Annales de l'institut Fourier

Jean Vaillant

Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 1-29.

CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES ET BICARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

par Jean VAILLANT

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie.

PROPAGATION DES ONDES EN THÉORIE UNITAIRE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER

Notations de la 2e partie.

— Les notations de base sont celles de Lichnérowicz [9].

— Les notations de la 2e partie sont distinctes dans une large mesure de celles de la 1re partie.

DEUXIÈME PARTIE

PROPAGATION DES ONDES EN THÉORIE UNITAIRE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER

CHAPITRE PREMIER

CARACTÉRISTIQUES ET ÉQUATIONS AUX DISCONTINUITÉS

1. Variété fondamentale, grandeurs de champ et discontinuités.

a) On considère une variété différentiable V_4 de dimension 4, de classe C_2, C_5 par morceaux. Sur cette variété nous supposons définis un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$ (non symétriques en général), de classe C_1, C_4 par morceaux, satisfaisant aux hypothèses habituelles de la théorie unitaire, une connexion linéaire $L^{\gamma}_{\alpha\beta}$ de classe C_0, C_3 par morceaux, et un champ de vecteurs covariants S_α de classe C_0, C_3 par morceaux (cf. [9]).

Soit une surface de discontinuité définie localement par l'équation : $f(x^\alpha) \equiv x^0 = 0$; on posera : $l_\alpha = \partial_\alpha f$.

Les premières discontinuités apparaissant dans les dérivées des grandeurs de champ satisferont aux équations, (cf. [7] et 1re partie chap. I, § 7) :

$$[\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] = a_{\alpha\beta} l_\lambda l_\mu; \qquad [\partial_\lambda L^{\gamma}_{\alpha\beta}] = l_\lambda u^{\gamma}_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_\lambda S_\alpha] = l_\lambda y_\alpha;$$

soit aussi :

$$[\partial_{00} g_{\alpha\beta}] = a_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_0 L^{\gamma}_{\alpha\beta}] = u^{\gamma}_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_0 S_\alpha] = y_\alpha.$$

Les discontinuités d'ordre supérieur se calculeront à partir des précédentes et de :

$$[\partial_{000} g_{\alpha\beta}] = b_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_{00} L^{\gamma}_{\alpha\beta}] = V^{\gamma}_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_{00} S_\alpha] = z_\alpha;$$
$$[\partial_{0000} g_{\alpha\beta}]; \qquad [\partial_{000} L^{\gamma}_{\alpha\beta}] = W^{\gamma}_{\alpha\beta}; \qquad [\partial_{000} S_\alpha],$$

Les discontinuités a_{ij}, $u^{\gamma}_{\alpha i}$, $u^{\gamma}_{i\alpha}$ et y_{α} ne peuvent être annulées par aucun changement de coordonnées admissible; on dira qu'elles sont significatives. Par contre on peut, par un changement de coordonnées admissible, annuler l'une ou l'autre des discontinuités $a_{0\alpha}$, $a_{\alpha 0}$ et u^{α}_{00}, on dira qu'elles ne sont pas significatives. On ne peut pas toutefois, en général, annuler toutes les discontinuités non significatives à la fois; il faut pour cela qu'elles vérifient initialement les conditions :

$$a_{[0i]} - \frac{a_{00}}{2} h^{0\gamma} k_{\gamma} - a_{(0j)} h^{j\gamma} k_{\gamma i} = 0 \tag{1}$$

$$u^{\alpha}_{00} - h^{0\alpha} \frac{a_{00}}{2} - h^{i\alpha} a_{(0i)} = 0. \tag{2}$$

conditions que nous retrouverons dans la suite.

On remarquera de même que les $V^{\gamma}_{\alpha i}$ et les $V^{\gamma}_{i\alpha}$ sont significatives, tandis que les V^{α}_{00} ne sont pas significatives.

b) On désignera par $P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}$ les composantes du tenseur de courbure de la connexion et par $P_{\lambda\mu}$ celles du tenseur de Ricci.

On a pour les discontinuités :

$$[P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}] = l_{\lambda} u^{\alpha}_{\beta\mu} - l_{\mu} u^{\alpha}_{\beta\lambda}.$$

On en déduit facilement les relations tensorielles :

$$S_{\lambda,\mu,\nu}\, l_{\nu} [P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}] = 0 \tag{3}$$

où $S_{\lambda,\mu,\nu}$ signifie qu'on somme en permutant circulairement λ, μ, ν, et :

$$l_{\alpha} [P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}] = l_{\lambda} [P_{\beta\mu}] - l_{\mu} [P_{\beta\lambda}]. \tag{4}$$

Il sera utile de remarquer que :

$$[P^{\alpha}_{\beta,ij}] = 0, \qquad [P^{\alpha}_{\beta,0i}] = u^{\alpha}_{\beta i} \tag{5}$$

les discontinuités non significatives n'interviennent pas, ce qui est naturel.

On aura aussi :

$$[P_{ij}] = u^{0}_{ij}; \qquad [P_{00}] = - u^{i}_{0i}; \qquad [P_{0i}] = u^{0}_{0i}; \qquad [P_{i0}] = - u^{j}_{ij}. \tag{6}$$

2. Équations de champ; caractéristiques et conditions sur les discontinuités.

a) On rappellera les équations de champ sous la forme (cf. [9]) :

$$(1) \qquad P_{\lambda\mu} = \frac{2}{3}(\partial_\lambda S_\mu - \partial_\mu S_\lambda)$$

$$(2) \qquad L^\rho_{\sigma\rho} = L^\rho_{\rho\sigma}.$$

$$(3) \qquad \partial_\rho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0.$$

On pourra leur adjoindre des conditions du type indiqué par M. Lichnérowicz [9]; suivant les cas on utilisera :

$$(4) \qquad \partial_\alpha\left(\gamma^{\alpha\beta} S_\beta \sqrt{|g|}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_\alpha\left(h^{\alpha\beta} S_\beta \sqrt{|g|}\right) = 0$$

ou

$$\partial_\alpha\left(l^{\alpha\beta} S_\beta \sqrt{|g|}\right) = 0;$$

on a défini $\gamma^{\alpha\beta}$ par : (cf. [10])

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{2h}{g} h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}.$$

Compte tenu de l'équation (1), la formule (1-4) peut s'écrire plus simplement :

$$(5) \qquad l_\alpha[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] = l_\beta[P_{\lambda\mu}]$$

b) Des équations de champ, on déduit les équations reliant les discontinuités $a_{\alpha\beta}$, $u^\gamma_{\alpha\beta}$, y_α.

A partir de l'équation (1) et de l'équation (2) où l'on a dérivé en x^0 on obtient :

$$(A_1) \quad u^0_{ij} = 0, \qquad (A_2) \quad u^0_{0i} = u^j_{ij}, \qquad (A_3) \quad u^0_{i0} = u^j_{ji}$$

$$(A_4) \text{ et } (A_5) \quad u^i_{0i} = u^i_{i0} = 0.$$

En dérivant l'équation de liaison (3) par rapport à x^0, on obtient :

$$(A_6) \qquad u^h_{ik} g_{hj} + u^h_{kj} g_{ih} = 0,$$

$$(A_7) \qquad u^h_{0k} g_{hj} + u^0_{0k} g_{0j} + u^h_{kj} g_{0h} = 0,$$

$$(A_8) \qquad u^h_{k0} g_{ih} + u^0_{k0} g_{i0} + u^h_{ik} g_{h0} = 0,$$

$$(A_9) \qquad g_{00}(y^0_{0k} + u^0_{k0}) + u^h_{0k} g_{h0} + u^h_{k0} g_{0h} = 0.$$

On obtient aussi à partir de (3) les équations déterminant les a, en fonction des u :

$$(A_{10}) \qquad a_{ij} = u^0_{i0} g_{0j} + u^0_{0j} g_{i0} + u^h_{i0} g_{hj} + u^h_{0j} g_{ih}$$
$$(A_{11}) \qquad a_{00} = 2u^\sigma_{00} h_{0\sigma}$$
$$(A_{12}) \qquad a_{0i} = u^0_{00} g_{0i} + u^h_{00} g_{hi} + u^h_{0i} g_{0h} + u^0_{0i} g_{00}.$$
$$(A_{13}) \qquad a_{i0} = u^0_{00} g_{i0} + u^h_{00} g_{ih} + u^h_{i0} g_{h0} + u^0_{i0} g_{00}$$

L'équation (1) permet aussi d'obtenir les y_i en fonction des u :

$$(A_{14}) \qquad y_i = \frac{3}{2} u^0_{0i}.$$

Enfin une condition de Lichnérowicz, par exemple la première, donnera une condition du type :

$$(A_{15}) \qquad \gamma^{00} y_0 + \gamma^i y_i = 0$$

où l'on a posé $\gamma^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} l_\beta$; cette condition déterminera, si $\gamma^{00} \neq 0$, y_0 en fonction de y_i. On remarque que les équations contenant des discontinuités non significatives sont séparées des autres.

c) Supposons que la surface de discontinuité satisfasse à $g^{00} \neq 0$. On démontre alors que les équations (A_4), (A_5) et (A_9) sont vérifiées pour tout système de u satisfaisant aux équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_6), (A_7), (A_8).

