ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AIMÉE BAILLETTE

Étude de quelques problèmes relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles et à la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction presque périodique

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 1 (1966), p. 97-120

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_97_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 1 (1966), 97-120.

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX FONCTIONS APPROCHABLES PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES ET A LA TRANSFORMÉE DE FOURIER-CARLEMAN D'UNE FONCTION PRESQUE PÉRIODIQUE

par Aimée BAILLETTE

Introduction

La première partie de ce travail, parue au Journal d'Analyse Mathématique sous le titre « Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles » (vol. X, 1962-1963, p. 91-115) est l'étude du prolongement dans certains domaines Δ, de fonctions holomorphes dans un ouvert, approchables par des sommes d'exponentielles dont les exposants appartiennent à une suite donnée Λ. La méthode de prolongement utilisée est due à J. P. Kahane (Ann. Inst. Fourier, V, 1953-1954, p. 39-130). Pour étudier les domaines Δ nous avons défini « l'indice de saturation » de la suite Λ (coefficient directement lié à la forme des domaines Δ); nous avons aussi établi et utilisé quelques propriétés des produits canoniques. Les résultats obtenus pour les fonctions holomorphes nous ont permis d'obtenir des résultats concernant les fonctions approchables sur un segment de droite par des sommes d'exponentielles.

Les deux chapitres qui suivent cette introduction sont consacrés à d'autres problèmes. Dans le chapitre I nous avons cherché une caractérisation des suites Λ de nombres réels (suites (P)) qui sont le spectre d'une fonction presque périodique indéfiniment dérivable, dont toutes les dérivées sont presque périodiques et qui a pour transformée de Fourier-Carleman l'inverse du produit canonique qui s'annule sur la suite Λ. Les fonctions presque périodiques associées aux suites (P) ont des propriétés remarquables que nous étudions au chapitre I et que nous utilisons dans les démonstrations du chapitre II. Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de deux problèmes distincts. Le premier est relatif à l'approximation pondérée des fonctions continues sur la droite réelle par des polynômes ou des sommes d'exponentielles imaginaires. Cette étude nous a été inspirée par un travail de P. Koosis (1). Le deuxième problème est relatif au prolongement dans tout le plan d'une fonction de deux variables réelles indéfiniment dérivable dans un demi-plan fermé.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à M. Kahane qui a accepté de diriger ce travail; qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apportée, ses conseils et ses encouragements constants.

Je remercie également M. Schwartz qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury et M. Lesieur qui a bien voulu me proposer le sujet de deuxième thèse.

(1) Sur l'approximation pondérée par des polynômes et par des sommes d'exponentielles imaginaires. *Ann. Scien. Ec. Norm. Sup.* (1964), 81 (3), 387-408.

CHAPITRE I

SUR LA TRANSFORMÉE DE FOURIER-CARLEMAN D'UNE FONCTION PRESQUE PÉRIODIQUE DE SPECTRE DONNÉ

Nous nous proposons d'étudier une classe particulière de suites de nombres réels, la classe des suites (P).

Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite de nombres réels distincts non nuls, à laquelle nous supposerons que l'on peut associer un produit canonique

$$C_\Lambda(w) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{w}{\lambda_k}\right).$$

Nous dirons que Λ est une suite (P) si la fonction $1/C_\Lambda(w)$ est la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction f_Λ presque périodique indéfiniment dérivable, dont toutes les dérivées sont presque périodiques.

Des exemples de suites (P) ont déjà été étudiés dans [6] (p. 65-69) et [7] (lect. 22) où l'on montre que pour certaines de ces suites, la fonction presque périodique associée jouit de propriétés extrémales dans la classe des fonctions moyennes périodiques dont le spectre est contenu dans la suite considérée.

Dans ce qui suit, le paragraphe 1 est consacré à l'étude de quelques propriétés des suites (P) et de la fonction presque périodique associée. Aux paragraphes 2 et 3 nous indiquons un moyen simple de construire des suites (P) et nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit une suite (P).

1. Quelques propriétés des suites (P).

Rappelons quelques résultats relatifs aux suites (P) ([6], p. 65). Si Λ est une suite (P) on a

$$f_\Lambda(x) = -i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_k x}}{C'_\Lambda(\lambda_k)},$$

$$f_\Lambda^{(n)}(0) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} |C'_\Lambda(\lambda_k)\lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Pour

$$w = u + iv, \quad v \neq 0,$$

$$\frac{1}{C_\Lambda(w)} = \int_{-\infty}^{0} f_\Lambda(x)\, e^{-ixw}\, dx \quad \text{si} \quad v > 0,$$

$$\frac{1}{C_\Lambda(w)} = -\int_{0}^{\infty} f_\Lambda(x)\, e^{-ixw}\, dx \quad \text{si} \quad v < 0,$$

d'où

$$\left|\frac{w^n}{C_\Lambda(w)}\right| \leqslant \frac{1}{|v|} \sup_x |f_\Lambda^{(n)}(x)| = \frac{M_n}{|v|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Remarque 1.1. — Soient λ_k et $\lambda_{k'}$ deux termes de la suite Λ tels que l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k'}[$ ne contienne pas de points de la suite Λ. La fonction

$$\Phi(w) = \frac{w^n(w - \lambda_k)(w - \lambda_{k'})}{C_\Lambda(w)}$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle de diamètre $[\lambda_k, \lambda_{k'}]$ ainsi que sur ce cercle. Elle est bornée sur ce cercle car

$$|\Phi(w)| \leqslant \frac{M_n}{|v|} |w - \lambda_k| \, |w - \lambda_{k'}| = M_n |\lambda_k - \lambda_{k'}|.$$

