' \subset U'$, on associe à λ une application analytique de W″ dans $B(K', \mathbf{L}(G, \mathbf{C}))$; en composant avec l'homomorphisme de Kronecker

$$B(K', \mathbf{L}(G, \mathbf{C})) = B(K') \hat{\otimes}_\varepsilon \mathbf{L}(G, \mathbf{C}) \to \mathbf{L}(G, B(K')),$$

on obtient une application analytique $\tilde{\lambda}$ de W″ dans $\mathbf{L}(G, B(K'))$, et $\rho \circ \bar{f} = \tilde{\lambda} \cdot g$, où $\rho : B(K) \to B(K')$ est la restriction. L'image de $\rho \circ \bar{f}$ dans $\Phi_{S,s}(B(K'))$ est donc nulle, et il en est de même de l'image de f dans $\varinjlim \Phi_{S,s}(B(K))$.

La proposition est démontrée.

3) *Sections de* $\mathcal{O}_{S \times U}$ sur $\{s\} \times K$.

Soient S un espace analytique banachique et s un point de S. Pour tout polycylindre $K \subset \mathbf{C}^n$, nous noterons $B_S(K)$ l'espace vectoriel $\Phi_{S,s}(B(K))$ des germes de morphismes de S dans B (K). Pour tout ouvert de $U \subset \mathbf{C}^n$, posons $\mathcal{B}_S(U) = \varprojlim_{K \subset U} B_S(K)$, limite projective filtrante si U est convexe et de la forme $U_1 \times \ldots \times U_n$. Les $\mathcal{B}_S(U)$ forment un préfaisceau $\mathcal{B}_S$ sur $\mathbf{C}^n$, dont le faisceau associé n'est autre que $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ d'après la proposition 3. Nous verrons (§ 6, n° 1, fin de la démonstration du théorème 1) que le préfaisceau $\mathcal{B}_S$ est un faisceau, d'où $\mathcal{B}_S = \mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$. Une section de $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ sur $\{s\} \times K$, définit donc un élément de $\mathcal{B}_S(U)$, où U est un voisinage de K dans $\mathbf{C}^n$, d'où un élément de $B_S(K)$, i.e. un germe de morphisme de S dans B(K).

Soient maintenant S un espace analytique banachique, U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $K \subset U$ un polycylindre, h une section de $\mathcal{O}_{S \times U}$. Pour tout point s de S, à h est associé un germe de morphisme de S dans B(K); ces germes définissent un morphisme de S dans B(K).

6. LES THÉORÈMES A ET B POUR UN POLYCYLINDRE DE DIMENSION FINIE DANS UN ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

Dans tout ce paragraphe S désignera un espace analytique banachique muni d'un point de base s_0, et U un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Nous nous proposons de démontrer les théorèmes A et B de H. Cartan ([7], [17]) pour un compact $\{s_0\} \times K$, où $K \subset U$ est un polycylindre (cf § 5, n° 1), et pour un faisceau $\mathcal{F}$ qui soit un $\mathcal{O}_{S\times U}$-module admettant localement une résolution finie. On identifiera K à $\{s_0\} \times K$.

1. Le théorème de Dolbeault.

THÉORÈME 1. — *Si* $K \subset U$ *est un polycylindre on a*

$$H^p(\{s_0\} \times K;\ \mathcal{O}_{S\times U}) = 0 \quad pour \quad p > 0.$$

Démonstration. — Pour tout ouvert V de $\mathbf{C}^n$, et pour

$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n,$$

notons $\mathcal{Q}_{i_1,\dots,i_p}(V)$ l'espace vectoriel des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que

$$\frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

soit une fonction continue sur V pour toutes les suites $j_1, \dots, j_q$ telles que

$$1 \leqslant j_1 < \dots < j_q \leqslant n \quad \text{et} \quad \{j_1, \dots, j_q\} \cap \{i_1, \dots, i_p\} = \varnothing.$$

On définit ainsi un faisceau $\mathcal{Q}_{i_1,\dots,i_p}$ sur $\mathbf{C}^n$. Posons

$$\mathcal{Q}^p = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} \mathcal{Q}_{i_1,\dots,i_p}.$$

Si $L = L_1 \times \dots \times L_n \subset \mathbf{C}^n$ est un polycylindre d'intérieur non vide, notons $Q_{i_1,\dots,i_p}(L)$ l'espace de Banach des formes $f.d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$ telles que la distribution

$$\frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}}$$

sur $\mathring{L}$ soit induite par une fonction continue sur L pour toutes les suites $j_1, \dots, j_q$ comme ci-dessus, muni de la norme

$$\sup_{j_1, \dots, j_q} \left\| \frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}} \right\| .$$

Posons encore $Q^p(L) = \bigoplus Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$. On a les propriétés suivantes :

(a) : $$Q_{i_1, \dots, i_p}(L) = Q^{\delta_1}(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon Q^{\delta_n}(L_n),$$

où $\delta_i = 1$ *pour* $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ *et* 0 *sinon.*

Quand on plonge $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ dans $Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$, la norme induite coïncide avec la norme ε sur le produit tensoriel. On peut en effet identifier $Q^1(L_i)$ à $\mathcal{C}(L_i)$ et plonger $Q^0(L_i)$ dans $\mathcal{C}(L_i) \oplus \mathcal{C}(L_i)$ par $f \mapsto \left(f, \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}\right)$. Or on sait que si E′ est un sous-espace d'un espace normé E muni de la norme induite, $E' \otimes_\varepsilon F$ est un sous-espace de $E \otimes_\varepsilon F$ muni de la norme induite et que $\mathcal{C}(L) = \mathcal{C}(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(L_n)$.

D'autre part $Q^{\delta_1}(L_1) \otimes \dots \otimes Q^{\delta_n}(L_n)$ est dense dans $Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$, comme on le voit en approchant f d'abord par une fonction f_t définie au voisinage de L par $f_t(x) = f(ta + (1 - t)x)$, a étant un point intérieur à L, puis par un polynôme en les z_i et $\bar{z}_i$ par régularisation. Ceci démontre la propriété (a).

(b) : *On a une suite exacte directe*

$$0 \to B(L) \to Q^0(L) \xrightarrow{d''} \dots \to Q^n(L) \to 0.$$

L'application $d'' : Q^0(L_i) \to Q^1(L_i)$ a pour noyau l'espace $B(L_i)$ défini à l'exposé précédent. En définissant $s : Q^1(L_i) \to Q^0(L_i)$ par $s(f \cdot d\bar{z}_i) = \varphi * f$, où $\varphi(z) = \dfrac{1}{\pi z}$ et où f est prolongée par 0 sur $\mathbf{C} - L_i$, on a $d'' \circ s = I$. Le complexe $Q^\bullet(L_i)$ est donc direct et a pour cohomologie

$$H^0(Q^\bullet(L_i)) = B(L_i), \quad H^1(Q^\bullet(L_i)) = 0.$$

La formule de Künneth [10] montre que le complexe

$$Q^\bullet(L) = Q^\bullet(L_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon Q^\bullet(L_n)$$

[10] Si P'_* et P''_* sont des complexes directs d'espaces de Banach, $P_* = P'_* \hat{\otimes}_\varepsilon P''_*$ est un complexe direct et $H(P_*) = H(P'_*) \hat{\otimes}_\varepsilon H(P''_*)$. Ceci résulte du fait que tout complexe direct est somme directe de complexes de la forme

$$\dots \to 0 \to E_i \overset{\approx}{\to} E_{i-1} \to 0 \to \dots$$

ou

$$\dots \to 0 \to E_i \to 0 \to \dots .$$

est direct et acyclique en degrés > 0, et que

$$H^0(Q^*(L)) = B(L_1)\,\hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon B(L_n) = B(L),$$

ce qui démontre la propriété (b).

(c) *Pour tout ouvert* $V \subset \mathbf{C}^n$, *on a* $\mathcal{Q}^p(V) = \varprojlim Q^p(L)$, la limite projective étant prise sur les polycylindres d'intérieur non vide contenus dans V, limite projective filtrante si V est un ouvert convexe de la forme $V_1 \times \dots \times V_n$.

(d) *Si* $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset U$ *est un polycylindre, on a*

$$H^0(K\,;\mathcal{Q}^p) = \varinjlim Q^p(L),$$

limite inductive sur les polycylindres L qui sont des voisinages de K dans U.

Faisons maintenant intervenir S. Notons $Q^p_S(L)$ (resp. $B_S(L)$) l'espace vectoriel des germes en s_0 de morphismes de S dans $Q^p(L)$ (resp. $B(L)$). Il résulte de la propriété (b) qu'on a une suite exacte

$$0 \to B_S(L) \to Q^0_S(L) \to \dots \to Q^n_S(L) \to 0.$$

Définissons $\mathcal{Q}^p_S(V)$ par $\mathcal{Q}^p_S(V) = \varprojlim Q^p_S(L)$ comme dans la propriété (c). On vérifie en utilisant des partitions différentiables de l'unité sur $\mathbf{C}^n$ que le préfaisceau $\mathcal{Q}^p_S$ ainsi défini est un faisceau ([11]).

Pour tout V, $\mathcal{B}_S(V) = \varprojlim B_S(L)$ est noyau de $\mathcal{Q}^0_S(V) \to \mathcal{Q}^1_S(V)$. Par suite le préfaisceau $\mathcal{B}_S$, préfaisceau noyau d'un homomorphisme de faisceaux, est un faisceau. La promesse faite au § 5, n° 2 est tenue. Comme on l'a vu audit lieu, ceci entraîne que le faisceau $\mathcal{B}_S$ s'identifie à $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$, restreint à $\{s_0\} \times \mathbf{C}^n$.

On a encore $H^0(K\,;\mathcal{Q}^p_S) = \varinjlim Q^p_S(L)$ comme dans la propriété (d), et $\mathcal{O}_{S\times U}(K) = \varinjlim B_S(L)$. Par passage à la limite inductive, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^0(K\,;\mathcal{O}_{S\times U}) \to H^0(K\,;\mathcal{Q}^0_S) \to \dots \to H^0(K\,;\mathcal{Q}^n_S) \to 0.$$

En remplaçant K par un espace réduit à un point, on voit que cette suite exacte correspond à une suite exacte de faisceaux sur K, qui forment une résolution fine de $\mathcal{O}_{S\times U}$, et ceci démontre le théorème.

[11] Tout préfaisceau fin ϕ tel que $\phi(V) = \varprojlim_{W \subset\subset V} \phi(W)$ est un faisceau.

COROLLAIRE 1. — *Si* $\mathcal{F}$ *est un* $\mathcal{O}_{S\times U}$*-module admettant une résolution finie sur* K (i.e. *une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \to 0 \text{ avec } \mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S\times U}^{r_i}),$$

on a $H^q(K\,;\mathcal{F}) = 0$ *pour* $q > 0$ *et la suite*

$$0 \to H^0(K\,;\mathcal{L}_p) \to \dots \to H^0(K\,;\mathcal{L}_0) \to H^0(K\,;\mathcal{F}) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. — D'après la proposition, $H^q(K\,;\mathcal{L}_i) = 0$ pour $q > 0$. Posons $\mathcal{F}_i = \operatorname{Im} d_i$. La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{L}_i \to \mathcal{F}_i \to 0$$

donne

$$H^q(K\,;\mathcal{F}_i) \approx H^{q+1}(K\,;\mathcal{F}_{i+1})$$

pour $q > 0$, d'où

$$H^q(K\,;\mathcal{F}) \approx H^{q+p+1}(K\,;\mathcal{F}_{p+1}) = 0.$$

La deuxième assertion en découle.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *deux* $\mathcal{O}_{S\times U}$*-modules admettant des résolutions finies* $\mathcal{L}'_*$ *et* $\mathcal{L}''_*$ *sur* K.

(a) *Pour tout homomorphisme* f *de* $\mathcal{F}'$ *dans* $\mathcal{F}''$, *il existe un homomorphisme de* $\mathcal{L}'_*$ *dans* $\mathcal{L}''_*$ *au-dessus de* f, *unique à homotopie* (*algébrique*) *près.*

(b) *Pour toute suite exacte* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$, *il existe une résolution finie* $\mathcal{L}_*$ *de F telle que*

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}'_i \otimes \mathcal{L}''_i$$

et que

$$d_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}$$

soit de la forme

$$\begin{vmatrix} d'_i & u \\ 0 & d''_i \end{vmatrix}$$

Compte tenu du corollaire 1, la démonstration est analogue à celle de deux théorèmes classiques d'algèbre homologique (Godement, Théorie des faisceaux, Ch. 1, Théorèmes 5.1.1 et 5.1.2).

2. Le théorème des matrices holomorphes.

Soit $L = L_1 \times \ldots \times L_n \subset \mathbf{C}^n$ un polycylindre d'intérieur non vide, et soient L_1' et L_1'' deux compacts convexes de $\mathbf{C}$ tels que

$$L_1 = L_1' \cup L_1'', \quad \overline{L_1 - L_1'} \cap \overline{L_1 - L_1''} = \emptyset.$$

Posons

$$L_1''' = L_1' \cap L_1''; \quad L' = L_1' \times L_2 \times \ldots \times L_n,$$

définissons de même L'' et L'''.

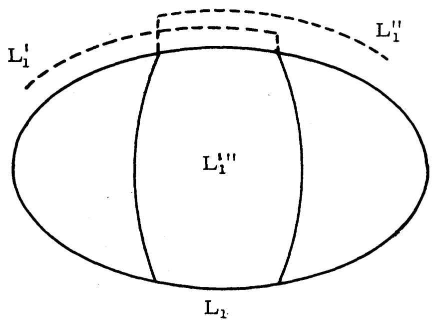

FIG. 1

PROPOSITION 1. — *On a une suite exacte directe :*

$$0 \to B(L) \xrightarrow{\alpha} B(L') \oplus B(L'') \xrightarrow{\beta} B(L''') \to 0,$$

où

$$\alpha(f) = (f|_{L'}, f|_{L''}) \text{ et } \beta(f', f'') = f''|_{L'''} - f'|_{L'''}.$$

Démonstration. — Vu la proposition 2 du § 5, il suffit de montrer qu'on a une suite exacte directe

$$0 \to B(L_1) \xrightarrow{\alpha} B(L_1') \oplus B(L_1'') \xrightarrow{\beta} B(L_1''') \to 0.$$

Construisons une application linéaire continue :

$$\sigma : (L_1''') \to B(L_1') \oplus (L_1'')$$

telle que $\beta \circ \sigma = I$. Soit η une fonction continûment $\mathbf{R}$-différentiable sur $\mathbf{C}$, égale à 0 sur $L_1 - L_1''$ et à 1 sur $L_1 - L_1'$, et posons $\theta = \dfrac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}$.

L'application σ définie par $\sigma(h) = (\varphi * (\theta h) - \eta h\ ,\ \varphi * (\theta h) + (1 - \eta)\, h)$, où $\varphi(z) = \dfrac{1}{\pi z}$ et où θh est prolongée par 0 en dehors de L_1''', répond à la question. Comme Ker $\beta = B(L_1)$, ceci démontre la proposition.

Soit A une algèbre de Banach, G le groupe des éléments inversibles de A; notons B (L ; G) l'ensemble des $f \in B(L\,;A)$ telles que $f(L) \subset G$, c'est-à-dire le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Banach B (L ; A). L'ensemble B (L ; G) est ouvert dans B (L ; A) et est un groupe de Lie banachique.

PROPOSITION 2. — *L'application* γ *de* $B(L'\,;G) \times B(L''\,;G)$ *dans* $B(L'''\,;G)$ *définie par* $\gamma(f', f'') = f'' \big|_{L'''} f'^{-1} \big|_{L'''}$ *est une submersion directe surjective.*

Démonstration.

(a) γ *est une submersion directe :* l'application linéaire tangente

$$T_{(f',f'')}(\gamma) : B(L'\,;A) \oplus B(L''\,;A) \to B(L'''\,;A)$$

est égale à

$$\delta_{f'}^{-1} \circ \sigma_{f''} \circ \beta \circ (\sigma_{f'}^{-1} \oplus \sigma_{f''}^{-1})\,,$$

où $\sigma_{f'}$ (resp. $\delta_{f'}$) est la multiplication à gauche (resp. à droite) par f' ou par $f' \big|_{L'''}$ et de même pour f'', et où β est l'application définie dans la proposition 1. Comme β est un épimorphisme direct d'après la proposition 1 et que les autres sont des isomorphismes, γ est une submersion directe.

