ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

François BLAIS, Robert MOUSSU & Fernando SANZ

Solutions non oscillantes d'une équation différentielle et corps de Hardy

Tome 57, nº 6 (2007), p. 1825-1838.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_6_1825_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 6 (2007) 1825-1838

SOLUTIONS NON OSCILLANTES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET CORPS DE HARDY

par François BLAIS, Robert MOUSSU & Fernando SANZ

RÉSUMÉ. — Soit $\varphi : x \mapsto \varphi(x), x \gg 0$ une solution à l'infini d'une équation différentielle algébrique d'ordre n, $P(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Nous donnons un critère géométrique pour que les germes à l'infini de φ et de la fonction identité sur $\mathbb{R}$ appartiennent à un même corps de Hardy. Ce critère repose sur le concept de non oscillation.

ABSTRACT. — Let $\varphi : x \mapsto \varphi(x), x \gg 0$ be a solution of an algebraic differential equation of order n, $P(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. We establish a geometric criterion so that the germs at infinity of φ and the identity function on $\mathbb{R}$ belong to a common Hardy field. This criterion is based on the concept of non oscillation.

1. Introduction

Soit P un polynôme à cœfficients réels, à $(n + 2)$ indéterminées, avec $n \geqslant 1$, et soit

$$P(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

l'équation différentielle d'ordre n correspondante. Une *solution* φ *(à l'infini)* de (1.1) est une fonction n fois continûment dérivable sur un intervalle $I_a =]a, +\infty[$ telle que

$$P(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I_a.$$

L'étude du comportement asymptotique de φ à l'infini est un problème classique. C'est l'objet des articles de G. H. Hardy [11] de 1912, de M. Boshernitzan [4, 5] et de M. Rosenlicht [17, 18] dans les années 80. Ces travaux, ainsi que des plus récents [13, 19, 20], reposent sur l'hypothèse :

Mots-clés : oscillation, corps de Hardy, semi-algébrique, pfaffien.
Classification math. : 34A26, 34C10, 34C08, 37C10.

les germes à l'infini de φ et de l'identité de $\mathbb{R}$ appartiennent à un même *corps de Hardy* ; c'est-à-dire, à un sous corps différentiel $(K, \frac{d}{dx})$ de l'anneau différentiel $(\mathcal{C}^\infty_+, \frac{d}{dx})$ des germes à l'infini de fonctions infiniment dérivables dans des intervalles de la forme I_a. L'objet de ce travail est de montrer qu'il existe un critère géométrique qui permet de tester si une solution de (1.1) possède cette propriété. Ce critère repose sur le concept de non oscillation qui suit. Signalons ici l'article [15] dédié à l'étude des solutions oscillantes de champs de vecteurs.

Nous dirons que φ est *k–algébriquement non oscillante* si pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_k]$ on a l'alternative

$$Q \circ \phi_k(x) = 0 \;\text{ ou }\; Q \circ \phi_k(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \gg a,$$

où $\phi_k(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x))$ pour $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ avec $\phi_{-1}(x) = x$.

La proposition suivante explicite la relation entre non oscillation et corps de Hardy. C'est essentiellement une conséquence des définitions.

Proposition 1.1. — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution de (1.1). Les germes à l'infini de x et φ appartiennent à un même corps de Hardy si et seulement si φ est n–algébriquement non oscillante. Si c'est le cas, l'anneau A_φ des germes à l'infini des $Q \circ \phi_n$, où $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_n]$, est intègre et son corps des fractions K_φ est le plus petit corps de Hardy qui contient les germes de x et φ.*

La question posée est, via cette proposition, ramenée à un problème géométrique. Pour y répondre nous utilisons la définition suivante. Une solution $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ de (1.1) est *une solution non singulière* si $\frac{\partial P}{\partial y_n} \circ \phi_n(x) \neq 0$ pour $x \in I_a$.

Théorème 1.2. — *Soit φ une solution à l'infini, non singulière de (1.1). Si φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante, elle est n–algébriquement non oscillante et les germes à l'infini de φ et de la fonction identité sur $\mathbb{R}$ appartiennent à un même corps de Hardy.*

Lorsque $n = 1$, la condition "φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante" est toujours satisfaite et le corollaire suivant généralise un résultat de [11, 17] sur les équations différentielles algébriques d'ordre 1 et de degré 1 :

Corollaire 1.3. — *Si φ est une solution non singulière de*

$$P(x, y, y') = 0,$$

les germes à l'infini de x et φ appartiennent à un même corps de Hardy.

C'est pour $n = 2$ que le résultat du théorème est le plus pertinent.

Corollaire 1.4. — *Soit φ une solution non singulière de*

$$P(x,y,y',y'')=0.$$

Les germes à l'infini de x et φ appartiennent à un même corps de Hardy si et seulement si pour tout polynôme $Q\in\mathbb{R}[x,y]$ on a l'alternative

$$Q(x,\varphi(x))=0$$

ou

$$Q(x,\varphi(x))\neq 0$$

pour tout x assez grand.