$\Phi(w)$ est bornée par le même nombre à l'intérieur du cercle; d'où, pour $\lambda_k \leqslant u \leqslant \lambda_{k'}$,

$$|C_\Lambda(u)| \geqslant \frac{|u^n|\,(u - \lambda_k)(\lambda_{k'} - u)}{M_n(\lambda_{k'} - \lambda_k)}$$

Nous utiliserons cette remarque pour démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soient* $\Lambda = (\lambda_k)$ *et* $\Gamma = (\gamma_k)$ *deux suites* (P) *telles que :*

$$|\lambda_k - \gamma_{k'}| \geqslant h > 0 \quad \textit{quels que soient } k \textit{ et } k'. \tag{1.1}$$

La réunion Ω *des suites* Λ *et* Γ *est une suite* (P).

Démonstration. — Il suffira de prouver que

$$\lim_{k\to\infty} |C'_\Omega(\gamma_k)\gamma_k^{-n}| = \infty \tag{1.2}$$

$$\lim_{k \to \infty} |C'_\Omega(\lambda_k)\, \lambda_k^{-n}| = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

On a

$$C'_\Omega(\gamma_k) = C_\Lambda(\gamma_k)\, C'_\Gamma(\gamma_k).$$

Soit $\lambda_{k'} < \gamma_k < \lambda_{k''}$, l'intervalle $]\lambda_{k'}, \lambda_{k''}[$ ne contenant pas de point de la suite Λ. D'après la remarque 1.1 et l'hypothèse (1.1)

$$|C_\Lambda(\gamma_k)| \geqslant \frac{|\gamma_k^n|\, h\,(\lambda_{k''} - \lambda_{k'} - h)}{M_n\,(\lambda_{k''} - \lambda_{k'})} \geqslant \frac{|\gamma_k^n|}{M_n} \frac{h}{2}.$$

Γ étant une suite (P),

$$|C'_\Gamma(\gamma_k)| \geqslant A_n\, |\gamma_k^n|\,;$$

donc

$$|C'_\Omega(\gamma_k)| \geqslant B_n\, |\gamma_k^{2n}| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ce qui prouve (1.2). On démontre de même (1.3).

Remarquons que la conclusion du théorème 1.1 subsiste si l'on remplace l'hypothèse (1.1) par

$$\inf_{k'} |\lambda_k - \gamma_{k'}| \geqslant \frac{h}{|\lambda_k|^\alpha} \quad \text{et} \quad \inf_{k'} |\lambda_{k'} - \gamma_k| \geqslant \frac{h}{|\gamma_k|^\alpha}$$

α et h étant des constantes positives.

THÉORÈME 1.2. — *Si la suite Λ est une suite* (P) *elle est mesurable; sa densité est égale à la densité effective de Beurling et Malliavin.*

Démonstration. — Si Λ est une suite (P), la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C'_\Lambda(\lambda_k)}$ est absolument convergente. Il résulte d'un théorème de Krein ([11], p. 258-259) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |C_\Lambda(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty\,; \tag{1.4}$$

la suite Λ est donc mesurable ([10] et [11], p. 251); nous désignerons sa densité par D.

D'après un théorème de Beurling et Malliavin ([3], p. 292, [8] et [12]) l'inégalité (1.4) entraîne que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction entière $M(w)$, de type exponentiel inférieur à ε, bornée sur l'axe réel, telle que $C_\Lambda(w)\, M(w)$ soit aussi une fonction entière de type exponentiel bornée sur l'axe réel. Le type de cette fonction ne dépasse pas

$\pi D + \varepsilon$. On peut définir la densité effective D_c de la suite Λ de la manière suivante (voir [12]) : πD_c est la borne inférieure des types des fonctions entières de type exponentiel, bornées sur l'axe réel, nulles sur Λ. On a donc $\pi D_c \leqslant \pi D + \varepsilon$. On sait aussi que $\pi D \leqslant \pi D_c$ ([8]); donc $D = D_c$.

THÉORÈME 1.3. — *Si* Λ *est une suite* (P) *de densité* D, *la fonction presque périodique associée* f_Λ *est nulle sur l'intervalle* $[-\pi D, \pi D]$.

Démonstration. — *Soit* $|t| < \pi D$; considérons la fonction

$$f(x) = f_\Lambda(x + t) = -i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_k(x+t)}}{C'_\Lambda(\lambda_k)} .$$

Sa transformée de Fourier-Carleman

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_k t}}{C'_\Lambda(\lambda_k)(w - \lambda_k)} = \frac{G(w)}{C_\Lambda(w)},$$

est bornée hors des cercles de rayon r arbitraire, centrés aux points λ_k ; $G(w)$ est donc une fonction entière de type exponentiel dont l'indicatrice $h_G(\theta)$ satisfait l'inégalité

$$h_G(\theta) \leqslant h_{C_\Lambda}(\theta) = \pi D\,|\sin\theta|.$$

La fonction

$$E(w) = \frac{e^{itw}}{C_\Lambda(w)} - F(w) = \frac{e^{itw} - G(w)}{C_\Lambda(w)}$$

est entière de type exponentiel nul; en outre

$$\lim_{|v|\to\infty} |E(iv)| = 0 ;$$

donc, d'après [4] (p. 169), $E(w) \equiv 0$; d'où

$$F(w) = \frac{e^{itw}}{C_\Lambda(w)} .$$

On verrait de même que $f'(x)$ a pour transformée de Fourier-Carleman

$$iwF(w) = \frac{iwe^{itw}}{C_\Lambda(w)} .$$

On a donc pour $v > 0$

$$F(iv) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{vx}\, dx = \frac{f(0)}{v} - \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{0} f'(x)\, e^{vx}\, dx = \frac{f(0)}{v} + F(iv).$$

On en déduit que $f(0) = 0$, c'est-à-dire $f_\Lambda(t) = 0$ pour $|t| < \pi D$; par continuité on a $f_\Lambda(t) = 0$ pour $|t| \leqslant \pi D$.