(b) γ *est surjective.*

LEMME. — *L'application de restriction* $\rho : B(L''\,;G) \to B(L'''\,;G)$ *a une image dense.*

Démonstration du lemme. — D'après le Théorème de Runge, l'application de restriction $\rho_1 : B(L_1'') \to B(L_1''')$ a une image dense. Il en est donc de même de

$$\rho = \rho_1 \otimes I_{B\,(L_2 \times \ldots \times L_n)} \otimes I_A : B(L''\,;A) \to (B'''\,;A).$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(L'';A) & \overset{\exp}{\to} & B(L'';G) \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & {\scriptstyle\rho}\downarrow \\ B(L''';A) & \overset{\exp}{\to} & B(L''';G) \end{array}$$

montre que l'adhérence H de ρ (B (L'' ; G)) dans B (L''' ; G) contient l'image de B (L''' ; A) par exp, donc est un voisinage de 0. Comme H est un sous-groupe de B (L''' ; G), H est ouvert et fermé.

Soit a un point de L'''. Pour tout $h \in$ B (L'''; G), la famille $(h_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ définie par $h_t(x) = h(tx + (1 - t)a)$ est un chemin qui mène de l'application constante $h(a)$ à h dans B (L''' ; G). Donc toute composante connexe de B (L'''; G) contient une application constante, et toute application constante appartenant à H, on a H = B (L''' ; G), ce qui démontre le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 2. — Comme γ est une submersion, l'image de γ contient un voisinage ouvert W de 1 dans B(L''';G). Soit $h \in$ B (L''' ; G); d'après le lemme, il existe un $h'' \in$ B(L'';G) tel que $\rho(h'') \in h \cdot W^{-1}$. On a donc $h = \rho(h'')\,w$, où $w \in$ W se met sous la forme $\gamma(f', f'')$, d'où

$$h = \rho(h'') \cdot \gamma(f', f'') = \gamma(f', h'' f''),$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque. — On pourrait, dans la proposition 2, remplacer G par un groupe de Lie banachique quelconque. Nous ne l'avons pas fait pour éviter d'avoir à décrire la structure de groupe de Lie banachique sur B (L ; G).

COROLLAIRE. — *Notons* B_S (L' ; G) *l'ensemble des germes en* s_0 *de morphismes de* S *dans* B (L' ; G), *et de même pour* L'', L'''. *L'application* γ_S *de* B_S (L' ; G) $\times$ B_S (L'' ; G) *dans* B_S (L''' ; G) *induite par* γ *est surjective.*

Démonstration. — Soit $h \in B_S$ (L''' ; G). D'après la proposition 2, on peut trouver une section locale de γ au voisinage de $h_0 = h(s_0)$, c'est-à-dire une application analytique σ : W $\to$ B (L' ; G) $\times$ B (L'' ; G), où W est un voisinage de h_0 dans B (L''' ; G), telle que $\gamma \circ \sigma = I$. En posant $f = \sigma \circ h$, on a $h = \gamma_S(f)$, d'où le corollaire.

Soit maintenant $K = K_1 \times \ldots \times K_n \subset U$ un polycylindre et soient K_1' et K_1'' deux compacts convexes de $\mathbf{C}$ tels que $K_1 = K_1' \cup K_1''$. Posons $K_1''' = K_1' \cap K_1''$, $K' = K_1' \times K_2 \times \ldots \times K_n$, et définissons de même K'' et K'''. En notant $\Phi_{S \times U}$ le foncteur structural de $S \times U$, et G gardant la même signification ($\Phi_{S\times U}(G)$ est donc le faisceau des morphismes d'ouverts de $S \times U$ dans G), on a :

Théorème 2. [4]. — *L'application* γ *de*

$$H^0(K' ; \Phi_{S\times U}(G)) \times H^0(K'', \Phi_{S\times U}(G))$$

dans $H^0(K''' ; \Phi_{S\times U}(G))$ *définie par*

$$\gamma(f', f'') = f''\,|_{K'''}\, f'^{-1}\,|_{K'''}$$

est surjective.

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $L_i(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in \mathbf{C}$ tels que $d(x, K_i) \leqslant \varepsilon$, où $d(x, K_i)$ est la distance de x à K_i; notons $L_1(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in L_1(\varepsilon)$ tels que $d(x, K_1') \leqslant 2\varepsilon$, définissons de même $L_1''(\varepsilon)$; et définissons $L(\varepsilon)$, $L'(\varepsilon)$, $L''(\varepsilon)$ $L'''(\varepsilon)$ comme plus haut.

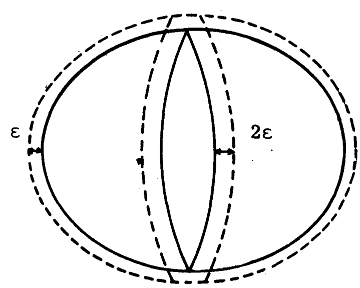

Fig. 2

On est dans les conditions d'application des propositions 1 et 2 et du corollaire d'icelle. Les ensembles $L'(\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de K' dans $\mathbf{C}^n$, donc on a

$$H^0(K' ; \Phi_{S\times U}(G)) = \varinjlim B_S(L'(\varepsilon), G)$$

et de même pour K'' et K'''. Le Théorème 2 se déduit donc du corollaire de la proposition 2 par passage à la limite inductive.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_{S\times U}$*-module. Si* $\mathcal{F}|_{K'}$ *et* $\mathcal{F}|_{K''}$ *sont libres de type fini, il en est de même de* $\mathcal{F}|_{K}$.

Démonstration. — On peut supposer K′ et K″ non vides; comme K est connexe, il en est de même de K‴, donc $\mathcal{F}|_{K'}$ et $\mathcal{F}|_{K''}$ ont même rang r. En écrivant $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{S\times U}$, le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{K}$ s'identifie à $H^0(K; \Phi_{S\times U}\, \mathbf{GL}(\mathbf{C}, n))$, et de même pour K′, K″, K‴. Soient g' et g'' des isomorphismes de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ au-dessus de K′ et K″ respectivement. D'après le théorème 2, l'automorphisme $h = g''^{-1} \circ g'$ de $\mathcal{O}^r|_{K'''}$ se met sous la forme

$$f''|_{K'''} \circ f'^{-1}|_{K'''}$$

où f' et f'' sont des automorphismes de $\mathcal{O}^r|_{K'}$ et $\mathcal{O}^r|_{K''}$ respectivement. Les isomorphismes $g' \circ f'$ et $g'' \circ f''$ de $\mathcal{O}^r$ sur $\mathcal{F}$ définis au-dessus de K′ et K″ respectivement coïncident sur K‴, donc se recollent en un isomorphisme de $\mathcal{O}^r|_{K}$ sur $\mathcal{F}|_{K}$, ce qui démontre le corollaire.

3. Les théorèmes A et B.

THÉORÈMES 3. — *Soit* $K \subset U$ *un polycylindre et soit* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_{S\times U}$ *-module. On suppose que pour tout point* $x \in K$, *le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur un voisinage de* x.

(A) *Le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur* K;

(B) *On a* $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

Soit $K = K_1 \times \ldots \times K_n$. Considérons d'abord un cas particulier.

LEMME. — *Soient* K_1' *et* K_1'' *deux compacts convexes de* $\mathbf{C}$ *tels que* $K_1 = K_1' \cup K_1''$. *Posons* $K' = K_1' \times K_2 \times \ldots \times K_n$, *définissons de même* K″. *Si le faisceau* $\mathcal{F}$ *admet une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur* K′ *et sur* K″, *il admet aussi une résolution finie de longueur* $\leqslant p$ *sur* K.

Démonstration par récurrence sur p. — Pour $p = 0$, le lemme se réduit au corollaire du Théorème 2. Soit $p \geqslant 1$, et supposons le lemme démontré pour $p - 1$. Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ au-dessus de K′ et K″ respectivement. D'après le corollaire 2 du théorème 1, il existe des homomorphismes $f : \mathcal{L}'_* \to \mathcal{L}''_*$ et $g : \mathcal{L}''_* \to \mathcal{L}'_*$ au-dessus de $\mathrm{I}_{\mathcal{F}}$ définis sur $\mathrm{K}''' = \mathrm{K}' \cap \mathrm{K}''$. Au-dessus de K‴, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[drr, "(\varepsilon', 0)"] & & \\
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[u, "\tilde{g}", "\approx"'] \arrow[d, "\tilde{f}"', "\approx"] \arrow[rr, phantom, "(\varepsilon', \varepsilon'')"] & & \mathcal{F} \\
\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 \arrow[urr, "(0, \varepsilon'')"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{f} = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ f_0 & \mathrm{I} \end{vmatrix}$ et $\tilde{g} = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & g_0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{vmatrix}$. On peut étendre $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$ en des faisceaux libres sur K, que nous noterons encore $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}''_0$. Soient $\mathcal{L}_0$ le faisceau localement libre sur K obtenu en recollant $\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0$ à $|\mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0|_{\mathrm{K}''}$ au moyen de $\tilde{f} \circ \tilde{g}^{-1}$ et $\varepsilon : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}$ l'homomorphisme surjectif obtenu en recollant $(\varepsilon', 0)$ et $(0, \varepsilon'')$. Il résulte du corollaire du Théorème 2 que $\mathcal{L}_0$ est libre. Posons $\mathcal{F}_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon$; on a

$$\mathcal{F}_1\big|_{\mathrm{K}'} \approx \mathcal{F}'_1 \oplus \mathcal{L}'' \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_1\big|_{\mathrm{K}''} \approx \mathcal{L}' \oplus \mathcal{F}''_1,$$

où $\mathcal{F}'_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon'$ et $\mathrm{F}''_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon''$. Le faisceau $\mathcal{F}_1$ admet donc une résolution de longueur $\leqslant p - 1$ sur K′ et sur K″, et il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'il admet une résolution de longueur $\leqslant p - 1$ sur K. On obtient ainsi une résolution de longueur $\leqslant p$ de $\mathcal{F}$ sur K, ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème. — Soit $\mathcal{W} = (\mathrm{W}_\alpha)$ un recouvrement ouvert de K tel que $\mathcal{F}$ admette une résolution finie de longueur $\leqslant p$ sur chacun des W_α. Identifions $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{R}^{2n}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que la trace sur K de tout cube de côté ε de $\mathbf{R}^{2n}$ soit contenue dans l'un des W_α. Montrons, par récurrence sur m, que si $\mathrm{H} = \mathrm{K} \cap (\mathrm{C} \times \mathbf{R}^m)$, où $\mathrm{C} \subset \mathbf{R}^{2n-m}$ est un cube de côté ε, le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution finie de longueur $\leqslant p$ sur H. Cette propriété est vraie pour $m = 0$, car alors $\mathrm{H} \cap \mathrm{C}$ est contenu dans l'un des W_α. Supposons la propriété vraie pour $m - 1$; on peut mettre H sous la forme $H_1 \cup \ldots \cup H_k$,

$$H_i = K \cap (C_i \times \mathbf{R}^{m-1}),$$

où

$$C_i = C \times [b + (i - 1)\,\varepsilon, b + i\varepsilon] \subset \mathbf{R}^{2n-m+1}$$

est un cube de côté ε. Le lemme montre par récurrence sur i que $\mathcal{F}$ admet une résolution finie de longueur $\leqslant p$ sur $H_1 \cup \ldots \cup H_i$, donc sur H. Faisant $m = 2n$, on obtient (A). Le corollaire 1 du théorème 1 donne (B) et le théorème est démontré.

7. LE THÉORÈME DES VOISINAGES PRIVILÉGIÉS

Dans ce paragraphe, nous décrivons deux notions : celle de polycylindre privilégié et celle de voisinage privilégié d'un point. Nous ne nous servirons dans la suite que de la première. Les voisinages privilégiés ont été introduits, avec une définition un peu moins restrictive, par H. Cartan [5], [12]. Le plan suivi ici est dû à B. Malgrange.

Nous utiliserons les résultats classiques suivants sur les faisceaux analytiques cohérents sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$:

(a) *Pour qu'un faisceau analytique sur* U *soit cohérent, il faut et il suffit qu'il admette localement une résolution finie de longueur* $\leqslant n$ (Théorème des syzygies [7], [17] et théorème d'Oka [19]).

(b) Les théorèmes A et B pour un polycylindre (Théorème 3 du § 6 dans le cas où S est un point, cas légèrement plus facile et beaucoup plus classique [7], [17]).

Pour lire ce paragraphe, il suffit d'avoir lu le n° 1 du § 5 et d'admettre la proposition 3 du § 2 dans le cas où X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

Nous pourrions éviter d'admettre le théorème des syzygies, qui apparaîtrait alors comme une conséquence du théorème d'existence des voisinages privilégiés. La démonstration de celui-ci consiste d'ailleurs à reprendre, en la précisant, une démonstration possible du théorème des syzygies. D'autre part, sauf pour la proposition 4 (qui n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème), il suffirait du théorème 1 du § 6 dans le cas où S est un point au lieu du Théorème 3 dudit paragraphe.

1. Polycylindres et voisinages privilégiés.

Soient U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $K \subset U$ un polycylindre; notons $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur U et soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U. Posons $\mathcal{F}(K) = H^0(K; \mathcal{F})$; c'est un $\mathcal{O}(K)$-module admettant une résolution finie (Corollaire 1 du Théorème 1 du § 6).

On posera $B(K; \mathcal{F}) = B(K) \otimes_{\mathcal{O}(K)} \mathcal{F}(K)$. En particulier,

$$B(K; \mathcal{O}^r) = B(K)^r$$

La topologie (non nécessairement séparée) obtenue sur $B(K; \mathcal{F})$ en prenant une résolution

$$0 \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

et en identifiant $B(K; \mathcal{F})$ à Coker $(B(K; \mathcal{L}_1) \to B(K; \mathcal{L}_0))$ ne dépend pas du choix de la résolution. Cela résulte du corollaire 2, (a), du Théorème 1 du § 6. Nous munirons désormais $B(K; \mathcal{F})$ de cette topologie.

DÉFINITION 1. — *On dira que* K *est privilégié pour* $\mathcal{F}$ *(ou* $\mathcal{F}$*-privilégié) s'il existe une résolution*

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ *au voisinage de* K *telle que*

$$0 \to B(K; \mathcal{L}_p) \to \dots \to B(K; \mathcal{L}_1) \to B(K; \mathcal{L}_0)$$

soit une suite exacte directe.

Remarques. — 1) Si K est $\mathcal{F}$-privilégié, $B(K; \mathcal{F})$ est un espace de Banach. C'est seulement dans ce cas qu'il est intéressant de considérer $B(K; \mathcal{F})$.

2) Il résulte du théorème des syzygies, du théorème 3 A du § 6 et de la proposition 2 ci-dessous que l'on peut prendre $p = n$ dans la définition 1. Si l'on voulait déduire le théorème des syzygies du théorème des voisinages privilégiés, il faudrait exiger $p = n$ dans la définition 1.

PROPOSITION 1. — *Pour que* K *soit* $\mathcal{F}$*-privilégié, il faut et il suffit que :*

(i) $B(K; \mathcal{F})$ *soit séparé,*

(ii) *pour tout espace de Banach* E, *on ait*

$$\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K}))\otimes_{\mathcal{O}(\mathrm{K})}\mathcal{F}(\mathrm{K})=\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F}))$$

et

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}(\mathrm{K})}(\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K})),\mathcal{F}(\mathrm{K}))=0$$

pour $q>0$.

Démonstration. — Si K est $\mathcal{F}$-privilégié, $\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F})$ est un espace de Banach et il existe une résolution $0\to\mathcal{L}_n\to\ldots\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{F}\to 0$ de $\mathcal{F}$ au voisinage de K, donnant une résolution de $\mathcal{O}(\mathrm{K})$-module $\mathcal{F}(\mathrm{K})$, telle que $0\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_p)\to\ldots\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_0)\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F})\to 0$ soit une suite exacte directe. Pour tout espace de Banach E,

$$0\to\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_p))\to\ldots\to\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_0))\to\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F}))\to 0$$

est alors une suite exacte, d'où (ii).

Si (i) et (ii) sont vérifiées, pour toute résolution

$$0\to\mathcal{L}_p\to\ldots\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{F}\to 0 \text{ de } \mathcal{F} \text{ au voisinage de K,}$$

$$0\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_p)\to\ldots\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_0)\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F})\to 0$$

est une suite exacte (prendre $\mathrm{E}=\mathbf{C}$) d'espaces de Banach, qui reste exacte quand on lui applique le foncteur $\mathrm{F}\to\mathbf{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$; c'est donc une suite exacte directe.

