ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Loup WALDSPURGER

Endoscopie et changement de caractéristique : intégrales orbitales pondérées

Tome 59, n° 5 (2009), p. 1753-1818.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_5_1753_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
59, 5 (2009) 1753-1818

ENDOSCOPIE ET CHANGEMENT DE CARACTÉRISTIQUE : INTÉGRALES ORBITALES PONDÉRÉES

par Jean-Loup WALDSPURGER

Résumé. — La stabilisation de la formule des traces utilise non seulement le "lemme fondamental", mais aussi plusieurs variantes dont l'une est le "lemme fondamental pondéré". Nous montrons que, si celui-ci est vrai sur un corps de base de caractéristique positive, il l'est aussi sur un corps de base de caractéristique nulle. Pour cela, nous introduisons un certain espace de fonctions contenant les fonctions caractéristiques des réseaux de Moy-Prasad. Nous montrons que les intégrales orbitales pondérées des fonctions de cet espace ne dépendent pas vraiment du corps de base, mais seulement du nombre d'éléments de son corps résiduel.

Abstract. — The stabilization of the trace formula uses not only the "fundamental lemma", but also related assertions as "weighted fundamental lemma". We prove that, if it is true over a positive-characteristic field, it is true over a zero-characteristic field too. We introduce a certain space of functions including the characteristic functions of Moy-Prasad lattices. We prove that the weighted orbital integrals of functions in that space does not depend really on the base field, but only on the residue field.

Introduction

Le "lemme fondamental" est longtemps resté un point d'achoppement de la théorie de l'endoscopie. Il a été récemment démontré par Ngo Bao Chau. En fait, pour achever la stabilisation de la formule des traces, Arthur a montré que l'on avait besoin d'un lemme un peu plus fort, appelé lemme fondamental pondéré ([3] conjecture 5.1). Ce lemme affirme une égalité entre des combinaisons linéaires d'intégrales orbitales pondérées sur différents groupes. Il est probable que les méthodes de Ngo Bao Chau permettront

Mots-clés : lemme fondamental, intégrales orbitales pondérées.
Classification math. : 22E35, 22E50.

de démontrer dans un avenir proche ce lemme fondamental pondéré. Toutefois, ces méthodes sont géométriques et, à l'instant présent, nécessitent que le corps de base soit de caractéristique strictement positive. Il paraît donc utile de prouver que l'on peut remonter le résultat en caractéristique nulle. C'est ce que nous avons fait dans [11] pour le lemme fondamental. L'article présent étend le résultat de [11] au lemme fondamental pondéré.

Plus précisément, soient F' et F'' deux corps locaux non archimédiens de même corps résiduel fini $\mathbb{F}_q$ (le cas intéressant est celui où l'un d'eux est de caractéristique strictement positive et l'autre est de caractéristique nulle). Soient $\mathbf{G}'$, resp. $\mathbf{G}''$, deux groupes réductifs connexes définis sur F', resp. F'', non ramifiés. De tels groupes déterminent des données de racines munies d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, où $\bar{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Supposons que les données de racines associées à $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}''$ soient isomorphes, l'isomorphisme étant équivariant pour les actions galoisiennes. Supposons aussi que la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$ soit assez grande relativement au rang commun de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}''$. Supposons enfin que le lemme fondamental pondéré, dans sa version concernant les algèbres de Lie, soit vrai pour $\mathbf{G}'$. Alors il est aussi vrai pour $\mathbf{G}''$.

Il est assez clair que les méthodes qui s'appliquent au lemme fondamental s'appliquent aussi au lemme fondamental pondéré. De fait, le présent article reprend essentiellement la méthode de [11]. Toutefois, la mise au point nécessaire est suffisamment délicate pour justifier, peut-être, ce nouvel article. Rappelons très schématiquement la structure de la preuve de [11]. Pour $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}''$ comme ci-dessus, on construit un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}$ et deux homomorphismes :

$$C_c^\infty(\mathfrak{g}') \stackrel{\mathrm{rea}_{F'}}{\longleftarrow} \mathcal{S} \stackrel{\mathrm{rea}_{F''}}{\longrightarrow} C_c^\infty(\mathfrak{g}''),$$

où, $\mathfrak{g}'$ est l'ensemble des points sur F' de l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}'$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g}')$ est l'espace des fonctions à valeurs complexes sur $\mathfrak{g}'$, localement constantes et à support compact. L'espace $\mathcal{S}$ contient un élément φ_0 tel que $\mathrm{rea}_{F'}(\varphi_0)$, resp. $\mathrm{rea}_{F''}(\varphi_0)$, soit la fonction caractéristique d'un réseau hyperspécial de $\mathfrak{g}'$, resp. $\mathfrak{g}''$. On construit d'autre part un ensemble $\mathcal{Z}$, un groupe fini D_z pour tout $z \in \mathcal{Z}$, et deux applications :

$$\mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}} \stackrel{(\zeta',\delta')}{\longrightarrow} \big\{(z,\boldsymbol{\delta})\,;z\in\mathcal{Z},\boldsymbol{\delta}\in D_z\big\} \stackrel{(\zeta'',\delta'')}{\longleftarrow} \mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}$$

où $\mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}}$ est l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}'$. Ces applications sont constantes sur les classes de conjugaison (on appelle conjugaison l'action par adjonction de G' sur $\mathfrak{g}'$, où $G' = \mathbf{G}'(F')$). L'ensemble $\mathcal{Z}$ apparaît comme une approximation de l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}}$ comme de celui des classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}$.

Pour $z \in \mathcal{Z}$, le groupe D_z permet de séparer les classes de conjugaison contenues dans la classe de conjugaison stable (dans $\mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}}$ ou $\mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}$) paramétrée par z.

Le résultat principal de [11] est le suivant. Soient $\varphi \in \mathcal{S}$, $X' \in \mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}}$ et $X'' \in \mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}$. Supposons $(\zeta', \delta')(X') = (\zeta'', \delta'')(X'')$. Alors on a l'égalité :

$$J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi)) = J^{G''}(X'', \mathrm{rea}_{F''}(\varphi)),$$

où $J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi))$ est l'intégrale orbitale de $\mathrm{rea}_{F'}(\varphi)$, calculée au point X' et convenablement normalisée. Pour prouver cela, on associe à tout élément $z \in \mathcal{Z}$, resp. $\varphi \in \mathcal{S}$, un réel $r(z)$, resp. $r(\varphi)$. Par exemple, si $\mathbf{G}' = \mathbf{GL_1}$, pour $X' \in \mathfrak{g}' \simeq F'$, $r \circ \zeta'(X')$ est la valuation usuelle de X', tandis que $r(\varphi)$ est le minimum de la valuation sur le support de $\mathrm{rea}_{F'}(\varphi)$. Soient φ, X' et X'' comme ci-dessus. Si $r \circ \zeta'(X') = r \circ \zeta''(X'') < r(\varphi)$, on a :

$$J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi)) = 0 = J^{G''}(X'', \mathrm{rea}_{F''}(\varphi)).$$

Si $r \circ \zeta'(X') = r \circ \zeta''(X'') > r(\varphi)$, on montre qu'il existe $\varphi_1 \in \mathcal{S}$ tel que $r(\varphi_1) > r(\varphi)$ et qu'on ait les égalités :

$$(1) \qquad \begin{aligned} J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi)) &= J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi_1)), \\ J^{G''}(X'', \mathrm{rea}_{F''}(\varphi)) &= J^{G''}(X'', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi_1)). \end{aligned}$$

Si $r \circ \zeta'(X') = r \circ \zeta''(X'') = r(\varphi)$, on introduit des sous-groupes $\mathbf{G}'_1 \subsetneq \mathbf{G}'$, $\mathbf{G}''_1 \subsetneq \mathbf{G}''$ dont les données de racines sont isomorphes, tels que $\mathbf{G}'_1$, resp. $\mathbf{G}''_1$, contienne le commutant de X' dans $\mathbf{G}'$, resp. de X'' dans $\mathbf{G}''$. On note $\mathcal{S}_1$ l'analogue de $\mathcal{S}$ pour ces groupes. On montre qu'il existe $\varphi_1 \in \mathcal{S}_1$ de sorte que l'on ait les égalités :

$$(2) \qquad \begin{aligned} J^{G'}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi)) &= J^{G'_1}(X', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi_1)), \\ J^{G''}(X'', \mathrm{rea}_{F''}(\varphi)) &= J^{G''_1}(X'', \mathrm{rea}_{F'}(\varphi_1)). \end{aligned}$$

Un procédé de récurrence permet de conclure.

Pour traiter le lemme fondamental pondéré, on doit généraliser le résultat aux intégrales orbitales pondérées. On fixe des groupes de Lévi $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{M}''$ de $\mathbf{G}''$ dont les données de racines sont isomorphes. On introduit un espace $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$. Pour tout $z \in \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$, on définit un groupe fini D_z. On définit deux applications :

$$\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{g}'_{\mathrm{reg}} \xrightarrow{(\zeta^M_{G-\mathrm{reg},F'}, \delta_{F'})} \left\{(z, \boldsymbol{\delta})\,;\, z \in \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}, \boldsymbol{\delta} \in D_z\right\} \xleftarrow{(\zeta^M_{G-\mathrm{reg},F''}, \delta_{F''})} \mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}.$$

On montre que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, $X' \in \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{g}'_{\text{reg}}$, $X'' \in \mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{g}''_{\text{reg}}$ tels que $(\zeta^M_{G-\text{reg},F'}, \delta_{F'})(X') = (\zeta^M_{G-\text{reg},F''}, \delta_{F''})(X'')$, on a l'égalité :

$$J^{G'}_{M'}(X', \text{rea}_{F'}(\varphi)) = J^{G''}_{M''}(X'', \text{rea}_{F''}(\varphi)),$$

où il s'agit maintenant d'intégrales orbitales pondérées.