Ce corollaire s'applique, par exemple, dans la situation suivante. Supposons que φ possède un développement asymptotique à l'infini, $\widehat{\varphi}(x)$, qui est une *série généralisée* au sens de [9] et qui n'est pas une série de Puiseux convergente en x^{-1}. Alors, pour tout $Q\in\mathbb{R}[x,y]$, la fonction $Q(x,\varphi(x))$ possède une partie principale qui ne s'annule pas pour x assez grand. D'après le corollaire 1.4, les germes de x et φ appartiennent à un même corps de Hardy. C'est en particulier le cas si $\widehat{\varphi}(x)$ est une série divergente de $\mathbb{R}[[x^{-1}]]$.

Le corollaire 1.3 est démontré dans [4] dans le contexte plus général des équations différentielles d'ordre un, à coefficients dans un corps de Hardy extension du corps de fonctions *logarithmico-exponentielles* de G. H. Hardy [10]. Quant au corollaire 1.4, le cas de certaines équations différentielles d'ordre 2 est traité dans [5] avec des conditions supplémentaires dans le même cadre. Dans cet article, nous travaillons dans le cadre plus géométrique des équations différentielles algébriques et les conditions que nous imposons sont de même nature. Il est possible d'obtenir des résultats locaux analogues dans le cadre analytique réel ou même dans le cadre *o-minimal* (voir [8]) ; les arguments de nos démonstrations se généralisent aisement dans ces contextes. En effet, ils reposent essentiellement sur des propriétés géométriques de finitude qui sont, alors, encore vraies.

Le plan de ce travail est le suivant. Dans le paragraphe 2, nous démontrons la proposition 1.1. Dans le paragraphe 3, nous préparons la preuve du théorème 1.2 et nous le montrons pour $n=1$. C'est un exercice illustrant la preuve du cas général qui est l'objet du quatrième paragraphe. Les démonstrations reposent sur des arguments élémentaires de géométrie algébrique et sur une généralisation (déjà utilisé dans [7]) d'un argument de A. Khovanskii [12]. Enfin, dans le cinquième paragraphe, nous illustrons nos resultats par des exemples simples qui montrent la nécessité des hypothèses.

Par leur écoute critique, J.M. Aroca et J.-P. Rolin nous ont aidé dans la préparation de ce travail ; nous les remercions.

2. Corps de Hardy d'une solution n–algébriquement non oscillante

Reprenons tout d'abord les notations de l'introduction. Dans toute la suite la coordonnée x sur $\mathbb{R}$ est fixée, $\frac{d}{dx}$ est la dérivation associée. Si $x \mapsto \psi(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $I_a =]a, +\infty[$, nous notons $\overline{\psi}$ son germe à l'infini. Le même symbole "x" désigne la fonction identité de $\mathbb{R}$ ou son germe à l'infini. Soit $(\mathcal{C}^\infty_+, \frac{d}{dx})$ l'anneau différentiel des germes $\overline{\psi}$ où ψ est de classe C^∞. Un *corps de Hardy* K est un sous corps de $\mathcal{C}^\infty_+$ stable par $\frac{d}{dx}$.

Dans toute la suite $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$, $x \in I_a$ désigne une fonction n fois continûment dérivable qui est solution de l'équation différentielle algébrique (1.1) où $P \in \mathbb{R}[x, y, y_1, ..., y_n]$; c'est-à-dire

$$P(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0,\ x \in I_a.$$

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, nous posons $\phi_k(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(k)}(x))$ avec $\phi_{-1}(x) = x$. Nous dirons que φ est *k–algébriquement non oscillante* si pour tout $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, ..., y_k]$ non nul on a

$$\#|\phi_k| \cap Q^{-1}(0) < \infty \quad \text{ou bien} \quad |\phi_k| \subset Q^{-1}(0),$$

où $|\phi_k| = \phi_k(I_a)$. Nous dirons que φ est une *solution non singulière* de (1.1) si $\frac{\partial P}{\partial y_n} \circ \phi_n(x) \neq 0$ pour $x \in I_a$. (Cette terminologie est classique dans la théorie des équations différentielles ordinaires, utilisée déjà par O. Perron [16]). Il est bien connu (voir [21] et le paragraphe 4) que φ est analytique si c'est une solution non singulière.

Proposition 2.1. — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution de (1.1). Les germes x, $\overline{\varphi}$ appartiennent à un même corps de Hardy si et seulement si φ est n–algébriquement non oscillante. Si c'est le cas, le sous-anneau*

$$A_\varphi = \{\overline{Q \circ \phi_n} \ / \ Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, ..., y_n]\}$$

de $\mathcal{C}^\infty_+$ est un anneau intègre et son corps des fractions K_φ est le plus petit corps de Hardy qui contient x et $\overline{\varphi}$.

Démonstration. — Supposons que φ soit n–algébriquement oscillante. Il existe $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_n]$ tel que le germe $\overline{q}$ de $q = Q \circ \phi_n$ n'est pas nul et $q(x_i) = 0$ pour une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$. Le germe $\overline{q}$

appartient à l'anneau engendré par x et $\overline{\varphi}$ mais le germe de $\frac{1}{q}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_+^\infty$ puisque les x_i en sont des pôles. Ainsi x et $\overline{\varphi}$ n'appartiennent pas à un même corps de Hardy.