La proposition 1 est démontrée. La démonstration donne également :

PROPOSITION 2. — *Si* K *est $\mathcal{F}$-privilégié, pour* toute *résolution finie*

$$0\to\mathcal{L}_p\to\ldots\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{F}\to 0 \textit{ de } \mathcal{F} \textit{ sur } \mathrm{K},$$

$0\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_p)\to\ldots\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{L}_0)\to\mathrm{B}(\mathrm{K}\,;\mathcal{F})\to 0$ *est une suite exacte directe.*

DÉFINITION 2. — *Soit x un point de* U. *On dira que* K *est un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de x si :*

(a) K *est un voisinage de x*;

(b) K *est $\mathcal{F}$-privilégié*;

(c) *l'application naturelle* $\mathrm{B}(\mathrm{K},\mathcal{F})\to\mathcal{F}_x$ *est injective.*

2. Propriétés élémentaires.

PROPOSITION 3. — *Soit* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur* U.

(a) *Si* K *est privilégié pour* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$, *il l'est aussi pour* $\mathcal{F}$, *et*

$$0 \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}') \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}) \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}'') \to 0$$

est une suite exacte directe.

(b) *Soit* x *un point de* U; *si* K *est un voisinage privilégié de* x *pour* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$, *il l'est aussi pour* $\mathcal{F}$.

Démonstration. — (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de longueur n de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement, et soit $\mathcal{L}_*$ une résolution de $\mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions du corollaire 2, (b) du théorème 1 du § 6. On a une suite exacte de complexes $0 \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{L}'_*) \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{L}_*) \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{L}''_*) \to 0$. Les deux extrêmes étant acycliques en degré > 0, il en est de même de celui du milieu. On vérifie par récurrence descendante sur i que si S'_i et S''_i sont des supplémentaires de $\mathrm{Im}\, d'_{i+1}$ et $\mathrm{Im}\, d''_{i+1}$, alors $\mathrm{S}_i = \mathrm{S}'_i \oplus \mathrm{S}''_i$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, d_{i+1}$, ce qui montre que les d_i sont directs. Enfin S_0, S'_0 et S''_0 s'identifient respectivement à $\mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F})$, $\mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}')$ et $\mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}'')$.

(b) Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}') & \to & \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}) & \to & \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathcal{F}'') & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \varepsilon'}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon''}\downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}'_x & \to & \mathcal{F}_x & \to & \mathcal{F}''_x & \to & 0, \end{array}$$

si ε' et ε'' sont injectives, il en est de même de ε, d'où la proposition.

PROPOSITION 4. — *Soit* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur* U.

(a) *Si* K *est privilégié pour* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}''$, *il l'est aussi pour* $\mathcal{F}'$.

(b) *Si* K *est un voisinage privilégié de* x *pour* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}''$, *il l'est aussi pour* $\mathcal{F}'$.

Démonstration. — a) La condition (ii) de la proposition 1 appliquée à $\mathcal{F}''$ avec $E = \mathbf{C}$ donne $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}(K)}(B(K), \mathcal{F}''(K)) = 0$. Par suite l'application $B(K; \mathcal{F}') \to B(K; \mathcal{F})$ est injective, et comme $B(K; \mathcal{F})$ est séparé, $B(K; \mathcal{F}')$ est séparé. La suite exacte des Tor donne la deuxième partie de la condition (ii) pour $\mathcal{F}'$, et montre que, pour tout E,

$$\mathbf{L}(E; B(K)) \otimes_{\mathcal{O}(K)} \mathcal{F}'(K)$$

est le noyau de

$$\mathbf{L}(E; B(K; \mathcal{F})) \to \mathbf{L}(E; B(K; \mathcal{F}'')).$$

L'espace $B(K; \mathcal{F}')$ étant séparé est un espace de Banach, et la suite $0 \to B(K; \mathcal{F}') \to B(K; \mathcal{F}) \to B(K; \mathcal{F}'') \to 0$ étant exacte, ce noyau s'identifie à $\mathbf{L}(E; B(K; \mathcal{F}'))$, d'où la condition (ii) pour $\mathcal{F}'$. La proposition 1 donne (a).

b) Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B(K; \mathcal{F}') & \to & B(K; \mathcal{F}) \\ {\scriptstyle \varepsilon'}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}'_x & \longrightarrow & \mathcal{F}_x \end{array}$$

l'injectivité de ε' découle de celle des trois autres applications. La proposition est démontrée.

DÉFINITION 3. — *Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme de faisceaux analytiques cohérents sur* U. *On dira que* K *est privilégié* (*resp. est un voisinage privilégié de x*) *pour f s'il est privilégié* (*resp. est un voisinage privilégié de x*) *pour* Ker f, Im f *et* Coker f, *ou ce qui revient au même en vertu des propositions* 3 *et* 4, *pour* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *et* Coker f.

PROPOSITION 5. — *Soit* $U = U' \times U''$, *où* $U' \subset \mathbf{C}^{n'}$, $U'' \subset \mathbf{C}^{n''}$, $n' + n'' = n$, *et* $K = K' \times K''$. *Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ des faisceaux analytiques cohérents sur* U' *et* U'' *respectivement. Considérons le faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur* U *défini par*

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}'_{x'} \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} \mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}''_{x''}} \mathcal{F}''_{x''}$$

pour $x = (x', x'')$,

où $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ sont les faisceaux de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^{n'}$ *et* $\mathbf{C}^{n''}$ *respectivement.*

(a) *Si* K′ *est* $\mathcal{F}'$*-privilégié et si* K″ *est* $\mathcal{F}''$*-privilégié,* K *est* $\mathcal{F}$*-privilégié et* $B(K\,;\mathcal{F}) = B(K'\,;\mathcal{F}')\,\hat{\otimes}_\varepsilon B(K''\,;\mathcal{F}'')$.

(b) *Si* K′ *et* K″ *sont des voisinages privilégiés de* x' *et* x'' *respectivement,* K *est un voisinage privilégié de* $x \doteq (x', x'')$.

Démonstration. — (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions finies de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ respectivement; $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'_* \otimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}''} \mathcal{L}''_*$ est une résolution finie de $\mathcal{F}$ et $B(K\,;\mathcal{L}_*) = B(K'\,;\mathcal{L}'_*)\,\hat{\otimes}_\varepsilon B(K''\,;\mathcal{L}''_*)$. Il suffit donc d'appliquer la formule de Künneth (cf. § 6, n° 1, note 10, p. 46).

Nous n'utiliserons la partie (b) que dans le cas trivial où $\mathcal{F}' = \mathcal{O}'/m'$, m' désignant l'idéal maximal du point x'. Indiquons cependant la démonstration : notons F'_k la fibre en x' de $\mathcal{F}'/m'^{k+1}\mathcal{F}'$, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$; soient $p'_k : B(K', \mathcal{F}') \to F'_k$ l'application canonique et

$$p_k = p'_k\,\hat{\otimes}_\varepsilon I_{B(K''\,;\mathcal{F}'')} : B(K\,;F) \to F'_k \otimes B(K''\,;F'').$$

Si $f \in B(K\,;\mathcal{F})$ et $f_x = 0$, on a $(p_k(f))_{x''} = 0$, donc $p_k(f) = 0$ pour tout k, et $f \in \bigcap_k \operatorname{Ker} p_k$. Quand on a des espaces de Banach B′, B″, $B = B' \otimes_\varepsilon B''$, F, et une application linéaire $p' : B' \to F$, on a

$$\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Ker} p')\,\hat{\otimes}_\varepsilon B'',$$

en posant $p = p'\,\hat{\otimes}_\varepsilon I_{B''}$,

comme on le voit en plongeant $B' \otimes_\varepsilon B''$ dans $\mathbf{L}(B''^*\,;B')$.

On a donc ici :

$$\bigcap_k \operatorname{Ker} p_k \subset (\bigcap_k \operatorname{Ker} p_k)\,\hat{\otimes}_\varepsilon B(K''\,;\mathcal{F}'')\,;$$

or $\bigcap_k \operatorname{Ker} p'_k = 0$ en vertu de l'hypothèse sur K′ et du Théorème de Krull-Artin-Rees [12] qui assure que l'application $\mathcal{F}'_x \to \varprojlim F'_k$ est injective. Il en résulte que $f = 0$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. — *Soient* $K = K' \times K''$ *et* x' *un point intérieur à* K′ ; *notons* $\mathfrak{m}'$ *l'idéal de* $\mathcal{O}'$ *formé des fonctions nulles en* x'. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* K *tel que* $\mathfrak{m}'\mathcal{F} = 0$; *notons* $\mathcal{F}_0$ *le faisceau induit par* $\mathcal{F}$ *sur* U″ *au moyen de l'injection* $i_{x'}$ *de* U″ *dans* U.

[12] Le recours à ce théorème pourrait être évité en remplaçant $\mathcal{F}_x$ par $\hat{\mathcal{F}}_x = \varprojlim \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x^k\,\mathcal{F}_x$ dans la définition 2.

(a) *Si* K″ *est* $\mathcal{F}_0$*-privilégié,* K *est* $\mathcal{F}$*-privilégié;*

(b) *Si* K″ *est un voisinage* $\mathcal{F}_0$*-privilégié de* x'', K *est un voisinage* $\mathcal{F}$*-privilégié de* $x = (x', x'')$.

Démonstration. — On a

$$\mathcal{F} = C_{x'} \otimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}''} \mathcal{F}_0 ,$$

où $C_{x'} = \mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$. Le corollaire résulte donc de la proposition et du fait que K′ est un voisinage $C_{x'}$-privilégié de x'. Grâce à la proposition, il suffit de vérifier ce fait quand $n' = 1$. Dans ce cas, le principe du maximum montre qu'on a une suite exacte directe

$$0 \to B(K') \xrightarrow{\zeta} (B(K')) \to \mathbf{C} \to 0,$$

où ζ est la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par $\zeta(y) = y - x'$.

3. Platitude et privilège.

Soient U′ et U″ des ouverts de $\mathbf{C}^{n'}$ et $\mathbf{C}^{n''}$ respectivement, et $U = U' \times U'' \subset \mathbf{C}^n$, $n = n' + n''$. Notons $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ les faisceaux de fonctions holomorphes sur U, U′ et U″, notons π la projection de U sur U′, et pour tout $x' \in U'$, notons $i_{x'}$ l'injection de U″ dans U définie par $i_{x'}(x'') = (x', x'')$.

Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$, pour tout polycylindre $K'' \subset U''$, on notera $B(K'' ; \mathcal{L})$ le fibré trivial sur U′ de fibre $B(K'')^r$.

Si F est un fibré vectoriel banachique trivial sur U′ de fibre F_0, on écrira $B(K' ; F)$ au lieu de $B(K' ; F_0)$ pour $K' \subset U'$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U, *plat* sur U′ (i.e. tel que pour tout $x = (x', x'') \in U$, $\mathcal{F}_x$ soit un $\mathcal{O}'_{x'}$-module plat). Pour tout point $x' \in U'$, on notera $\mathcal{F}(x')$ le faisceau analytique cohérent sur U″ défini par

$$\mathcal{F}(x')_{x''} = \mathcal{O}''_{x''} \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} \mathcal{F}(x),$$

où $x = (x', x'')$, $\mathcal{O}''_{x''}$ étant considéré comme $\mathcal{O}_x$-algèbre au moyen de $i_{x'}$, et $\mathcal{O}_x$ comme $\mathcal{O}'_{x'}$-algèbre au moyen de π.

Soient x' un point de U′, $K'' \subset U''$ un polycylindre, et

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

une résolution de $\mathcal{F}$ sur un voisinage U_1 de $\{x'\} \times K''$, qu'on peut supposer de la forme $U_1' \times U_1''$. Cette résolution donne naissance à un complexe analytique de fibrés vectoriels banachiques triviaux sur U_1' :

$$0 \to B(K''; \mathcal{L}_p) \to \dots \to B(K''; \mathcal{L}_0).$$

Pour tout $y' \in U_1'$, $0 \to \mathcal{L}_p(y') \to \dots \to \mathcal{L}_0(y') \to \mathcal{F}(y') \to 0$ est une résolution de $\mathcal{F}(y')$. Si K'' est un $\mathcal{F}(x')$-privilégié, le complexe de fibrés est exact direct au point x', donc sur un voisinage U_2 de x', et le conoyau du dernier homomorphisme est un fibré vectoriel banachique analytique sur U_2', dont la fibre en un point y' est $B(K''; \mathcal{F}(y'))$. Remarquons que K'' est $\mathcal{F}(y')$-privilégié pour tout $y' \in U_2'$.

Il résulte du corollaire 2 du théorème 1 du § 6 que, à un isomorphisme canonique défini au voisinage de x' près, ce fibré ne dépend pas du choix de la résolution de $\mathcal{F}$. Nous le noterons $B(K''; \mathcal{F})$. Nous reviendrons sur cette situation dans un cadre plus général au § 8.

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $U = U' \times U''$, et supposons que $\mathcal{F}$ soit U'-plat. Soient x' un point de U' et $K'' \subset U''$ un polycylindre.*

(a) *Si K'' est $\mathcal{F}(x')$-privilégié, il existe un voisinage V' de x' dans U' tel que, pour tout polycylindre $K' \subset V'$, le polycylindre $K = K' \times K''$ soit $\mathcal{F}$-privilégié et $B(K; \mathcal{F}) = B(K'; B(K''; \mathcal{F}))$.*

(b) *Si K'' est un voisinage $\mathcal{F}(x')$-privilégié de x'', il existe un voisinage V' de x' dans U' tel que, pour tout polycylindre $K' \subset V'$ qui soit un voisinage de x', le polycylindre $K = K' \times K''$ soit un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de $x = (x', x'')$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{L}_* : 0 \to \mathcal{L}_n \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{x'\} \times K''$. D'après la proposition 3 du § 2, on peut trouver un voisinage V' de x' dans U' et pour chaque i des sous-fibrés triviaux S_i et T_i de $B(K'', \mathcal{L}_i)$ sur V' tels que $B(K'', \mathcal{L}_i) = S_i \oplus T_i$ et que d_i induise un isomorphisme de S_i sur T_{i-1} et soit nul sur T_i. On a alors, si $K' \subset V'$,

$$B(K; \mathcal{L}_i) = B(K'; B(K''; \mathcal{L}_i)) = B(K'; S_i) \oplus B(K'; T_i),$$

et

$$d_i : B(K; \mathcal{L}_i) \to B(K; \mathcal{L}_{i-1})$$

induit un isomorphisme de $B(K'; S_i)$ sur $B(K'; T_{i-1})$ et est nul sur $B(K'; T_i)$. Le complexe $B(K; \mathcal{L}_*)$ est donc direct et acyclique en degrés > 0 et $B(K; \mathcal{F}) = B(K'; S_0)$, ce qui démontre la partie (a).

(b) Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* A *un anneau local dont l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *soit nilpotent,* E *et* F *deux* A-*modules plats,* $f: E \to F$ *un homomorphisme. Si*

$$I \otimes f : (A/\mathfrak{m}) \otimes_A E \to (A/\mathfrak{m}) \otimes_A F$$

est injectif, f *est injectif.*

Ce lemme est une conséquence de [BOURBAKI, Alg. Comm. Ch. 2, § 3, Prop. 5].

Posons $A_k = \mathcal{O}'_{x'}/\mathfrak{m}'^{k+1}$. Le A_k-module J_k des jets à l'ordre k en x' de sections du fibré $B(K''; \mathcal{F})$ est isomorphe à $A_k \otimes_C B(K''; \mathcal{F}_0)$ donc libre. En vertu du lemme et de l'hypothèse sur K'', l'application canonique

$$J_k \to A_k \otimes_{\mathcal{O}'_{x'}} \mathcal{F}_x$$

est injective. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(K; \mathcal{F}) = B(K'; B(K''; \mathcal{F})) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}_x \\ \theta \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim J_k & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \varprojlim A_k \otimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{F}_x \end{array}$$

$\hat{\rho}$ est injective par passage à la limite projective, et θ aussi à cause de l'hypothèse sur K'. Il en résulte que ρ est injective, ce qui achève de démontrer la proposition.

Remarques.

1) Plaçons-nous dans le cas $n'' = 1$, $n' = n - 1$, U'' connexe, et supposons que $\mathcal{F}$ admette une résolution $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{h} \mathcal{O} \to \mathcal{F} \to 0$ sur U. La condition « $\mathcal{F}$ *est* U'-*plat* » équivaut à « *pour tout* $x' \in$ U', *la fonction* $h(x')$ *sur* U'' *n'est pas nulle* ». Sous cette condition, pour que K'' soit $\mathcal{F}(x')$-privilégié, il faut et il suffit que la frontière de K'' ne contienne aucun zéro de $h(x')$. En notant k le nombre de zéros (avec leur multiplicité) de $h(x')$ intérieurs à K'', l'espace vectoriel P_k des polynômes de degré $< k$ est un supplémentaire de l'image de $h(x') : B(K'') \to B(K'')$. La proposition donne alors $B(K) = h(B(K)) \oplus B(K'; P_k)$, ce qui est

une forme du théorème de préparation. C'est au contraire dans le cas $n' = 1$, $n'' = n - 1$, que nous utiliserons cette proposition pour la démonstration du théorème 1.