La preuve suit le schéma indiqué ci-dessus. Les preuves des égalités (1) et (2) utilisaient l'invariance par conjugaison des intégrales orbitales. Les intégrales orbitales pondérées ne sont plus invariantes par conjugaison, à cause du poids qui intervient dans leur définition. Mais plusieurs formules dues à Arthur nous expliquent comment elles se transforment par conjugaison. Ces formules nous permettent de faire marcher la démonstration, pourvu que l'on puisse contrôler en termes indépendants du corps de base F' ou F'' certaines intégrales faisant intervenir cette fonction poids. C'est ce que nous ferons au chapitre 5. L'argument principal est que ces intégrales peuvent s'exprimer comme coefficients de représentations d'une algèbre de Hecke-Iwahori et que, ainsi qu'il est bien connu, la structure de cette algèbre ne dépend du corps de base que via le paramètre q. Cela sera développé au chapitre 4.

En fait, les choses sont plus compliquées car la méthode par récurrence utilisée dans [11] nécessite — et c'est son défaut rédhibitoire — de considérer des groupes beaucoup plus compliqués que des groupes non ramifiés et d'en considérer simultanément plusieurs formes intérieures. Les constructions de [11] doivent être adaptées à notre situation où interviennent des objets supplémentaires : les groupes de Lévi $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}''$. Cela est fait dans les chapitres 2,3 et 6. Le théorème principal est démontré au chapitre 7. Son application au lemme fondamental pondéré (pour les algèbres de Lie) s'en déduit au chapitre 8.

Signalons que Cluckers et Loeser ont développé en [6] des méthodes très différentes qui permettent de retrouver le résultat de [11]. Ces méthodes s'appliquent aussi au cas pondéré ([5]).

1. Rappels

1.1. On fixe un nombre premier p et une puissance q de p. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. On en fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$. On pose $\Theta = \hat{\mathbb{Z}}$. Ce groupe s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, l'élément $1 \in \Theta$ s'identifiant à l'élément de Frobenius. On note $\mathbb{N}_{p'}$ l'ensemble des entiers strictement positifs et premiers à p. Pour $e \in \mathbb{N}_{p'}$, on note $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$ le groupe des racines e-ièmes de l'unité dans $\bar{\mathbb{F}}_q$. On pose $I = \varprojlim_e \zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$, les homomorphismes de transition étant les élévations à des puissances convenables. Le groupe Θ agit sur I, l'élément $1 \in \Theta$ agissant par élévation à la puissance q. On pose $\Gamma = \Theta \ltimes I$.

On considère dans tout l'article une donnée de racines $\mathcal{D} = (X^*, \Sigma, \Delta, X_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ munie d'une action de Γ. Cela signifie que X^* et X_* sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, en dualité ; Σ est un système de racines réduit dans X^* ; Δ est une base de racines simples ; $\check{\Sigma}$ et $\check{\Delta}$ sont les ensembles de coracines associés ; le groupe Γ agit sur X^* et X_* par des actions duales l'une de l'autre, qui conservent Σ, Δ, $\check{\Sigma}$, $\check{\Delta}$. On impose que p est grand relativement à $\mathcal{D}$, précisément que p vérifie la condition $(P_{\mathrm{rang}(\mathcal{D})})$ de [11], 1.4.

1.2. On associe à $\mathcal{D}$ un groupe réductif connexe $\bar{\mathbf{G}}$, défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, muni d'un sous-groupe de Borel $\bar{\mathbf{B}}$, et d'un sous-tore maximal $\bar{\mathbf{T}}$, de sorte que X^*, resp. X_*, s'identifie au groupe des caractères, resp. des cocaractères, de $\bar{\mathbf{T}}$, Σ s'identifie à l'ensemble des racines de $\bar{\mathbf{T}}$ dans l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{g}}$ de $\bar{\mathbf{G}}$ et Δ s'identifie au sous-ensemble de racines simples déterminé par $\bar{\mathbf{B}}$. Indiquons au passage que, pour tout groupe réductif noté par une lettre majuscule romaine, on note son algèbre de Lie par la minuscule gothique correspondante. On fixe un épinglage $(\bar{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$. L'action de $\Theta \simeq \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{D}$ détermine une structure de $\bar{\mathbf{G}}$ sur $\mathbb{F}_q$, de sorte que $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{T}}$ et l'épinglage soient définis sur $\mathbb{F}_q$. Le groupe I agit par automorphismes algébriques sur $\bar{\mathbf{G}}$. En général, ces automorphismes ne sont pas définis sur $\mathbb{F}_q$. On identifie $\bar{\mathbf{G}}$ à son groupe de points sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ et on note $\bar{G}$ son sous-groupe des points sur $\mathbb{F}_q$. On adopte les mêmes notations pour tout autre groupe. On note $\bar{\mathbf{N}}$ le normalisateur de $\bar{\mathbf{T}}$ dans $\bar{\mathbf{G}}$ et $W = \bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{T}}$ le groupe de Weyl. L'épinglage permet de définir une section de Springer $\bar{n}\colon W \to \bar{\mathbf{N}}$, *cf.* [8], 2.1.

1.3. On pose $T_\varpi = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$, où $\mathbb{Z}_{(p)}$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ en p. Le groupe $\bar{\mathbf{N}}$ agit sur X_*, donc aussi sur T_ϖ, via sa projection sur W. On pose $N_{\mathrm{red}} = T_\varpi \rtimes \bar{\mathbf{N}}$. On note T_{red} le sous-groupe $T_\varpi \bar{\mathbf{T}}$ de N_{red}. Le groupe Γ agit sur N_{red} de la façon suivante. Sur $\bar{\mathbf{N}}$, c'est l'action provenant de l'action de Γ sur $\bar{\mathbf{G}}$. Le groupe Θ fixe tout élément de T_ϖ. Soient $\sigma \in I$, $x \in X_*$, $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathbb{N}_{p'}$. Alors $x \otimes \frac{n}{e}$ est un élément de T_ϖ. Notons $\sigma_e \in \zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$ l'image naturelle de σ. Alors :

$$\sigma\Big(x \otimes \frac{n}{e}\Big) = \Big(\sigma(x) \otimes \frac{n}{e}\Big)\left(\sigma(x) \otimes \sigma_e^n\right),$$

le dernier terme étant un élément de $\bar{\mathbf{T}}$.

On pose $V = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $V_{(p)} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$. Le groupe Γ agit sur V. Le groupe N_{red} aussi : le sous-groupe $\bar{\mathbf{N}}$ agit via son quotient W ; un élément $t \in T_\varpi$ agit par translation par $-t$, en remarquant que $T_\varpi = V_{(p)} \subset V$. Pour

$n \in N_{\text{red}}$, on note $n_{\mathbb{R}}$ l'automorphisme affine de V ainsi défini. L'action de N_{red} sur V est compatible aux actions de Γ sur ces deux ensembles. Selon l'usage, si un groupe H agit sur un ensemble Y, on note Y^H le sous-ensemble des points fixes. On note ainsi V^I le sous-espace des éléments de V fixes par I. Il est muni d'une décomposition en facettes ([11], 1.7). On note $\Phi(0)$ l'ensemble des facettes et C^{nr} l'unique alcôve qui soit incluse dans la chambre positive de V^I associée à $\bar{\mathbf{B}}$ et qui contienne le point 0 dans son adhérence. On note $\mathcal{N}_{\text{red}}^{\text{nr}}$ le sous-groupe des éléments de N_{red}^I qui conservent cette alcôve.

1.4. On note CL_q l'ensemble des quadruplets $(F, F^{\text{sep}}, i, (\varpi_{\frac{1}{e}})_{e\in\mathbb{N}_{p'}})$ vérifiant les conditions qui suivent. Le premier terme F est un corps local non archimédien dont le corps résiduel a q éléments. On fixe une clôture séparable F^{sep} de F. On note F^{nr}, resp. F^{mod}, la plus grande extension de F contenue dans F^{sep} et non ramifiée, resp. modérément ramifiée. On fixe un isomorphisme i du corps résiduel de F^{nr} sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. Cet isomorphisme permet d'identifier Θ au groupe de Galois $\text{Gal}(F^{\text{nr}}/F)$. Pour $e \in \mathbb{N}_{p'}$, il permet aussi d'identifier $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$ au sous-groupe des racines e-ièmes de l'unité dans $F^{\text{nr},\times}$. Enfin$(\varpi_{\frac{1}{e}})_{e\in\mathbb{N}_{p'}}$ est une famille d'éléments de F^{mod} vérifiant les deux conditions : ϖ_1 est une uniformisante de F ; pour $e, e' \in \mathbb{N}_{p'}$, on a l'égalité $\left(\varpi_{\frac{1}{ee'}}\right)^{e'} = \varpi_{\frac{1}{e}}$. Le groupe Γ s'identifie à $\text{Gal}(F^{\text{mod}}/F)$ de la façon suivante : Θ fixe tout élément $\varpi_{\frac{1}{e}}$ et agit sur F^{nr} comme on l'a déjà dit ; le groupe I fixe tout élément de F^{nr} ; soient $\sigma \in I$, $e \in \mathbb{N}_{p'}$, on a défini en 1.3 l'élément σ_e de $\zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$ et on l'identifie à un élément de F^{nr} ; alors $\sigma(\varpi_{\frac{1}{e}}) = \varpi_{\frac{1}{e}}\sigma_e$. En pratique, on note simplement F un élément de CL_q, en oubliant les données auxiliaires F^{sep}, i et $(\varpi_{\frac{1}{e}})_{e\in\mathbb{N}_{p'}}$.