Soit E (Λ) la classe des fonctions presque périodiques, indéfiniment dérivables, de spectre contenu dans Λ, dont toutes les dérivées sont presque périodiques. La démonstration du théorème 1.3 montre que f_Λ n'est pas la seule fonction de E (Λ) nulle à l'origine avec toutes ses dérivées. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soit* $f \in E(\Lambda)$, Λ *étant une suite* (P). *Pour que* $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *il faut et il suffit que la transformée de Fourier-Carleman de f soit égale à* $G(w)/C_\Lambda(w)$, $G(w)$ étant une fonction entière de type exponentiel telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{G(\lambda_k)\, \lambda_k^n}{C'_\Lambda(\lambda_k)} \right| < \infty \tag{1.5}$$

$$\lim_{|v| \to \infty} \left| \frac{G(iv)\, v^n}{C_\Lambda(iv)} \right| = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G(u)|}{1 + u^2}\, du < \infty \tag{1.7}$$

Démonstration. — On sait que ces conditions sont suffisantes ([5]). Montrons qu'elles sont aussi nécessaires :

Les inégalités (1.5) résultent du fait que $f \in E(\Lambda)$. D'autre part pour $w = u + iv$, $v > 0$ on a

$$\frac{G(w)}{C_\Lambda(w)} = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{(iw)^n} \int_{-\infty}^{0} f^{(n)}(x)\, e^{-iwx}\, dx\,;$$

d'où

$$\left| \frac{w^n G(w)}{C_\Lambda(w)} \right| \leqslant \frac{1}{|v|} \sup_x |f^{(n)}(x)| = \frac{A_n}{|v|}\,;$$

la même inégalité vaut pour $v < 0$, d'où (1.6). Enfin, on vient de voir que pour $v \neq 0$

$$|G(u + iv)| \leqslant \frac{A_0}{|v|} |C_\Lambda(u + iv)|\,;$$

donc pour $|v| \leqslant 1$, $v \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G(u + iv)|}{1 + u^2}\, du \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |C_\Lambda(u + iv)|}{1 + u^2}\, du + K_1 \log \frac{1}{|v|}\,;$$

or d'après [10] et [11] (p. 258-261)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|G(u+iv)|}{1+u^2}\,du \leqslant K_2 \log \frac{1}{|v|} + K_3\,;$$

on en déduit comme dans [11] (p. 262) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|G(u)|}{1+u^2}\,du < \infty\,,$$

ce qui démontre (1.7).

Remarque 1.2. — La fonction

$$\frac{G(w)}{C_\Lambda(w)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_k)}{C'_\Lambda(\lambda_k)(w-\lambda_k)}$$

est bornée hors des cercles de rayon r arbitraire, centrés aux points de la suite Λ; donc

$$h_G(\theta) \leqslant \pi D\,|\sin\theta|,$$

D étant la densité de la suite Λ. D'après [11] (p. 251) $h_G(\theta)$ est de la forme

$$h_G(\theta) = \pi\Delta\,|\sin\theta| - \alpha\sin\theta \quad (\Delta \geqslant 0,\ \alpha \text{ réel});$$

donc

$$\pi\Delta \pm \alpha \leqslant \pi D.$$

Soit $G_1(w) = e^{i\beta w}\,G(w)$, $|\alpha+\beta| < \pi D - \pi\Delta$. D'après le théorème 1.4, $G_1(w)/C_\Lambda(w)$ est la transformée de Fourier-Carleman de la fonction $f_1(x) = f(x+\beta)$, telle que $f_1(0) = 0$; f est donc nulle sur l'intervalle $[-\pi D + \pi\Delta - \alpha,\ \pi D - \pi\Delta - \alpha]$.

2. Suites (P) symétriques.

Soit $\Lambda = (\pm\lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, une suite symétrique; nous supposerons la suite (λ_k) positive, croissante, de densité supérieure finie. A chaque terme λ_k associons le point A_k de coordonnées (k, λ_k). Soit a_k l'abscisse du point d'intersection de la droite $A_k\,A_{k+1}$ avec l'axe réel :

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{k+1-a_k}{k-a_k}.$$

THÉORÈME 2.1.

1°) *Si* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$, Λ *est une suite* (P);

2°) *Si* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ a_k < \infty$, Λ *n'est pas une suite* (P).

Ce théorème montre en particulier que si la ligne polygonale L, ayant pour sommets les points A_k, est convexe et n'a pas d'asymptote, Λ est une suite (P); si L est concave, Λ ne peut pas être une suite (P).

Pour que Λ soit une suite (P) il est nécessaire et suffisant que

$$\lim_{k\to\infty} |C'_\Lambda(\lambda_k)\,\lambda_k^{-n}| = \infty \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)\ ;$$

le théorème 2.1 est donc une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 2.1. — *Si la suite* Λ *est telle que*

$$\frac{p+1}{2} < \underline{\lim}_{k\to\infty}\ a_k \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\ a_k < \frac{q+1}{2},$$

p et q étant deux entiers relatifs, pour $k > k_0(p, q)$ on a

$$K_1\,\lambda_k^p \leqslant |C'_\Lambda(\lambda_k)| \leqslant K_2\,\lambda_k^q,$$

K_1 et K_2 étant deux constantes qui dépendent respectivement de p et q.