2) Dans les conditions de la partie (a) de la proposition, K'' est $\mathcal{F}(y')$-privilégié pour tout $y' \in V'$. Cependant, dans les conditions de la partie (b), il n'existe pas nécessairement pour tout y' suffisamment voisin de x' un point $y'' \in K''$ tel que K'' soit un voisinage $\mathcal{F}(y')$-privilégié de y''.

Le fait que K'' est $\mathcal{F}(y')$-privilégié pour y' voisin de x' a encore la conséquence suivante :

COROLLAIRE. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* U, K *un polycylindre* $\mathcal{F}$*-privilégié, a un point de* $\mathbf{C}^n$. *Pour t suffisamment voisin de* 1, *le transformé* K_t *de* K *par l'homothétie de centre a et de rapport t est* $\mathcal{F}$*-privilégié.*

Démonstration. — Considérons l'application m de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ définie par $m(t, x) = (1 - t)a + tx$. Posons $\widetilde{U} = m^{-1}(U)$ et définissons le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{U}$ par $\widetilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}} = \mathcal{O}_{\widetilde{U}, \tilde{x}} \otimes_{\mathcal{O}_{U, x}} \mathcal{F}_x$ pour $x = m(\tilde{x})$. Le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ est $\mathbf{C}^*$-plat; on a $\widetilde{\mathcal{F}}(1) = \mathcal{F}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}(t)$ est le faisceau image réciproque de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre a et de rapport t. Pour t suffisamment voisin de 1, le polycylindre K est $\widetilde{\mathcal{F}}(t)$ privilégié, donc K_t est $\mathcal{F}$-privilégié.

4. Le théorème d'existence.

THÉORÈME 1. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ *des faisceaux analytiques cohérents sur* U. *Pour tout* $x \in U$, *il existe un* $K \subset U$ *qui soit un voisinage* $\mathcal{F}_i$*-privilégié de x pour* $1 \leqslant i \leqslant k$.

Démonstration par récurrence sur n. — Le théorème est trivial pour $n = 0$. Supposons le théorème démontré pour $n - 1$ et identifions $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1}$. Le point $x = (x', x'') \in U$ étant fixé, définissons la fonction ζ sur U par $\zeta(y', y'') = y' - x'$. Posons $\mathcal{F}_{ij} = \operatorname{Ker} \zeta^j I : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_i$. Comme $\mathcal{O}_x$ est noethérien, il existe un j_0 tel que $\mathcal{F}_{ij, x} = \mathcal{F}_{ij_0, x}$ pour $j \geqslant j_0$. Posons $\mathcal{F}_i'' = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{ij_0}$; l'endomorphisme ζI de $\mathcal{F}''_{i, x}$ est injectif, et $\mathcal{F}''_{i, x}$, considéré comme $\mathcal{O}'_{x'}$-module, est sans torsion, donc plat car l'anneau $\mathcal{O}'_{x'}$ est principal. Posons $\mathcal{F}'_{ij} = \mathcal{F}_{ij} / \mathcal{F}_{i, j-1}$ pour $j \leqslant j_0$.

Quitte à remplacer U par un voisinage plus petit des x dans $\mathbf{C}^n$, on peut supposer que U est de la forme $U' \times U''$, que $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij_0}$ sur U pour $j \geqslant j_0$ et que $\mathcal{F}_i''$ est U'-plat sur U pour tout i.

Par hypothèse de récurrence, il existe un polycylindre $K'' \subset U''$ qui soit un voisinage privilégié de x'' pour les $\mathcal{F}'_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j < j_0$ considérés comme faisceaux sur U'', et pour les $\mathcal{F}_i''(x')$. Si K' est un voisinage compact convexe suffisamment petit de x' dans $\mathbf{C}$, $K = K' \times K''$ est un voisinage $\mathcal{F}_i''$-privilégié de x d'après la proposition 6 et $\mathcal{F}'_{ij}$-privilégié d'après le corollaire de la proposition 5. Ceci entraîne par applications répétées de la proposition 3 que K est un voisinage $\mathcal{F}_i$-privilégié de x, ce qui démontre le théorème.

Remarque.

La démonstration donne le résultat suivant : *soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* U, *alors*

$$(\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U) \left(\underset{\text{vois. } x_n}{\exists\, U_n}\right)\left(\underset{\text{vois. } x_n}{\forall\, K_n \subset U_n}\right)\left(\underset{\text{vois. } x_{n-1}}{\exists\, U_{n-1}}\right) \cdots \left(\underset{\text{vois. } x_1}{\exists\, U_1}\right)\left(\underset{\text{vois. } x_1}{\forall\, K_1 \subset U_1}\right) K = K_1 \times \ldots \times K_n$$

est un voisinage $\mathcal{F}$*-privilégié de* x.

5. Application : Espaces analytiques de dimension finie.

Les notations sont celles du § 3.

Proposition 7. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, F *un espace de Banach et* $f : U \to F$ *une application analytique. Pour tout* $x \in U$, *il existe un voisinage* U' *de* x *dans* U, *un* $p \in \mathbf{N}$ *et une application linéaire continue* v *de* F *dans* $\mathbf{C}^p$ *tels que* $\mu(U', F, f) = \mu(U', \mathbf{C}^p, v \circ f)$.

Démonstration. — Soit J l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les $u \circ f$, $u \in \mathbf{L}(F, \mathbf{C})$. Comme $\mathcal{O}_x$ est noethérien, J est engendré par une famille finie $v_1 \circ f, \ldots, v_p \circ f$. Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux engendré par les $g_i = v_i \circ f$, et soit K un voisinage $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-privilégié de x. L'homomorphisme $g : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ défini par les g_i donne un homomorphisme direct

$$g : B(K)^p \to B(K) ;$$

posons $T_0 = g\,(B\,(K)^p)$. Montrons que

$$f \in [\operatorname{Im} g \otimes I : B\,(K)^p \,\hat{\otimes}_\epsilon\, F \to B\,(K) \,\hat{\otimes}_\epsilon\, F] = T_0 \,\hat{\otimes}_\epsilon\, F.$$

Il suffit pour cela de voir que pour tout $u \in \mathbf{L}\,(F, \mathbf{C})$, $u \circ f \in T_0$, mais ceci découle de l'hypothèse faite sur K.

Il en résulte qu'on peut mettre f sous la forme $\lambda \cdot g$, avec

$$\lambda \in B\,(K\,; F)^p = B\,(K\,; \mathbf{L}\,(\mathbf{C}^p\,; F)).$$

On a donc $f \in \mathcal{N}\,(g_{U'}, F)$ en notant U′ l'intérieur de K et $\mu\,(U', \mathbf{C}^p, g)$ est un sous-espace analytique de $\mu\,(U', F, f)$. Comme l'inclusion opposée est évidente, la proposition est démontrée.

8. FAISCEAUX ANAPLATS

1. Notations.

Si $X = (X, \Phi)$ est un espace analytique banachique, on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau $\Phi\,(\mathbf{C})$ sur X. Si $f = (f_0, f_1)$ est un morphisme d'espaces analytiques banachiques de X′ dans X et si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{O}_X$-module sur X, on notera $f^*\,\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{O}_{X'} \otimes_{f_0^*\mathcal{O}_X} f_0^*\,\mathcal{F}$ sur X′.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{O}_{S \times X}$-module sur un produit $S \times X$ d'espaces analytiques banachiques, pour tout point $s \in S$, on notera $\mathcal{F}\,(s)$ le faisceau $\mathcal{O}_X$-module $i_s^*\,\mathcal{F}$ sur X, où i_s désigne le morphisme d'injection de X dans $S \times X$ défini par s.

Si S est un espace analytique de dimension finie, $\mathcal{F}\,(s)$ s'identifie à $\mathcal{F}/\mathfrak{m}_s\,\mathcal{F} = \mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{F}$. Il n'en est plus ainsi en général si S n'est pas de dimension finie.

2. Un lemme préliminaire.

LEMME 1. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *soient* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ *des faisceaux analytiques cohérents sur* U, *et soit* K *un polycylindre privilégié pour* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$.

(a) *Soient* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ *et* $g : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *des homomorphismes de* $\mathcal{O}_U$-*modules tels que* $g \circ f = 0$. *Si*

$$B(K ; \mathcal{F}) \to B(K ; \mathcal{F}') \to B(K ; \mathcal{F}'')$$

est une suite exacte directe, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *est une suite exacte de faisceaux sur* K.

(b) *Toute suite exacte directe* B (K)-*linéaire :*

$$B(K ; \mathcal{F}) \xrightarrow{u} B(K ; \mathcal{F}') \xrightarrow{v} B(K ; \mathcal{F}'')$$

induit une suite exacte de faisceaux sur l'intérieur $\mathring{K}$ *de* K.

Démonstration. — (a_0). Avec les hypothèses de (a), $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ est une suite exacte sur $\mathring{K}$. En effet, pour tout $h \in H^0(K ; \operatorname{Ker} g)$, la restriction de h à $\mathring{K}$ est dans l'image de f, et $H^0(K ; \operatorname{Ker} g)$ engendre $\operatorname{Ker} g_x$ d'après le théorème A classique.

(a) Soit a un point intérieur à K et considérons l'application $m : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ définie par $m(t, x) = (1 - t)a + tx$. Posons

$$\widetilde{U} = m^{-1}(U), \quad \widetilde{\mathcal{F}} = m^* \mathcal{F}, \quad \tilde{f} = m^* f : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}', \text{ etc.}$$

L'ensemble J des $t \in \mathbf{C}$ tels que K soit privilégié pour $\widetilde{\mathcal{F}}(t)$, $\widetilde{\mathcal{F}}'(t)$ et $\widetilde{\mathcal{F}}''(t)$ est un voisinage de 1 et les $B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}(t))$ sont les fibres d'un fibré vectoriel $B(K ; \widetilde{\mathcal{F}})$ sur J; de même pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$. Les homomorphismes f et g définissent des homomorphismes analytiques de fibrés vectoriels :

$$B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{f} B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}') \xrightarrow{g} B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}'').$$

Comme on a une suite exacte pour $t = 1$, on a encore une suite exacte pour t suffisamment voisin de 1, donc une suite exacte

$$\widetilde{\mathcal{F}}(t) \to \widetilde{\mathcal{F}}'(t) \to \widetilde{\mathcal{F}}''(t)$$

sur $\mathring{K}$ d'après (a_0). Ceci signifie que $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ est une suite exacte sur $\mathring{K}_t$, où $K_t = m(t \times K)$. Or pour $t > 1$, $\mathring{K}_t \supset K$ et l'assertion (a) est démontrée.

(b) Posons $I = [0,1] \cap J$. Les applications u et v définissent des morphismes non nécessairement analytiques mais continus

$$B(K ; \widetilde{\mathcal{F}})\big|_I \to B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}')\big|_I \to B(K ; \widetilde{\mathcal{F}}'')\big|_I$$

de fibrés vectoriels. Comme on a une suite exacte pour $t = 1$, on a encore une suite exacte pour $t \in \mathrm{I}$ suffisamment voisin de 1. Mais pour $t < 1$, $u(t)$ et $v(t)$ sont induits par des homomorphismes de faisceaux définis au voisinage de K_t, et on peut appliquer (a_0). D'où une suite exacte de faisceaux sur $\mathring{\mathrm{K}}_t$. Comme

$$\bigcup_{t_0 < t < 1} \mathring{\mathrm{K}}_t = \mathring{\mathrm{K}},$$

le lemme est démontré.

3. Faisceaux anaplats.

Soient S un espace analytique banachique et U un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

DÉFINITION. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathrm{U}}$-module sur* S × U. *Nous dirons que $\mathcal{F}$ est* S*-anaplat si, pour tout point $(s, x) \in \mathrm{S} \times \mathrm{U}$, il existe une résolution finie*

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de (s, x) dans S × U *telle que*

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0$$

soit une suite exacte.

Remarques.

1) Il suffit de supposer $0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_0(s)$ exacte, l'exactitude de $\mathcal{L}_1(s) \to \mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0$ étant automatique en vertu des propriétés du produit tensoriel.

2) Cette condition d'exactitude ne dépend pas du choix de la résolution de $\mathcal{F}$: elle signifie que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathrm{U}}}(\mathcal{O}_\mathrm{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0.$$

PROPOSITION 1. — *Supposons* S *de dimension finie et soit $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathrm{U}}$-module sur* S × U. *Pour que $\mathcal{F}$ soit S-anaplat, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit cohérent et* S*-plat.*

Démonstration. — Si $\mathcal{F}$ est anaplat, il est cohérent car localement de présentation finie; pour montrer qu'il est S-plat, on peut appliquer

Bourbaki, Alg. comm. Chap. III, § 5, Th. 1, (iii) $\Rightarrow$ (i), l'hypothèse « idéalement séparé » étant satisfaite en vertu de loc. cit. Prop. 2.

Supposons $\mathcal{F}$ cohérent et S-plat. Soient (s, x) un point de $S \times U$, et $\mathcal{L}_*^0$ une résolution finie de $\mathcal{F}(x)$ au voisinage de x (il en existe d'après le théorème des syzygies). Montrons qu'il existe une résolution $\mathcal{L}_*$ de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s, x) telle que $\mathcal{L}_*(s) = \mathcal{L}_*^0$: si $\mathcal{L}_i^0 = \mathcal{O}_U^{r_i}$, posons $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i}$ et $\mathcal{K}_i^0 = \operatorname{Ker} d_i^0 : \mathcal{L}_i^0 \to \mathcal{L}_{i-1}^0$. On va, par récurrence sur i, construire $d_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}$ au voisinage de (s, x) tel que $d_i(s) = d_i^0$, montrer que $\mathcal{K}_i = \operatorname{Ker} d_i$ est S-plat et que $\mathcal{K}_i(s) = \mathcal{K}_i{}^0$. Supposons qu'on ait construit d_i et vérifié ces propriétés pour $\mathcal{K}_i$; on peut construire $d_{i+1} : \mathcal{L}_{i+1} \to \mathcal{K}_i$ au voisinage de (s, x) de façon que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & \mathcal{K}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_{i+1}^0 & \xrightarrow{d_{i+1}} & \mathcal{K}_i^0 \end{array}$$

soit commutatif. Le lemme de Nakayama montre alors que $\operatorname{Im} d_{i+1} = \mathcal{K}_i$ au point (s, x), donc au voisinage de ce point. La suite exacte

$$0 \to \mathcal{K}_{i+1} \to \mathcal{L}_{i+1} \to \mathcal{K}_i \to 0,$$

où $\mathcal{K}_i$ et $\mathcal{L}_{i+1}$ sont S-plats, montre que $\mathcal{K}_{i+1}$ est S-plat et que $\mathcal{K}_{i+1}(s) = \mathcal{K}_{i+1}^0$. Le départ de la récurrence se fait de façon analogue. Nous avons montré que $\mathcal{F}$ est S-anaplat et la proposition est démontrée.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau S-anaplat sur $S \times U$, s un point de S, et $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{F}(s)$-privilégié. D'après le théorème A sous la forme que nous lui avons donnée, il existe une résolution finie

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ au voisinage de $s \times K$. Cette résolution définit un complexe de fibrés analytiques banachiques $B(K ; \mathcal{L}_*)$:

$$0 \to B(K ; \mathcal{L}_p) \to \ldots \to B(K ; \mathcal{L}_0)$$

au voisinage de s dans S. Ce complexe est direct et acyclique en degrés > 0 en s, donc encore au voisinage de s, et

$$H^0(B(K ; \mathcal{L}_*)) = \operatorname{Coker}[d_1 : B(K ; \mathcal{L}_1) \to B(K ; \mathcal{L}_0)]$$

est un fibré banachique trivial au voisinage de s. Il résulte du corollaire 2 du théorème 1 du § 6 que ce fibré vectoriel est indépendant, à un isomorphisme canonique près, du choix de la résolution $\mathcal{L}_*$ de $\mathcal{F}$; nous le noterons $B(K\,;\mathcal{F})$.

Pour s' voisin de s, il résulte du lemme 1 (a) et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\mathcal{L}_*(s')$ est une résolution de $\mathcal{F}(s')$ sur K. Par suite K est $\mathcal{F}(s')$-privilégié et la fibre de $B(K\,;\mathcal{F})$ en s' n'est autre que $B(K\,;\mathcal{F}(s'))$. L'ensemble S′ des points $s \in S$ tels que K soit $\mathcal{F}(s)$-privilégié est ouvert dans S et les fibrés vectoriels construits localement se recollent en un fibré vectoriel $B(K\,;\mathcal{F})$ sur S′.