Cette propriété est liée au fait que les équations du champ sont en involution au sens indiqué par M. Lichnérowicz.

d) Cherchons à déterminer les discontinuités dans le cas général. Le système (A_6) n'admet comme solution que la solution nulle [10] sauf si on est dans un des 3 cas suivants :

I) $g^{00} = 0$, soit $g^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$
II) $h^{00} = 0$, soit $h^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$
III) $\gamma^{00} = 0$, soit $\gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0.$

Une hypersurface qui satisfait en tous ses points à l'une de ces conditions sera une hypersurface caractéristique; dans le cas (I) nous dirons qu'on a une caractéristique de Lichnérowicz; dans les cas (II) et (III) nous dirons qu'on a une caractéristique de M^me Maurer-Tison.

Supposons maintenant que g^{00}, h^{00} et γ^{00} ne soient pas nuls dans le voisinage d'hypersurface considérée. On peut utiliser le *c*) et supprimer les équations (A_4), (A_5), (A_9). D'après (A_6), on a donc, quelles que soient les valeurs des indices :

$$u^h_{ij} = 0.$$

De (A_2) et (A_3), on déduit que :

$$u^0_{0i} = u^0_{i0} = 0.$$

De (A_7) et (A_8), on déduit que :

$$u^h_{k0} = u^h_{0k} = 0.$$

En reportant dans (A_{10}), (A_{14}), (A_{15}), on a :

$$a_{ij} = 0, \qquad y_\alpha = 0.$$

Toutes les discontinuités significatives sont donc nulles. Les équations (A_{11}), (A_{12}), (A_{13}) s'écrivent aussi bien :

$$a_{00} = 2u^\sigma_{00} h_{0\sigma} \tag{6}$$

$$a_{(0i)} = u^\sigma_{00} h_{i\sigma} \tag{7}$$

$$a_{[0i]} = u^\sigma_{00} h_{\sigma i} \tag{8}$$

et ces équations entraînent que les conditions (1-1) et (1-2) sont réalisées. Par suite on peut faire disparaître toutes les discontinuités non significatives à la fois par un changement de coordonnées admissible sur l'hypersurface considérée.

Dans le cas analytique au moins, le problème de Cauchy admet une solution et une seule, (cf. [9]), pour une telle hypersurface.

L'étude des hypersurfaces caractéristiques et la résolution du système précédent dans les divers cas seront faites dans le 2e chapitre.

e) Auparavant nous écrirons les équations reliant les discontinuités $b_{\alpha\beta}$, $V^\gamma_{\alpha\beta}$, z_α et les discontinuités précédentes.

En dérivant par rapport à x^0, l'équation (1), on obtient :

$$[\partial_0 P_{\alpha\beta}] = \frac{2}{3}([\partial_{0\alpha} S_\beta] - [\partial_{0\beta} S_\alpha]).$$

En dérivant par rapport à x^0, l'équation (2), on obtient :

$$V^\rho_{\sigma\rho} = V^\rho_{\rho\sigma}.$$

On utilisera maintenant une notation de congruence modulo les combinaisons linéaires des u^{α}_{00} et des $\partial_i u^{\alpha}_{00}$, termes non significatifs; compte tenu des résultats du $2b$), on a ainsi les équations en V :

$$(\overline{\mathrm{A}}_1) \quad \mathrm{V}^0_{ij} \sim -\partial_h u^h_{ij} + \partial_j u^0_{i0} + \partial_i u^0_{0j} - u^{\sigma}_{h\sigma}\mathrm{L}^h_{ij} - u^h_{ij}\mathrm{L}^{\sigma}_{h\sigma} + u^{\sigma}_{\rho j}\mathrm{L}^{\rho}_{i\sigma} + u^{\sigma}_{i\rho}\mathrm{L}^{\rho}_{\sigma j}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_2) \quad \begin{cases} \mathrm{V}^0_{0i} \sim \mathrm{V}^h_{ih} - \partial_h u^h_{0i} - \partial_h u^h_{i0} - u^{\sigma}_{h\sigma}(\mathrm{L}^h_{i0} + \mathrm{L}^h_{0i}) \\ - \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\sigma}(u^{\rho}_{0i} + u^{\rho}_{i0}) + \mathrm{L}^{\rho}_{0\sigma}u^{\sigma}_{\rho i} + \mathrm{L}^{\rho}_{\sigma 0}u^{\sigma}_{i\rho} + \mathrm{L}^h_{\rho i}u^{\rho}_{0h} + \mathrm{L}^h_{i\rho}u^{\rho}_{h0} \end{cases}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_3) \quad \mathrm{V}^0_{i0} \sim \mathrm{V}^h_{hi} - \partial_h u^h_{0i} - \partial_h u^h_{i0} - u^{\sigma}_{h\sigma}(\mathrm{L}^h_{i0} + \mathrm{L}^h_{0i}) - \mathrm{L}^{\sigma}_{\rho\sigma}(u^{\rho}_{0i} + u^{\rho}_{i0}) + \mathrm{L}^{\rho}_{0\sigma}u^{\sigma}_{\rho i} + \mathrm{L}^{\rho}_{\sigma 0}u^{\sigma}_{i\rho} + \mathrm{L}^h_{\rho i}u^{\rho}_{0h} + \mathrm{L}^h_{i\rho}u^{\rho}_{h0}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_4)\ (\overline{\mathrm{A}}_5) \quad \mathrm{V}^h_{0h} = \mathrm{V}^h_{0h} \sim u^{\sigma}_{h\sigma}\mathrm{L}^h_{00} - u^{\sigma}_{h0}\mathrm{L}^h_{0\sigma} - u^{\sigma}_{0h}\mathrm{L}^h_{\sigma 0}.$$

En dérivant deux fois l'équation de liaison par rapport à x^0, on obtient :

$$(\overline{\mathrm{A}}_6) \quad \begin{cases} \mathrm{V}^h_{ik}g_{hj} + \mathrm{V}^h_{kj}g_{ih} \\ \quad \sim g_{hj}\partial_k u^h_{i0} + g_{ih}\partial_k u^k_{0j} + g_{0j}(\partial_h u^h_{ik} - \partial_i u^0_{0k}) + g_{i0}(\partial_h u^h_{kj} - \partial_j u^0_{k0}) \\ + g_{0j}(u^0_{0h}\mathrm{L}^h_{ik} - u^h_{ik}\mathrm{L}^0_{k0} + \mathrm{L}^l_{hl}u^h_{ik} - u^0_{0k}\mathrm{L}^0_{i0} - u^h_{0k}\mathrm{L}^0_{ih} - u^l_{hk}\mathrm{L}^h_{il} - u^h_{il}\mathrm{L}^l_{hk}) \\ + g_{i0}(u^0_{h0}\mathrm{L}^h_{kj} - u^h_{kj}\mathrm{L}^0_{0h} + \mathrm{L}^l_{lh}u^h_{kj} - u^0_{k0}\,\mathrm{L}^0_{0j} - u^h_{k0}\mathrm{L}^0_{hj} - u^l_{kh}\mathrm{L}^h_{lj} - u^h_{lj}\mathrm{L}^l_{kh}) \\ + g_{lj}(-2u^h_{ik}\mathrm{L}^l_{h0} - \mathrm{L}^h_{ik}u^l_{h0} + u^0_{i0}\mathrm{L}^l_{0k} + u^h_{i0}\mathrm{L}^l_{hk}) \\ + g_{il}(-2u^h_{kj}\mathrm{L}^l_{0h} - \mathrm{L}^h_{kj}u^l_{h0} + u^0_{0j}\mathrm{L}^l_{k0} + u^h_{0j}\mathrm{L}^l_{kh}) \\ - 2(g_{h0}u^h_{ik}\mathrm{L}^0_{0j} + g_{0h}u^h_{kj}\mathrm{L}^0_{i0}) - 2g_{hl}(u^h_{ik}\mathrm{L}^l_{0j} + u^l_{kj}\mathrm{L}^h_{i0}) \end{cases}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_7) \quad \begin{cases} \mathrm{V}^0_{0k}g_{0j} + \mathrm{V}^h_{0k}g_{hj} + \mathrm{V}^h_{kj}g_{0h} \\ \quad \sim g_{00}(\partial_h u^h_{kj} - \partial_j u^0_{k0}) + g_{0h}\partial_k u^h_{0j} + g_{00}(u^{\sigma}_{h\sigma}\mathrm{L}^h_{kj} + \mathrm{L}^{\sigma}_{h\sigma}u^h_{kj} - u^{\sigma}_{\rho j}\mathrm{L}^{\rho}_{k\sigma} - u^{\sigma}_{k\rho}\mathrm{L}^{\rho}_{\sigma j}) \\ + \partial_k g_{00}u^0_{0j} + u^h_{0j}\partial_k g_{0h} - 2u^{\sigma}_{0k}\,.\,\partial_0 g_{\sigma j} - 2u^h_{kj}\partial_0 g_{0h} - \mathrm{L}^{\sigma}_{0k}a_{\sigma j} - \mathrm{L}^{\sigma}_{kj}a_{0\sigma}. \end{cases}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_8) \quad \begin{cases} \mathrm{V}^0_{k0}g_{i0} + \mathrm{V}^h_{k0}g_{ih} + \mathrm{V}^h_{ik}g_{h0} \\ \quad \sim g_{00}(\partial_h u^h_{ik} - \partial_i u^0_{0k}) + g_{h0}\partial_k u^h_{i0} + g_{00}(u^{\sigma}_{h\sigma}\mathrm{L}^h_{ik} + \mathrm{L}^{\sigma}_{h\sigma}u^h_{ik} - u^{\sigma}_{\rho k}\mathrm{L}^{\rho}_{i\sigma} - u^{\sigma}_{i\rho}\mathrm{L}^{\rho}_{\sigma k}) \\ + \partial_k g_{00}u^0_{i0} + u^h_{i0}\partial_k g_{h0} - 2u^{\sigma}_{k0}\,.\,\partial_0 g_{i\sigma} - 2u^h_{ik}\,.\,\partial_0 g_{h0} - \mathrm{L}^{\sigma}_{k0}a_{i\sigma} - \mathrm{L}^{\sigma}_{ik}a_{\sigma 0}. \end{cases}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_9) \quad \begin{cases} g_{00}(\mathrm{V}^0_{0k} + \mathrm{V}^0_{k0}) + \mathrm{V}^h_{0k}g_{h0} + \mathrm{V}^h_{k0}g_{0h} \\ \quad \sim -2u^{\sigma}_{0k}\,.\,\partial_0 g_{\sigma 0} - 2u^{\sigma}_{k0}\,.\,\partial_0 g_{0\sigma} + \mathrm{L}^h_{0k}\,.\,a_{h0} + \mathrm{L}^h_{k0}a_{0h}. \end{cases}$$