Supposons que φ soit n–algébriquement non oscillante. Montrons que, quitte à restreindre l'intervalle de définition de φ à $I_{a'}$, avec $a' > a$, on peut supposer que φ est une solution non singulière d'une équation différentielle algébrique

$$P_m(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$$

d'ordre $m \leqslant n$. En effet, si $\frac{\partial P}{\partial y_n} \circ \phi_n \not\equiv 0$, φ est une solution non singulière de $P_m = P = 0$ puisque φ est n–algébriquement non oscillante. Si $\frac{\partial P}{\partial y_n} \circ \phi_n \equiv 0$, alors φ est aussi une solution de l'équation différentielle algébrique

$$\tilde{P}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

avec $\tilde{P} = \frac{\partial P}{\partial y_n}$. On a alors deux possibilités : soit l'ordre de l'équation différentielle (2.1) est inférieur à n, soit le degré en y_n du polynôme $\tilde{P}$ est inférieur à celui de P. En itérant ce procedé, on montre l'existence de P_m. Dans la suite de la démonstration on suppose $P_m = P$ et $m = n$.

Puisque φ est une solution non singulière de (1.1), l'application ϕ_n et les fonctions $q = Q \circ \phi_n$, $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \dots, y_n]$, sont analytiques sur I_a. L'application de $\mathbb{R}[x, y, y_1, \dots, y_n]$ dans $\mathcal{C}_+^\infty$ définie par $Q \mapsto \overline{Q \circ \phi_n}$ est un morphisme d'anneaux. Son image A_φ est contenue dans $\mathcal{C}_+^\omega$, l'anneau des germes à l'infini des fonctions analytiques, qui est intègre. Soit K_φ son corps des fractions. Ses éléments appartiennent encore à $\mathcal{C}_+^\omega$ puisque φ est n–algébriquement non oscillante.

Pour montrer que K_φ est stable par dérivation, il suffit de montrer que $\overline{\varphi^{(n+1)}}$ appartient à K_φ. En dérivant (1.1) on obtient

$$\varphi^{(n+1)} = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + y_1 \frac{\partial P}{\partial y} + \cdots + y_n \frac{\partial P}{\partial y_{n-1}}\right) \circ \phi_n}{\frac{\partial P}{\partial y_n} \circ \phi_n}.$$

Puisque φ est une solution non singulière, $\overline{\varphi^{(n+1)}}$ appartient clairement à K_φ. Finalement, si K est un corps de Hardy contenant x et $\overline{\varphi}$, il contient A_φ et ainsi K_φ est le plus petit corps de Hardy contenant x et $\overline{\varphi}$. $\square$

3. Préparation de la preuve du théorème

Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$, une solution non singulière de (1.1) qui vérifie les hypothèses du théorème 1.2. Montrons tout d'abord qu'il suffit d'étudier le cas où le polynôme P est irréductible. Supposons que $P = P_1 \cdot P_2$, avec $P_i \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_n]$ pour $i = 1, 2$. Puisque

$$P \circ \phi_n = P_1 \circ \phi_n \cdot P_2 \circ \phi_n = 0$$

et que les $P_i \circ \phi_n$ sont analytiques sur l'intervalle I_a, on peut supposer, par exemple, que $P_1 \circ \phi_n \equiv 0$. Ainsi, φ est une solution de

$$P_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv 0$$

et c'est une solution non singulière de cette équation.

Soit $m = m(\varphi)$, $0 \leqslant m \leqslant n$ le plus petit entier tel que φ soit une solution d'une equation différentielle algébrique d'ordre m,

$$P_m(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0, \tag{3.1}$$

avec $P_m \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_m]$. Nous dirons que $m(\varphi)$ est *l'ordre minimum* de φ. Montrons qu'il suffit d'étudier le cas où l'ordre n de l'équation (1.1) est égal à $m(\varphi)$.

Lemme 3.1 (Réduction au cas d'ordre $n = m(\varphi)$). — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution non singulière de (1.1) qui est $(n-2)$–algébriquement non oscillante.*

i) Si $m \leqslant n-2$, φ est n–algébriquement non oscillante.

ii) Si $m = n-1$, φ est une solution non singulière et $(m-2)$–algébriquement non oscillante d'une équation $P_{n-1}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$.