Démonstration. — Nous nous bornerons à démontrer la deuxième inégalité, la première se démontrant de manière analogue.

Pour $k > k_0(q)$ on a

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} < \frac{k + 1 - \dfrac{q+1}{2}}{k - \dfrac{q+1}{2}}\,.$$

$$|C'_\Lambda(\lambda_k)| = \frac{2}{\lambda_k} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2}\right|$$

$$\leqslant A_1\,\lambda_k^{2k_0-1} \prod_{\substack{j=1+k_0\\ j\neq k}}^{\infty} \left|1 - \left(\frac{k - \dfrac{q+1}{2}}{j - \dfrac{q+1}{2}}\right)^2\right|.$$

Pour q impair on a

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k-\frac{q+1}{2}}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k - \frac{q+1}{2}}{j} \right)^2 \right| = \frac{1}{2},$$

et pour q pair

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k-\frac{q}{2}}}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{k - \frac{q+1}{2}}{j - \frac{1}{2}} \right)^2 \right| = \frac{\pi}{2} \left| k - \frac{q+1}{2} \right|.$$

On en déduit

$$\left| C'_\Lambda (\lambda_k) \right| \leqslant A_2 \, \lambda_k^{2k_0 - 1} \; k^{q+1-2k_0} \leqslant K_2 \, \lambda_k^q .$$

THÉORÈME 2.2. — *Soient* $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ *et* $\Gamma = (\pm \gamma_k)$ *deux suites symétriques telles que :*

$$|\lambda_k - \gamma_{k'}| \geqslant h > 0 \quad \textit{quels que soient } k \textit{ et } k' ,$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \, b_k = b > -\infty \quad \textit{avec} \quad \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \frac{k+1-b_k}{k-b_k} .$$

Si Λ *est une suite* (P), *la réunion* Ω *des suites* Λ *et* Γ *est une suite* (P).

Démonstration. — 1°) $C'_\Omega (\gamma_k) = C_\Lambda (\gamma_k) \, C'_\Gamma (\gamma_k)$.

On démontre comme dans le théorème 1.1 l'inégalité

$$|C_\Lambda (\gamma_k)| \geqslant \frac{\gamma_k^n}{M_n} \frac{h}{2} .$$

D'après le lemme 2.1, si p est entier relatif tel que $\dfrac{p+1}{2} < b$, on a pour $k > k_0(p)$

$$|C'_\Gamma (\gamma_k)| \geqslant K_1 \, \gamma_k^p ;$$

d'où

$$|C'_\Omega (\gamma_k)| \geqslant \frac{K_1 h}{2 M_n} \gamma_k^{n+p} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2°) $C'_\Omega (\lambda_k) = C'_\Lambda (\lambda_k) \, C_\Gamma (\lambda_k)$.

Cherchons une minoration de

$$|C_\Gamma (\lambda_k)| = \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_j^2} \right| .$$

Soit $\gamma_{k'} < \lambda_k < \gamma_{k'+1}$ et soit q un entier relatif tel que $q + 1 < b$. Pour $k > k_0(q)$ et $j_0(q) < j < k'$, on a, d'après l'hypothèse,

$$\frac{\lambda_k}{\gamma_j} > \frac{\gamma_{k'}}{\gamma_j} \geqslant \frac{k' - q}{j - q}\,;$$

pour $j > k' + 1$

$$\frac{\lambda_k}{\gamma_j} < \frac{\gamma_{k'+1}}{\gamma_j} < \frac{k' - q}{j - q - 1}\,;$$

enfin

$$\left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k'}^2}\right| \left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k'+1}^2}\right| \geqslant \frac{2h\,(\gamma_{k'+1} - \gamma_{k'} - h)}{\gamma_{k'}\ \gamma_{k'+1}} \geqslant \frac{A_1}{\lambda_k^2}\,.$$

On en déduit

$$|C_\Gamma(\lambda_k)| \geqslant A_2\, \lambda_k^{2j_0-2} \prod_{\substack{j=j_0+1 \\ j\neq k'}}^{\infty} \left|1 - \left(\frac{k'-q}{j-q}\right)^2\right|$$

$$\geqslant A_3\, \lambda_k^{2j_0-2}\, k'^{2q-2j_0}.$$

Λ étant une suite (P),

$$|C_\Lambda(\lambda_k)| \geqslant A_n\, \lambda_k^n\ ;$$

donc

$$|C'_\Omega(\lambda_k)| \geqslant K_n\, \lambda_k^{n+2q-2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

ceci achève de démontrer le théorème 2.2.

Le théorème 2.1 permet de construire des suites (P) symétriques mais ne donne pas une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite Λ soit une suite (P). Il existe en effet des suites (P) symétriques telles que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ a_k = \infty \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{k\to\infty}}\ a_k = -\infty.$$

Ainsi la suite symétrique

$$\lambda_{2k-1} = 2^k, \quad \lambda_{2k} = 2^k + 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

est une suite (P) telle que

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \infty.$$

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la suite symétrique* Λ *soit une suite* (P) *est que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log \lambda_k} \int_0^1 \frac{t + \lambda_k\left[\left(D(\lambda_k t) - D\frac{\lambda_k}{t}\right)\right]}{1-t^2}\, dt = \infty,$$

$D(t)$ *étant la fonction de densité de la suite* Λ

$$D(t) = \frac{1}{t} \sum_{0<\lambda_k<t} 1\,.$$

Ce théorème résulte des lemmes suivants :

LEMME 2.2. — *Soit* r *un nombre réel positif n'appartenant pas à la suite* Λ; *on a*

$$\log |C_\Lambda(r)| = 2r \int_0^1 \frac{D(rt) - D\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t^2}\, dt.$$

Ce lemme est démontré dans [9] (p. 127).