On obtient aussi les équations déterminant les b en fonction des V et des u; nous aurons besoin seulement de :

$$(\overline{\mathrm{A}}_{10}) \quad b_{ij} \sim \mathrm{V}^{\sigma}_{i0} g_{\sigma j} + \mathrm{V}^{\sigma}_{0j} g_{i\sigma} + 2u^{\sigma}_{i0}.\partial_0 g_{\sigma j} + 2u^{\sigma}_{0j}.\partial_0 g_{i\sigma} + \mathrm{L}^{\sigma}_{i0} a_{\sigma j} + \mathrm{L}^{\sigma}_{0j} a_{i\sigma}.$$

On aura aussi une équation $(\overline{\mathrm{A}}_{14})$, (analogue à (A_{14})); nous l'écrirons, en étendant la congruence aux combinaisons linéaires des u et y, sous la forme :

$$(\overline{\mathrm{A}}_{14}) \qquad z_i \sim \partial_i y_0 + \frac{3}{2}(\mathrm{V}^0_{0i} + \partial_h u^h_{0i}).$$

A l'aide de la condition de Lichnérowicz, avec la même extension de la notation de congruence, on aura une condition du type :

$$(\overline{\mathrm{A}}_{15}) \qquad \gamma^{00} z_0 + \gamma^i z_i + \gamma^{i\beta}\partial_i y_\beta \sim 0.$$

f) Supposons que la surface de discontinuité satisfasse à $g^{00} \neq 0$; on démontre alors que les équations $(\overline{\mathrm{A}}_4)$, $(\overline{\mathrm{A}}_5)$, $(\overline{\mathrm{A}}_9)$ sont vérifiées pour tout système de V satisfaisant aux équations $(\overline{\mathrm{A}}_1)$, $(\overline{\mathrm{A}}_2)$, $(\overline{\mathrm{A}}_3)$, $(\overline{\mathrm{A}}_6)$, $(\overline{\mathrm{A}}_7)$, $(\overline{\mathrm{A}}_8)$.

g) On aura ensuite, de même, des équations liant les discontinuités d'ordre supérieur. On aura besoin seulement de celles que l'on va écrire.

— Une des équations $(\overline{\overline{\mathrm{A}}}_1)$, soit : $[\partial_{00}\mathrm{P}_{11}] = 0$; cette équation sera du type :

$$\mathrm{W}^0_{11} \sim \cdots$$

le second membre ne contenant que des V, et certaines de leurs dérivées dans le cas qui nous intéressera.

— Une des équations $(\overline{\overline{\mathrm{A}}}_6)$:

$$\left\{\begin{aligned}&\mathrm{W}^{\sigma}_{ik} g_{\sigma j} + \mathrm{W}^{\sigma}_{kj} g_{i\sigma} \sim \partial_k b_{ij} - 3\mathrm{V}^{\sigma}_{ik}.\partial_0 g_{\sigma j} - 3\mathrm{V}^{\sigma}_{kj}\partial_0 g_{i\sigma}\\ &\qquad - 3[\partial_0 \mathrm{L}^{\sigma}_{ik}.\partial_{00} g_{\sigma j}] - 3[\partial_0 \mathrm{L}^{\sigma}_{kj}.\partial_{00} g_{i\sigma}] - \mathrm{L}^{\sigma}_{ik}.b_{\sigma j} - \mathrm{L}^{\sigma}_{kj} b_{i\sigma}.\end{aligned}\right.$$

soit celle qui correspond aux indices : $\{i, j, k\} = \{1, 1, 1\}$.

L'étude des équations aux V ou aux W, faite dans l'esprit de la 1re partie, nous donnera la propagation des u sur une hypersurface caractéristique; elle sera faite au 3e chapitre.

CHAPITRE II

REPÈRES ADAPTÉS AUX DIFFÉRENTES CARACTÉRISTIQUES

1. Étude du tenseur $g_{\alpha\beta}$.

a) On considère donc un espace vectoriel à 4 dimensions et un tenseur réel covariant d'ordre 2, $g_{\alpha\beta}$, satisfaisant aux hypothèses habituelles de la théorie unitaire [9].

Une forme linéaire l_α définit un 3-plan P.

Des égalités $g_{\alpha\sigma}g^{\alpha\beta} = g_{\sigma\alpha}g^{\beta\alpha} = \delta^\beta_\sigma$, définissant le tenseur associé $g^{\alpha\beta}$, [10], on déduit la formule :

$$\delta^\beta_\sigma = h_{\alpha\sigma}l^{\alpha\beta} + k_{\alpha\sigma}m^{\alpha\beta}.$$

De cette formule, on déduit, [10], que l'ensemble des vecteurs propres de $l_{\alpha\beta}$ par rapport à $h_{\alpha\beta}$ est identique à l'ensemble des vecteurs propres de $m_{\alpha\beta}$ par rapport à $k_{\alpha\beta}$.

Si $k = 0$, on remplacera $m_{\alpha\beta}$ par $\frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}m^{\rho\sigma}$, ($\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ indicateur de Kronecker), (cf. [10]), et $k^{\alpha\beta}$ par $-\frac{\varepsilon}{2}\, \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}k_{\rho\sigma}$ et on pourra ainsi adapter les résultats suivants à ce cas particulier.

L'équation aux valeurs propres de $m_{\alpha\beta}$ par rapport à $k_{\alpha\beta}$ admet en général, [si on n'a pas à la fois $g = h$, $k = 0$, cas que nous laisserons de côté pour simplifier], deux racines doubles distinctes. Il leur correspond deux 2-plans de vecteurs propres définis respectivement par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ (nous les choisirons plus particulièrement tout à l'heure).

b) On désigne par (l) et (h) les cônes d'équations : $l_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ et $h_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$. Ils définissent un faisceau ponctuel qui admet pour cônes décomposés deux couples de 3-plans : l'un des couples est formé de deux 3-plans se coupant suivant le 2-plan ($\vec{a}$, $\vec{b}$); l'autre de deux 3-plans se coupant suivant le 2-plan ($\vec{c}$, $\vec{d}$).

Les cônes (l) et (h) définissent donc aussi un faisceau tangentiel qui admet pour enveloppes dégénérées les couples de vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c}$ et $\vec{d}$; on prendra pour $\vec{a}$ et $\vec{b}$, par exemple les intersections des 3-plans passant par le 2-plan $(\vec{c}, \vec{d})$ et définissant l'un des cônes dénégérés du faisceau ponctuel avec le 2-plan arête de l'autre cône dégénéré du faisceau ponctuel; on définira de même $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

Tout cône non dégénéré du faisceau ponctuel définit une enveloppe du faisceau tangentiel et de même toute enveloppe non dégénérée du faisceau tangentiel définit un cône du faisceau ponctuel.