Démonstration. — Si $m \leqslant n-2$, φ est m–algébriquement non oscillante. D'après la proposition 1.1, les germes x et $\overline{\varphi}$ appartiennent à un corps de Hardy et φ est k–algébriquement non oscillante pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $m = n-1$ et que φ soit une solution de l'équation différentielle $P_{n-1}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$. En reprenant un argument du début de ce paragraphe, on peut supposer que P_{n-1} est irréductible. Le résultant R de P_{n-1} et $\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{n-1}}$ relativement à y_{n-1} n'est pas nul. Puisque φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante et $R \circ \phi_{n-2} \not\equiv 0$ (car $m(\varphi) = n-1$), on a

$$\#\Big\{\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{n-1}} = 0\Big\} \cap |\phi_{n-1}| \leqslant \#\big\{R = 0\big\} \cap |\phi_{n-2}| < \infty.$$

Ainsi, quitte à augmenter a, φ est une solution non singulière de (3.1). $\square$

Lemme 3.2 (Réduction au cas $(n-1)$–non oscillant). — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution de (1.1) où P est irréductible telle que $n = m(\varphi) \geqslant 0$ est l'ordre minimum de φ. Alors φ est n–algébriquement non oscillante si elle est $(n-1)$–algébriquement non oscillante.*

Démonstration. — Supposons que φ soit n–algébriquement oscillante. Il existe $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_n]$ tel que

$$\# Q^{-1}(0) \cap |\phi_n| = \infty \quad \text{et} \quad |\phi_n| \not\subset Q^{-1}(0).$$

Le résultant $R \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}]$ de P et Q relativement à y_n n'est pas nul puisque P est irréductible et Q est non divisible par P. Par construction R vérifie $\# R^{-1}(0) \cap |\phi_{n-1}| = \infty$ et $|\phi_{n-1}| \not\subset R^{-1}(0)$, puisque $n = m(\varphi)$. Ceci contredit l'hypothèse φ est $(n-1)$—algébriquement non oscillante. $\square$

Compte tenu des lemmes 3.1 et 3.2, pour prouver le théorème 1.2 il suffit de montrer que si φ est une solution non singulière, $(n-2)$–algébriquement non oscillante de (1.1) avec P irréductible et $n = m(\varphi)$ est l'ordre minimum de φ, alors φ est $(n-1)$–algébriquement non oscillante. Ce resultat est l'objet du paragraphe suivant. Mais, avant de l'aborder, nous étudions, avec la proposition suivante, le cas $n = 1$ qui est spécifique à deux titres. La condition φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante est alors vide. La courbe $|\phi_1|$ est de codimension 1 dans $P = 0$ et le raisonnement classique de A. Khovanskii [12] peut s'appliquer.

Proposition 3.3 (Équation différentielle d'ordre un). — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution non singulière de $P(x, y, y') = 0$ avec $P \in \mathbb{R}[x, y, y_1]$. Alors φ est 1–algébriquement non oscillante et les germes x, $\overline{\varphi}$ appartiennent à un même corps de Hardy.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que P est irréductible. Le sous-ensemble S de $I_a \times \mathbb{R}^2$ défini par $\left\{P = 0, \frac{\partial P}{\partial y_1} \neq 0\right\}$ est une surface semi-algébrique lisse de $\mathbb{R}^3$ qui contient $|\phi_1|$. La restriction à S de la projection $\pi : (x, y, y_1) \to (x, y)$ est une submersion sur $U = \pi(S)$, un ouvert semi-algébrique de $I_a \times \mathbb{R}$. Sa frontière $Fr(U)$ est union finie de points et d'arcs lisses de courbes algébriques. Quitte à considérer a suffisament grand, on peut supposer que $Fr(U)$ est une union finie et disjointe de graphes de fonctions semi-algébriques continues de I_a sur $\mathbb{R}$. La composante connexe U_1 de U qui contient $|\phi_0|$ est simplement connexe. Puisque la courbe $|\phi_0|$ est une sous-variété lisse et fermée de U_1, $U_1 \setminus |\phi_0|$ a deux composantes connexes. Si $S_1 \subset S$ est la composante connexe de $\pi^{-1}(U_1)$ qui contient $|\phi_1|$, l'application $\pi\big|_{S_1} : S_1 \to U_1$ est un difféomorphisme et ainsi $S_1 \setminus |\phi_1|$ a aussi deux composantes connexes. D'autre part $|\phi_1|$ est une courbe intégrale (maximale) du système *pfaffien* (triangulairement intégrable) sur $I_a \times \mathbb{R}^2$

$$\Omega : dP = 0, \, \omega_1 = dy - y_1 dx = 0.$$

C'est une *courbe pfaffienne, séparante dans* S_1 au sens de [12] ou encore une *variété de Rolle* au sens de [14]. Quelque soit le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1]$,

$Q^{-1}(0) \cap |\phi_1|$ a un nombre fini de composantes connexes et ainsi φ est 1–algébriquement non oscillante. □

4. Démonstration du théorème pour $n > 1$

Le premier argument de la preuve de la proposition 3.3, simple connexité d'un voisinage de $|\phi_0|$, n'est plus aussi élémentaire si $n > 1$. Il est remplacé par le lemme suivant.