LEMME 2.3. — *Soit*

$$\Lambda_k = \Lambda - \{\lambda_k\} - \{-\lambda_k\}.$$

On a

$$\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)| = 2 \int_0^1 \frac{t + \lambda_k\left[D(\lambda_k t) - D\left(\frac{\lambda_k}{t}\right)\right]}{1-t^2}\, dt.$$

Pour démontrer ce lemme il suffit d'appliquer le lemme 2.2 au produit canonique associé à la suite Λ_k. La fonction de densité de cette suite est en effet

$$\begin{array}{lll} D(t) - \dfrac{1}{t} & \text{pour} & t > \lambda_k, \\ D(t) & \text{pour} & 0 \leqslant t \leqslant \lambda_k. \end{array}$$

Le théorème 2.3 découle du lemme 2.3. En effet pour que Λ soit une suite (P) il faut et il suffit que

$$\lim_{k\to\infty} |C'_\Lambda(\lambda_k)\, \lambda_k^{-n}| = \infty \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ou

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)|}{\log \lambda_k} = \infty.$$

Remarque 2.1. — Il est plus facile de démontrer directement les théorèmes 2.1 et 2.2 que de les déduire du théorème 2.3.

Remarque 2.2. — Si $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ est une suite (P) symétrique, la suite (λ_k) a un indice de condensation nul. En effet, Λ étant mesurable, d'après [2] (p. 25-27), son indice de condensation est

$$\delta = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_k} \log \left| \frac{1}{C'_\Lambda(\lambda_k)} \right| ;$$

comme l'indice de condensation n'est pas négatif et que $|C'_\Lambda(\lambda_k)|$ reste supérieur à un nombre positif, on a $\delta = 0$.

3. Suites (P) non symétriques.

Nous allons établir un théorème analogue au théorème 2.3 pour les suites Λ non symétriques.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)$ *une suite mesurable. Pour que* Λ *soit une suite* (P) *il faut et il suffit que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log |\lambda_k|} \int_0^1 \left[|\lambda_k| \varphi(\lambda_k, t) + \frac{1}{1-t} \right] dt = \infty$$

avec

$$\varphi(r, t) = \frac{D(rt)}{1-t} + \frac{D(-rt)}{1+t} -$$
$$-\frac{1}{t} D\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t} D\left(-\frac{r}{t}\right) \frac{1}{1+t},$$

D (t) *étant la fonction de densité de la suite* Λ

$$D(t) = \frac{n(t)}{t};$$

$$n(t) = \sum_{0<\lambda_k<t} 1 \quad si \quad t > 0, \qquad n(t) = \sum_{t<\lambda_k<0} (-1) \quad si \quad t < 0.$$

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3.1. — *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)$ *une suite mesurable et soit* r *un nombre réel n'appartenant pas à* Λ. *On a*

$$\log |C_\Lambda(r)| = |r| \int_0^1 \varphi(r, t)\, dt.$$

Démonstration. — On a

$$|\log C_\Lambda(r)| = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \log \left|1 - \frac{r}{t}\right| dn(t) = \lim_{R\to\infty} I(R).$$

Soit $|r| = \rho$, $r = \rho\alpha$, et soit β tel que $0 < \beta < 1$. Pour β assez voisin de 1 on a

$$I(R) = \int_{-R}^{-\rho/\beta} + \int_{-\rho\beta}^{0} + \int_{0}^{\rho\beta} + \int_{\rho/\beta}^{R} \log \left|1 - \frac{r}{t}\right| dn(t) + \delta(r),$$

en posant $\delta(r) = 0$ si $-r \notin \Lambda$ et $\delta(r) = \log 2$ si $-r \in \Lambda$. En intégrant par parties on obtient

$$I(R) = [n(\rho\beta) - n(-\rho\beta)] \log \frac{1}{\beta} + r \int_{r/R}^{\alpha\beta} \varphi(r, t)\, dt + \theta(R),$$

$\theta(R)$ tendant vers zéro lorsque R tend vers l'infini puisque Λ est mesurable. En faisant tendre β vers 1, on a donc

$$I(R) = r \int_{r/R}^{\alpha} \varphi(r, t)\, dt + \theta(R);$$

d'où

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = r \int_0^{\alpha} \varphi(r, t)\, dt = |r| \int_0^1 \varphi(r, t)\, dt.$$

LEMME 3.2. — *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)$ *une suite mesurable et soit*

$$\Lambda_k = \Lambda - \{\lambda_k\};$$

on a

$$\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)| = \int_0^1 \left[\lambda_k\, \varphi(\lambda_k, t) + \frac{1}{1-t}\right] dt.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.1 à la suite Λ_k. En effet :

1° Si $\lambda_k > 0$ la fonction de densité de Λ_k est

$$
\begin{array}{lll}
D(t) & \text{pour} & t \leqslant \lambda_k, \\
D(t) - \dfrac{1}{t} & \text{pour} & t > \lambda_k;
\end{array}
$$

2° Si $\lambda_k < 0$ la fonction de densité de Λ_k est

$$
\begin{array}{lll}
D(t) + \dfrac{1}{t} & \text{pour} & t < \lambda_k, \\
D(t) & \text{pour} & t \geqslant \lambda_k.
\end{array}
$$

Revenons à la démonstration du théorème 3.1. Pour que la suite mesurable Λ soit une suite (P) il faut et il suffit que

$$\lim_{k\to\infty} |C'_\Lambda(\lambda_k)\, \lambda_k^{-n}| = \infty \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

ou

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log |C_{\Lambda_k}(\lambda_k)|}{\log |\lambda_k|} = \infty,$$

d'où le théorème 3.1 en vertu du lemme 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Baillette, Sur la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction presque périodique de spectre donné, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 258 (1964), 6049-6051.