Nous pouvons donc énoncer :

SCHOLIE. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{F}$ *un faisceau* S*-anaplat sur* $S \times U$, *et* $K \subset U$ *un polycylindre. L'ensemble* S′ *des points* $s \in S$ *tels que* K *soit* $\mathcal{F}(s)$*-privilégié est ouvert dans* S *et les espaces de Banach* $B(K\,;\mathcal{F}(s))$ *sont les fibres d'un fibré analytique localement trivial* $B(K\,;\mathcal{F})$ *sur* S′.

Ce scholie exprime de façon fort concrète l'idée que, $\mathcal{F}$ étant anaplat, le faisceau $\mathcal{F}(s)$ dépend continûment du point s (13).

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ *des faisceaux* S*-anaplats sur* $S \times U$, *et* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $g : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *des homomorphismes tels que* $g \circ f = 0$. *Soit* (s, x) *un point de* $S \times U$; *si* $\mathcal{F}(s) \to \mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}''(s)$ *est une suite exacte en* x, *la suite* $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ *est exacte au voisinage de* (s, x).

Démonstration. — (a) *Exactitude au point* (s, x) : Soit $K \subset U$ un voisinage privilégié de x pour $f(s)$ et $g(s)$, i.e. pour le noyau, l'image et le conoyau de ces homomorphismes; f et g définissent des morphismes de fibrés

$$B(K\,;\mathcal{F}) \to B(K\,;\mathcal{F}') \to B(K\,;\mathcal{F}'').$$

On a une suite exacte directe au point s, donc une suite exacte directe de fibrés triviaux sur un voisinage V de s dans S. Pour $S' \subset S$, notons $B_{S'}(K\,;\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des sections de $B(K\,;\mathcal{F})$ sur S′. Si $S' \subset V$, on a une suite exacte

$$B_{S'}(K\,;\mathcal{F}) \to B_{S'}(K\,;\mathcal{F}') \to B_{S'}(K\,;\mathcal{F}'').$$

(13) Par exemple il en résulte immédiatement que la projection du support de $\mathcal{F}$ sur S est une application ouverte (question posée par Grothendieck dans l'exposé 13 du Séminaire H. Cartan 1960/61).

En passant à la limite inductive sur les voisinages ouverts de s dans S et sur les voisinages privilégiés de x dans U, on obtient une suite exacte

$$\mathcal{F}_{(s,x)} \to \mathcal{F}'_{(s,x)} \to \mathcal{F}''_{(s,x)}.$$

(b) *Exactitude au voisinage de* (s, x) : soit K un voisinage privilégié de x pour $f(s)$ et $g(s)$. Pour s' suffisamment voisin de s, on a une suite exacte directe

$$B(K; \mathcal{F}(s')) \to B(K; \mathcal{F}'(s')) \to B(K; \mathcal{F}''(s'))$$

et d'après le lemme 1 (a),

$$\mathcal{F}(s') \to \mathcal{F}'(s') \to \mathcal{F}''(s')$$

est une suite exacte en tout point $x' \in K$. L'hypothèse est donc vérifiée en tout point suffisamment voisin de (s, x), et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau* S-*anaplat sur* $S \times U$. *L'ensemble* supp $\mathcal{F}$ *des points* (s, x) *de* $S \times U$ *tels que* $\mathcal{F}_{s,x} \neq 0$ *est fermé dans* $S \times U$.

Démonstration. — Si $\mathcal{F}_{s,x} = 0$, on a en x une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(s) \to 0$, donc $0 \to \mathcal{F} \to 0$ est une suite exacte de (s, x).

PROPOSITION 3 (Changement de base). — *Soient* $\mathcal{F}$ *un faisceau* S-*anaplat sur* $S \times U$, S' *un espace analytique banachique et* $f : S' \to S$ *un morphisme. Le faisceau* $\mathcal{F}' = (f \times I_U)^* \mathcal{F}$ *sur* $S' \times U$ *est* S'-*anaplat.*

Démonstration. — Soit $s' \in S'$ et $s = f(s') \in S$. Si

$$\mathcal{L}_* : 0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s, x), le complexe $\mathcal{L}'_* = (f \times I)^* \mathcal{L}_*$ est une résolution de $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s', x). En effet

$$\mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_0 \to \mathcal{F}' \to 0$$

est exacte d'après les propriétés du produit tensoriel et

$$0 \to \mathcal{L}'_p \to \dots \to \mathcal{L}'_0$$

est exacte d'après la proposition 2, le complexe $\mathcal{L}'_*(s') = \mathcal{L}_*(s)$ étant acyclique en degré > 0.

PROPOSITION 4. — *Soit* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux* $\mathcal{O}_{S\times U}$*-modules sur* $S \times U$.

(a) *Si* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont* S-*anaplats,* $\mathcal{F}$ *est* S-*anaplat.*

(b) *Si* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont* S-*anaplats,* $\mathcal{F}'$ *est* S-*anaplat.*

(c) *Supposons* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$ S-*anaplats; pour que* $\mathcal{F}''$ *soit* S-*anaplat, il faut et il suffit que pour tout* $s \in S$, *l'homomorphisme* $\mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}(s)$ *soit injectif.*

Démonstration. — (a) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s, x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}_*$ de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s, x) telle que $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}'_k \oplus \mathcal{L}''_k$, et la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour } q > 0.$$

(b) Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s, x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}'_*$ de $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s, x) telle que $\mathcal{L}'_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}''_{k+1}$ pour $k \neq 1$ et

$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}''_2 \oplus \mathcal{L}''_0;$$

la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}') = 0 \quad \text{pour } q > 0.$$

(c) Soient $\mathcal{L}_*$ et $\mathcal{L}'_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ au voisinage de (s, x). On peut construire une résolution $\mathcal{L}''_*$ de $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s, x) telle que $\mathcal{L}''_k = \mathcal{L}_k \oplus \mathcal{L}'_{k-1}$; la suite exacte des Tor montre que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0 \quad \text{pour } q > 1$$

et que

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}'') = 0$$

en (s, x) si et seulement si $\mathcal{F}'(s) \to \mathcal{F}(s)$ est injective en x. La proposition est démontrée.

PROPOSITION 5. — *Soient* $\mathcal{F}$ *un faisceau* S-*anaplat sur* $S \times U$, *et* $(s, x) \in S \times U$. *Toute résolution finie de* $\mathcal{F}(s)$ *en* x *provient d'une résolution de* $\mathcal{F}$ *au voisinage de* (s, x).

Démonstration par récurrence sur la longueur de la résolution. — La résolution donnée de $\mathcal{F}(s)$ en x peut se mettre sous la forme

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0,$$

où les $\mathcal{L}_k$ sont des faisceaux $\mathcal{O}_{S\times U}$-modules libres de type fini sur $S \times U$, les homomorphismes étant définis au voisinage de x dans U. Comme $\mathcal{F}_{(s,x)} \to \mathcal{F}(s)_x$ est surjectif, il existe un homomorphisme $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}$ défini au voisinage de (s, x) induisant l'homomorphisme donné $\mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s)$ en x. D'après la proposition 2, cet homomorphisme $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}$ est surjectif au voisinage de (s, x), et son noyau $\mathcal{F}_1$ est S-anaplat d'après la proposition 4 (b). Enfin comme

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S\times U}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = 0$$

on a

$$\mathcal{F}_1(s) = \mathrm{Ker}\,[\mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s)]\,;$$

par hypothèse de récurrence la résolution

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \dots \to \mathcal{L}_1(s) \to \mathcal{F}_1(s) \to 0$$

de $\mathcal{F}_1(s)$ en x provient d'une résolution

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{F}_1 \to 0$$

de $\mathcal{F}_1$ au voisinage de (s, x) et

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s, x), ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 6. — *Soit* $U = U' \times U''$, *où* $U' \subset \mathbf{C}^{n'}$ $U'' \subset \mathbf{C}^{n''}$, $n' + n'' = n$. *Soient* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *des faisceaux* S-*anaplats sur* $S \times U'$ *et* $S \times U''$ *respectivement. Le faisceau* $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U'}} \mathcal{O}_{S\times U} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U''}} \mathcal{F}''$ *sur* $S \times U$ *est* S-*anaplat.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{L}'_*$ et $\mathcal{L}''_*$ des résolutions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$ au voisinage de (s, x') et (s, x'') respectivement. Les complexes $\mathcal{L}'_*(s)$ et $\mathcal{L}''_*(s)$ sont des résolutions de $\mathcal{F}'(s)$ et $\mathcal{F}''(s)$ en x' et x'' respectivement, et

$$\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'_* \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U'}} \mathcal{O}_{S\times U} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U''}} \mathcal{L}''_*$$

est un complexe tel que $\mathcal{L}_*$ soit une résolution de $\mathcal{F}(s)$ en (x', x''). Il résulte de la proposition 2 et des propriétés du produit tensoriel que $\mathcal{L}_*$ est une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de (s, x', x''), et la proposition est démontrée.

4. Morphisme défini par un faisceau.

Soient S un espace analytique banachique, U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U, notons $\mathcal{E}_S$ le faisceau $\pi^* \mathcal{E}$ sur S × U, où π désigne la projection de S × U sur U. Soient $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{E}$-privilégié et $\mathcal{F} = \mathcal{E}_S/\mathcal{F}^\vee$ un faisceau quotient S-anaplat de $\mathcal{E}_S$ (ce qui équivaut à dire que $\mathcal{F}^\vee$ est S-anaplat et $\mathcal{F}^\vee(s) \to \mathcal{E}$ injectif pour tout $s \in S$).

L'ensemble S_1 des $s \in S$ tels que K soit privilégié pour $\mathcal{F}(s)$ est ouvert dans S et on a sur S_1 une suite exacte directe de fibrés analytiques banachiques.

$$0 \to B(K ; \mathcal{F}^\vee) \to B(K ; \mathcal{E})_S \to B(K ; \mathcal{F}) \to 0,$$

où $B(K ; \mathcal{E})_S$ désigne le fibré trivial sur S de fibre $B(K ; \mathcal{E})$.

Soit $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ l'ouvert de $\mathfrak{G}_{B(K)}(B(K ; \mathcal{E}))$ formé des sous B (K)-modules de $B(K ; \mathcal{E})$ admettant une résolution finie directe. D'après la proposition 3 du § 4, nous pouvons identifier $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ à l'ensemble des *quotients* directs de $B_K(\mathcal{E})$ admettant une résolution finie directe. Nous ferons désormais cette identification.

Nous allons définir un morphisme de $\beta_K(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ tel que $\beta_K(\mathcal{F})(s) = B(K ; \mathcal{F}(s))$ pour tout point s de S_1.

Soit s un point de S_1. D'après le théorème A, il existe une résolution finie de $\mathcal{F}^\vee$ sur $s \times K$, qu'on peut écrire comme une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \dots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{E}_S \text{ avec } \mathcal{L}_k = \mathcal{O}_{S\times U}^{r_k}.$$

On en déduit (§ 5, n° 2) un complexe analytique de fibrés vectoriels

$$0 \to B(K ; \mathcal{L}_p) \to \dots \to B(K ; \mathcal{L}_0) \to B(K ; \mathcal{E}_S)$$

au voisinage de s, qui donne une suite exacte directe en s, donc sur un voisinage V de s. (Prop. 3 du § 2 étendue au cas où la base est un espace analytique). D'où un morphisme V dans

$$\mathfrak{S}_K(0, \mathcal{O}_U^{r_p}, \dots, \mathcal{O}_U^{r_0}, \mathcal{E}) = \mathfrak{S}_{B(K)}(0, B(K)^{r_p}, \dots, B(K)^{r_0}, B(K ; \mathcal{E})).$$

En composant avec le morphisme

$$\mathfrak{S}_K(0, \mathcal{O}_U^{r_p}, \dots, \mathcal{O}_U^{r_0}, \mathcal{E}) \to \mathfrak{G}_K(\mathcal{E}),$$

on obtient un morphisme de V dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$.

Ce morphisme ne dépend pas du choix de la résolution de $\mathcal{F}^{\vee}$ sur $s \times K$: cela résulte du corollaire 2 a) du théorème 1 du § 6, qui donne une équivalence d'homotopie entre deux résolutions. Les morphismes ainsi définis localement se recollent en un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$.

Il est immédiat à partir des définitions qu'on a la propriété de fonctorialité suivante : Soit $f : S' \to S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons $\mathcal{F}' = (f \times I_U)^* \mathcal{F}$. Le faisceau $\mathcal{F}'$ est un faisceau quotient S'-anaplat de $\mathcal{E}_{S'}$; définissons S'_1 comme S_1. Alors $S'_1 = f^{-1}(S_1)$ et

$$\beta_K(\mathcal{F}') = \beta_K(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \to \mathfrak{G}_K(\mathcal{E}).$$

5. Faisceau défini par un morphisme.

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U, soit $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{E}$-privilégié d'intérieur non vide; rappelons qu'on note $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ l'ensemble des modules quotients de $B(K ; \mathcal{E})$ admettant une résolution finie directe, identifié à un ouvert de $\mathfrak{G}_{B(K)}(B(K ; \mathcal{E}))$.

Soient S un espace analytique banachique et f un morphisme de S dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$. Nous allons associer à f un faisceau quotient S-anaplat de $\mathcal{E}_S$ restreint à $S \times \mathring{K}$.

Soient s un point de S, et $F = B(K ; \mathcal{E})/F = f(s) \in \mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$. Le module $F^{\vee}$ admet une résolution finie directe, i.e. une suite exacte directe

$$0 \to B(K)^{r_p} \to \dots \to B(K)^{r_0} \xrightarrow{\varepsilon} B(K ; \mathcal{E})$$

telle que Coker $\varepsilon = F$. Considérons

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{B(K)}(0, B(K)^{r_p}, \dots, B(K)^{r_0}, B(K ; \mathcal{E})) ;$$

le morphisme $\mathfrak{S} \to \mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ admettant des sections locales, il existe un voisinage S' de s dans S tel que $f\,|_{S'}$ se factorise en un morphisme $g : S' \to \mathfrak{S}$. Au-dessus de $S' \times \mathring{K}$, le morphisme g donne naissance à un complexe de faisceaux

$$\mathcal{L}_* : 0 \to \mathcal{O}_{S \times U}^{r_p} \to \dots \to \mathcal{O}_{S \times U}^{r_0} \to \mathcal{E}_S .$$

Il résulte du lemme 1 b) que pour tout point $s' \in S'$, le complexe

$$\mathcal{L}_* (s') : 0 \to \mathcal{O}_S^{r_p} \to \dots \to \mathcal{O}_S^{r_0} \to \mathcal{E}$$

est une suite exacte sur $\mathring{K}$, et la proposition 1 montre que $\mathcal{L}_*$ est une suite exacte sur $S' \times \mathring{K}$. L'image $\mathcal{F}^{\vee}$ de $\mathcal{O}_{S \times U}^{r_0} \to \mathcal{E}_S$ est donc un sous-faisceau anaplat de $\mathcal{E}_S$ au-dessus de $S' \times \mathring{K}$ et la proposition 4 (c) montre que $\mathcal{F} = \mathcal{E}_S / \mathcal{F}^{\vee}$ est anaplat.

Le faisceau $\mathcal{F}$ ne dépend pas du choix du relèvement g de f : on le vérifie à l'aide du lemme utilisé dans la démonstration de la proposition 3 de l'exposé précédent. Les faisceaux ainsi construits localement se recollent en un faisceau quotient $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_S$ sur $S \times \mathring{K}$.

On a la propriété de fonctorialité suivante : si $h : S' \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques banachiques, le faisceau associé à $f \circ h : S' \to \mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ est $\mathcal{F}' = (h \times I_{\mathring{K}})^* \mathcal{F}$. En particulier, si on note $\mathcal{R}$ le faisceau quotient de $\mathcal{E}_{\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})}$ restreint à $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E}) \times \mathring{K}$ associé au morphisme identique de $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$, le faisceau $\mathcal{F}$ associé à $f : S \to \mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ n'est autre que $(f \times I_K)^* \mathcal{R}$. Le faisceau $\mathcal{R}$ sera dans la suite qualifié d'universel.

6. Aller-retours.

Soit U un ouvert $\mathbf{C}^n$, soit $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur U, soient $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{E}$-privilégié, d'intérieur non vide.

Si S est un espace analytique banachique et $\mathcal{F}$ un faisceau quotient S-anaplat de $\mathcal{E}_S$, on a associé à $\mathcal{F}$ un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ d'un ouvert S_1 de S dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$. Le faisceau $(\beta_K(\mathcal{F}) \times I_{\mathring{K}})^* \mathcal{R}$ associé à $\beta_K(\mathcal{F})$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{F}$ à $S_1 \times \mathring{K}$. Cela résulte des constructions.