Ainsi l'enveloppe :

$$\gamma^{\alpha\beta}t_\alpha t_\beta \equiv \left(\frac{2h}{g}h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}\right)t_\alpha t_\beta = 0,$$

appartient au faisceau tangentiel et définit un cône du faisceau ponctuel, sauf si $g - 2k - 2h = 0$, cas que nous laisserons de côté dans la suite.

c) Les droites conjuguées du 3-plan P par rapport aux enveloppes du faisceau tangentiel forment un 2-plan, [sauf si P est un plan singulier, c'est-à-dire contient le 2-plan $(\vec{a}, \vec{b})$ ou le 2-plan $(\vec{c}, \vec{d})$; nous laisserons de côté ces cas].

On désignera par $\vec{l}$, $\vec{h}$, $\vec{\gamma}$ les vecteurs conjugués du 3-plan P par rapport aux cônes (l), (h), (γ) définis par:

$$\vec{l} : l^\alpha = l^{\alpha\beta}l_\beta, \qquad \vec{h} : h^\alpha = h^{\alpha\beta}l_\beta, \qquad \vec{\gamma} : \vec{\gamma} = \frac{2h}{g}\vec{h} - \vec{l}.$$

Le 3-plan P coupe le 2-plan $(\vec{a}, \vec{b})$ le long d'une droite définie par $\vec{\imath}$: la droite conjuguée de P par rapport à l'enveloppe dégénérée $(\vec{a}, \vec{b})$ est aussi la droite conjuguée de la droite définie par $\vec{\imath}$, par rapport aux droites définies par $\vec{a}$ et $\vec{b}$; nous désignerons par $\vec{\imath}'$ un vecteur porté par cette droite conjuguée de P. De même le 3-plan P coupe le 2-plan $(\vec{c}, \vec{d})$ le long d'une droite définie par $\vec{\jmath}$ et la droite conjuguée de P par rapport à l'enveloppe $(\vec{c}, \vec{d})$ est aussi la droite conjuguée de $\vec{\jmath}$, par rapport aux droites $\vec{c}$ et $\vec{d}$; elle sera définie par le vecteur $\vec{\jmath}'$. On en déduit que les droites conjuguées de P par rapport aux différentes enveloppes du faisceau sont dans le 2-plan $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$; ainsi $\vec{h}$, $\vec{l}$ et $\vec{\gamma}$ sont dans ce 2-plan.

Les plans conjugués de $\vec{h}$, par exemple, par rapport aux cônes du faisceau considéré comme ponctuel, forment un faisceau que l'on peut déterminer en cherchant les plans conjugués de $\vec{h}$ par rapport aux cônes décomposés du faisceau ponctuel de cônes. L'un de ces cônes décomposés est formé du couple de 3-plans $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ et $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$; le 3-plan conjugué de $\vec{h}$ par rapport à ce couple de plans est le 3-plan $(\vec{c}, \vec{d}, \vec{\imath})$. L'autre cône décomposé est formé du couple de 3-plans $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$; le plan conjugué de $\vec{h}$ est le plan $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\jmath})$. Les 3-plans $(\vec{c}, \vec{d}, \vec{\imath})$ et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{\jmath})$ se coupent selon le 2-plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui est donc l'« arête » du faisceau des plans conjugués de $\vec{h}$. On remarque que cette arête ne dépend pas du choix de $\vec{h}$, donc les vecteurs tels que $\vec{l}$ et $\vec{\gamma}$ ont leurs plans conjugués par rapport à tous les cônes qui passent par le 2-plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On remarque, d'autre part, que, d'après sa définition, le 2 plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est contenu dans le 3-plan P.

En résumé, les droites conjuguées de P par rapport aux enveloppes du faisceau tangentiel forment un 2-plan $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$, les plans conjugués d'une droite quelconque, issue de l'origine, de ce 2-plan forment un faisceau dont P fait partie et qui admet pour arête le 2-plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Ainsi le 2-plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est conjugué du 2-plan $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ par rapport à n'importe quel cône.

d) Les tenseurs antisymétriques $k_{\alpha\beta}$ et $m_{\alpha\beta}$, définissent chacun un complexe linéaire. On peut dire que l'ensemble des tenseurs de la forme : $\lambda k_{\alpha\beta} + \mu m_{\alpha\beta}$ définit un faisceau ponctuel de complexes linéaires. Dans ce faisceau, il y a deux complexes dégénérés ou spéciaux.

L'un d'eux est défini par le 2-plan $(\vec{a}, \vec{b})$, l'autre par le 2-plan $(\vec{c}, \vec{d})$.

A l'aide des tenseurs associés $k^{\alpha\beta}$ et $m^{\alpha\beta}$, on définit de même un « faisceau tangentiel » de complexes linéaires : $\lambda' k^{\alpha\beta} + \mu' m^{\alpha\beta}$, qui admet des complexes dégénérés définis par les 2-plans $(\vec{a}, \vec{b})$ et $(\vec{c}, \vec{d})$.

Tout complexe non dégénéré du faisceau ponctuel définit un complexe du faisceau tangentiel et réciproquement.

On aura à considérer le complexe défini par :

$$X^{\alpha\beta} \equiv 2kh^{\alpha\beta} - gm^{\alpha\beta}.$$

e) Les droites conjuguées du 3-plan P par rapport aux complexes du faisceau tangentiel forment un 2-plan.

La droite conjuguée de P par rapport au complexe dégénéré de ce faisceau défini par le 2-plan $(\vec{a}, \vec{b})$ est l'intersection de ce 2-plan avec le plan P, c'est-à-dire la droite définie par $\vec{\imath}$. De même la droite conjuguée de P par rapport à l'autre complexe dégénéré du faisceau tangentiel est la droite définie par $\vec{\jmath}$. On en déduit que les droites conjuguées de P par rapport aux différents complexes du faisceau sont dans le 2-plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désignera par $\vec{k}$, $\vec{m}$ et $\vec{X}$ les vecteurs conjugués du 3-plan P par rapport aux complexes (k), (m), (X), définis par :

$$\vec{k} : k^{\alpha} = k^{\alpha\beta} l_{\beta}, \qquad \vec{m} : m^{\alpha} = m^{\alpha\beta} l_{\beta}, \quad \vec{X} = 2k\vec{k} - g\vec{m}$$

Les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{m}$, $\vec{X}$ sont donc dans le 2-plan $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$.

f) Nous tirerons de cette étude la conclusion pratique suivante. Le 2-plan $(\vec{l}, \vec{h})$ est totalement orthogonal au 2-plan $(\vec{k}, \vec{m})$ au sens de la métrique $h_{\alpha\beta}$ ou bien au sens de la métrique $l_{\alpha\beta}$, ou de la métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ (on rappelle que

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g}(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta}),$$

si $g - 2h - 2k \neq 0$).

On pourra faire une figure dans l'espace projectif P^3 défini par les directions de l'espace vectoriel considéré.

g) Les résultats précédents nous servirons à former des repères commodes. Nous leur adjoindrons les remarques suivantes :

— Avec la métrique $h_{\alpha\beta}$, on a la relation :

$$(\vec{k})^2 = \frac{g}{k} l^{\rho} l_{\rho} - \frac{h}{k} (\vec{h})^2. \tag{1}$$

— Dans un repère où le 3-plan P est représenté par la forme :

$$l_\alpha \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (x^0 = 0 \text{ est l'équation du 3-plan}),$$

le vecteur $\vec{k}$ a pour composantes :

$$k^\alpha = k^{\alpha 0} \quad \begin{cases} k^0 = 0 \\ k^j = k^{j0} \end{cases}$$

On voit que $k_{ij}k^j = 0$ et par suite k^α est le vecteur unique tel que :

$$k^0 = 0, \qquad k_{ij}k^j = 0.$$

2. Repères adaptés à une caractéristique satisfaisant à $\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$.

Le plan P considéré est ici le plan tangent à la caractéristique en chaque point. Il est tangent au cône (γ) le long de $\vec{\gamma}$ et n'est pas tangent au cône (h). Nous construirons en chaque point un repère commode.

En effet, on vérifie que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{X}$ sont orthogonaux au sens de la métrique $h_{\alpha\beta}$ et distincts. On sait que le vecteur γ est orthogonal à $\vec{k}$ et $\vec{X}$ et que ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants dans P. Enfin le vecteur $\vec{h}$ est orthogonal au 3-plan P et par suite à $\vec{\gamma}$, $\vec{k}$, $\vec{X}$ et n'appartient pas au plan P. On peut donc former un repère orthogonal au sens de $h_{\alpha\beta}$ avec les vecteurs $\vec{h}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{k}$, $\vec{X}$. Nous désignerons par $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ un repère orthonormé construit à partir de $\vec{h}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{X}$, $\vec{k}$ dans l'ordre indiqué.