Remarque. — Puisque l'ensemble des corps n'existe pas, l'ensemble CL_q, tel qu'on vient de le définir, n'existe pas non plus. On a donné une définition correcte en [11], 1.3. On peut aussi considérer l'expression "$F \in CL_q$" comme une simple notation signifiant que F est le premier terme d'un quadruplet comme ci-dessus.

1.5. Soit $F \in CL_q$. On associe à $\mathcal{D}$ un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F^{sep}, muni d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ et d'un sous-tore maximal $\mathbf{T}$, avec des propriétés similaires à celles de 1.2. On fixe un épinglage de $\mathfrak{g}$. Le groupe $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$ agit sur $\mathcal{D}$ via son quotient $\text{Gal}(F^{\text{mod}}/F) \simeq \Gamma$ et cette action détermine sur $\mathbf{G}$ une structure de groupe quasi-déployé sur F. On identifie $\mathbf{G}$ à son groupe de points sur F^{sep}, on note G^{mod}, G^{nr} et G les sous-groupes de points sur F^{mod}, resp. F^{nr}, F. On adopte les mêmes notations pour tout autre groupe. On note $\mathbf{N}$ le normalisateur de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$. Le groupe de Weyl $W = \mathbf{N}/\mathbf{T}$ est le même qu'en 1.2. L'épinglage permet de définir une section de Springer $n\colon W \to N^{\mathrm{mod}}$. Notons val la valuation de F^{mod} normalisée par l'égalité $\mathrm{val}(\varpi_1) = 1$. Pour $z \in F^{\mathrm{mod},\times}$ tel que $\mathrm{val}(z) = 0$, notons $\bar{z}$ son image dans le corps résiduel de F^{mod}, que l'on a identifié à $\bar{\mathbb{F}}_q$. On définit un homomorphisme $\mathrm{red}\colon N^{\mathrm{mod}} \to N_{\mathrm{red}}$ de la façon suivante. Pour $w \in W$, $\mathrm{red} \circ n(w) = \bar{n}(w)$. Soient $x \in X_*$ et $z \in F^{\mathrm{mod},\times}$. Alors $x \otimes z$ appartient à $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod},\times} \simeq T^{\mathrm{mod}}$. Si $\mathrm{val}(z) = 0$, on pose $\mathrm{red}(x \otimes z) = x \otimes \bar{z} \in \bar{\mathbf{T}}$. Si $z = \varpi_{\frac{1}{e}}$, avec $e \in \mathbb{N}_{p'}$, on pose $\mathrm{red}(x \otimes z) = x \otimes \frac{1}{e} \in T_{\varpi}$. L'homomorphisme red est équivariant pour les actions de Γ. On note T_+^{mod} son noyau (il est noté T_1^{mod} en [11], 1.8). C'est le plus grand pro-p-sous-groupe nilpotent de T^{mod}.

2. Données de Lévi et cocycles

2.1. On note Σ^+ le sous-ensemble positif de Σ déterminé par Δ. On pose :

$$X_{*,G}^{\Gamma} = \left\{x \in X_*^{\Gamma}\ ; \forall \alpha \in \Sigma, \langle \alpha, x\rangle = 0\right\}.$$

On a noté et on note dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les accouplements qui se déduisent de la dualité entre X^* et X_*.

Soit Σ^L un sous-système de racines réduit de Σ, invariant par l'action de Γ. On pose $\Sigma^{L,+} = \Sigma^L \cap \Sigma^+$ et on note Δ^L la base de Σ^L déterminée par $\Sigma^{L,+}$. On introduit les ensembles correspondants de coracines $\check{\Sigma}^L$ et $\check{\Delta}^L$. On pose :

$$\mathcal{D}^L = \left(X^*, \Sigma^L, \Delta^L, X_*, \check{\Sigma}^L, \check{\Delta}^L\right).$$

C'est encore une donnée de racines munie d'une action de Γ. On introduit le sous-groupe $X_{*,L}^{\Gamma}$ de X_*. On dit que $\mathcal{D}^L$ est une donnée de Lévi de $\mathcal{D}$ si Σ^L est exactement l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\langle \alpha, x\rangle = 0$ pour tout $x \in X_{*,L}^{\Gamma}$. On dit aussi que Σ^L est un sous-ensemble de Lévi de Σ.

Supposons que $\mathcal{D}^L$ soit une donnée de Lévi de $\mathcal{D}$. Soit $x \in X_{*,L}^{\Gamma}$ tel que l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ vérifiant $\langle \alpha, x\rangle = 0$ soit exactement Σ^L. Posons $\Sigma^Q = \{\alpha \in \Sigma\, ; \langle \alpha, x\rangle \geqslant 0\}$. On dit que Σ^Q est un sous-ensemble parabolique de Σ, de composante de Lévi Σ^L. On dit que $\mathcal{D}^L$ est standard si $\Delta^L \subset \Delta$ ou, ce qui revient au même, si l'ensemble $\Sigma^+ \cup \Sigma^L$ est un sous-ensemble parabolique de Σ.

On note $\mathcal{L}$, ou plus précisément $\mathcal{L}^G$, l'ensemble des données de Lévi de $\mathcal{D}$. Pour $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}$, on note $\mathcal{P}(L)$ l'ensemble des sous-ensembles paraboliques de

Σ, de composante de Lévi Σ^L. On note $\mathcal{F}(L)$ l'ensemble des sous-ensembles paraboliques de Σ contenant Σ^L.

L'ensemble $\mathcal{L}$ est ordonné : $\mathcal{D}^L \leqslant \mathcal{D}^M$ si et seulement si $\Sigma^L \subset \Sigma^M$ (ce qui n'entraîne pas $\Delta^L \subset \Delta^M$). Il possède un élément minimal, à savoir la donnée :

$$\mathcal{D}^T = (X^*, \emptyset, \emptyset, X_*, \emptyset, \emptyset).$$

Pour $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}$, on note $\mathcal{L}(L)$ le sous-ensemble des $\mathcal{D}^M \in \mathcal{L}$ tels que $\mathcal{D}^L \leqslant \mathcal{D}^M$.

Notation. — On construit à partir de $\mathcal{D}$ divers objets, certains d'entre eux étant, comme on l'a vu au premier chapitre, notés par différentes variantes de la lettre G. Pour $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}$, on construit les objets analogues à partir de $\mathcal{D}^L$. On les note avec un L en exposant, ou bien, quand ces objets sont notés, pour $\mathcal{D}$, par une variante de la lettre G, on les note par la variante correspondante de la lettre L.

2.2. Soit $\mathcal{D}^L = (X^*, \Sigma^L, \Delta^L, X_*, \check{\Sigma}^L, \check{\Delta}^L)$ un élément de $\mathcal{L}$. On lui associe comme en 1.2 un groupe réductif connexe $\bar{\mathbf{L}}$ muni d'un sous-groupe de Borel $\bar{\mathbf{B}}^L$, d'un tore $\bar{\mathbf{T}}^L$ et d'un épinglage, tous ces objets étant définis sur $\mathbb{F}_q$. Remarquons que $\bar{\mathbf{T}}^L$ s'identifie à $\bar{\mathbf{T}}$, ces deux tores ayant par définition le même groupe de cocaractères X_*. Si $\mathcal{D}^L$ est standard, il y a une seule façon d'identifier $\bar{\mathbf{L}}$ à un sous-groupe de $\bar{\mathbf{G}}$, de sorte que cette identification prolonge celle que l'on vient d'indiquer entre $\bar{\mathbf{T}}^L$ et $\bar{\mathbf{T}}$ et que l'épinglage de $\bar{\mathbf{L}}$ s'identifie à un sous-ensemble de l'épinglage de $\bar{\mathbf{G}}$. Alors $\bar{\mathbf{L}}$ devient un "groupe de Lévi" de $\bar{\mathbf{G}}$, c'est-à-dire une composante de Lévi définie sur $\mathbb{F}_q$ d'un sous-groupe parabolique de $\bar{\mathbf{G}}$ défini sur $\mathbb{F}_q$. La section de Springer $\bar{n}^L$ est alors la restriction à W^L de la section de Springer $\bar{n}$ de $\bar{\mathbf{G}}$.

Si $\mathcal{D}^L$ n'est pas standard, il n'y a plus d'identification canonique de $\bar{\mathbf{L}}$ à un sous-groupe de $\bar{\mathbf{G}}$. On peut toutefois choisir un élément $w \in W^\Gamma$ tel que Δ^L soit inclus dans $w(\Delta)$ (l'existence d'un tel w est bien connue). Il y a alors une unique façon d'identifier $\bar{\mathbf{L}}$ à un sous-groupe de $\bar{\mathbf{G}}$ de sorte que cette identification prolonge celle de $\bar{\mathbf{T}}^L$ à $\bar{\mathbf{T}}$ et que l'épinglage de $\bar{\mathbf{L}}$ s'identifie à un sous-ensemble de l'image par $\bar{n}(w)$ de l'épinglage de $\bar{\mathbf{G}}$. L'élément w n'est pas unique mais changer de w modifie l'identification par la conjugaison par un élément de $\bar{\mathbf{T}}$. En particulier les images dans $\bar{\mathbf{G}}$ de $\bar{\mathbf{L}}$, $\bar{\mathbf{B}}^L$ et $\bar{\mathbf{N}}^L$ ne dépendent pas de w.

À $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, on associe le sous-groupe parabolique $\bar{\mathbf{Q}}$ de $\bar{\mathbf{G}}$ engendré par $\bar{\mathbf{T}}$ et les sous-groupes radiciels associés aux éléments de Σ^Q. Il est défini sur $\mathbb{F}_q$.