Soit $K' \subset \mathring{K}$ un polycylindre $\mathcal{E}$-privilégié. Le faisceau universel $\mathcal{R}$ sur $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E}) \times \mathring{K}$ définit un morphisme $\beta_K(\mathcal{R})$ d'un ouvert $\mathfrak{G}_1$ de $\mathfrak{G}_K(\mathcal{E})$ dans $\mathfrak{G}_{K'}(\mathcal{E})$. Avec les notations du n° 5 du § 4, $\rho_0 : B(K) \to B(K')$ et $\rho_1 : B(K ; \mathcal{E}) \to B(K' ; \mathcal{E})$ désignant les restrictions, on a $\mathfrak{G}_1 \subset W$ et $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ est la restriction à $\mathfrak{G}_1$ du morphisme ρ_* défini dans la proposition 4 du § 4. Cela résulte encore des constructions.

Comme ρ_0 et ρ_1 sont des applications compactes, on peut appliquer la proposition 5 du § 4 : le morphisme $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ est compact en tout point.

7. Faisceaux S-anaplats sur $S \times X$.

Soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique de dimension finie, $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_{S\times X}$-module sur $S \times X$. Si $\varphi : X_1 \to U$ est un isomorphisme d'un ouvert X_1 de X sur un sous-espace analytique fermé Y d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, posons

$$\varphi_S = I_S \times \varphi : S \times X_1 \to S \times U.$$

Le faisceau $(\varphi_S)_* \mathcal{F}$, image directe de $\mathcal{F}$ par φ_S, est un $\mathcal{O}_{S\times U}$-module qui a pour fibre $\mathcal{F}_{(s,x)}$ en $(s, \varphi(x))$ et 0 sur $S \times (U - Y)$.

Proposition 7. — *Soient* U' *et* U'' *des ouverts de* $\mathbf{C}^{n'}$ *et* $\mathbf{C}^{n''}$ *respectivement,* X_1 *un ouvert de X,* φ' *et* φ'' *des isomorphismes de* X_1 *sur des sous-espaces analytiques fermés* Y' *et* Y'' *de* U' *et* U'' *respectivement. Si* $(\varphi_S)_* \mathcal{F}$ *est* S-*anaplat, il en est de même de* $(\varphi''_S)_* \mathcal{F}$.

Traitons d'abord un cas particulier :

Lemme 2. — *Soient* U' *un ouvert de* $\mathbf{C}^{n'}$, U'' *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n''}$, $U = U' \times U'' \subset \mathbf{C}^n$, $n = n' + n''$, *et soit* $i : U' \to U$ *l'injection* $x' \mapsto (x', 0)$. *Soient* $\mathcal{F}'$ *un faisceau* $\mathcal{O}_{S\times U'}$-*module sur* $S \times U'$ *et* $\mathcal{F} = (i_S)_* \mathcal{F}'$. *Le faisceau* $\mathcal{O}_{S\times U}$-*module* $\mathcal{F}$ *est* S-*anaplat si et seulement si* $\mathcal{F}'$ *est* S-*anaplat.*

Démonstration. — (a) $\mathcal{F}'$ *anaplat* $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ *anaplat.* Soit C le faisceau $\mathcal{O}_{U''}/\mathfrak{m}$ sur U'', où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de l'origine. On a

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{S,U}} \mathcal{O}_{S\times U} \otimes_{\mathcal{O}_{S,U}} C_S$$

et l'assertion (a) résulte de la proposition 6.

(b) $\mathcal{F}$ *anaplat* $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}'$ *anaplat.* Soit (s, x') un point de $S \times U'$. Le faisceau $\mathcal{F}(s) = i_* \mathcal{F}'(s)$ est cohérent, donc $\mathcal{F}'(s)$ est cohérent et admet au voisinage de x' une résolution finie

$$0 \to \mathcal{O}_{U'}^{r_p} \to \dots \to \mathcal{O}^{r_0} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}'(s) \to 0.$$

Nous démontrons l'assertion (b) par récurrence sur p. L'homomorphisme ε se relève en $\bar{\varepsilon} : \mathcal{O}_{S\times U'}^{r_0} \to \mathcal{F}'$ au voisinage de (s, x'); posons $\mathcal{F}'_1 = \operatorname{Ker} \bar{\varepsilon}$. D'après la proposition 1, l'homomorphisme

$$(i_S)_* \bar{\varepsilon} : (i_S)_* \mathcal{O}_{S\times U'}^{r_0} \to \mathcal{F}$$

est surjectif au voisinage de $(s, x', 0)$, et la proposition 4 montre que son noyau $\mathcal{F}_1 = (i_S)_* \mathcal{F}'_1$ est anaplat et que $\mathcal{F}_1(s) = \operatorname{Ker} i_* \varepsilon = i_* \operatorname{Ker} \varepsilon$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{F}'_1$ est S-anaplat au voisinage de (s, x'). Il en résulte que $\mathcal{F}'$ est S-anaplat au voisinage de (s, x') et le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition. — Posons

$$U = U' \times U'' \qquad \text{et} \qquad \varphi = (\varphi', \varphi'') : X_1 \to U \,;$$

nous allons montrer que $(\varphi_S)_* \mathcal{F}$ est S-anaplat si et seulement si $(\varphi'_S)_* \mathcal{F}$ l'est. Soit $x \in X_1$. Il existe un morphisme $h : U'_1 \to U''$, où U'_1 est un voisinage de $\varphi'(x)$ dans U', tel que $\varphi'' = h \circ \varphi'$ au voisinage de x; d'où $\varphi = j \circ \varphi'$, où $j : U'_1 \to U$ est l'immersion $x' \mapsto (x', h(x'))$. Quitte à rétrécir U'_1, on peut définir un isomorphisme

$$\psi : U_1 \to U'_1 \times U''_1 \,,$$

où U_1 est un voisinage de $\varphi(x)$ dans U et U''_1 un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{n''}$, par $\psi(x', x'') = (x', x'' - h(x'))$. Le lemme montre alors que $(\varphi_S)_* \mathcal{F}$ est S-anaplat sur $S \times U_1$ si et seulement si $(\varphi'_S)_* \mathcal{F}$ est S-anaplat sur $S \times U'_1$. Par suite,

$$(\varphi'_S)_* \mathcal{F} \text{ anaplat} \iff (\varphi_S)_* \mathcal{F} \text{ anaplat} \iff (\varphi'_S)_* \mathcal{F} \text{ anaplat},$$

et la proposition est démontrée.

DÉFINITION. — *Nous dirons que le faisceau $\mathcal{O}_{S\times X}$-module $\mathcal{F}$ est S-anaplat si, pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert X_1 de x dans X, et un isomorphisme φ de X_1 sur un sous-espace analytique fermé d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, tel que le faisceau $\mathcal{O}_{S\times U}$-module $(\varphi_S)_* \mathcal{F}$ soit S-anaplat.*

9. LE THÉORÈME D'EXISTENCE

1. Où l'on pose le problème.

Dans ce paragraphe, X désignera un espace analytique séparé de dimension finie et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X. On cherche un espace analytique H de dimension finie et un faisceau analytique cohérent $\mathcal{R}$ quotient de $\mathcal{E}_H$ qui soit H-plat et H-propre (c'est-à-dire que la projection de son support sur H soit propre), tels que soit vérifiée la propriété universelle : Quels que soient l'espace analytique S de dimension finie et le faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ quotient de $\mathcal{E}_S$, S-plat et S-propre, il existe un morphisme et un seul $f : S \to H$ tel que

$$\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}.$$

Ce problème peut encore s'énoncer en disant que l'on cherche à représenter le foncteur qui, à tout espace analytique S de dimension finie, associe l'ensemble des faisceaux analytiques cohérents S-plats et S-propres quotients de $\mathcal{E}_S$.

Nous montrerons d'abord que le foncteur qui, à tout espace analytique banachique S, associe l'ensemble des faisceaux S-anaplats et S-propres quotients de $\mathcal{E}_S$, est représentable, puis que l'espace analytique H qui le représente est de dimension finie.

En vertu de la proposition 1 du § 8, cela résoudra le problème posé.

Remarques. — 1. Soit H une solution du problème universel. En prenant pour S un point simple, l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie à l'ensemble sous-jacent à H; d'autre part la valeur du foncteur que l'on représente n'est autre que l'ensemble des faisceaux analytiques cohérents à support compact quotients de $\mathcal{E}$.

On voit donc que *l'ensemble sous-jacent à* H *s'identifie à l'ensemble des faisceaux analytiques cohérents à support compact quotients de* $\mathcal{E}$.

En résolvant le problème, on aura donc en particulier muni d'une structure d'espace analytique l'ensemble des faisceaux analytiques cohérents à support compact quotients de $\mathcal{E}$.

2. Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on trouve pour l'ensemble sous-jacent à H l'ensemble des faisceaux cohérents d'anneaux quotients de $\mathcal{O}_X$ à support compact, autrement dit *l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de* X. Pour tout espace analytique S, l'ensemble des morphismes de S dans H s'identifie alors à l'ensemble des sous-espaces analytiques Y de $S \times X$ plats et propres sur S.

3. L'espace tangent de Zariski $T_s H$ à H en un point s de H, auquel correspond un faisceau quotient $\mathcal{F} = \mathcal{E}/\mathcal{F}^\vee$ de $\mathcal{E}$, s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\vee ; \mathcal{F}).$$

Soit en effet $\hookrightarrow$ un espace réduit à un point muni de l'algèbre des nombres duaux $D = \mathbf{C}[t]/(t^2)$. Alors $T_s H$ est l'ensemble des morphismes de $\hookrightarrow$ dans H qui appliquent le point en s, donc s'identifie à l'ensemble des faisceaux cohérents $\mathcal{F}' = \mathcal{E}'/\mathcal{F}'^{\vee}$ quotients de $\mathcal{E}' = D \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{E}$, D-plats et tels que $\mathbf{C} \otimes_D \mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Identifions $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, la première projection $p : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ s'identifiant à $I_{\mathcal{E}'} \otimes \varepsilon$, où $\varepsilon : D \to \mathbf{C}$ est l'augmentation. Si $\mathcal{F}' = \mathcal{E}'/\mathcal{F}'^{\vee}$ vérifie les conditions ci-dessus, on a $p(\mathcal{F}'^{\vee}) = \mathcal{F}^{\vee}$ et $\operatorname{Ker} p \cap \mathcal{F}'^{\vee} = 0 \times \mathcal{F}^{\vee}$. On peut donc considérer $\mathcal{F}'^{\vee}/(0 \times \mathcal{F}^{\vee})$ comme le graphe d'un morphisme de $\mathcal{F}'^{\vee}$ dans $\mathcal{F}$. On vérifie que l'on obtient ainsi une bijection de $T_s H$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\vee}; \mathcal{F})$ et que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Ceci nous montre déjà que $T_s H$ est de dimension finie si on sait seulement que H est solution du problème universel banachique [8].

2. Cuirasses.

Si φ est une carte de X, i.e. un morphisme d'un ouvert X′ de X dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ induisant un isomorphisme de X′ sur un sous-espace analytique fermé de U, si $K \subset U$ est un polycylindre, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, nous commettrons l'abus de langage suivant : nous dirons que K est $\mathcal{F}$-privilégié si K est privilégié pour $\varphi_* \mathcal{F}$ et nous écrirons $B(K; \mathcal{F})$ pour $B(K; \varphi_* \mathcal{F})$, $\mathfrak{S}_K(\mathcal{F})$ pour $\mathfrak{S}_K(\varphi_* \mathcal{F})$, etc.

On appellera *cuirasse* sur X la donnée :

(i) d'une famille finie $(\varphi_i)_{i \in I}$ de cartes de X (pour tout i, φ_i est un isomorphisme d'un ouvert X_i de X sur un sous-espace analytique fermé d'un ouvert U_i de $\mathbf{C}^{n_i}$) ;

(ii) pour tout $i \in I$, d'un polycylindre $K_i \subset U_i$;

(iii) pour tout $i \in I$, d'un compact $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \subset X_i$;

(iv) pour tout couple (i, j), d'une carte φ_{ij} de X ayant pour domaine X_{ij}

$$X_{ij} = X_i \cap X_j$$

(φ_{ij} est un isomorphisme de X_{ij} sur un sous-espace analytique fermé d'un ouvert U_{ij} de $\mathbf{C}^{n_{ij}}$).

(v) pour tout couple (i, j), d'une famille finie $(K_{ij\alpha})_{\alpha \in A_{ij}}$ de polycylindres contenus dans U_{ij} telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}) \supset V_i \cap V_j \quad \text{et} \quad \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha}) \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\mathring{K}_j)\,;$$

(vi) d'un fermé L de X tel que $L \cup \bigcup \mathring{V}_i = X$.

Remarquons que ces conditions entraînent que X-L est relativement compact dans X.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X; la cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

sera dite semi-privilégiée pour $\mathcal{F}$ si K_i est $\mathcal{F}$-privilégié pour tout $i \in I$ et si $K_{ij\alpha}$ est $\mathcal{F}$-privilégié pour tous i, j, α. On dira que M est $\mathcal{F}$-privilégiée si M est semi-privilégiée pour $\mathcal{F}$ et si supp $\mathcal{F} \cap L = \emptyset$. Remarquons que ceci entraîne que $\mathcal{F}$ est à support compact.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent quotient de $\mathcal{E}$, on dira que M est $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-privilégiée si M est semi-privilégiée pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$-privilégiée.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent quotient de $\mathcal{E}$ à support compact. Alors il existe une cuirasse* M *sur* X *qui soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-privilégiée.*

Cette proposition est facile à partir du théorème des voisinages privilégiés.

PROPOSITION 2. — *Soient* S *un espace analytique banachique, $\mathcal{F}$ un faisceau quotient de $\mathcal{E}_S$,* S*-anaplat et* S*-propre. Soit* M *une cuirasse sur* X*. Alors l'ensemble des $s \in$* S *tels que* M *soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-privilégiée est ouvert dans* S.

Cette proposition résulte du scholie du § 8 et du corollaire de la proposition 2 du § 8.

3. L'espace Θ.

Jusqu'au n° 6, nous munissons X d'une cuirasse

$$M = ((\varphi_i), (K_i), (V_i), (\varphi_{ij}), (K_{ij\alpha}), L)$$

semi-privilégiée pour $\mathcal{E}$.

Pour chaque $i \in \mathrm{I}$, notons $\mathcal{R}_i$ le faisceau quotient universel de $\mathcal{E}_{\mathfrak{G}_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{E})}$ défini au-dessus de $\mathfrak{G}_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{E}) \times \varphi_i^{-1}(\mathring{\mathrm{K}}_i)$. Notons G_i l'ouvert de $\mathfrak{G}_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{E})$ formé des points s tels que :

(i) $\forall j \in \mathrm{I}\ \forall \alpha \in \mathrm{A}_{ij}\quad \mathrm{K}_{ij\alpha}$ est $\mathcal{R}_i(s)$-privilégié,

(ii) supp $\mathcal{R}_i(s) \cap \mathrm{L} \cap \mathrm{V}_i = \emptyset$.

Posons encore $\mathrm{G}_{ij\alpha} = \mathfrak{G}_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{E})$, notons $\rho'_{ij\alpha}$ le morphisme de G_i dans $\mathrm{G}_{ij\alpha}$ induit par $\beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i)$, et posons $\rho''_{ij\alpha} = \rho'_{ji\alpha}$. Définissons les morphismes ρ' et ρ'' de $\Pi\,\mathrm{G}_i$ dans $\Pi\,\mathrm{G}_{ij\alpha}$ par

$$\rho'(s) = s' \quad \text{avec} \quad s'_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha}(s_i)$$

et

$$\rho''(s) = s'' \quad \text{avec} \quad s''_{ij\alpha} = \rho''_{ij\alpha}(s_j).$$

Notons Θ l'espace analytique banachique noyau de la double flèche

$$(\rho', \rho'') : \Pi\,\mathrm{G}_i \rightrightarrows \Pi\,\mathrm{G}_{ij}.$$

4. Morphisme dans Θ défini par un faisceau.

Soient S un espace analytique banachique et $\mathcal{F}$ un faisceau quotient S-anaplat et S-propre de $\mathcal{E}_\mathrm{S}$. Soit S_1 l'ouvert de S formé des s tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-privilégiée. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, le morphisme $\beta_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{F})$ induit un morphisme de S_1 dans G_i, d'où un morphisme $\beta_\mathrm{M}(\mathcal{F})$ de S_1 dans $\Pi\,\mathrm{G}_i$.