Cherchons les composantes de $g_{\alpha\beta}$ dans un tel repère. Du fait que :

$$k_{ij}k^j = 0,$$

on déduit :

$$k_{i3} = 0.$$

Puisque le repère est orthonormé, la matrice des $h_{\alpha\beta}$ est diagonale; 3 des coefficients de la diagonale vaudront -1, l'autre vaudra 1; remarquons que d'après la formule (1-1), on a :

$$k(\vec{k})^2 = h(\vec{h})^2$$

c'est-à-dire que $(h)^2$ et $(k)^2$ sont de signe contraire et par suite que :

$$h_{00} = -\varepsilon, \qquad h_{11} = -1, \qquad h_{22} = -1, \qquad h_{33} = \varepsilon,$$

avec $\varepsilon = +1$.

Pour l'instant on peut donc écrire :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ -k_{01} & -1 & k_{12} & 0 \\ -k_{02} & -k_{12} & -1 & 0 \\ -k_{03} & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Utilisons maintenant le fait que le vecteur $\vec{e}_1$ du repère est colinéaire à $\vec{\gamma}$; on a :

$$\gamma^0 = \gamma^2 = \gamma^3 = 0.$$

De $\gamma^{00} = 0$, on déduit :

$$2\,\frac{h}{g}\,h^{00} - l^{00} = 0$$

soit :

$$2\,\text{dét}(h_{ij}) - \text{dét}(g_{ij}) = 0$$

d'où :

$$k_{12} = \pm 1.$$

On prendra $k_{12} = +1$; l'autre solution correspond à un $g_{\alpha\beta}$ transposé de celui choisi. De $\gamma^{02} = 0$, on déduit : $l^{02} = 0$, d'où $k_{01} = 0$. Dans ces conditions on vérifie que $\gamma^3 = 0$. Finalement :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & k_{02} & k_{03} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -k_{02} & -1 & -1 & 0 \\ -k_{03} & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$k_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$k_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{02} & k_{03} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_{02} & -1 & 0 & 0 \\ -k_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = 2(k_{02})^2 - 2 - \varepsilon(k_{02})^2, \qquad h = -1,$$
$$k = (k_{03})^2.$$

On a :

$$\gamma^1 = -l^{01} = \varepsilon \frac{k_{02}}{g}.$$

Remarquons que $(\vec{\gamma})^2$ est négatif et que par suite le cône (γ) est toujours à l'extérieur du cône (h). On a aussi

$$\varepsilon(k_{02})^2 = 2k + 2h - g;$$

k_{02} ne peut donc être nul, le cas $2k + 2h - g$ étant celui où le cône (γ) serait dégénéré, cas que l'on a déjà éliminé. Le signe de ε est celui de $2k + 2h - g$ et aussi de $-(\vec{h})^2$. On en déduit que selon le signe de $(2k + 2h - g)$, (h) est à l'extérieur ou à l'intérieur de (γ); la disposition relative de ces cônes avait déjà été trouvée dans [10].

3. Repères adaptés à une caractéristique satisfaisant à $h^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$.

En chaque point de la caractéristique le plan tangent P est tangent au cône (h) le long de la droite qui porte le vecteur $\vec{h}$. Nous construirons en chaque point un repère adapté aux calculs qui suivront.

On remarque d'abord que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{h}$ ne peuvent être confondus; ils appartiennent tous deux au plan P.

Le 3-plan conjugué de $\vec{k}$ par rapport à (h) coupe le 3-plan P et ne passe pas par $\vec{k}$. Le 3-plan conjugué de $\vec{h}$ par rapport au complexe (k) passe par $\vec{k}$ et $\vec{h}$ et coupe aussi le 3-plan P. Le 3-plan conjugué de $\vec{k}$ par rapport à (h) et le 3-plan conjugué de $\vec{h}$ par rapport à (k) se coupent donc selon un 2-plan passant par $\vec{h}$ et non contenu dans P. Ce 2-plan recoupe le cône (h) selon une droite passant par l'origine et définie par le vecteur $\vec{e}_0$.

Le 3-plan tangent à (h) le long de $\vec{e}_0$ coupe le 3-plan conjugué de $\vec{k}$ par rapport à (h) selon un 2-plan. Ce 2-plan coupe le 2-plan intersection du 3-plan P et du plan conjugué de $\vec{k}$ par rapport à (h) le long d'une droite définie par le vecteur $\vec{e}_3$.

Nous prendrons en chaque point un repère $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ formé par les vecteurs $\vec{e}_0$, $\vec{h}$, $\vec{k}$, e_3.

Le vecteur $\vec{h}$ satisfait à :

$$h^0 = 0, \qquad h_{ij}h^j = 0$$

on a donc : $h_{i1} = 0$ pour tout i.

Le vecteur $\vec{e}_0$ appartient au cône (h), on a donc : $h_{00} = 0$.

Le vecteur $\vec{e}_3$ est conjugué du vecteur $\vec{k}$ et du vecteur $\vec{e}_0$ par rapport au cône (h); on a donc : $h_{23} = h_{03} = 0$.

Le vecteur $\vec{e}_0$ est conjugué du vecteur $\vec{k}$ par rapport à (h), on a donc : $h_{02} = 0$.

D'autre part $\vec{k}$ satisfait à :

$$k_{ij}k^j = 0$$

d'où :

$$k_{i2} = 0$$

$\vec{h}$ et $\vec{e}_0$ sont conjugués par rapport au complexe (k), d'où : $k_{01} = 0_0$. On a donc finalement :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & h_{01} & k_{02} & k_{03} \\ h_{01} & 0 & 0 & k_{13} \\ -k_{02} & 0 & h_{22} & 0 \\ -k_{03} & -k_{13} & 0 & h_{33} \end{pmatrix},$$

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & h_{01} & 0 & 0 \\ h_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix},$$

$$k_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{02} & k_{03} \\ 0 & 0 & 0 & k_{13} \\ -k_{02} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{03} & -k_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = -(h_{01})^2 h_{22}h_{33} \neq 0 \qquad k = (k_{02})^2\,(k_{13})^2.$$

4. Repères adaptés à une caractéristique satisfaisant à $l^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$.

En chaque point de la caractéristique, le plan tangent P est tangent au cône (l) le long de la droite qui porte le vecteur $\vec{l}$. On construira un repère adapté à cette caractéristique, en chaque point.

En effet, on vérifie que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{m}$ sont orthogonaux au sens de la métrique $h_{\alpha\beta}$ et distincts. On sait que $\vec{l}$ est orthogonal à $\vec{k}$ et $\vec{m}$ et que ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants dans P. Enfin le vecteur $\vec{h}$ est orthogonal au 3-plan P et par suite à $\vec{l}$, $\vec{k}$, et $\vec{m}$ et n'appartient pas au plan P. On désignera par $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ un repère orthonormé au sens de la métrique $h_{\alpha\beta}$ construit à partir de $\vec{h}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{k}$ dans l'ordre indiqué.

Comme $\vec{k}$ est proportionnel à $\vec{e}_3$, on aura :

$$k_{i3} = 0.$$

Du fait que le repère est orthonormé, tenant compte de (1-1), on a :

$$h_{00} = -1, \qquad h_{11} = \varepsilon, \qquad h_{22} = -\varepsilon, \qquad h_{33} = -1$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

Puisque $\vec{e}_1$ est colinéaire à $\vec{l}$, on a :

$$l^0 = l^2 = l^3 = 0.$$

On en déduit :

$$k_{12} = \pm 1, \qquad k_{01} = 0.$$

On prendra $k_{12} = 1$; l'autre solution correspond à un $g_{\alpha\beta}$ transposé de celui choisi.

On a finalement :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k_{02} & k_{03} \\ 0 & \varepsilon & 1 & 0 \\ -k_{02} & -1 & -\varepsilon & 0 \\ -k_{03} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad k_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{02} & k_{03} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_{02} & -1 & 0 & 0 \\ -k_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = -\varepsilon(k_{02})^2 \neq 0$$

$$h = -1 \qquad\qquad k = (k_{03})^2$$

On a aussi : $$l^1 = \frac{k_{02}}{g}.$$

Le signe de ε dépend de la position relative des cônes (l) et (h).

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES ET PROPAGATION DES DISCONTINUITÉS DU TENSEUR DE COURBURE SUR CHAQUE CARACTÉRISTIQUE

1. Propriétés algébriques des discontinuités sur une caractéristique satisfaisant à $\gamma^{\alpha\beta}l_\alpha l_\beta = 0$.