Soit $F \in CL_q$. On construit de même un groupe $\mathbf{L}$ réductif connexe et défini sur F. Si $\mathcal{D}^L$ est standard, il s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\mathbf{G}$. Si $\mathcal{D}^L$ n'est pas standard, on peut encore l'identifier à un groupe de Lévi de $\mathbf{G}$ moyennant le choix d'un élément w comme ci-dessus. Le choix de w n'est pas important pourvu qu'il soit fait de façon cohérente. C'est-à-dire que l'on doit choisir le même w pour identifier $\bar{\mathbf{L}}$ à un sous-groupe de $\bar{\mathbf{G}}$ et pour identifier $\mathbf{L}$ à un sous-groupe de $\mathbf{G}$. En particulier, w doit être indépendant de F. À $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, on associe comme ci-dessus un sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{G}$. Il est défini sur F.

2.3. Soit $F \in CL_q$. On doit introduire des formes intérieures $\mathbf{G}_d$ de $\mathbf{G}$, paramétrées par l'ensemble $H^1(\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F), \mathbf{G})$. On doit décrire ces formes intérieures à l'aide de cocycles d_F qui soient, dans une certaine mesure, indépendants de F. Pour cela, on a procédé dans [11] de la façon suivante. Notons $X_{*,\mathrm{sc}}$ le sous-groupe de X_* engendré par $\check{\Sigma}$. Notons $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$ le quotient des coinvariants par Γ dans $X_*/X_{*,\mathrm{sc}}$ et $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ son sous-groupe de torsion. D'après Kottwitz, on a des isomorphismes :

$$H^1(\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F), \mathbf{G}) \simeq H^1(\Theta, G^{\mathrm{nr}}) \simeq (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}.$$

On a de plus un isomorphisme :

$$(1) \qquad H^1(\Theta, \mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}) \simeq (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}. \quad ([11], \text{ lemme } 1.9.2).$$

On a alors noté D un ensemble de cocycles de Θ dans $\mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}$ tel que l'application naturelle de D dans $H^1(\Theta, \mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}})$ soit bijective. Cette définition n'est pas adaptée à la considération de données de Lévi. Car si $\mathcal{D}^L$ est une telle donnée, il n'y a pas de relation simple entre $\mathcal{N}^{L,\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}$ et $\mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}$. On va modifier la construction de D.

On introduit l'ensemble de poids $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ associé à Δ. Pour tout $\alpha \in \Delta$, ω_α est un élément du sous-espace de $X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ engendré par Σ et on a les égalités $\langle \omega_\alpha, \check{\beta} \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$, où $\delta_{\alpha,\beta}$ est le symbole de Kronecker. Notons (Δ) l'ensemble des orbites de l'action de Γ dans Δ. Pour $(\alpha) \in (\Delta)$, posons $\omega_{(\alpha)} = \sum_{\alpha \in (\alpha)} \omega_\alpha$, avec une notation médiocre mais compréhensible. Soit $d \in (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$. Choisissons $x \in X_*$ relevant d. Considérons l'image de $\langle \omega_{(\alpha)}, x \rangle$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On vérifie qu'elle ne dépend pas du choix de x. On la note $\pi_{(\alpha)}(d)$. Cela définit un homomorphisme :

$$\pi_{(\alpha)} : (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Soit $\mathcal{D}^L$ une donnée de Lévi de $\mathcal{D}$. On note $X_{*,\mathrm{sc}}^L$ le sous-groupe de X_* engendré par $\check{\Sigma}^L$. Il y a un homomorphisme naturel :

$$i^L\colon (X_*/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_{\Gamma,\mathrm{tors}} \longrightarrow (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}.$$

Lemme.

(i) *Pour toute donnée de Lévi $\mathcal{D}^L$ de $\mathcal{D}$, i^L est injectif.*

(ii) *Soient $\mathcal{D}^L$, $\mathcal{D}^M$ deux données de Lévi de $\mathcal{D}$ et $w \in W^\Gamma$. Supposons $w(\Sigma^L) = \Sigma^M$. Alors i^L et i^M ont même image.*

(iii) *Soit $\mathcal{D}^L$ une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$. Alors l'image de i^L est le sous-groupe des $d \in (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ tels que $\pi_{(\alpha)}(d) = 0$ pour tout $(\alpha) \in (\Delta)$ tel que $(\alpha) \subset \Delta \smallsetminus \Delta^L$.*

(iv) *Pour tout $d \in (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$, il existe une plus petite donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$, que l'on note $\mathcal{D}^{R(d)}$, telle que d appartienne à l'image de $i^{R(d)}$. Si $\mathcal{D}^L$ est une autre donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$ et si $w \in W^\Gamma$ sont tels que $w(\Sigma^L) = \Sigma^{R(d)}$, alors $\mathcal{D}^L = \mathcal{D}^{R(d)}$.*

Démonstration. — C'est bien connu, rappelons tout de même la preuve. Dans la situation du (ii), il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X_*/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_{\Gamma,\mathrm{tors}} & \xrightarrow{i^L} & (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_*/X_{*,\mathrm{sc}}^M)_{\Gamma,\mathrm{tors}} & \xrightarrow{i^M} & (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}} \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites de l'action de w. Ces flèches sont des isomorphismes. Mais la flèche de droite est l'identité car, pour tout $x \in X_*$, $w(x) - x$ appartient à $X_{*,\mathrm{sc}}$. L'assertion (ii) en résulte.

Pour toute donnée de Lévi $\mathcal{D}^L$ de $\mathcal{D}$, on peut choisir $\mathcal{D}^M$ et w comme en (ii), avec de plus $\mathcal{D}^M$ standard. Le diagramme ci-dessus montre que i^L est injectif si et seulement si i^M l'est. Pour démontrer (i), on peut donc supposer $\mathcal{D}^L$ standard. Il y a une suite exacte naturelle :

$$(X_{*,\mathrm{sc}}/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_\Gamma \xrightarrow{a} (X_*/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_\Gamma \xrightarrow{b} (X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma \longrightarrow 0$$

L'homomorphisme i^L est la restriction de b au sous-groupe de torsion de $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_\Gamma$ et il suffit de prouver que le noyau de b est sans torsion. Montrons d'abord :

(2) le noyau de a est de torsion ;

(3) $(X_{*,\mathrm{sc}}/X_{*,\mathrm{sc}}^L)_\Gamma$ est un $\mathbb{Z}$-module libre.

Notons $X_{*,\mathrm{cent}}$ le sous-$\mathbb{Z}$-module des éléments de X_* annulés par tout élément de Σ. Il est invariant par Γ et le sous-$\mathbb{Z}$-module $X_{*,\mathrm{cent}} \oplus X_{*,\mathrm{sc}}$ de

X_* est d'indice fini. Soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $NX_* \subset X_{*,\mathrm{cent}} \oplus X_{*,\mathrm{sc}}$. Soit $x \in X_{*,\mathrm{sc}}$ dont l'image dans $(X_{*,\mathrm{sc}}/X^L_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$ appartienne au noyau de a. Cela signifie qu'il existe $y \in X^L_{*,\mathrm{sc}}$, un ensemble fini J et, pour tout $j \in J$, des éléments $\gamma_j \in \Gamma$ et $x_j \in X_*$, de sorte que l'on ait l'égalité $x = y + \sum_{j\in J} \gamma_j(x_j) - x_j$. D'où $Nx = Ny + \sum_{j\in J} \gamma_j(Nx_j) - Nx_j$. C'est une égalité dans $X_{*,\mathrm{cent}} \oplus X_{*,\mathrm{sc}}$ que l'on peut projeter dans $X_{*,\mathrm{sc}}$. Remarquons que Nx et Ny appartiennent à $X_{*,\mathrm{sc}}$ et notons y_j la projection de Nx_j. Alors $Nx = Ny + \sum_{j\in J} \gamma_j(y_j) - y_j$. Alors l'image de Nx dans $(X_{*,\mathrm{sc}}/X^L_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$ est nulle. Cela prouve (2).

L'ensemble $\check{\Delta} \smallsetminus \check{\Delta}^L$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $X_{*,\mathrm{sc}}/X^L_{*,\mathrm{sc}}$ et l'action de Γ préserve cette base. L'assertion (3) en résulte.

D'après (2) et (3), a est injective et son image est un $\mathbb{Z}$-module libre. Cette image étant le noyau de b, celui-ci est sans torsion, ce qui prouve (i).