Lemme 4.1. — *Soit F une application analytique de $I_a =]a, \infty[$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et soit $gr(F)$ son graphe. Supposons que $gr(F)$ est algébriquement transcendante et algébriquement non oscillante, c'est-à-dire, quelque soit le sous-ensemble semi-algébrique $T \subset \mathbb{R}^n$ avec $\dim(T) \leqslant n-1$, $gr(F) \not\subset T$ et le nombre de composantes connexes de $T \cap gr(F)$ est fini. Alors, si V est un voisinage ouvert semi-algébrique de $gr(F)$, quitte à augmenter a, il existe un ouvert semi-algébrique W simplement connexe tel que $gr(F) \subset W \subset V$.*

Démonstration. — C'est une conséquence d'une propriété bien connue sous le nom de “lemme de saucissonage” (voire par exemple [3] ou [2]) des ensembles semi-algébriques appliquée à V. L'espace $\mathbb{R}^n$ est une union finie de semi-algébriques, C_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, appelés *cellules*, possédant les propriétés suivantes : C_i est homéomorphe à $]0,1[^{d_i}$, le bord ∂C_i de C_i est une union de cellules C_j, avec $d_j < d_i$, et, enfin, V est une union finie disjointe de cellules. Puisque $gr(F)$ est algébriquement transcendante et algébriquement non oscillante, quitte à augmenter a, on peut supposer que $gr(F) \cap C_i = \emptyset$ pour toute cellule C_i de dimension $d_i < n$. C'est-à-dire que $gr(F)$ est contenu dans la réunion des cellules C_i de dimension $d_i = n$. Puisque ces cellules sont deux à deux disjointes et $gr(F)$ est connexe, il existe une unique cellule $C_i = W$ de dimension n, contenant $gr(F)$ et contenue dans V. □

L'argument de Khovanskii concernant “l'intégrabilité triangulaire” qui est essentiel dans la preuve de la proposition 3.3, n'est plus utilisable si $n > 1$. Cependant, nous reprenons une construction classique de [1] permettant de ramener l'étude d'une solution non singulière de (1.1) à celle d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+2}$. Posons

$$\omega_1 = dy - y_1 dx, \;\; \omega_2 = dy_1 - y_2 dx, \;\; \ldots, \;\; \omega_n = dy_{n-1} - y_n dx.$$

Par définition des ω_k, si φ est une solution de (1.1), la courbe ϕ_n est une courbe intégrale du système de Pfaff

$$\Omega : dP = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 0.$$

Soit Z le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+2}$ défini par $i_Z(dx\wedge dy\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n) = dP\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$; précisement

$$Z = \frac{\partial P}{\partial y_n}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + y_n\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\Big) - \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + y_1\frac{\partial P}{\partial y} + \cdots + y_n\frac{\partial P}{\partial y_{n-1}}\Big)\frac{\partial}{\partial y_n}. \tag{4.1}$$

Par construction, l'hypersurface $P^{-1}(0)$ est Z–invariante et contient $|\phi_n|$. Supposons que φ soit une solution non singulière de (1.1). Le champ de vecteurs Z ne s'annule pas le long de $|\phi_n|$ et $|\phi_n|$ est une courbe intégrale (non nécessairement maximale) de Z. En particulier ϕ_n est ananlytique comme nous l'avons affirmé et utilisé dans le paragraphe 2.

La proposition suivante achève la preuve du théorème 1.2 compte tenu des lemmes 3.1 et 3.2.

Proposition 4.2. — *Soit $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ une solution non singulière de l'équation différentielle algébrique (1.1) dont $n = m(\varphi)$ est l'ordre minumum de φ et où P est irréductible. Supposons que φ soit $(n-2)$–algébriquement non oscillante. Alors φ est $(n-1)$–algébriquement non oscillante.*

Démonstration. — Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que φ soit $(n-1)$–algébriquement oscillante. Il existe $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}]$ tel que

$$\#Q^{-1}(0) \cap |\phi_{n-1}| = \infty \quad \text{et} \quad |\phi_{n-1}| \not\subset Q^{-1}(0). \tag{4.2}$$

La composante connexe S de $\big\{P = 0, \frac{\partial P}{\partial y_n} \neq 0, x \in I_a\big\}$ qui contient $|\phi_n|$ est une hypersurface semi-algébrique lisse. La restriction de $\pi_1 : (x, y, \ldots, y_n) \mapsto (x, y, \ldots, y_{n-1})$ à S est une submersion sur $S_1 = \pi_1(S)$, un ouvert semi-algébrique de $I_a \times \mathbb{R}^n$ qui contient $|\phi_{n-1}|$. Montrons tout d'abord l'assertion suivante :

> (*) *Il existe un ouvert semi-algébrique connexe, simplement connexe $V_1 \subset S_1$ qui contient $|\phi_{n-1}|$.*

On peut évidemment supposer que le polynôme Q de (4.2) est irréductible. Le discriminant $R \in \mathbb{R}[x, y, \ldots, y_{n-2}]$ de Q (le résultant de Q et $\partial Q/\partial y_{n-1}$) relativement à la projection $\pi : (x, y, \ldots, y_{n-1}) \mapsto (x, y, \ldots, y_{n-2})$ n'est pas nul. De plus, $|\phi_{n-2}|$ n'est pas inclus dans $\{R = 0\}$ car $n = m(\varphi)$. Comme φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante, on peut supposer, quitte à augmenter a, que

$$|\phi_{n-2}| \cap \big\{R = 0\big\} = \emptyset.$$

La projection π étant ouverte, $S_2 = \pi(S_1)$ est un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $|\phi_{n-2}| \subset S_2 \setminus \big\{R = 0\big\}$, que $|\phi_{n-2}|$ est algébriquement non oscillante et qu'elle est algébriquement transcendante, sinon $m(\varphi) < n$, on peut lui appliquer le lemme 4.1. Il existe un ouvert semi-algébrique V_2, simplement connexe, contenu dans $S_2 \setminus \{R = 0\}$, qui contient $|\phi_{n-2}|$.