En chaque point de la caractéristique, on prendra un repère adapté et dans ces conditions on écrira les équations (I-2-A).

Pour déterminer les u significatifs, compte tenu de la remarque du § 2 c) du chapitre I, on aura besoin des équations (I-2-A_1), (I-2-A_2), (I-2-A_3), (I-2-A_6), (I-2-A_7), (I-2-A_8).

On considèrera d'abord les équations de la forme :

$$(\text{I-2-A}_6) \qquad u^h_{ik}g_{hj} + u^h_{kj}g_{ih} = 0.$$

L'équation ci-dessus sera notée $(A_6)_{ijk}$.

Ce système se sépare. Les 12 équations $(A_6)_{ab3}$, $(A_6)_{a3b}$, $(A_6)_{3ab}$, où a et b ne prennent que les valeurs 1 et 2, ne contiennent comme inconnues que les 12 inconnues : u^3_{ab}, u^b_{a3}, u^3_{ba}. Ce système est de rang 10 ou de « corang » 2 ; on peut choisir deux des u arbitrairement et exprimer les autres en fonction de ceux-là. Les 15 autres équations (A_6) et les 15 autres inconnues forment un système craménien ; les 15 derniers u sont nuls.

Les u^0_{0i}, u^0_{i0}, u^j_{0h}, u^j_{h0} sont ensuite déterminés de façon unique en fonction des u précédents à l'aide des équations non encore utilisées.

Nous donnerons les expressions des u non nuls en fonction des 2 paramètres A et B.

$$u^3_{11} = -u^3_{22} = -2\varepsilon B$$
$$u^3_{12} = u^3_{21} = 2\varepsilon A.$$

$$\begin{array}{ll}
u^1_{13} = A - B, & u^1_{31} = -B - A \\
u^2_{13} = A + B, & y^2_{31} = A - B \\
u^1_{23} = A + B, & u^1_{32} = A - B \\
u^2_{23} = B - A, & u^2_{32} = A + B \\
u^1_{01} = -\varepsilon k_{03}(A + B), & u^1_{10} = \varepsilon(B - A)k_{03} \\
u^2_{01} = \varepsilon k_{03}(A - B), & u^2_{10} = -\varepsilon(B + A)k_{03} \\
u^3_{01} = -\varepsilon(B + A)k_{02}, & u^3_{10} = \varepsilon(A - B)k_{02} \\
u^1_{02} = \varepsilon(A - B)k_{03}, & u^1_{20} = -\varepsilon(A + B)k_{03} \\
u^3_{02} = \varepsilon(A + B)k_{03}, & u^2_{20} = \varepsilon(A - B)k_{03} \\
u^3_{02} = \varepsilon(A - B)k_{02}, & u^3_{20} = \varepsilon(A + B)k_{02} \\
u^1_{03} = -Bk_{02}, & u^1_{30} = -Bk_{02} \\
u^2_{03} = Ak_{02}, & u^3_{30} = Ak_{02}.
\end{array}$$

On en déduit des relations algébriques sur les discontinuités du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci. Compte tenu de (I-1-6), on a d'abord :

$$[P_{\lambda\mu}] = 0.$$

Le tenseur de Ricci est continu à la traversée d'une telle caractéristique. Avec (I-2-5), on a alors :

$$l_\alpha[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] = 0.$$

On rappelle que (I-1-3) est toujours valable :

$$S_{\lambda,\mu,\nu} l_\nu [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] = 0.$$

L'équation (I-2-A_{14}) montre que $y_i = 0$. La condition de Lichnérowicz relative à γ exprimée en (I-2-A_{15}) ne détermine pas y_0, qui reste arbitraire pour l'instant.

Enfin les équations (I-2-A_{10}) déterminent les a significatifs en fonction des paramètres A et B et les équations (I-2-A_{11}), (I-2-A_{12}), (I-2-A_{13}) déterminent les a non significatifs en fonction des u non significatifs et des paramètres précédents.

On vérifie alors que les $a_{\alpha\beta}$ satisfont à la relation :

$$\gamma^\alpha\left(a_{(\alpha\beta)} + \frac{2k}{g} k^{\sigma\rho}\gamma_{\sigma\alpha}a_{[\rho\beta]}\right) = \frac{R}{2} l_\beta.$$

avec :

$$\mathrm{R} = l^{\alpha\beta}a_{(\alpha\beta)} \cdot \left(\frac{2h - g - 2k)}{g}\right) + 2m^{\alpha\beta}a_{[\alpha\beta]}\left(\frac{h-k}{g}\right).$$

Les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas des tenseurs, mais cette relation est invariante dans les changements de coordonnées admissibles.

2. Propagation des discontinuités sur une caractéristique satisfaisant à $\gamma^{\alpha\beta}l_\alpha l_\beta = 0$.

Les équations (I-2-$\overline{\mathrm{A}}$) permettent de déterminer les V pourvu que les seconds membres vérifient des relations de compatibilité. Ce sont ces relations sur les u qui exprimeront en général la propagation des u.

Dans le cas considéré, nous écrirons les équations aux V *sous forme simplifiée en étendant la notation de congruence aux combinaisons linéaires des u significatifs.* On tiendra compte aussi de la remarque du § 2 f) du chapitre I. Les équations aux V s'écriront alors :

$$(\overline{\mathrm{A}}_1) \qquad \mathrm{V}^0_{ij} \sim -\partial_h u^h_{ij} + \partial_j u^0_{i0} + \partial_i u^0_{0j}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_2) \qquad \mathrm{V}^0_{0i} \sim \mathrm{V}^h_{ih} - \partial_h u^h_{0i} - \partial_h u^h_{i0}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_3) \qquad \mathrm{V}^0_{i0} \sim \mathrm{V}^h_{hi} - \partial_h u^h_{0i} - \partial_h u^h_{i0}$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_6)_{ijk} \qquad \mathrm{V}^h_{ik}g_{hj} + \mathrm{V}^h_{kj}g_{ih} \sim g_{hj}\partial_k u^h_{i0} + g_{ih}\partial_k u^h_{0j} + g_{0j}(\partial_h u^h_{ik} - \partial_i u^0_{0k}) + g_{i0}(\partial_h u^h_{kj} - \partial_j u^0_{k0})$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_7) \qquad \mathrm{V}^0_{0k}g_{0j} + \mathrm{V}^h_{0k}g_{hj} + \mathrm{V}^h_{kj}g_{0h} \sim g_{0h}\partial_k u^h_{0j} + g_{00}(\partial_h u^h_{kj} - \partial_j u^0_{k0})$$

$$(\overline{\mathrm{A}}_8) \qquad \mathrm{V}^0_{k0}g_{i0} + \mathrm{V}^h_{k0}g_{ih} + \mathrm{V}^h_{ik}g_{h0} \sim g_{h0}\partial_k u^h_{i0} + g_{00}(\partial_h u^h_{ik} - \partial_i u^0_{0k}).$$

La matrice des coefficients des V est la même que celle des coefficients des u. Le système des 12 équations $(\overline{\mathrm{A}}_6)_{ab3}$, $(\overline{\mathrm{A}}_6)_{a3b}$, $(\overline{\mathrm{A}}_6)_{3ab}$ se sépare. Ce système d'équations en V^b_{a3}, V^b_{3a}, V^3_{ab} est de corang 2 et les seconds membres doivent vérifier 2 conditions de possibilité. Une fois les u remplacés par les valeurs trouvées au paragraphe précédent, on a donc 2 conditions de possibilité sur les dérivées $\partial_i\mathrm{A}$ et $\partial_i\mathrm{B}$.

On obtient en fait ces conditions en effectuant les combinaisons :

$$(\overline{\mathrm{A}}_6)_{113} + (\overline{\mathrm{A}}_6)_{312} + (\overline{\mathrm{A}}_6)_{321} - (\overline{\mathrm{A}}_6)_{231} - (\overline{\mathrm{A}}_6)_{223} - (\overline{\mathrm{A}}_6)_{132}$$

d'une part et :

$$(\overline{A}_6)_{213} + (\overline{A}_6)_{123} + (\overline{A}_6)_{131} - (\overline{A}_6)_{311} - (\overline{A}_6)_{232} + (\overline{A}_6)_{322}.$$

On trouve simplement :

$$\partial_i A \sim 0, \qquad \partial_i B \sim 0;$$

c'est-à-dire :

$$\gamma^\rho \partial_\rho A \sim 0, \qquad \gamma^\rho \partial_\rho B \sim 0;$$

soit :

$$\gamma^\rho \partial_\rho u^\alpha_{\beta k} \sim 0; \qquad \text{pour tous } \alpha,\ \beta,\ k.$$

On peut encore écrire, sous forme tensorielle, en utilisant, par exemple, la dérivation covariante définie par la connexion linéaire envisagée :

$$\gamma^\rho \nabla_\rho [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire à coefficients continus de composantes de $[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ et de termes non significatifs.