Soit $\mathcal{D}^L$ une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$. Soient d un élément de l'image de i^L et $(\alpha) \in (\Delta)$ tel que $(\alpha) \subset \Delta \smallsetminus \Delta^L$. On peut relever d en un élément $x \in X_*$ dont l'image dans $(X_*/X^L_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$ soit de torsion. Il y a un entier $n \geqslant 1$, un élément $y \in X^L_{*,\mathrm{sc}}$ et des familles $(\gamma_j)_{j\in J}$ et $(x_j)_{j\in J}$ comme ci-dessus de sorte que $nx = y + \sum_{j\in J} \gamma_j(x_j) - x_j$. L'élément $\omega_{(\alpha)}$ annule y parce que $(\alpha) \subset \Delta \smallsetminus \Delta^L$ et annule $\gamma_j(x_j) - x_j$ parce que $\omega_{(\alpha)}$ est invariant par Γ. D'où $\langle \omega_{(\alpha)}, x\rangle = 0$, puis $\pi_{(\alpha)}(d) = 0$ par construction de $\pi_{(\alpha)}$. Inversement, soit d un élément de $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ annulé par $\pi_{(\alpha)}$ pour tout $(\alpha) \in (\Delta)$ tel que $(\alpha) \subset \Delta \smallsetminus \Delta^L$. Soit $x \in X_*$ un relèvement de d et soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $nd = 0$. Il existe des familles $(\gamma_j)_{j\in J}$ et $(x_j)_{j\in J}$ comme ci-dessus et une famille d'entiers $(n_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de sorte que :

$$nx = \left(\sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \check{\alpha}\right) + \left(\sum_{j\in J} \gamma_j(x_j) - x_j\right).$$

Pour tout $(\alpha) \in (\Delta)$, choisissons un élément $\alpha_0 \in (\alpha)$. Tout autre élément de cette classe est l'image de α_0 par un élément convenable $\gamma \in \Gamma$ et s'écrit $\gamma(\alpha_0) - \alpha_0 + \alpha_0$. Grâce à cela, on peut modifier les familles ci-dessus pour obtenir une égalité :

$$nx = \left(\sum_{(\alpha)\in(\Delta)} n_{(\alpha)} \check{\alpha}_0\right) + \left(\sum_{j\in J} \gamma_j(x_j) - x_j\right).$$

Soit $(\alpha) \subset \Delta \smallsetminus \Delta^L$. l'hypothèse $\pi_{(\alpha)}(d) = 0$ signifie que $\langle \omega_{(\alpha)}, x\rangle \in \mathbb{Z}$. On a donc $\langle \omega_{(\alpha)}, nx\rangle \in n\mathbb{Z}$. Or $\langle \omega_{(\alpha)}, nx\rangle = n_{(\alpha)}$, donc n divise $n_{(\alpha)}$. On peut remplacer x par :

$$x-\sum_{(\alpha)\subset\Delta\smallsetminus\Delta^L}\frac{n_{(\alpha)}}{n}\check{\alpha}_0.$$

On obtient alors :

$$nx=\left(\sum_{(\alpha)\in(\Delta^L)}n_{(\alpha)}\check{\alpha}_0\right)+\left(\sum_{j\in J}\gamma_j(x_j)-x_j\right).$$

Alors l'image de x dans $(X_*/X^L_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$ est de torsion et d est l'image de cette image par l'application i^L. Cela prouve (iii).

Pour (iv), l'existence et l'unicité de $\mathcal{D}^{R(d)}$ résultent de (iii) : $\Delta^{R(d)}$ est la réunion des $(\alpha)\in(\Delta)$ tels que $\pi_{(\alpha)}(d)\neq 0$. La dernière propriété résulte de (ii) et de l'unicité de $\mathcal{D}^{R(d)}$. □

Notons $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors},\mathrm{cusp}}$ l'ensemble des $d\in(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ tels que $\mathcal{D}^{R(d)}=\mathcal{D}$. Fixons un ensemble D^G_{cusp} de cocycles de Θ dans $\mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}$ satisfaisant la condition suivante. Cet ensemble s'envoie naturellement dans $H^1(\Theta,\mathcal{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}})$ puis dans $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ par l'isomorphisme (1). On demande que la composée de ces applications soit une bijection de D^G_{cusp} sur $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors},\mathrm{cusp}}$. Pour toute donnée de Lévi standard $\mathcal{D}^L$, on fixe de même un ensemble D^L_{cusp} de cocycles de Θ dans $\mathcal{N}^{L,\mathrm{nr}}_{\mathrm{red}}$. On pose :

$$D=\bigcup D^L_{\mathrm{cusp}},$$

la réunion portant sur l'ensemble des données de Lévi standard $\mathcal{D}^L$ de $\mathcal{D}$. L'ensemble D s'envoie naturellement dans $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$ et cette application est bijective. Pour tout $d\in D$, on note encore $\mathcal{D}^{R(d)}$ la donnée que l'on a associée à l'image de d dans $(X_*/X_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$. C'est aussi la donnée telle que $d\in\mathcal{D}^{R(d)}_{\mathrm{cusp}}$. On pose $\mathcal{L}_d=\mathcal{L}(R(d))$.

Pour tout $d\in D$ et tout $F\in CL_q$, le même argument qu'en [11], 1.10 permet de fixer un cocycle d_F de Θ dans $N^{R(d),\mathrm{nr}}$ tel que $\mathrm{red}\circ d_F(\theta)=d(\theta)$ pour tout $\theta\in\Theta$. Enfin, on peut considérer d et d_F comme étant définis sur Γ et triviaux sur I.

2.4. Pour appliquer les résultats de [11], il importe de comparer l'ensemble D défini ci-dessus avec celui que l'on a défini dans cette référence. Pour le distinguer, notons D' ce dernier ensemble. Pour tout cocycle δ de Γ dans N_{red}, posons :

$$X^\delta_*=\{x\in X_*\,;\forall\gamma\in\Gamma,\delta(\gamma)\circ\gamma(x)=x\},$$

où $N_{\rm red}$ agit sur X_* via sa projection sur W. Soient $d \in D$ et $d' \in D'$ deux éléments qui se correspondent, c'est-à-dire qui ont même image dans $(X_*/X_{*,\rm sc})_{\Gamma,\rm tors}$. On définit comme en 2.1 l'ensemble $X^\Gamma_{*,R(d)}$.

Lemme.

(i) *On a l'égalité* $X^d_* = X^\Gamma_{*,R(d)}$.

(ii) *Il existe* $n \in N^I_{\rm red}$ *tel que* $d'(\theta) = nd(\theta)\theta(n)^{-1}$ *pour tout* $\theta \in \Theta$.

(iii) *Choisissons* n *vérifiant (ii) et soit* $F \in CL_q$. *Il existe* $n_F \in N^{\rm nr}$ *tel que* $\mathrm{red}(n_F) = n$ *et* $d'_F(\theta) = n_F d_F(\theta)\theta(n_F)^{-1}$ *pour tout* $\theta \in \Theta$.

Démonstration. — Montrons d'abord :

$$\mathrm{rang}(X^d_*) \leqslant \mathrm{rang}(X^{d'}_*). \tag{4}$$

Pour cela, fixons $F \in CL_q$ et introduisons un groupe algébrique $\mathbf{G}_d$ défini sur F, muni d'un isomorphisme $\xi_d\colon \mathbf{G}_d \to \mathbf{G}$ défini sur $F^{\rm nr}$ et vérifiant $\xi_d \circ \theta = \mathrm{Ad}(d_F(\theta)) \circ \theta \circ \xi_d$ pour tout $\theta \in \Theta$. Notons $\mathbf{T}_{d,F}$ le sous-tore de $\mathbf{G}_d$ tel que $\xi_d(\mathbf{T}_{d,F})$ soit le sous-tore de $\mathbf{T}$ dont le groupe de cocaractères soit X^d_*. Ce tore est déployé sur F. Remplaçons d par d' dans ces constructions. On obtient un sous-tore $\mathbf{T}_{d',F}$ déployé sur F d'un groupe $\mathbf{G}_{d'}$. D'après le lemme 1.10 de [11], il s'agit d'un sous-tore déployé maximal de $\mathbf{G}_{d'}$. Or les deux cocycles d_F et d'_F ont même image dans $H^1(\Theta, G^{\rm nr})$. Donc les groupes $\mathbf{G}_d$ et $\mathbf{G}_{d'}$ sont isomorphes sur F. Alors le rang de $\mathbf{T}_{d,F}$ est au plus égal à celui de $\mathbf{T}_{d',F}$, ce qui équivaut à l'inégalité (4).

Fixons un élément $x \in X^{d'}_*$ en position générale. Précisément, imposons que, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\langle \alpha, x\rangle = 0$ si et seulement si α annule $X^{d'}_*$. Introduisons la chambre positive fermée $\bar{\mathcal{C}}^+$ formée des $y \in X_*$ tels que $\langle \alpha, y\rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$. Il existe un unique élément $y \in \bar{\mathcal{C}}^+$ qui est conjugué à x par l'action du groupe W. Soit y ce point. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(x)$ est conjugué à x par l'action de W. Donc $\gamma(y)$ est aussi conjugué à x. L'action de Γ conserve $\bar{\mathcal{C}}^+$, donc $\gamma(y) = y$ par unicité de y. Donc $y \in X^\Gamma_*$. Posons $\Sigma^L = \{\alpha \in \Sigma\,; \langle \alpha, y\rangle = 0\}$ et $\Delta^L = \Delta \cap \Sigma^L$. On introduit les ensembles correspondant de coracines et on pose :

$$\mathcal{D}^L = (X^*, \Sigma^L, \Delta^L, X_*, \check{\Sigma}^L, \check{\Delta}^L).$$

Parce que y appartient à la fois à X^Γ_* et à $\bar{\mathcal{C}}^+$, $\mathcal{D}^L$ est une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$. Il est connu que le fixateur de y dans W est égal à W^L. Soit $w \in W$ l'unique élément tel que $w(y) = x$ et que w soit de longueur minimale dans sa classe wW^L. Remarquons que la condition $x \in X^{d'}_*$ implique $x \in X^I_*$ puisque d' est trivial sur I. Pour $\sigma \in I$, on en déduit la relation $\sigma(w) \in wW^L$, puis $\sigma(w) = w$ par minimalité. Donc