Pour montrer l'assertion (*), précisons la construction de l'ouvert V_2 du lemme 4.1. Considérons une décomposition cellulaire $\{C_i\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ adaptée à $S_2 \setminus \{R = 0\} \times \mathbb{R}$ telle que $\{\pi(C_i)\}$ soit une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $S_2 \setminus \{R = 0\}$. Une telle décomposition existe toujours (voir [3] ou [2]). Soient $C_1, C_2, \ldots, C_r$ les cellules de cette décomposition qui sont contenues dans S_1 et qui vérifient :

i) $V_2 = \pi(C_1) = \pi(C_2) = \ldots . = \pi(C_r)$.

ii) L'intersection de l'adherence $\overline{C_i}$ de C_i et du graphe de la restriction de ϕ_{n-1} à $I_{a'}$ est non vide pour tout i et pour tout $a' \geqslant a$.

La condition ii) permet d'affirmer que $V_1 = \cup_{i=1}^{r} C_i$ est connexe et alors la condition i) qu'il est simplement connexe. Par construction, $|\phi_{n-1}| \subset V_1$ et V_1 est un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenu dans S_1. Ceci montre l'assertion (*).

La restriction de π à V_1 est un fibration triviale de fibre $\mathbb{R}$. Puisque $\pi(V_1) = V_2 \subset S_2 \setminus \{R = 0\}$, le polynôme $\partial Q/\partial y_{n-1}$ ne s'annule pas sur $Q^{-1}(0) \cap V_1$ et $Q^{-1}(0) \cap V_1$ est une hypersurface algébrique lisse de $\mathbb{R}^{n+1}$. De plus, $Q^{-1}(0) \cap V_1$ st semi-algébrique, c'est une hypersurface lisse et fermée de V_1 et la restriction de π à V_1 est une fibration triviale de fibre $\mathbb{R}$ et de base V_2 simplement connexe. Ainsi, $Q^{-1}(0) \cap V_1$ est une union disjointe d'hypersurfaces algébriques lisses H_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ qui sont des graphes au-dessus d'ouverts semi-algébriques pour la projection π. D'après la condition (4.2), il existe un i, disons 1, tel que $\# H_1 \cap |\phi_{n-1}| = \infty$ et $|\phi_{n-1}| \not\subset H_1$. Puisque $Q\big|_{V_1}$ est une submersion, que H_1 est une composante connexe de $Q^{-1}(0) \cap V_1$ et que V_1 est simplement connexe, $V_1 \setminus H_1$ a deux composantes connexes. Soit V la composantes connexe de $\pi_1^{-1}(V_1) \cap S$ qui contient $|\phi_n|$. La restriction $\pi_1\big|_V$ est une submersion sur V_1 simplement connexe et $\pi_1\big|_V : V \to V_1$ est un C^∞–difféomorphisme. L'image $(\pi_1\big|_V)_* Z$ du champ de vecteurs Z défini dans (4.1) est un champ de vecteurs Z_1 de classe C^∞ sur V_1. Ses composantes sur $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}$ sont des fonctions semi-algébriques sur V_1 et $|\phi_{n-1}|$ est une courbe intégrale de Z_1.

Posons $H_1 \cap |\phi_{n-1}| = \{p_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ avec $\overline{p_\ell p_{\ell+1}} \cap H_1 = \{p_\ell, p_{\ell+1}\}$ où $\overline{p_\ell p_{\ell+1}}$ désigne l'arc fermé de $|\phi_{n-1}|$ qui joint p_ℓ à $p_{\ell+1}$. Si $p_\ell = \phi_{n-1}(x_\ell)$ avec $x_\ell \in I_a$, la suite $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La fonction $q = Q \circ \phi_{n-1}$ s'annule en x_ℓ et $x_{\ell+1}$ et elle est de signe constant sur l'intervalle $(x_\ell, x_{\ell+1})$. Ainsi $q'(x_\ell) \cdot q'(x_{\ell+1}) \leqslant 0$. Notons que

$$q'(x) = \alpha(x) dQ(Z_1)(\phi_{n-1}(x)), \quad x \in I_a.$$

où α est une fonction continue de signe constant non nul sur I_a. Étudions $Q_1 = dQ(Z_1)$ le long de la courbe $C = H_1 \cap \pi^{-1}(|\phi_{n-2}|) \subset Q^{-1}(0)$. Puisque $Q_1(p_\ell)Q_1(p_{\ell+1}) \leqslant 0$, il existe un point $p'_\ell \in C$ tel que $Q_1(p'_\ell) = 0$. Plus précisement, p'_ℓ appartient à l'arc de la courbe C qui joint p_ℓ à $p_{\ell+1}$. Si H_1 est le graphe de $\theta : V_2 \to V_1$, alors $p'_\ell = \theta(\phi_{n-2}(x'_\ell))$ où $\{x'_\ell\}$ est une suite dans I_a qui tend vers $+\infty$.