La description faite au cours du § 8 du comportement des $\beta_\mathrm{K}(\mathcal{F})$ permet d'écrire les égalités suivantes entre morphismes définis sur S_1 :

$$\begin{aligned}\rho'_{ij\alpha} \circ \beta_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{F}) &= \beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i) \circ \beta_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{F}) = \beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}((\beta_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{F}) \times \mathrm{I}_{\mathring{\mathrm{K}}_i})^* \mathcal{R}_i \\ &= \beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{F}|_{\mathring{\mathrm{K}}_i}) = \beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{F}). \text{ [14]}.\end{aligned}$$

De même

$$\rho''_{ij\alpha} \circ \beta_{\mathrm{K}_j}(\mathcal{F}) = \beta_{\mathrm{K}_{ij\alpha}}(\mathcal{F}).$$

Il en résulte que

$$\rho' \circ \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}) = \rho'' \circ \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}),$$

donc $\beta_\mathrm{M}(\mathcal{F})$ peut être considéré comme un morphisme de S_1 dans Θ.

[14] Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$ et $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$, on écrira $\mathcal{F}|_\mathrm{V}$ pour $\mathcal{F}|_{\mathrm{S} \times \mathrm{V}}$

On a la propriété de fonctorialité suivante : Soit $f: S' \to S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques, et posons $\mathcal{F}' = (f \times I_X)^* \mathcal{F}$; définissons S'_1 comme S_1. Alors $S'_1 = f^{-1}(S_1)$ et

$$\beta_M(\mathcal{F}') = \beta_M(\mathcal{F}) \circ f : S'_1 \to \Theta.$$

5. Faisceau quotient universel de $\mathcal{E}_\Theta$.

Notons p_i la projection de Θ sur G_i. Le faisceau

$$\tilde{\mathcal{R}}_i = (p_i \times I)^* \mathcal{R}_i$$

est un faisceau quotient de $\mathcal{E}_\Theta$ défini sur $\Theta \times \varphi_i^{-1}(K_i)$.

Lemme. — *On a*

$$\tilde{\mathcal{R}}_i|_{V_i \cap V_j} = \tilde{\mathcal{R}}_j|_{V_i \cap V_j} \quad \textit{et} \quad \tilde{\mathcal{R}}_i|_{V_i \cap L} = 0.$$

On a en effet

$$\tilde{\mathcal{R}}_i|_{\varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha})} = \tilde{\mathcal{R}}_{ij\alpha},$$

où

$$\tilde{\mathcal{R}}_{ij\alpha} = (p_{ij\alpha} \times I)^* \mathcal{R}_{ij\alpha},$$

avec

$$p_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha} \circ p_i = \rho''_{ij\alpha} \circ p_j : \Theta \to G_{ij\alpha}.$$

Comme

$$V_i \cap V_j \subset \bigcup \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}),$$

la première assertion en résulte. La seconde résulte de la condition (ii) dans la définition de G_i et de la proposition 2 du § 8.

Ce lemme montre qu'il existe un faisceau quotient et un seul $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{E}_\Theta$ tel que $\tilde{\mathcal{R}}|_{V_i} = \tilde{\mathcal{R}}_i|_{V_i}$ pour tout $i \in I$ et $\tilde{\mathcal{R}}|_L = 0$. Le faisceau $\mathcal{R}$ sera qualifié d'universel. Il jouit des propriétés suivantes : il est Θ-anaplat, et son support est fermé dans $\Theta \times \overline{X - L}$, comme $\overline{X - L}$ est compact, la projection de ce support sur Θ est propre.

Proposition 3. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* $\mathcal{F}$ *un faisceau quotient* S*-anaplat et* S*-propre de* $\mathcal{E}_S$. *Posons* $f = \beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \to \Theta$. *On a alors*

$$(f \times I_X)^* \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{F}|_{S_1 \times X}.$$

Démonstration. — Pour tout $i \in \mathrm{I}$, posons

$$f_i = p_i \circ f = \beta_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{F}) : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{G}_i .$$

On a :

$$(f \times \mathrm{I})^* \widetilde{\mathcal{R}}|_{\mathrm{V}_i} = (f \times \mathrm{I})^* \widetilde{\mathcal{R}}_i|_{\mathrm{V}_i} = (f_i \times \mathrm{I})^* \mathcal{R}_i|_{\mathrm{V}_i} = \mathcal{F}|_{\mathrm{S}_1 \times \mathrm{V}_i},$$

la dernière égalité provenant du n° 6 du § 8, car $\mathrm{V}_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{\mathrm{K}}_i)$. D'autre part les deux membres de la formule de l'énoncé sont nuls sur $\mathrm{S}_1 \times \mathrm{L}$. Ils coïncident donc sur $\mathrm{S}_1 \times \mathrm{X}$ et la proposition est démontrée.

6. L'espace $\mathrm{H}_\mathrm{M}(\mathcal{E})$.

Considérons le morphisme

$$\theta = \beta_\mathrm{M}(\widetilde{\mathcal{R}}) : \Theta_1 \to \Theta,$$

où Θ_1 est l'ouvert de Θ formé des points s tels que M soit $(\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{R}}(s))$-privilégiée. Si contrariant que cela puisse être, θ ne coïncide pas avec l'identité. Cependant :

PROPOSITION 4. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* $\mathcal{F}$ *un faisceau quotient* S*-anaplat et* S*-propre de* $\mathcal{E}_\mathrm{S}$*. Alors l'image du morphisme* $\beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}) : \mathrm{S}_1 \to \Theta$ *est contenue dans* Θ_1 *et on a*

$$\theta \circ \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}) = \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}).$$

Démonstration. — Posons $f = \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}) : \mathrm{S}_1 \to \Theta$. On a

$$\beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}) = \beta_\mathrm{M}(\mathcal{F}|_{\mathrm{S}_1 \times \mathrm{X}}) = \beta_\mathrm{M}((f \times \mathrm{I})^* \mathcal{R}) ;$$

La propriété de fonctorialité vue au n° 4 dit que le domaine de définition S_1 de ce morphisme est $f^{-1}(\Theta_1)$, ce qui prouve la première assertion, et que

$$\beta_\mathrm{M}((f \times \mathrm{I})^* \widetilde{\mathcal{R}}) = \beta_\mathrm{M}(\widetilde{\mathcal{R}}) \circ f = \theta \circ f,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. — *On a* $\theta(\Theta_1) \subset \Theta_1$ *et* $\theta \circ \theta = \theta$.

C'est la proposition 4 appliquée au faisceau $\widetilde{\mathcal{R}}$.

Notons $H_M(\mathcal{E})$ l'espace analytique noyau de la double flèche

$$(I, \theta) : \Theta_1 \rightrightarrows \Theta_1.$$

Soit ι le morphisme d'inclusion de $H_M(\mathcal{E})$ dans Θ et notons $\mathcal{R}$ le faisceau quotient $(\iota \circ I_X)^* \tilde{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}$. Ce faisceau quotient mérite le nom d'universel : il est $H_M(\mathcal{E})$-anaplat; pour tout $h \in H_M(\mathcal{E})$, la cuirasse M est $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(h))$-privilégiée, enfin :

PROPOSITION 5. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* $\mathcal{F}$ *un faisceau quotient* S-*anaplat de* $\mathcal{E}_S$ *tel que* M *soit* $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-*privilégiée pour tout* $s \in S$. *Alors il existe un morphisme et un seul* f *de S dans* $H_M(\mathcal{E})$ *tel que* $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$.

Démonstration. — Le morphisme $\beta_M(\mathcal{F})$ est défini sur S et la proposition 4 montre qu'il peut être considéré comme un morphisme $f : S \to H_M(\mathcal{E})$. La proposition 3 montre que ce morphisme répond à la question. Si g est un autre morphisme répondant à la question, on a

$$\iota \circ f = \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M((g \times I_X)^* \mathcal{R}) = \beta_M(\mathcal{R}) \circ g = \iota \circ g,$$

d'où $f = g$, ce qui démontre la proposition.

7. Solution du problème universel.

THÉORÈME 1. — *Il existe un espace analytique banachique* $H(\mathcal{E})$ *et un faisceau quotient* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}$ *jouissant de la propriété universelle suivante.*

(i) $\mathcal{R}$ *est* $H(\mathcal{E})$-*anaplat et* $H(\mathcal{E})$-*propre* ;

(ii) *Pour tout espace analytique banachique* S *et tout faisceau quotient* S-*anaplat et* S-*propre* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{E}_S$, *il existe un morphisme et un seul* $f : S \to H(\mathcal{E})$ *tel que* $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$.

Démonstration. — Pour toute cuirasse M sur X, posons $H_M = H_M(\mathcal{E})$, notons $\mathcal{R}_M$ le sous-faisceau universel de $\mathcal{E}_{H_M}$; l'ensemble $|H_M|$ sous-jacent à H_M s'identifie à l'ensemble des faisceaux analytiques cohérents quotients $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-privilégiée.

Considérons l'ensemble $|H|$ des faisceaux analytiques cohérents quotients de $\mathcal{E}$ à support compact. Pour toute cuirasse M sur X, l'ensemble $|H_M|$ s'identifie à une partie de $|H|$. Si M et M' sont deux cuirasses sur X, l'ensemble $|H_M| \cap |H_{M'}|$ est ouvert dans H_M et dans $H_{M'}$ pour leurs topologies respectives ; nous noterons $H_{M,M'}$ cet ensemble muni de la structure analytique induite par celle de H_M. Les espaces analytiques $H_{M,M'}$ et $H_{M',M}$ sont solution d'un même problème universel ; il existe donc un morphisme et un seul

$$\gamma_{MM'} : H_{M,M'} \to H_{M',M}$$

tel que $\mathcal{R}_M = (\gamma_{MM'} \times I_X)^* \mathcal{R}_{M'}$ sur $H_{M,M'} \times X$. Les morphismes $\gamma_{MM''}$ et $\gamma_{M'M''} \circ \gamma_{MM'}$ coïncident sur $H_{M,M'} \cap H_{M,M''}$. Comme $|H| = \bigcup |H_M|$ d'après la proposition 1, on peut faire de l'ensemble $|H|$ un espace analytique banachique H tel que, pour toute cuirasse M, l'ensemble $|H_M|$ soit ouvert dans H et la structure de H_M s'identifie à la structure induite par celle de H. Les faisceaux quotients $\mathcal{R}_M$ de $\mathcal{E}_{H_M}$ se recollent alors en un sous-faisceau $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}_H$.

Montrons que le couple $(H, \mathcal{R})$ jouit de la propriété universelle requise. Soient S et $\mathcal{F}$ vérifiant les hypothèses de (ii). Pour toute cuirasse M sur X, soit S_M l'ensemble des $s \in S$ tels que M soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))$-privilégiée, et soit $f_M : S_M \to H_M$ le morphisme satisfaisant à la condition de la proposition 5. Les propositions 1 et 2 montrent que les S_M forment un recouvrement ouvert de S, et l'unicité dans la proposition 5 montre que les f_M se recollent en un morphisme f de S dans H, qui est évidemment le seul répondant à la question. Ceci démontre le théorème.

8. La finitude

THÉORÈME 2. — *L'espace analytique* H $(\mathcal{E})$ *est séparé, et de dimension finie en tout point.*

Démonstration.

a) *Séparation.* Pour toute cuirasse M, l'espace $H_M(\mathcal{E})$ est séparé, car c'est un sous-espace d'un produit de variétés grassmaniennes, qui sont séparées. Etant donné deux points distincts s_0 et s_1 de H $(\mathcal{E})$, on peut construire une cuirasse M qui soit $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(s_i))$-privilégiée pour $i = 0,1$. Les points s_0 et s_1 ont alors des voisinages disjoints dans $H_M(\mathcal{E})$, donc dans H $(\mathcal{E})$.

b) *Finitude.* Soit s un point de $H(\mathcal{E})$. On peut construire deux cuirasses

$$M = ((\varphi_i), (K_i)_{i \in I}, \dots) \text{ et } M' = ((\varphi_i), (K'_i)_{i \in I}, \dots)$$

qui soient $(\mathcal{E}, \mathcal{R}(s))$-privilégiées et telles que $K'_i \subset K_i$ pour tout $i \in I$. Le morphisme $\beta_{M'}(\mathcal{R})$, qui n'est autre que l'identité de $H_M \cap H_{M'}$, est induit par le morphisme $\Pi\, \beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ d'un ouvert de $\Pi\, G_{K_i}(\mathcal{E})$ dans $\Pi\, G_{K_i}(\mathcal{E})$. Comme on l'a remarqué au n° 6 du § 8, les morphismes $\beta_{K_i}(\mathcal{R}_i)$ sont compacts. Par suite $I_{H(\mathcal{E})}$ est un morphisme compact en s. D'après la proposition 3 du § 3, $H(\mathcal{E})$ est de dimension finie en s, et le théorème est démontré.

10. APPLICATION

Espaces de morphismes

Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces analytiques sont supposés de dimension finie et séparés.

1. Morphismes d'espaces analytiques au-dessus de S.

Rappelons quelques faits concernant les morphismes finis [19] et plats (§ 8, cas particulier où S est de dimension finie).

Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X, et $y = f(x)$. On dit que f est *fini* (resp. *plat*) en x si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module de type fini (resp. plat). D'après un théorème connu, f est fini en x si et seulement si x est isolé dans $f^{-1}(y)$. Si X et Y sont deux espaces analytiques au-dessus de S et f un S-morphisme, pour tout point $s \in S$, notons $X(s)$ et $Y(s)$ les fibres de s dans X et Y et $f(s) : X(s) \to Y(s)$ le morphisme induit par f. Si $x \in X(s)$, le morphisme f est fini en x si et seulement si $f(s)$ est fini en x.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques; l'ensemble des points où f est fini (resp. plat) est ouvert dans X.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et propre. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, le faisceau image directe $f_* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y et

$$(f_* \mathcal{F})_y = \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{F}_x.$$

Si X et Y sont des espaces analytiques au-dessus de S et f un S-morphisme, on a $(f_* \mathcal{F})(s) = f(s)_* \mathcal{F}(s)$, et $f_* \mathcal{F}$ est S-plat si et seulement si $\mathcal{F}$ est S-plat. Le morphisme f définit un morphisme de faisceaux d'anneaux

$$\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X.$$

Pour qu'un morphisme d'espaces analytiques $f : X \to Y$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f soit fini et propre, et que $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme.

Proposition 1. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques propres et plats au-dessus de* S, *et* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme. L'ensemble* S′ *des points* $s \in S$ *tels que* $f(s) : X(s) \to Y(s)$ *soit un isomorphisme est ouvert dans* S, *et* f *induit un isomorphisme de* $X|_{S'}$ *sur* $Y|_{S'}$.

Démonstration. — Soit s un point de S tel que $f(s)$ soit un isomorphisme; alors $f(s)$ est fini, donc f est fini sur un voisinage de $X(s)$, qu'on peut supposer de la forme $X|_{S_1}$ où S_1 est un voisinage de s dans S. Le morphisme f induit un morphisme fini et propre de $X|_{S_1}$ dans $Y|_{S_1}$ et définit sur $Y|_{S_1}$ un homomorphisme $\tilde{f}$ de $\mathcal{O}_Y$ dans le faisceau cohérent $f_* \mathcal{O}_X$. L'homomorphisme $\tilde{f}(s)$ est un isomorphisme. Il résulte de la proposition 2 du § 8 [15] que $\tilde{f}$ est un isomorphisme sur un voisinage de $Y(s)$, qu'on peut supposer de la forme $Y|_{S_2}$ où S_2 est un voisinage de s dans S. Alors f induit un isomorphisme de $X|_{S_2}$ sur $Y|_{S_2}$ et ceci démontre la proposition.

[15] On peut aussi faire le raisonnement suivant :
Soit $\mathcal{Q} = \operatorname{Coker} \tilde{f}$, on a $\mathcal{Q}(s) = 0$, d'où $\mathcal{Q} = 0$ par Nakayama. Soit $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} f$; comme $f_* \mathcal{O}_X$ est S-plat, $\mathcal{K}(s) = \operatorname{Ker} \tilde{f}(s) = 0$, donc $\mathcal{K} = 0$, de nouveau par Nakayama.

2. L'espace des morphismes.

THÉORÈME 1. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques,* X *compact, soient* H *l'espace analytique des sous-espaces analytiques compacts de* $X \times Y$, *et* R *le sous-espace analytique universel de* $H \times X \times Y$.

a) *L'ensemble* $M = \mathrm{Mor}(X; Y)$ *des points* $s \in H$ *tels que* $R(s)$ *soit le graphe d'un morphisme de* X *dans* Y *est ouvert dans* H.

b) $R|_M$ *est le graphe d'un morphisme* m *de* $M \times X$ *dans* Y.

c) *Le morphisme* m *jouit de la propriété universelle suivante : Pour tout espace analytique* S *et pour tout morphisme* $u : S \times X \to Y$, *il existe un morphisme et un seul* $f : S \to M$ *tel que* $u = m \circ (f \times I_X)$.