Les autres équations en V ne donnent aucune autre condition de possibilité. On aura besoin cependant de déterminer V^h_{1h}. Pour cela on considèrera seulement les équations $(\overline{A}_6)$ qui n'ont pas été utilisées.

Tous calculs faits, on trouve :

$$V^h_{1h} \sim \partial_h u^h_{10}.$$

On peut alors déterminer la propagation des y_0. En comparant (I-2-$\overline{A}_{14}$) et (I-2-$\overline{A}_{15}$), on trouve d'abord :

$$2\gamma^i \partial_i y_0 + \frac{3}{2}\gamma^i (V^0_{0i} + \partial_h u^h_{0i}) \sim 0.$$

En utilisant $(\overline{A}_2)$, on a encore :

$$2\gamma^i \partial_i y_0 + \frac{3}{2}\gamma^i (V^h_{ih} - \partial_h u^h_{i0}) \sim 0.$$

En remplaçant V^h_{1h} par la valeur trouvée ci-dessus :

$$\gamma^i \partial_i y_0 \sim 0.$$

On a donc :

$$\gamma^\rho \partial_\rho [\partial_\alpha S_\beta] \sim 0, \quad \text{pour tout } \alpha \text{ et } \beta.$$

Et sous forme tensorielle :

$$\gamma^{\rho} \nabla_{\rho} [\nabla_{\alpha} S_{\beta}] \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire des composantes de $[P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}]$, de $[\nabla_{\alpha} S_{\beta}]$ et les termes non significatifs.

Il en résulte que les discontinuités se propagent le long des trajectoires, sur l'hypersurface caractéristique, du champ de vecteurs $\vec{\gamma}$, c'est-à-dire, sur cette hypersurface, le long des géodésiques isotropes de la métrique définie par le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$ ou par un tenseur proportionnel. Cette propagation est régie par des équations différentielles du 1^er^ ordre; on a les circonstances usuelles de la propagation par ondes. En particulier si $[P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}]$ est nul en un point de la variété caractéristique, il est nul tout le long de la géodésique isotrope issue de ce point et situé sur l'hypersurface caractéristique. En général, connaissant les données de Cauchy sur l'hypersurface, $[P^{\alpha}_{\beta,\lambda\mu}]$ est déterminé en tous les points du rayon issu d'un point, si on connaît sa « valeur initiale » en ce point. Il en est de même pour $[\nabla_{\alpha} S_{\beta}]$.

En définissant, à l'inverse de la 1^re^ partie, (cf. 1^re^ partie, chap. I, § 7 *b*), les corangs et les multiplicités à l'aide des équations différentielles de la propagation, on peut dire que les caractéristiques (γ) ont un corang principal égal à 2, de multiplicité 1 et un second corang nul; leur multiplicité totale est alors 2.

3. Propriétés algébriques des discontinuités sur une caractéristique satisfaisant à $h^{\alpha\beta} l_{\alpha} l_{\beta} = 0$.

En chaque point de la caractéristique nous prendrons un repère adapté et dans ces conditions on écrira les équations (I-2-A).

Pour déterminer les *u* significatifs, compte tenu de la remarque du § 2 *c*) du chapitre I, on aura besoin des équations (I-2-A_1), (I-2-A_2), (I-2-A_3), (I-2-A_6), (I-2-A_7), (I-2-A_8).

On considèrera d'abord les équations :

$$\text{(I-2-}A_6\text{)} \qquad u^h_{ik} g_{hj} + u^h_{kj} g_{hj} = 0.$$

L'équation écrite ci-dessus sera notée $(A_6)_{ijk}$.

Ce système se sépare. Les équations $(A_6)_{122}$, $(A_6)_{212}$, $(A_6)_{221}$, $(A_6)_{223}$, $(A_6)_{232}$, $(A_6)_{322}$ ne contiennent comme inconnues que les 6 inconnues : u^2_{12}, u^2_{21}, u^1_{22}, u^2_{23}, u^2_{32}, u^3_{22}. Ces équations forment un système de corang 1; l'équation $(A_6)_{221}$ est une combinaison linéaire des équations $(A_6)_{122}$ et $(A_6)_{212}$. On choisira u^1_{22} arbitrairement et on exprimera les autres u de ce système partiel en fonction de u^1_{22}.

L'équation $(A_6)_{111}$ est identiquement vérifiée. D'autre part l'inconnue u^1_{33} n'apparaît dans aucune équation et peut être choisie arbitrairement.

Les 20 autres équations (A_6) contiennent les 20 autres inconnues et forment un système cramérien; les 20 derniers u sont nuls.

Les u^0_{0i}, u^0_{i0}, u^j_{0h}, u^j_{h0} sont ensuite déterminés de façon unique en fonction des u précédents à l'aide des équations non encore utilisées.

Nous donnerons les expressions des u non nuls en fonction des 2 paramètres A et B.

$$u^2_{23} = -u^2_{32} = A, \qquad u^1_{22} = -\frac{h_{22}}{k_{13}} A, \qquad u^1_{33} = B$$

$$u^1_{02} = -\frac{k_{02}}{k_{13}} A, \qquad u^1_{20} = +\frac{k_{02}}{k_{13}} A$$

$$u^2_{02} = \frac{h_{01}}{k_{13}} A, \qquad u^2_{20} = -\frac{h_{01}}{k_{13}} A$$

$$u^1_{03} = -\frac{h_{01}}{k_{13}} B + \frac{k_{03}}{k} A + \frac{h_{01}h_{33}}{(k_{13})^2} A,$$

$$u^1_{30} = \frac{h_{01}}{k_{13}} B - \frac{k_{03}}{k_{13}} A - \frac{h_{01}h_{33}}{(k_{13})^2} A$$

$$u^2_{03} = 2\frac{k_{02}}{h_{22}} A \qquad u^2_{30} = 2\frac{k_{02}}{h_{22}} A$$

$$u^3_{03} = -\frac{h_{01}}{k_{13}} A \qquad u^3_{30} = -\frac{h_{01}}{k_{13}} A$$

$$u^0_{03} = -A \qquad u^0_{30} = A.$$

On en déduit des relations algébriques sur les discontinuités du tenseur de courbure. On a d'abord :

$$h^\rho[P^\alpha_{\beta,\lambda\rho}] = 0 \qquad \text{et} \qquad h^\rho[P^\alpha_{\rho,\lambda\mu}] = 0.$$

Posons : $[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = g_{\rho\alpha}[P^\rho_{\beta,\lambda\mu}]$, on a aussi :

$$h^\alpha[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0.$$

Enfin on rappelle qu'on a toujours : (I-1-3) et (I-2-5) :

$$S_{\lambda,\mu,\nu} l_\nu [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] = 0;$$
$$l_\alpha [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] = l_\beta [P_{\lambda\mu}].$$

Les équations (I-2-A_{14}) donnent :

$$y_1 = y_2 = 0, \qquad y_3 = -\frac{3}{2} A.$$

La condition de Lichnérowicz relative à h exprimée en (I-2-A_{15}) ne détermine pas y_0 qui reste arbitraire pour l'instant.

Enfin les équations (I-2-A_{10}) déterminent les a significatifs en fonction des paramètres A et B et les équations (I-2-A_{11}), (I-2-A_{12}) et (I-2-A_{13}) déterminent les a non significatifs en fonction des u non significatifs et des paramètres précédents.

On vérifie alors que les $a_{\alpha\beta}$ satisfont à la relation :

$$h^\alpha a_{(\alpha\beta)} = \frac{(g^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu})}{2} l_\beta.$$

Les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas des tenseurs, mais cette relation est invariante dans les changements de coordonnées admissibles.

4. Propagation des discontinuités sur une caractéristique satisfaisant à $h^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$.

Les équations (I-2-$\overline{A}$) permettent de déterminer les V pourvu que les seconds membres vérifient des relations de compatibilité. D'après l'étude faite au paragraphe précédent, on obtiendra ces relations en écrivant que les équations $(\overline{A}_6)_{221}$, $(\overline{A}_6)_{122}$, $(\overline{A}_6)_{212}$, sont compatibles d'une part, et d'autre part que le second membre de $(\overline{A}_6)_{111}$ est nul. On trouve en fait que $(\overline{A}_6)_{111}$ est identiquement vérifiée et que le système $(\overline{A}_6)_{221}$, $(\overline{A}_6)_{122}$, $(\overline{A}_6)_{212}$ donne la condition :

$$\partial_1 A + \rho A \sim 0 \tag{1}$$

ρ est un terme continu s'exprimant en fonction des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées; *la congruence concerne seulement les termes non significatifs.*

Les équations $(\overline{A}_{14})$ et $(\overline{A}_{15})$ doivent être compatibles et déterminent alors les z_i. On trouve la condition :

$$(2) \qquad \partial_i y_0 \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire à coefficients continus de A, B, y_0 *et des termes non significatifs.*

Les conditions de compatibilité relatives aux équations $(\bar{\mathrm{A}})$ ne donnent aucune relation concernant le paramètre B. On est donc amené à considérer les équations $(\bar{\bar{\mathrm{A}}})$ ayant pour inconnues les W. D'après ce qui précède, seule l'équation $(\bar{\bar{\mathrm{A}}}_6)_{111}$ peut nous donner une condition sur B.