L'ensemble $A = Q_1^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0)$ est un semi-algébrique de dimension au plus $n-1$. En effet, Q_1 est une fonction semi-algébrique telle que $Q_1^{-1}(0) \not\subset Q^{-1}(0)$ puisque $Q_1 = dQ(Z_1)$ et $Q^{-1}(0)$ n'est pas Z_1–invariant (sinon, $|\phi_{n-1}| \subset Q^{-1}(0)$). L'ensemble semi-algébrique $\pi(A)$ vérifie

$$\pi(A) \cap |\phi_{n-2}| \supset \left\{\pi(p'_\ell), \ell \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{et} \quad |\phi_{n-2}| \not\subset \pi(A)$$

puisque $\pi(A)$ est de dimension $\leqslant n-1$ et que $n = m(\varphi)$ est l'ordre minimum. Ceci contredit l'hypothèse φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante. $\square$

5. Exemples

Dans ce paragraphe nous proposons quelques exemples qui illustrent le caractère optimal des hypothèses du théorème 1.2 et des corollaires 1.3 et 1.4.

Exemple 5.1 (Solution 0*–oscillante).* — La fonction $\varphi(x) = \sin(x), x > 0$ fournit un exemple "double". C'est une solution singulière et 0–oscillante de l'équation différentielle algébrique du premier ordre, ${y'}^2 + y^2 - 1 = 0$. D'autre part, c'est une solution non singulière de l'équation différentielle algébrique du second ordre, $y'' + y = 0$.

Exemple 5.2 (Solution 0*–oscillante d'ordre* $m(\varphi) = n = 2$*).* — Soit φ la fonction $\varphi(x) = \exp(-x)\sin(x), x > 0$. On vérifie aisement que c'est une solution, non singulière et 0–oscillante, de l'équation différentielle algébrique du second ordre

$$P(x, y, y', y'') = y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Montrons que φ n'est pas solution d'une équation différentielle algébrique du premier ordre. Supposons le contraire. Comme $\varphi'(x) = \exp(-x)\cos(x) - \varphi(x)$, il existe $Q \in \mathbb{R}[x, y, y_1]$ irréductible non nul tel que

$$Q(x, \exp(-x)\sin(x), \exp(-x)\cos(x)) \equiv 0.$$

Puisque $Q(2\pi k, 0, \exp(-2\pi k)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Q(x, 0, y_1) \equiv 0$ et Q est divisible par y. Cet exemple montre l'optimalité des hypothèses du corollaire 1.4.

Exemple 5.3 (Solution singulière et 0*–non oscillante).* — Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \exp(-x)(2+\sin(x)), x > 0$. Montrons, tout d'abord, que φ est 0-algébriquement non oscillante. Soit $Q \in \mathbb{R}[x,y]$ un polynôme non nul, $Q(x,y) = \sum_{\ell \geqslant \ell_0} \sum_{k \leqslant k_0} a_{k\ell} x^k y^\ell$ avec $a_{k_0\ell_0} \neq 0$. Alors

$$Q(x,\varphi(x)) = a_{k_0\ell_0} x^{k_0} \exp(-\ell_0 x)(2+\sin(x))^{\ell_0}(1+o(1/x))$$

ne s'annule pas pour $x > 0$ assez grand.

Un petit calcul montre que φ est une solution de l'équation différentielle algébrique de second ordre

$$P(x,y,y',y'') = 4(y''+2y+y)^2 + 4(y'+y)^2 - (y''+2(y'+y))^2 = 0. \tag{5.1}$$

De plus, c'est une solution singulière de cette équation. En effet,

$$\frac{\partial P}{\partial y''} = 6y'' + 12y' + 4y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y''}(\phi_2(x)) = -4\exp(-x)(1+2\sin(x))$$

s'annule pour une infinité de $x > 0$. En particulier, φ est 2-algébriquement oscillante. Elle n'appartient pas à un corps de Hardy qui contient le germe de la fonction x. Cet exemple montre la nécessité de l'hypothèse "φ est non singulière" du corollaire 1.4.