$w \in W^I$. Posons $n_1 = \bar{n}(w)$. C'est un élément de $N^I_{\rm red}$. On a introduit, en 1.3, l'ensemble de facettes $\Phi(0)$ et l'alcôve $C^{\rm nr}$. En remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^L$, on introduit de même $\Phi^L(0)$ et $C^{L,{\rm nr}}$. L'ensemble de facettes $\Phi^L(0)$ est moins fin que $\Phi(0)$. Donc $n_{1,\mathbb{R}}^{-1}(C^{\rm nr})$ est contenue dans une alcôve de $\Phi^L(0)$ et on peut fixer $n_2 \in N^{L,I}_{\rm red}$ tel que $n_{2,\mathbb{R}}^{-1}n_{1,\mathbb{R}}^{-1}(C^{\rm nr}) \subset C^{L,{\rm nr}}$. Posons $n_3 = n_1n_2$ et, pour $\theta \in \Theta$, $d''(\theta) = n_3^{-1}d'(\theta)\theta(n_3)$. On a l'égalité $X_*^{d''} = n_3^{-1}(X_*^{d'})$ et y est un point général de $X_*^{d''}$. On a même $y \in X_*^\Gamma \cap X_*^{d''}$ et cela implique que, pour tout θ, $d''(\theta)$ fixe y. Comme on l'a dit ci-dessus, cela entraîne que l'image de $d''(\theta)$ dans W appartient à W^L, autrement dit $d''(\theta) \in N^{L,I}_{\rm red}$. D'après le choix de n_2 et l'hypothèse $d'(\theta) \in \mathcal{N}^{\rm nr}_{\rm red}$, $d''(\theta)_{\mathbb{R}}$ conserve $C^{L,{\rm nr}}$. Donc $d''(\theta) \in \mathcal{N}^{L,{\rm nr}}_{\rm red}$. On a :

$$X_*^{d''} = X^\Gamma_{*,L}. \tag{5}$$

En effet, si $z \in X^\Gamma_{*,L}$, z est fixe à la fois par Γ et par W^L, donc par $d''(\gamma)\circ\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Inversement, si $z \in X_*^{d''}$, z est annulé par Σ^L parce que Σ^L annule y et y est en position générale. Donc z est fixé par W^L. Pour $\gamma \in \Gamma$, il est fixé par $d''(\gamma)\circ\gamma$, donc aussi par γ. Alors $z \in X_*^\Gamma$ et, puisqu'il est annulé par Σ^L, $z \in X^\Gamma_{*,L}$. Cela prouve (5).

Les applications :

$$H^1(\Theta, \mathcal{N}^{\rm nr}_{\rm red}) \longrightarrow (X_*/X_{*,{\rm sc}})_{\Gamma,{\rm tors}},\ H^1(\Theta, \mathcal{N}^{L,{\rm nr}}_{\rm red}) \longrightarrow (X_*/X_{*,{\rm sc}})_{\Gamma,{\rm tors}},$$

se factorisent par les applications naturelles :

$$H^1(\Theta, \mathcal{N}^{\rm nr}_{\rm red}) \longrightarrow H^1(\Theta, N^I_{\rm red}),\ H^1(\Theta, \mathcal{N}^{L,{\rm nr}}_{\rm red}) \longrightarrow H^1(\Theta, N^I_{\rm red}).$$

Les images de d' et d'' dans $H^1(\Theta, N^I_{\rm red})$ sont égales, donc l'image de d'' dans $(X_*/X_{*,{\rm sc}})_{\Gamma,{\rm tors}}$ est la même que celle de d' et aussi que celle de d. La définition de $\mathcal{D}^{R(d)}$ implique l'inégalité $\mathcal{D}^{R(d)} \leqslant \mathcal{D}^L$, donc $X^\Gamma_{*,L} \subset X^\Gamma_{*,R(d)}$. On montre comme en (5) que $X^\Gamma_{*,R(d)} \subset X_*^d$. Les relations (4) et (5) impliquent alors que tous ces groupes sont égaux. Cela démontre d'une part le (i) de l'énoncé, d'autre part l'égalité $\mathcal{D}^L = \mathcal{D}^{R(d)}$. Maintenant, d'' et d sont deux cocycles à valeurs dans $\mathcal{N}^{R(d),{\rm nr}}_{\rm red}$ qui ont même image dans $(X_*/X_{*,{\rm sc}})_{\Gamma,{\rm tors}}$. D'après l'isomorphisme 2.3(1), ils sont cohomologues dans $\mathcal{N}^{R(d),{\rm nr}}_{\rm red}$. Cela implique le (ii) de l'énoncé. Le (iii) en résulte facilement en utilisant le fait que le noyau $T^{\rm nr}_+$ de l'application ${\rm red}\colon N^{\rm nr} \to N^I_{\rm red}$ est cohomologiquement trivial pour toute action raisonnable de Θ. □

D'après ce lemme, on peut remplacer d' par d dans les constructions de [11], quitte à effectuer des conjugaisons inessentielles par les éléments n ou n_F de l'énoncé.

3. Groupes de Weyl affines

3.1. Soit $d \in D$. On définit des actions tordues de Γ sur divers objets, que l'on note uniformément ρ_d. Ainsi, pour $\gamma \in \Gamma$, on définit $\rho_d(\gamma)$:

- sur X_* par $\rho_d(\gamma)(x) = d(\gamma) \circ \gamma(x)$, où $d(\gamma)$ agit sur X_* via sa projection dans W ;
- sur V par $\rho_d(\gamma)(v) = d(\gamma)_{\mathbb{R}} \circ \gamma(v)$;
- sur N_{red} par $\rho_d(\gamma)(n) = d(\gamma)\gamma(n)d(\gamma)^{-1}$;
- sur W en quotientant l'action sur N_{red}.

On note les ensembles de points fixes X_*^d, V^d, *etc.* Notons $\pi_N : N_{\text{red}} \to \bar{\mathbf{N}}$ l'homomorphisme de noyau T_ϖ qui est l'identité sur $\bar{\mathbf{N}}$. Pour $\theta \in \Theta$, posons $\bar{d}(\theta) = \pi_N \circ d(\theta)$. On définit aussi une action ρ_d, mais seulement de Θ, sur $\bar{\mathbf{G}}$ par $\rho_d(\theta)(g) = \bar{d}(\theta)\theta(g)\bar{d}(\theta)^{-1}$. Introduisons le groupe $\bar{\mathbf{G}}_d$ défini sur $\mathbb{F}_q$, muni d'un isomorphisme $\bar{\xi}_d : \bar{\mathbf{G}}_d \to \bar{\mathbf{G}}$ défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, de sorte que l'on ait l'égalité $\bar{\xi}_d \circ \theta = \rho_d(\theta) \circ \bar{\xi}_d$ pour tout $\theta \in \Theta$. Pour tout sous-groupe $\bar{\mathbf{H}}$ de $\bar{\mathbf{G}}$, on note $\bar{\mathbf{H}}_d$ son image réciproque par $\bar{\xi}_d$ dans $\bar{\mathbf{G}}_d$. On fait une exception pour le groupe $\bar{\mathbf{R}}(d)$, c'est-à-dire le groupe de Lévi standard de $\bar{\mathbf{G}}$ associé à la donnée $\mathcal{D}^{R(d)}$. On note simplement $\bar{\mathbf{R}}_d$ son image réciproque par $\bar{\xi}_d$. Les groupes $\bar{\mathbf{T}}_d$, $\bar{\mathbf{N}}_d$, $\bar{\mathbf{R}}_d$ sont définis sur $\mathbb{F}_q$. Pour toute donnée de Lévi $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d = \mathcal{L}(R(d))$, le groupe $\bar{\mathbf{L}}_d$ est défini sur $\mathbb{F}_q$. Et, pour $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, le groupe $\bar{\mathbf{Q}}_d$ est un sous-groupe parabolique de $\bar{\mathbf{G}}_d$ défini sur $\mathbb{F}_q$.

Si $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique, on note selon l'usage $\mathbf{H}^0$ sa composante neutre. En particulier, on note $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}$ la composante neutre du groupe des points fixes $\bar{\mathbf{T}}^I$. On vérifie que son image réciproque $\bar{\mathbf{T}}_d^{I,0}$ est définie sur $\mathbb{F}_q$.

3.2. Soit $v \in V_{(p)}^d$ $(= V^d \cap V_{(p)})$. On note t_v l'élément de T_ϖ tel que $v = t_{v,\mathbb{R}}(0)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'élément $t_v^{-1}d(\gamma)\gamma(t_v)$ appartient à $\bar{\mathbf{N}}$ et on introduit une action $\rho_{d,v}$ de Γ sur $\bar{\mathbf{G}}$ en posant $\rho_{d,v}(\gamma) = \mathrm{Ad}(t_v^{-1}d(\gamma)\gamma(t_v)) \circ \gamma$. La restriction de $\rho_{d,v}$ à Θ coïncide avec ρ_d. Sa restriction à I ne dépend pas de d. On note $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ le sous-groupe de $\bar{\mathbf{G}}_d$ tel que $\bar{\xi}_d(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})$ soit égal au sous-groupe de points fixes dans $\bar{\mathbf{G}}$ par l'action $\rho_{d,v}$ de I. Ce groupe $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ est défini sur $\mathbb{F}_q$. Il n'est pas connexe en général. L'action $\rho_{d,v}$ restreinte à I conserve $\bar{\mathbf{T}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ et coïncide sur $\bar{\mathbf{T}}$ avec l'action naturelle. On en déduit que le tore $\bar{\mathbf{T}}_d^{I,0}$ est contenu dans $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ et qu'il en est un sous-tore maximal.

D'après le lemme 2.4(i), le groupe $\bar{\mathbf{R}}(d)$ est égal à celui noté $\bar{\mathbf{M}}(V^d)$ en [11], 9.3. D'après le lemme 9.4.2 de [11], l'action $\rho_{d,v}$ conserve $\bar{\mathbf{R}}(d)$ et sa restriction à ce groupe est indépendante de v. Donc l'intersection $\bar{\mathbf{R}}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ ne dépend pas de v. On note $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ cette intersection.