[2] V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris (1933).

[3] A. Beurling and P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.*, 108 (1962), 291-309.

[4] R. P. Boas, Entire functions, *Academic Press*, New-York (1954).

[5] L. de Branges, Bernstein Problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), n° 5, 825-832.

[6] J. P. Kahane, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 5 (1953-1954), 39-130.

[7] J. P. Kahane, Mean periodic functions, *Tata Institute of Fundamental Research*, Bombay (1959).

[8] J. P. KAHANE, Travaux de Beurling et Malliavin, *Séminaire Bourbaki* (1961), 62, n° 225, Paris.

[9] P. KOOSIS, Sur la non totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (1958), 75 (3), 125-152.

[10] B. IA LEVINE, Distribution des racines des fonctions entières (en russe), Moscou (1956).

[11] B. IA LEVINE, Distribution of zeros of entire functions, *Amer. Math. Soc.* (1964).

[12] P. MALLIAVIN, Spectre des fonctions moyennes périodiques. Totalité d'une suite d'exponentielles imaginaires sur un segment, *Séminaire Lelong* (1961), n° 11, Paris.

CHAPITRE II

SUR L'APPROXIMATION PONDÉRÉE PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES ET SUR UN PROBLÈME DE PROLONGEMENT

Nous nous proposons d'étudier deux problèmes très différents en utilisant les propriétés des suites (P) et des fonctions presque périodiques associées, qui ont été établies précédemment ([2]).

Le premier problème est relatif à l'approximation pondérée d'une fonction continue sur la droite par des polynômes ou des sommes d'exponentielles imaginaires. Nous généralisons ici un résultat obtenu par P. Koosis dans [5].

Le deuxième problème est l'étude du prolongement d'une fonction de deux variables indéfiniment dérivable dans un demi-plan fermé dont les dérivées successives satisfont certaines inégalités. Nous construisons ce prolongement par une méthode de [1] et, utilisant les propriétés des suites (P), nous établissons des inégalités satisfaites par les dérivées successives de la fonction prolongée dans tout le plan.

1. Application des suites (P) symétriques à l'approximation pondérée.

Nous utiliserons dans ce paragraphe, les mêmes notations que P. Koosis dans [5] :

Soit W une fonction (appelée poids) continue, positive, sur la droite réelle, telle que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n}{W(x)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

$\mathcal{C}_W$ désigne l'espace des fonctions g continues sur la droite réelle, telles que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{g(x)}{W(x)} \right| = 0,$$

espace muni de la norme

$$||g|| = \sup_x \left| \frac{g(x)}{W(x)} \right| .$$

Pour chaque $A > 0$, $\mathcal{C}_W(A)$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{C}_W$ engendré par les exponentielles imaginaires e^{itx}, $|t| \leqslant A$. $\mathcal{C}_W(0)$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{C}_W$ engendré par les polynômes. Enfin pour chaque $A \geqslant 0$, on pose

$$\mathcal{C}_W(A^+) = \bigcap_{A' > A} \mathcal{C}_W(A').$$

THÉORÈME 1.1. — *Pour chaque nombre* $D \geqslant 0$ *il existe un poids* W (*qui dépend de* D), *tel que*

$$\mathcal{C}_W(\pi D) \neq \mathcal{C}_W(\pi D^+) \neq \mathcal{C}_W .$$

Le théorème a été démontré par P. Koosis dans le cas $D = 0$ ([5]). Sa démonstration nous a inspiré celle du théorème 1.1. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1.1. — *Soit* $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ *une suite* (P) *symétrique. Il existe une fonction paire* $W_\Lambda(x)$ *telle que*

$$W_\Lambda(x) \geqslant 1 \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n}{W_\Lambda(x)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2...) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\log W_\Lambda(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^2 W_\Lambda(\lambda_k)}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \infty . \tag{1.4}$$

Démonstration. — Soit (k_n) une suite croissante d'entiers positifs tendant vers l'infini, telle que $\lambda_{k_1} > \max(1, \lambda_1)$. Posons

$$\begin{aligned}
W_\Lambda(x) &= \max(|C_\Lambda(x)|, x^n) && \text{pour } \lambda_{k_n} \leqslant x < \lambda_{k_{n+1}} \quad n = (1, 2, ...)\\
W_\Lambda(x) &= W_\Lambda(\lambda_{k_1}) && \text{pour } 0 \leqslant x < \lambda_{k_1}\\
W_\Lambda(x) &= W_\Lambda(-x) && \text{pour } x < 0.
\end{aligned}$$

D'après le choix de k_1 la condition (1.1) est satisfaite. En outre pour $x \geqslant \lambda_{k_{n+1}}$, on a

$$\frac{x^n}{W_A(x)} \leqslant \frac{1}{x},$$

et la condition (1.2) est satisfaite. Nous allons montrer que si la suite (k_n) est convenablement choisie les conditions (1.3) et (1.4) sont aussi remplies.