L'interprétation géométrique de l'oscillation de ϕ_2 est la suivante. La projection $x \mapsto \gamma(x) = (\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x))$ de ϕ_2 sur l'hyperplan $x = 0$ est une courbe qui s'enroule en spirale sur le cône algébrique $P = 0$ (avec $P \in \mathbb{R}[y, y_1, y_2]$ le polynôme défini dans (5.1)) en tendant vers $(0,0,0)$ lorsque x tend vers l'infini. Elle coupe une infinité de fois les deux droites d'intersection de $P = 0$ avec le plan $6y_2 + 12y_1 + 4y = 0$. Soit C le demi cône (ouvert) $\{P = 0\} \cap \{y > 0\}$. La courbe γ "spirale" dans $\mathbb{R}_{>0} \times C$ en étant plate sur l'axe $y = y_1 = y_2 = 0$, bien que sa projection $\phi_0 : x \mapsto (x, \varphi(x))$ sur le plan $y = y_2 = 0$ n'oscille pas. En particulier, γ "ne spirale pas autour d'un axe" au sens de [6]. Ce comportement est possible car $\mathbb{R}_{>0} \times C$ n'est pas simplement connexe. Plus précisement, il n'existe pas de voisinage semi-analytique de $|\phi_2|$ dans $\mathbb{R}_{>0} \times C$ qui soit simplement connexe.

Exemple 5.4 (Solution non singulière et 0*–non oscillante).* — Un calcul élémentaire montre que la (même) fonction $\varphi : x \mapsto \exp(-x)(2+\sin(x))$, $x > 0$ de l'exemple 5.3 est une solution d'une équation différentielle algébrique d'ordre trois du type

$$P(x,y,y',y'',y''') = y''' + P_1(y,y',y'') = 0$$

où P_1 est un polynôme. Clairement, φ est une solution non singulière de cette équation. D'autre part, φ est 0-algébriquement non oscillante. Ceci montre que le nombre $n-2$ dans l'hypothèse "φ est $(n-2)$–algébriquement non oscillante" du théorème 1.2 est optimal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnol′d, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, “Mir”, Moscow, 1984, Translated from the Russian by Djilali Embarek, Reprint of the 1980 edition, 329 pages.

[2] R. Benedetti & J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990, 340 pages.

[3] J. Bochnak, M. Coste & M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1987, x+373 pages.

[4] M. Boshernitzan, « An extension of Hardy's class L of “orders of infinity” », *J. Analyse Math.* **39** (1981), p. 235-255.

[5] ———, « Second order differential equations over Hardy fields », *J. London Math. Soc. (2)* **35** (1987), n° 1, p. 109-120.

[6] F. Cano, R. Moussu & F. Sanz, « Oscillation, spiralement, tourbillonnement », *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), n° 2, p. 284-318.

[7] ———, « Nonoscillating projections for trajectories of vector fields », *Journal of Dynamical and Control Systems* **13** (2007), n° 2, p. 173-176.

[8] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, x+180 pages.

[9] D. Y. Grigor′ev & M. F. Singer, « Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents », *Trans. Amer. Math. Soc.* **327** (1991), n° 1, p. 329-351.

[10] G. H. Hardy, « Properties of logarithmico-exponential functions », *Proc. London Math. Soc.,* **10** (1912), n° 2, p. 54-90.

[11] ———, « Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order », *Proc. London Math. Soc.,* **10** (1912), p. 451-469.

[12] A. G. Khovanskiĭ, *Fewnomials*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska, viii+139 pages.

[13] J.-M. Lion, C. Miller & P. Speissegger, « Differential equations over polynomially bounded o-minimal structures », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), n° 1, p. 175-183 (electronic).

[14] R. Moussu & C. Roche, « Théorie de Hovanskiĭ et problème de Dulac », *Invent. Math.* **105** (1991), n° 2, p. 431-441.

[15] D. Novikov & S. Yakovenko, « Trajectories of polynomial vector fields and ascending chains of polynomial ideals », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), n° 2, p. 563-609.

[16] O. Perron, « Über Differentialgliechungen erster Ordnung, die nicht nach der Ableitung aufgelöst sind », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **22** (1912), p. 356-368.

[17] M. Rosenlicht, « Hardy fields », *J. Math. Anal. Appl.* **93** (1983), n° 2, p. 297-311.

[18] ———, « Growth properties of functions in Hardy fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1987), n° 1, p. 261-272.

[19] ———, « Asymptotic solutions of $Y'' = F(x)Y$ », *J. Math. Anal. Appl.* **189** (1995), n° 3, p. 640-650.

[20] J. Shackell, « Erratum : “Growth orders occurring in expansions of Hardy-field solutions of algebraic differential equations” [Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), no. 1, 183–221 ; MR1324130 (96f :34073)] », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), n^o 5, p. 1471.

[21] G. Valiron, *Équations Fonctionnelles. Applications*, Masson et Cie, Paris, 1945, ii+605 pages.

Manuscrit reçu le 6 avril 2006,
accepté le 15 décembre 2006.

François BLAIS & Robert MOUSSU
Université de Bourgogne
IMB
UFR Sciences et Tecniques
9 Avenue Alain Savary, BP47870
21004 Dijon cedex (France)
Francois.Blais@u-bourgogne.fr
rmoussu@u-bourgogne.fr

Fernando SANZ
Universidad de Valladolid
Depto. de Álgebra, Geometría y Topología
Facultad de Ciencias
E-47005 Valladolid (Spain)
fsanz@agt.uva.es