3.3. Soit $F \in CL_q$. On introduit le groupe réductif connexe $\mathbf{G}_d$ défini sur F, muni d'un isomorphisme $\xi_d : \mathbf{G}_d \to \mathbf{G}$ défini sur F^{nr}, tel que $\xi_d \circ \gamma =$

$\mathrm{Ad}(d_F(\gamma))\circ\gamma\circ\xi_d$ pour tout $\gamma\in\Gamma$. Pour tout sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$, on note $\mathbf{H}_d$ son image réciproque dans $\mathbf{G}_d$ par ξ_d. On fait une exception pour le groupe $\mathbf{R}(d)$ dont on note simplement $\mathbf{R}_d$ l'image réciproque. Les groupes $\mathbf{T}_d$, $\mathbf{N}_d$, $\mathbf{R}_d$ sont définis sur F. Plus généralement, pour toute donnée de Lévi $\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}_d$, le groupe $\mathbf{L}_d$ est défini sur F, c'est un groupe de Lévi de $\mathbf{G}_d$. L'application $\mathcal{D}^L\mapsto\mathbf{L}_d$ est une bijection de $\mathcal{L}_d$ sur l'ensemble des groupes de Lévi de $\mathbf{G}_d$ contenant le groupe de Lévi minimal $\mathbf{R}_d$. Soit $\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}_d$. Pour $\Sigma^Q\in\mathcal{P}(L)$, le groupe $\mathbf{Q}_d$ est défini sur F. C'est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_d$. L'application $\Sigma^Q\mapsto\mathbf{Q}_d$ est une bijection de $\mathcal{P}(L)$ sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}_d$ définis sur F et de composante de Lévi $\mathbf{L}_d$. On note $\mathbf{T}_{d,F}$ le sous-tore de $\mathbf{T}_d$ tel que $\xi_d(\mathbf{T}_{d,F})$ ait pour groupe de cocaractères X_*^d. D'après le lemme 1.10 de [11], que l'on peut appliquer ainsi qu'on l'a expliqué en 2.4, $\mathbf{T}_{d,F}$ est un sous-tore déployé maximal de $\mathbf{G}_d$.

Introduisons l'immeuble $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$ de $\mathbf{G}_d$ sur F^{nr}. Notons $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$ l'anneau des entiers de F^{nr}. Le groupe G_d^{nr} agit sur $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$. Pour tout $v\in\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$, Bruhat et Tits définissent un schéma en groupes lisse $\mathbf{G}_{d,v}$ sur $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$, de sorte que, en posant $G_{d,v}^{\mathrm{nr}}=\mathbf{G}_{d,v}(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})$, ce groupe $G_{d,v}^{\mathrm{nr}}$ soit le fixateur de v dans G_d^{nr}. On définit aussi la composante neutre $\mathbf{G}_{d,v}^0$ et on pose $G_{d,v}^{0,\mathrm{nr}}=\mathbf{G}_{d,v}^0(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})$.

L'espace V^I s'identifie à l'appartement dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$ associé au plus grand sous-tore de $\mathbf{T}_d$ déployé sur F^{nr}. On peut identifier $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$ au quotient de $G_d^{\mathrm{nr}}\times V^I$ par la relation d'équivalence suivante (*cf.* [11], 1.8). Deux éléments (g_1,v_1) et (g_2,v_2) de $G_d^{\mathrm{nr}}\times V^I$ sont équivalents si et seulement s'il existe $n\in N_d^{\mathrm{nr}}$ et $k\in G_{d,v_1}^{\mathrm{nr}}$ tels que $v_2=(\mathrm{red}\circ\xi_d(n))_{\mathbb{R}}(v_1)$ et $g_1=g_2nk$. Pour $v\in V_{(p)}^{\mathrm{nr}}$, il y a un homomorphisme surjectif :

$$\pi_{d,v}\colon G_{d,v}^{\mathrm{nr}}\longrightarrow\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$$

qui identifie $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ au plus grand quotient réductif de la fibre spéciale de $\mathbf{G}_{d,v}$ ([11], lemme 2.7.1). Il identifie aussi $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}^0$ au plus grand quotient réductif de la fibre spéciale de $\mathbf{G}_{d,v}^0$. On note $G_{d,v,+}^{\mathrm{nr}}$ le noyau de l'homomorphisme $\pi_{d,v}$.

Pour toute donnée de Lévi $\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}_d$, l'immeuble $\mathrm{Imm}(\mathbf{L}_d,F^{\mathrm{nr}})$ se plonge dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$ de façon compatible aux actions de L_d^{nr}. L'espace V^I est inclus dans l'image de ce plongement. En particulier, pour $v\in V_{(p)}^I$, on définit le groupe $R_{d,v}^{\mathrm{nr}}$. Il est indépendant de v ([11], lemme 9.6.2). On le note simplement $R_{d,c}^{\mathrm{nr}}$ et on note $R_{d,c,+}^{\mathrm{nr}}$ son plus grand pro-p-sous-groupe distingué nilpotent.

On introduit l'immeuble $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F)$ de $\mathbf{G}_d$ sur F. On l'identifie à l'ensemble des points fixes par Θ dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F^{\mathrm{nr}})$. En particulier, V^d est l'appartement dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ associé au tore déployé maximal $\mathbf{T}_{d,F}$. Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F. Si $v \in \mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$, le schéma en groupes $\mathbf{G}_{d,v}$ est défini sur $\mathfrak{o}$. On pose $G_{d,v} = \mathbf{G}_{d,v}(\mathfrak{o}) = G^{\mathrm{nr}}_{d,v} \cap G_d$. Plus généralement, on supprime l'exposant $^{\mathrm{nr}}$ pour désigner les ensembles de points sur F des groupes introduits ci-dessus, par exemple $R_{d,c} = R^{\mathrm{nr}}_{d,c} \cap G_d$. Si $v \in V^d_{(p)}$, l'homomorphisme $\pi_{d,v}$ est Θ-équivariant et se restreint en une surjection de $G_{d,v}$ sur $\bar{G}_{d,v}$. D'après [10], 3.5.2, il y a un ouvert dense $U^d \subset V^d$ tel que, pour $v \in V^d_{(p)} \cap U^d$, $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ soit un tore.

3.4. Notons $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$ le plus grand sous-tore de $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d$ déployé sur $\mathbb{F}_q$. Son image $\bar{\xi}_d(\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q})$ est le sous-tore de $\bar{\mathbf{T}}$ de groupe de cocaractères X^d_*.

Lemme. — *Soit $v \in V^d_{(p)}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *$\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$ est un sous-tore déployé maximal de $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$.*

(ii) *Le groupe $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ est inclus dans $\bar{\mathbf{N}}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ et on a les égalités $\bar{\mathbf{R}}^0_{d,c} = \bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d = \bar{\mathbf{G}}^0_{d,v} \cap \bar{\mathbf{R}}_{d,c}$.*

(iii) *Soit $\bar{\mathbf{P}}^0$ un sous-groupe de Borel de $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ et contenant $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$. Alors $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ normalise $\bar{\mathbf{P}}^0$.*

Démonstration. — Par définition de $\mathcal{D}^{R(d)}$, $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ est le commutant de $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$ dans $\bar{\mathbf{G}}_{d,v}$. Son intersection avec $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ est donc connexe : c'est un groupe de Lévi. D'où l'égalité $\bar{\mathbf{R}}^0_{d,c} = \bar{\mathbf{G}}^0_{d,v} \cap \bar{\mathbf{R}}_{d,c}$. L'inclusion $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d \subset \bar{\mathbf{R}}^0_{d,c}$ est évidente. Supposons pour un instant que v appartient à l'ouvert U^d de la fin du paragraphe précédent. Alors $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ est un tore, forcément égal à $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d$. L'inclusion précédente est donc une égalité, ce qui prouve les égalités de (ii). Le normalisateur de $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}$ dans $\bar{\mathbf{G}}$ est $\bar{\mathbf{N}}$. Donc celui de $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d$ dans $\bar{\mathbf{G}}_d$ est $\bar{\mathbf{N}}_d$. Puisque $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ normalise $\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d = \bar{\mathbf{R}}^0_{d,c}$, $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$ est inclus dans $\bar{\mathbf{N}}_d$, ce qui achève la preuve de (ii). Maintenant $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$ est un sous-tore déployé maximal de son centralisateur connexe. Un tel tore est forcément un sous-tore déployé maximal. D'où (i). Enfin, (iii) est une propriété générale des centralisateurs de sous-tores déployés maximaux. □

3.5. Pour $v \in V^d_{(p)}$, posons $N_{\mathrm{red},v} = \{n \in N_{\mathrm{red}}\ ; n_{\mathbb{R}}(v) = v\}$. Ce groupe est stable par l'action ρ_d de Γ. On pose $N^d_{\mathrm{red},v} = N^d_{\mathrm{red}} \cap N_{\mathrm{red},v}$ (rappelons que N^d_{red} est le sous-groupe de N_{red} formé des points fixes par l'action ρ_d de Γ définie en 3.1). L'homomorphisme $\pi_N : N_{\mathrm{red}} \to \bar{\mathbf{N}}$ se restreint en un homomorphisme Γ-équivariant de $N_{\mathrm{red},v}$ dans $\bar{\mathbf{N}}$, si Γ agit sur $N_{\mathrm{red},v}$ par ρ_d et sur $\bar{\mathbf{N}}$ par $\rho_{d,v}$. La restriction de ρ_d à I étant l'action naturelle, $\bar{\xi}^{-1}_d \circ \pi_N$

se restreint en un homomorphisme Θ-équivariant :

$$\pi_{N,d,v}\ : N^I_{\mathrm{red},v} \longrightarrow \bar{\mathbf{N}}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v}.$$

Le groupe $N^{R(d)}_{\mathrm{red},v} = N^{R(d)}_{\mathrm{red}} \cap N_{\mathrm{red},v}$ est indépendant de $v \in V^d_{(p)}$ car $N^{R(d)}_{\mathrm{red}}$ agit trivialement sur l'espace vectoriel $X^d_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sous-jacent à V^d. On pose simplement $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{d,c} = N^{R(d)}_{\mathrm{red},v}$, $\mathcal{R}_{d,c} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{d,c} \cap N^d_{\mathrm{red}}$.