Cette équation s'écrit ici :

$$(3) \quad 2\mathrm{W}^0_{11} h_{01} + 3\mathrm{V}^\sigma_{11}(\partial_0 g_{\sigma 1} + \partial_0 g_{1\sigma}) + \mathrm{L}^\sigma_{11}(b_{\sigma 1} + b_{1\sigma}) - \partial_1 b_{11} \sim 0,$$

modulo des termes non significatifs.

D'autre part W^0_{11} s'exprime en fonction des V et de certaines de leurs dérivées à l'aide des équations $(\bar{\bar{\mathrm{A}}}_1)$, on a (cf. chapitre I, § 2 g) :

$$(4) \quad \mathrm{W}^0_{11} + \partial_h \mathrm{V}^h_{11} - \partial_1 \mathrm{V}^\sigma_{11} + \mathrm{V}^\sigma_{\rho\sigma}\mathrm{L}^\rho_{11} + \mathrm{V}^\rho_{11}\mathrm{L}^\sigma_{\rho\sigma} - \mathrm{V}^\sigma_{\rho 1}\mathrm{L}^\rho_{1\sigma} - \mathrm{V}^\rho_{1\sigma}\mathrm{L}^\sigma_{\rho 1} \sim 0,$$

modulo des termes non significatifs.

On remplace alors dans la formule (3), W^0_{11} à l'aide de l'équation (4). On obtient alors une équation qui ne contient que des V, des b et certaines de leurs dérivées. On remplace ces termes en fonction des u et de leurs dérivées à l'aide des équations $(\bar{\mathrm{A}})$. Utilisant aussi les formules du paragraphe précédent, après des calculs faciles mais assez longs, on trouve une équation du type :

$$(5) \qquad \partial_{11}\mathrm{B} + \sigma\partial_1\mathrm{B} \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire de A, B *et des termes non significatifs.*

On déduira des équations (1), (2) et (5) des formules invariantes en utilisant la dérivation covariante définie par la connexion linéaire envisagée.

A partir de (1), on obtient une formule définissant la propagation des discontinuités du tenseur de Ricci :

$$(6) \qquad h^\rho[\nabla_\rho \mathrm{P}_{\lambda\mu}] \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire de composantes de $[P_{\lambda\mu}]$ et de termes non significatifs.

A partir de (2), on obtient la relation:

$$h^\rho \nabla_\rho [\nabla_\alpha S_\beta] \sim 0, \tag{7}$$

modulo une combinaison linéaire de composantes de $[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ et de $[\nabla_\alpha S_\beta]$ et de termes non significatifs.

Cette formule définit la propagation des discontinuités des dérivées du vecteur S_α.

Enfin à partir de (5), on obtient:

$$h^\rho h^\sigma \nabla_\rho \nabla_\sigma [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}] + \Lambda(h^\rho \nabla_\rho [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]) + M([P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]) \sim 0, \tag{8}$$

modulo des termes non significatifs; Λ et M sont des combinaisons linéaires des composantes des termes entre parenthèses. Cette formule indique comment se propagent les discontinuités du tenseur de courbure.

Il résulte de ce qui précède que les discontinuités se propagent le long des trajectoires, sur l'hypersurface caractéristique, du champ de vecteurs $\vec{h}$, c'est-à-dire, sur cette hypersurface, le long des géodésiques isotropes de la métrique définie par le tenseur $h_{\alpha\beta}$ ou par un tenseur proportionnel.

La propagation des discontinuités du tenseur de Ricci est simple; elle est définie par une équation différentielle du 1er ordre; on remarquera, en tenant compte des résultats du dernier paragraphe de ce chapitre, que les caractéristiques satisfaisant à $h^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$ sont les seules où peuvent se produire des discontinuités du tenseur de Ricci $[P_{\lambda\mu}]$. On remarque aussi que si $[P_{\lambda\mu}]$ est nul en un point de l'hypersurface caractéristique, il est nul tout le long de la géodésique isotrope issue de ce point et situé sur l'hypersurface.

La propagation des discontinuités du tenseur de courbure $[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ est définie par une équation différentielle du second ordre. En particulier, si $[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ et $h^\rho \nabla_\rho [P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ s'annulent en un point de l'hypersurface caractéristique, $[P^\alpha_{\beta,\lambda\mu}]$ est nul tout le long de la géodésique isotrope, au sens de $h_{\alpha\beta}$, issue de ce point et située sur l'hypersurface.

On peut dire que les caractéristiques (h) ont un corang principal égal à 2, de multiplicité 1, un second corang égal à 1, de multiplicité 1; leur multiplicité totale est alors égale à 3.

5. Propriété des discontinuités sur une caractéristique satisfaisant à $l^{\alpha\beta}l_\alpha l_\beta = 0$.

En chaque point de la caractéristique, on prendra un repère adapté et dans ces conditions on écrira les équations (I-2-A).

Pour déterminer les u significatifs, on aura besoin, cette fois, des équations (I-2-A_1), (I-2-A_2), (I-2-A_3), (I-2-A_4), (I-2-$A)_5$, (I-2-A_6), (I-2-A_7), (I-2-A_8), (I-2-A_9). Le système ainsi formé comporte 56 équations à 51 inconnues; son rang est 50 et par suite les inconnues s'expriment comme des fonctions linéaires d'un seul paramètre. En fait, tous les u significatifs sont nuls, sauf :

$$u^1_{03} = - u^1_{30} = u^2_{03} = u^2_{30}$$

que l'on peut donc, pour l'instant, choisir arbitrairement. Posons encore :

$$[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = g_{\rho\alpha}[P^\rho_{\beta,\lambda\mu}].$$

Les seules composantes de $[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ non nulles sont :

$$[P_{00,03}] = - [P_{00,30}].$$

On en déduit que $[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ est de la forme :

$$[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = K l_\alpha l_\beta (l_\lambda k_\mu - l_\mu k_\lambda)$$

K est un scalaire arbitraire, pour l'instant, sur S; on a posé : $k_\lambda = h_{\lambda\mu}k^\mu$.

De cette expression on déduit facilement les propriétés algébriques de $[P_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$, (cf. [11] et [12]).

On a aussi : $[P_{\lambda\mu}] = 0$.

On détermine ensuite les $a_{\alpha\beta}$; on vérifie qu'ils satisfont à la relation :

$$l^\alpha a_{(\alpha\beta)} = \frac{R}{2} l_\beta$$

avec :

$$R = l^{\alpha\beta}a_{(\alpha\beta)} + \frac{2k}{g}(k^{\alpha\beta}a_{[\alpha\beta]} - g^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}).$$

Les équations (I-2-$\overline{A}$) permettent alors de déterminer les V pourvu que les seconds membres des équations aux V vérifient six relations de compatibilité. On constate, après des calculs assez longs, que ces six relations sont identiquement vérifiées sans qu'on impose aucune condition à K.

La condition supplémentaire de Lichnérowicz (I-2-$\overline{A}_{15}$) entraîne la relation :

$$l^{\alpha}\partial_{\alpha}y_{\beta} \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire de y_0, du paramètre K et des termes non significatifs; on peut aussi écrire :

$$l^{\rho}\nabla_{\rho}[\nabla_{\alpha}S_{\beta}] \sim 0,$$

modulo une combinaison linéaire de K et des composantes de $[\nabla_{\alpha}S_{\beta}]$.

On est amené ensuite à considérer le système ($\overline{\overline{A}}$) aux inconnues les W.

Pour que ce système soit compatible, il faut que les seconds membres des équations aux W vérifient six relations de compatibilité. Ces conditions nécessitent des calculs longs. Nous en avons écrites quatre; elles étaient identiquement vérifiées modulo les termes en K, compte tenu de ce qui précède. Il semble que celles que nous n'avons pas entièrement calculées soient aussi identiquement vérifiées. Dans le cas, où tous les termes disparaîtraient, il faudrait donc considérer les équations aux discontinuités d'ordre encore supérieur et les calculs deviendraient très pénibles. En tout cas, la propagation des discontinuités sur les caractéristiques n'est pas simple.

BIBLIOGRAPHIE

Voir *Annales Fourier*, tome XV fasc. 2, pp. 310-311.

(*Thèse*, *Fac. Sciences*, Paris, 1964).

Jean VAILLANT,
Entrée J n° 2,
Place du général de Gaulle,
Ronchin (Nord).