Soit l un nombre positif arbitraire et soit I_k l'intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ tel que $k_n \leqslant k < k_{n+1}$. Pour $|I_k| \leqslant l$ on a

$$\int_{I_k} \frac{\log W_A(x)}{1+x^2} dx \leqslant \int_{I_k} \frac{\log^+ |C_A(x)|}{1+x^2} dx + \int_{I_k} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx,$$

la dernière intégrale étant majorée par

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\, n \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} \leqslant nl \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

Pour $|I_k| > l$, soit $0 < h_k < \frac{l}{2}$; d'après [2], pour

$$\lambda_k + h_k \leqslant x \leqslant \lambda_{k+1} - h_k,$$

on a

$$|C_A(x)| \geqslant \frac{x^{n+1} h_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k - h_k)}{M_{n+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)} \geqslant \frac{x^{n+1}}{M_{n+1}} \frac{h_k}{2} \geqslant x^n,$$

pourvu que l'on prenne $h_k = 2\, M_{n+1} / \lambda_k$, ce qui est possible si k_n est assez grand. D'où :

$$\int_{I_k} \frac{\log W_A(x)}{1+x^2} dx \leqslant \int_{I_k} \frac{\log^+ |C_A(x)|}{1+x^2} dx + \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + h_k} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx$$
$$+ \int_{\lambda_{k+1} - h_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{\log x^n}{1+x^2} dx,$$

la somme des deux dernières intégrales étant majorée par

$$2\, n h_k \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} < n\, l \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

On a donc dans tous les cas

$$\int_{\lambda_{k_n}}^{\lambda_{k_{n+1}}} \frac{\log W_A(x)}{1+x^2} dx \leqslant \int_{\lambda_{k_n}}^{\lambda_{k_{n+1}}} \frac{\log^+ |C_A(x)|}{1+x^2} dx + nl \sum_{k > k_n} \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2}.$$

On choisira k_n tel que

$$n\, l \sum_{k>k_n} \frac{\log \lambda_k}{\lambda_k^2} < \frac{1}{n^2} ;$$

la condition (1.3) sera satisfaite en vertu de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\log^+ |C_\Lambda(x)|}{1+x^2}\, dx .$$

On a enfin

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^2 W_\Lambda(\lambda_k)}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \sum_{n=1}^\infty \sum_{k>k_n} \frac{\lambda_k^{n+2}}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty ,$$

pourvu que k_n soit assez grand, en vertu de la convergence des séries

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^n}{|C'_\Lambda(\lambda_k)|} \quad (n = 0, 1, 2, ...) ;$$

la condition (1.4) est donc satisfaite.

Démonstration du théorème 1.1. — Soit $\Lambda = (\pm \lambda_k)$ une suite (P) symétrique de densité D. Soit $\Lambda' = (\pm \lambda'_k)$ la suite symétrique telle que

$$\lambda'_k = \lambda_k \text{ pour } k > 1$$
$$0 < \lambda'_1 < \lambda_1 .$$

Λ' est une suite (P) de densité D. Soit $W_{\Lambda'}$ la fonction associée à Λ' par le lemme 1.1 et posons

$$W(x) = x^2 W_{\Lambda'}(x) \text{ pour } \lambda_{k_n} \leqslant |x| \leqslant \lambda_{k_{n+1}} - \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, ...)$$
$$W(x) = W(\lambda_{k_1}) \text{ pour } |x| < \lambda_{k_1} ;$$

sur l'intervalle $[\lambda_{k_{n+1}} - \varepsilon_n , \lambda_{k_{n+1}}]$ prenons pour $W(x)$ la fonction linéaire qui coïncide avec $x^2 W_{\Lambda'}(x)$ aux extrémités de l'intervalle. $W(x)$ est une fonction continue qui satisfait les conditions (1.1), (1.2) et (1.3) si ε_n est choisi assez petit. En vertu de (1.3) on a d'après [5]

$$\mathcal{C}_W(\pi D^+) \neq \mathcal{C}_W .$$

Pour montrer que $\mathcal{C}_W(\pi D) \neq \mathcal{C}_W(\pi D^+)$, considérons la fonction $F(z) = z\, C_{\Lambda'}(z)$. C'est une fonction entière de type exponentiel, d'indicatrice $\pi D\, |\sin \theta|$; en outre

$$\left| \frac{F(x)}{W(x)} \right| \leqslant \frac{1}{|x|} ;$$

donc

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{F(x)}{W(x)}\right| = 0\,,$$

et $F(x)$ appartient à $\mathcal{C}_W(\pi D^+)$ d'après [5]. Il suffit de montrer qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}_W(\pi D)$.

Soit μ la mesure formée des masses $\pm\dfrac{W(\lambda_k)}{C'_\Lambda(\lambda_k)}$ portées par les points $\pm\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. En vertu de (1.4) μ est finie. En outre μ est orthogonale aux polynômes et aux exponentielles imaginaires e^{itx} telles que $|t| \leqslant \pi D$, car,

$$\int \frac{x_n}{W(x)}\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^n - (-\lambda_k)^n}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = i\,f_\Lambda^{(n)}(0) = 0$$

et

$$\int \frac{e^{itx}}{W(x)}\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{it\lambda_k} - e^{-it\lambda_k}}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = i\,f_\Lambda(t) = 0$$

pour $|t| \leqslant \pi D$. Par contre la mesure μ n'est pas orthogonale à $F(x)$; en effet

$$\int \frac{F(x)}{W(x)}\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(\lambda_k) - F(-\lambda_k)}{C'_\Lambda(\lambda_k)} = 2\,\frac{F(\lambda_1)}{C'_\Lambda(\lambda_1)} \neq 0\,;$$

$F(x)$ n'appartient donc pas à $\mathcal{C}_W(\pi D)$. Ceci achève de démontrer le théorème 1.1.