Démonstration. — Les espaces R et $H \times X$ sont propres et plats sur H; considérons la projection $p : R \to H \times X$. Un point $s \in H$ appartient à M si et seulement si $p(s)$ est un isomorphisme de $R(s)$ sur X. D'après la proposition 1, M est ouvert dans H et $p|_M$ est un isomorphisme de $R|_M$ sur $M \times X$, donc $R|_M$ est le graphe d'un morphisme m de $M \times X$ dans Y.

Soit S un espace analytique. Les morphismes de $S \times X$ dans Y correspondent bijectivement aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ tels que la projection $Z \to S \times X$ soit un isomorphisme, i.e. aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ propres et plats sur S tels que, pour tout $s \in S$, $Z(s)$ soit le graphe d'un morphisme de X dans Y, donc aux morphismes $f : S \to H$ tels que, pour tout $s \in S$, $f(s) \in M$, i.e. aux morphismes de S dans M. Cette correspondance est fonctorielle en S, d'où le théorème.

Remarques. — 1. Soient X, X' et Y trois espaces analytiques, X et X' compacts. A des morphismes $f : S \to \mathrm{Mor}(X; X')$ et

$$g : S \to \mathrm{Mor}(X'; Y),$$

on associe un morphisme $g.f : S \to \mathrm{Mor}(X; Y)$ de la façon suivante : f correspond à $u : S \times X \to X'$, g correspond à $v : S \times X' \to Y$, $g.f$ correspond à $v \circ \tilde{u} : S \times X \to Y$, où $\tilde{u} : S \times X \to S \times X'$ est défini par $\tilde{u}(s, x) = (s, u(s, x))$. En prenant

$$S = \mathrm{Mor}(X; X') \times \mathrm{Mor}(X'; Y),$$

on obtient un morphisme

$$\mathrm{Mor}(X;X') \times \mathrm{Mor}(X';Y) \to \mathrm{Mor}(X;Y),$$

appelé composition, qui a pour application sous-jacente $(f, g) \mapsto g \circ f$.

2. Les espaces X et Y étant toujours supposés de dimension finie, X compact, on devrait pouvoir démontrer que pour tout espace analytique *banachique* S, les morphismes de $S \times X$ dans Y correspondent bijectivement aux morphismes de S dans $\mathrm{Mor}(X;Y)$.

3. Topologie sur l'espace des sections d'un faisceau.

Soient X un espace analytique à base dénombrable (i.e. dont la topologie admet une base dénombrable d'ouverts) et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur X. On va munir l'espace vectoriel $H^0(X;\mathcal{E})$ d'une topologie de Fréchet : prenons des cartes φ_i de X (pour tout i, φ_i est un isomorphisme d'un ouvert de X_i de X sur un sous-espace analytique fermé d'un ouvert U_i de $\mathbf{C}^{n_i}$) et des polycylindres $K_i \subset U_i$, privilégiés pour $\mathcal{E}$, tels que

$$\bigcup \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) = X.$$

Alors $H^0(X;\mathcal{E})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $\prod B(K_i;\mathcal{E})$. On peut supposer l'ensemble d'indice I dénombrable, on voit alors que la topologie induite est une topologie de Fréchet. Cette topologie ne dépend pas du choix des φ_i et des K_i, car étant donné deux telles familles, on obtient en les réunissant une famille qui donne une topologie de Fréchet plus fine que chacune, or on sait que deux topologies de Fréchet comparables sur un même espace coïncident. A posteriori on voit que les familles non dénombrables donnent également la même topologie.

Si $\mathcal{E}'$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{E}$, l'espace $H^0(X;\mathcal{E}')$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $H^0(X;\mathcal{E})$, comme on le voit en prenant des K_i privilégiés pour $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$.

PROPOSITION 2. — (Grauert-Remmert [13]). *Soit* X *un espace analytique à base dénombrable réduit. La topologie de* $H^0(X;\mathcal{O}_X)$ *coïncide avec la topologie de la convergence compacte des fonctions analytiques.*

Démonstration. — Soit $\tilde{X}$ le normalisé de X, et $p : \tilde{X} \to X$ la projection canonique. L'espace des fonctions analytiques sur $\tilde{X}$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $\mathcal{C}(\tilde{X})$ des fonctions continues sur $\tilde{X}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni de la topologie de la convergence compacte, car c'est l'espace des fonctions continues sur $\tilde{X}$, holomorphes aux points réguliers de $\tilde{X}$. L'espace $H^0(X; p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ s'envoie sur cet espace par une application linéaire continue bijective, donc bicontinue. La topologie de $H^0(X; p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ coïncide donc avec la topologie de la convergence compacte des fonctions analytiques sur $\tilde{X}$. Comme $\mathcal{O}_X$ est un sous-faisceau cohérent de $p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, l'espace $H^0(X; \mathcal{O}_X)$ est un sous-espace de $H^0(X; p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$, muni de la topologie induite. D'autre part, comme p est surjective et propre, $\mathcal{C}(X)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}(\tilde{X})$, muni de la topologie induite. On en déduit que la topologie de $H^0(X; \mathcal{O}_X)$ est induite par celle de $\mathcal{C}(X)$, et la proposition est démontrée.

4. La topologie de Mor (X;Y).

Nous commencerons par un lemme.

Soient U' et U'' des ouverts de $\mathbf{C}^{n'}$ et $\mathbf{C}^{n''}$ respectivement, X un sous-espace analytique réduit de U' et Y un sous-espace analytique de U''. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des applications analytiques de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte. Si $h \in \mathcal{H}$, notons $\mathcal{O}_h$ le faisceau structural du graphe de h, et $\mathcal{J}_h$ le noyau de l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{X \times Y} \to \mathcal{O}_h.$$

LEMME 1. — *Soient* $K' \subset U'$ *et* $K'' \subset U''$ *des polycylindres privilégiés pour* $\mathcal{O}_{X'}$ *et* $\mathcal{O}_{X''}$ *respectivement, et* $K = K' \times K''$. *L'ensemble* W *des* $h \in \mathcal{H}$ *tels que* K *soit privilégié pour* $\mathcal{O}_h$ *et* $\mathcal{J}_h$ *est ouvert dans* $\mathcal{H}$ *et l'application* $h \mapsto B(K, \mathcal{J}_h)$ *de* W *dans* $\mathfrak{G}_K(\mathcal{O}_{X \times Y})$ *est continue.*

Démonstration. — $\mathcal{H}$ est un sous-espace de $H^0(X; \mathcal{O}_X^{n''})$. D'autre part, $B(K; \mathcal{O}_{X \times Y})$ est quotient direct de $B(K; \mathcal{O}_{X \times U''})$, donc $\mathfrak{G}_K(\mathcal{O}_{X \times Y})$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{G}_K(\mathcal{O}_{X \times U''})$. D'après la proposition 4 du § 7, si K est privilégié pour $\mathcal{O}_h$, il l'est aussi pour $\mathcal{J}_h$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble W des $h \in H^0(X; \mathcal{O}_X^{n''})$ telles que K soit privilégié pour $\mathcal{O}_h$ est ouvert dans $H^0(X; \mathcal{O}_X^{n''})$ et que l'application $h \mapsto B(K; \mathcal{O}_h)$ de W dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{O}_{X \times U''})$ (espace des modules quotients de $B(K; \mathcal{O}_{X \times U''})$ admettant une résolution finie directe) est continue.

Soit $K'_1 \subset U'$ un polycylindre $\mathcal{O}_X$-privilégié tel que $K' \subset \mathring{K}'_1$ (par exemple le transformé de K' par une homothétie de centre $x' \in \mathring{K}'$ et de rapport $1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit). Posons $S = B(K'_1)^{n''}$; l'application $(h, x) \mapsto h(x)$ de $S \times K'_1$ dans $\mathbf{C}^{n''}$ est analytique. Soit γ l'automorphisme de variété analytique *banachique* de $S \times K'_1 \times \mathbf{C}^{n''}$ défini par

$$\gamma(h, x', x'') = (h, x', x'' + h(x'))\,;$$

notons Γ le sous-espace analytique *banachique* de $S \times K'_1 \times \mathbf{C}^{n''}$ image de $S \times (X \cap K'_1) \times \{0\}$ par γ. Le faisceau $\mathcal{O}_{S\times X\times\{0\}}$ est S-anaplat, il en est donc de même de $\mathcal{O}_\Gamma$; d'autre part $\mathcal{O}_\Gamma(h) = \mathcal{O}_h\big|_X$. Par suite l'ensemble S_1 des $h \in S$ tels que K soit $\mathcal{O}_h\big|_X$-privilégié est ouvert dans S et l'application $h \to B(K; \mathcal{O}_h\big|_X)$ de S_1 dans $\mathfrak{G}_K(\mathcal{O}_{X\times U''})$ est analytique, donc continue. En prenant une section de l'épimorphisme direct

$$S = B(K'_1)^{n''} \to B(K'_1\,; \mathcal{O}_X^{n''}),$$

et en remarquant que

$$H^0(X; \mathcal{O}_X^{n''}) \to B(K'_1\,; \mathcal{O}_X^{n''})$$

est continue, on en déduit le lemme.

THÉORÈME 2. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques,* X *compact et réduit. La topologie sous-jacente à la structure d'espace analytique de* Mor(X; Y) *coïncide avec la topologie de la convergence compacte des applications analytiques de* X *dans* Y.

Démonstration. — Notons $\mathcal{H}$ l'espace des applications analytiques de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte.

a) *L'application identique :* $\mathcal{H} \to \mathrm{Mor}(X; Y)$ *est continue.* Soit $h \in \mathcal{H}$. On peut trouver une cuirasse $M' = ((\varphi_i), (K_i), \ldots)$ sur $X \times Y$ telle que, pour tout i, la carte φ_i soit de la forme $\varphi'_i \times \varphi''_i$, où $\varphi'_i : X_i \to U'_i$ et $\varphi''_i : Y_i \to U''_i$ sont des cartes de X et Y respectivement, et K_i de la forme $K'_i \times K''_i$, et que h vérifie les conditions suivantes :

(i) $h(\overline{X_i}) \subset Y_i$,

(ii) M est $(\mathcal{O}_{X\times Y}, \mathcal{O}_h)$-privilégiée, où $\mathcal{O}_h$ est le faisceau structural du graphe de h.

Par définition de la topologie de $\mathcal{H}$, l'ensemble $\mathcal{H}'$ des $h' \in \mathcal{H}$ vérifiant (i) est ouvert, et le lemme 1 montre que l'ensemble $\mathcal{H}''$ des $h' \in \mathcal{H}'$ vérifiant (ii) est ouvert dans $\mathcal{H}'$ et que l'application

$$h \mapsto (\mathrm{B}(\mathrm{K}_i\,;\,\mathcal{O}_h))$$

de $\mathcal{H}''$ dans $\Pi\, \mathfrak{G}_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}})$ est continue. Comme $\mathrm{H}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ est un sous-espace de $\Pi\, \mathfrak{G}_{\mathrm{K}_i}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}})$, l'assertion (a) en résulte.

b) *L'application identique* $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \mapsto \mathcal{H}$ *est continue*. Le sous-espace Γ de $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \times \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ formé des $(h, x, h(x))$ est le sous-espace universel, donc la projection $\Gamma \mapsto \mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ est propre. Par suite, pour tout ouvert W de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, l'ensemble des h dont le graphe est contenu dans W est ouvert dans $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$, d'où (b), et le théorème est démontré.

5. Conséquences.

Voici, pour terminer, deux exemples de conséquences des théorèmes 1 et 2.

COROLLAIRE 1. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques,* X *compact et réduit, et soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application analytique. Il existe un voisinage* W *de* f *pour la topologie de la convergence compacte et des points* $x_1, \ldots, x_n$ *dans* X *tels que si deux applications analytiques de* X *dans* Y *appartiennent à* W *et coïncident aux points* $x_1, \ldots, x_n$*, elles sont égales.*

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathrm{X}$, soit D_x le sous-espace analytique de $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \times \mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$ formé des couples (f', f'') tels que $f'(x) = f''(x)$. On a

$$\bigcap_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{D}_x = \Delta\,,$$

diagonale de $\mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y}) \times \mathrm{Mor}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})$. Il existe donc des points $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{D}_{x_i}$$

coïncide avec Δ sur un voisinage $\mathrm{W} \times \mathrm{W}$ de (f, f).

COROLLAIRE 2 [16]. — *Soit* X *un espace analytique compact. L'ensemble des automorphismes de* X *est ouvert dans* Mor(X; X). *Muni de la structure analytique induite et de sa loi de composition, c'est un groupe de Lie complexe. Si* X *est réduit, sa topologie coïncide avec la topologie de la convergence compacte.*

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 1, la seconde de la remarque 1 qui suit le théorème 1, la troisième du théorème 2.

[16] Ce résultat a été obtenu indépendamment par Kaup [20]; dans le cas où X est réduit, il est connu depuis 1960 (Kerner [21]).

INDEX TERMINOLOGIQUE ET DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et E. Vesentini, Théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets, *Séminaire Ehresmann*, 1962/63, Dép. Math. Fac. Sc., Paris.

[2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[3] N. Bourbaki, Variétés, Fascicule de Résultats I, à paraître Hermann édit., Paris.

[4] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *Journal de Math. pures et appliquées*, t. 19, 1940, 1-26.

[5] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Appendice, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Sup.*, t. 61, 1944, 149-197.

[6] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. 78, 1950, 28-64.

[7] H. Cartan, Funzioni e varietà complesse, Faisceaux analytiques cohérents, *Cours au Centro Internazionale Matematico Estivo*, 1964, Roma.

[8] H. Cartan et J. P. Serre, Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques complexes compactes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 237, 1953, 128-130.

[9] Wei Liang Chow und B. L. Van der Waerden, Uber Zugeordnete Formen und algebraischen Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen*, t. 113, 1937, 692-704.

[10] A. Douady, Espace des sous-modules d'un module de Banach, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 258, 15 juin 1964, 5783-5785.

[11] A. Douady, Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes (d'après M. Kuranishi), *Séminaire Bourbaki*, n° 277, déc. 1964, Institut Henri Poincaré, Paris.

[12] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Structuren, *Publ. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, 5, 1960, P.U.F. édit., Paris.

[13] H. Grauert und R. Remmert, Komplexe Räume, *Math. Annalen*, t. 136, 1958, 245-318.

[14] A. Grothendieck, Théorie de Fredholm, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. 84, 1956, 319-384.

[15] A. GROTHENDIECK, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : Les schémas de Hilbert, *Séminaire Bourbaki*, n° 221, mai 1961, Institut Henri Poincaré, Paris.

[16] A. GROTHENDIECK, Techniques de constructions en géométrie analytique IX, Quelques problèmes de modules, *Sém. H. Cartan,* 1960/61, Ecole Normale Sup., Paris.

[17] R. GUNNING and H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, *Prentice Hall édit.,* U.S.A., 1965.

[18] HILLE and PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, *Colloquium A.M.S. édit.,* 1957.

[19] Ch. HOUZEL, Géométrie analytique locale I à IV, *Sém. H. Cartan,* 1960/61, Ecole Normale Sup., Paris.

[20] W. KAUP, Infinitesimale Transformationengruppen komplexer Räume, *Math Annalen,* t. 160, 1965, 72-92.

[21] H. KERNER, Ueber die Automorphismengruppen kompacter komplexer Räume, *Archiv. Math.,* t. 11, 1960, 282-288.

[22] K. KODAIRA and C. SPENCER, On the deformations of complex analytic structures, *Annals of Math.,* t. 67, 1958, 328-460.

[23] K. KODAIRA, L. NIRENBERG and D. C. SPENCER, On the existence of deformations of complex analytic structures, *Annals of Math.,* t. 68, 1958, 450-459.

[24] M. KURANISHI, On the locally complete families of complex analytic structures, *Annals of Math.,* t. 75, 1962, 536-577.

[25] S. LANG, Introduction to differentiable manifolds, *Interscience Publishers* édit., 1962.

[26] B. MALGRANGE, Lectures on the theory of functions of several complex variables, *Tata Institute,* Bombay, 1958.

[27] J.-P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.,* t. 61, 1955, 197-278.

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1965).

Manuscrit reçu le 19 *octobre* 1965.

ADRIEN DOUADY,
Faculté des Sciences de Nice
Parc Valrose
06-Nice