2. Application des suites (P) à un problème de prolongement.

Soit f une fonction de deux variables réelles x et y, définie, indéfiniment dérivable pour $y \leqslant 0$. On se propose de prolonger f en une fonction indéfiniment dérivable dans tout le plan. Nous emploierons la méthode suivante qui a déjà été utilisée dans [1] :

Supposons d'abord f nulle pour $y \leqslant a < 0$. Soit (λ_k) une suite positive croissante tendant vers l'infini et (a_k) une suite de nombres réels. Posons pour $y > 0$

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f(x, -\lambda_k y).$$

La fonction obtenue prolonge la fonction donnée si l'on choisit (λ_k) et (a_k) de façon que

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\lambda_k)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, 0),$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^n = (-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Choisissons pour (λ_k) une suite (P) positive; la suite $(\lambda_k) \cup \{-1\}$ est une suite (P) de produit canonique associé

$$C(w) = (1 + w) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\lambda_k}\right).$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n}{C'(\lambda_k)} + \frac{(-1)^n}{C'(-1)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

Il suffira de poser

$$a_k = -\frac{C'(-1)}{C'(\lambda_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Remarquons que cette méthode s'applique aussi au cas où f est bornée pour $y \leqslant 0$ ainsi que toutes ses dérivées.

Dans le cas général nous appliquerons la méthode précédente à la fonction $F(x, y) = \alpha(y) f(x, y)$, α étant une fonction indéfiniment dérivable telle que

$$\alpha(y) = 0 \text{ pour } y \leqslant a$$
$$\alpha(y) = 1 \text{ pour } y \geqslant b, \text{ avec } a < b < 0.$$

On obtient :

THÉORÈME 2.1. — *Soit* (M_n) *une suite positive croissante et supposons que*

$$|D^n f(x, y)| \leqslant KM_n \text{ pour } y \leqslant 0 \text{ (resp. } a \leqslant y \leqslant 0) \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On peut prolonger f dans tout le plan de sorte que

$$|D^n f(x, y)| \leqslant K' M'_n \quad \text{pour } y > 0,$$

$M'_n = M_n\, n^{(2+\varepsilon)n}$ *(resp.* $M'_n = M_n\, n^{(3+\varepsilon)n}$*) pour* $n \geqslant n_0(\varepsilon)$*,* ε *étant une constante positive aussi petite que l'on voudra.*

Démonstration. — Nous prendrons $\lambda_k = k^{2+\beta}$ $\beta > 0$.

1°) Soit $|D^n f(x, y)| \leqslant K\, M_n$ pour $y \leqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. On a, pour $y > 0$, d'après [3] (p. 66)

$$|D^n f(x, y)| \leqslant K\, M_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \lambda_k^n| < K\, K_1^n\, \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n\,;$$

d'où

$$|D^n f(x, y)| \leqslant K'\, M_n\, n^{(2+\varepsilon)n} \quad \text{pour } n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

ε étant une constante positive qui tend vers zéro lorsque β tend vers zéro.

2°) Soit $|D^n f(x, y)| \leqslant K\, M_n$ pour $a \leqslant y < 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. On construit la fonction α de la manière suivante :

Considérons la suite (P) symétrique $\Gamma = (\pm\, k^{1+\beta})$ et la fonction presque périodique associée f_Γ. La fonction g telle que

$$g(t) = 0 \quad \text{pour } t \leqslant a \text{ et pour } t \geqslant b,$$
$$g(t) = f_\Gamma(t - a)\, f_\Gamma(t - b) \quad \text{pour } a < t < b,$$

est indéfiniment dérivable de support $[a, b]$. Nous poserons

$$\alpha(y) = 1 + A \int_0^y g(t)\, dt,$$

la constante A étant choisie de façon que $\alpha(a) = 0$. D'après [3] (p. 66) on a pour $n \geqslant n_0(\varepsilon_1)$

$$|D^n f_\Gamma(t)| \leqslant n^{(1+\varepsilon_1)n}\,;$$

d'où

$$|D^n \alpha(y)| = A\, \Big| \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p\, D^p f_\Gamma(y - a)\, D^{n-1-p} f_\Gamma(y - b) \Big| \leqslant A_1\, n^{(1+\varepsilon_1)n}.$$

Pour $y \leqslant 0$

$$|D^n F(x, y)| \leqslant \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, |D^p \alpha(y)|\, K\, M_{n-p} \leqslant K'\, M_n\, n^{(1+\varepsilon_2)n}.$$

Pour $y > 0$

$$|D^n f(x, y)| = |D^n F(x, y)| \leqslant K'\, M_n\, n^{(3+\varepsilon)n}\,;$$

ε étant une constante positive qui tend vers zéro lorsque β tend vers zéro.

Nous n'avons pas pu améliorer ce résultat par un autre choix de la suite (λ_k).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN, Potentiels besseliens, *Colloque intern. de théorie du potentiel* (1964).

[2] A. BAILLETTE, Sur la transformée de Fourier-Carleman d'une fonction presque périodique de spectre donné, *C. R. Acad. Sci.,* Paris, 258 (1964), 6049-6051.

[3] J. P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 5 (1953-1954), 39-130.

[4] J. P. KAHANE, Mean periodic functions, *Tata Institute of Fundamental Research Bombay* (1959).

[5] P. KOOSIS, Sur l'approximation pondérée par des sommes d'exponentielles imaginaires (*à paraître*).

(*Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1965*).

AIMÉE BAILLETTE,

Service de Mathématiques,
Collège Scientifique Universitaire,
Perpignan, P.-O.