Lemme.

(i) *Soit $n \in N^d_{\mathrm{red}}$. Alors $n_{\mathbb{R}}$ conserve V^d. La restriction de $n_{\mathbb{R}}$ à V^d est une translation si et seulement si $n \in N^{R(d),d}_{\mathrm{red}}$. Elle est triviale si et seulement si $n \in \mathcal{R}_{d,c}$.*

(ii) *Le sous-groupe $\mathcal{R}_{d,c}$ de N^d_{red} est distingué.*

(iii) *Soit $v \in V^d_{(p)}$. L'homomorphisme $\pi_{N,d,v}$ est bijectif et se restreint en des bijections de $N^d_{\mathrm{red},v}$ sur $\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v}$, resp. de $\boldsymbol{\mathcal{R}}^I_{d,c}$ sur $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$, resp. de $\mathcal{R}_{d,c}$ sur $\bar{R}_{d,c}$.*

(iv) *Soient $v \in V^d_{(p)}$ et $\bar{\mathbf{B}}^0_1$, $\bar{\mathbf{B}}^0_2$ deux sous-groupes de Borel de $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ contenant $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$ et définis sur $\mathbb{F}_q$. Posons $\bar{\mathbf{B}}_2 = \bar{\mathbf{R}}_{d,c}\bar{\mathbf{B}}^0_2$. L'application composée de $\pi_{N,d,v}$ et de l'application naturelle de $\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v}$ dans $\bar{B}^0_1\backslash\bar{G}_{d,v}/\bar{B}_2$ se quotiente en une bijection de $N^d_{\mathrm{red},v}/\mathcal{R}_{d,c}$ sur $\bar{B}^0_1\backslash\bar{G}_{d,v}/\bar{B}_2$.*

Démonstration. — L'action $(n,v) \mapsto n_{\mathbb{R}}(v)$ de N_{red} sur V est compatible aux actions ρ_d de Γ sur N_{red} et V. Donc, pour $n \in N^d_{\mathrm{red}}$, $n_{\mathbb{R}}$ conserve V^d. La restriction de $n_{\mathbb{R}}$ à V^d est une translation si et seulement si l'image de n dans W agit trivialement sur l'espace vectoriel $X^d_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sous-jacent à V^d. Cela équivaut à ce que cette image appartienne à $W^{R(d)}$, ou encore à la condition $n \in N^{R(d),d}_{\mathrm{red}}$. La restriction de $n_{\mathbb{R}}$ à V^d est triviale si et seulement si on a de plus $n \in N^d_{\mathrm{red},v}$ pour au moins un $v \in V^d_{(p)}$. Cela équivaut à $n \in \mathcal{R}_{d,c}$. Cela prouve (i). Le (ii) en résulte puisque $\mathcal{R}_{d,c}$ apparaît comme le noyau de l'homomorphisme $n \mapsto n_{\mathbb{R}}$.

Soit $v \in V^d_{(p)}$. On a :

(1) la restriction de π_N à $N_{\mathrm{red},v}$ est injective.

En effet, soit $n \in N_{\mathrm{red},v}$ tel que $\pi_N(n) = 1$. Alors $n \in T_{\varpi}$, donc $n_{\mathbb{R}}$ est une translation. Puisque $n_{\mathbb{R}}$ fixe v, cette translation est triviale, donc $n = 1$. Cela prouve (1).

D'après (1), $\pi_{N,d,v}$ est injectif. Soit $\bar{n}_d \in \bar{\mathbf{N}}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$, posons $\bar{n} = \bar{\xi}_d(\bar{n}_d) \in \bar{\mathbf{N}}$ et $n = t_v\bar{n}t_v^{-1} \in N_{\mathrm{red}}$. Alors $n \in N_{\mathrm{red},v}$ et $\pi_N(n) = \bar{n}$. Pour $\sigma \in I$, on a $\sigma(n) \in N_{\mathrm{red},v}$ et $\pi_N \circ \sigma(n) = \rho_{d,v}(\sigma)(\bar{n}) = \bar{n}$. D'après (1), cela entraîne $\sigma(n) = n$, donc $n \in N^I_{\mathrm{red},v}$. Puisque $\pi_{N,d,v}(n) = \bar{n}_d$, cela prouve la surjectivité de $\pi_{N,d,v}$. Alors $\pi_{N,d,v}$ est bijectif. Étant Θ-équivariant, il se restreint en une bijection entre les sous-ensembles de points fixes par Θ des ensembles de départ et d'arrivée. Cela prouve les deux premières assertions de (iii). On obtient les deux dernières en appliquant les deux premières aux objets issus de $\mathcal{D}^{R(d)}$ et en utilisant le (ii) du lemme 3.4 qui nous dit que $\bar{\mathbf{N}}_d \cap \bar{\mathbf{R}}_{d,v} = \bar{\mathbf{R}}_{d,c}$.

Considérons la situation de (iv). Un résultat général de théorie des groupes nous dit que l'application naturelle de $\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v}$ dans $\bar{B}^0_1\backslash\bar{G}_{d,v}/\bar{B}^0_2$ se quotiente en une bijection de $(\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v})/(\bar{T}_d \cap \bar{G}^0_{d,v})$ sur cet ensemble de doubles classes. Le même résultat, appliqué aux objets issus de $\mathcal{D}^{R(d)}$, nous dit que $\bar{B}_2 = \bar{R}_{d,c}\bar{B}^0_2$. Puisque $\bar{R}_{d,c}$ contient $\bar{T}_d \cap \bar{G}^0_{d,v}$, on en déduit une bijection de $(\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v})/\bar{R}_{d,c}$ sur l'ensemble $\bar{B}^0_1\backslash\bar{G}_{d,v}/\bar{B}_2$. Grâce à (iii), l'ensemble de départ s'identifie via $\pi_{N,d,v}$ à $N^d_{\mathrm{red},v}/\mathcal{R}_{d,c}$. Cela prouve (iv). □

3.6. Soit $F \in CL_q$. L'homomorphisme $\mathrm{red}\circ\xi_d\colon N^{\mathrm{nr}}_d \to N^I_{\mathrm{red}}$ est surjectif, de noyau le plus grand pro-p-sous-groupe nilpotent $T^{\mathrm{nr}}_{d,+}$ de T^{nr}_d. Cet homomorphisme est Θ-équivariant, Θ agissant sur N^I_{red} par ρ_d. Puisque N^{nr}_d est un sous-groupe de G^{nr}_d, il agit sur $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F^{\mathrm{nr}})$. Cette action préserve V^I. Pour $n \in N^{\mathrm{nr}}_d$, l'action ainsi définie de n sur V^I coïncide avec $(\mathrm{red}\circ\xi_d(n))_{\mathbb{R}}$. Pour $v \in V^I$, posons $N^{\mathrm{nr}}_{d,v} = G^{\mathrm{nr}}_{d,v} \cap N^{\mathrm{nr}}_d$. Ce groupe $N^{\mathrm{nr}}_{d,v}$ est aussi l'image réciproque de $N^I_{\mathrm{red},v}$ par l'homomorphisme $\mathrm{red}\circ\xi_d$. Supposons de plus $v \in V^I_{(p)}$. On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} N^I_{\mathrm{red},v} \arrow[d, "\pi_{N,d,v}"'] & N^{\mathrm{nr}}_{d,v} \arrow[l, "\mathrm{red}\circ\xi_d"'] \arrow[r] & G^{\mathrm{nr}}_{d,v} \arrow[d, "\pi_{d,v}"] \\ \bar{\mathbf{N}}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v} \arrow[rr] & & \bar{\mathbf{G}}_{d,v} \end{tikzcd}$$

Il est commutatif. Supposons $v \in V^d_{(p)}$ et faisons agir Θ sur $N^I_{\mathrm{red},v}$ par ρ_d. Alors toutes les flèches du diagramme sont Θ-équivariantes.

Supposons toujours $v \in V^d_{(p)}$. D'après le lemme 9.6.2 de [11], l'image de $R^{\mathrm{nr}}_{d,c}$ par $\pi_{d,v}$ est $\bar{\mathbf{R}}_{d,c}$. Or ce groupe est égal à $\bar{\mathbf{N}}^{R(d)}_d \cap \bar{\mathbf{G}}_{d,v}$ d'après le lemme 3.4(ii). On en déduit l'assertion suivante.

Lemme. — *On a l'égalité* $R^{\mathrm{nr}}_{d,c} = \left(N^{R(d),\mathrm{nr}}_d \cap R^{\mathrm{nr}}_{d,c}\right) R^{\mathrm{nr}}_{d,c,+}$.

3.7. On a défini $\Phi(0)$ en 1.3. On note $\Phi(0)^d$ le sous-ensemble des éléments de $\Phi(0)$ conservés par l'action ρ_d de Θ. Tout élément de $\Phi(0)^d$ coupe $V^d_{(p)}$ (la preuve est similaire à celle de [11], 2.8(2)). Notons $\Phi(0)^d_{\max}$ le sous-ensemble des $\phi \in \Phi(0)^d$ tels que $\phi \cap V^d$ soit ouvert dans V^d.

Soit $F \in CL_q$. Pour $\phi \in \Phi(0)^d_{\max}$, on définit le fixateur $G_{d,\phi}$ de ϕ dans G_d et on peut encore définir un sous-groupe $G^0_{d,\phi}$ de $G_{d,\phi}$. Pour $v \in \phi \cap V^d$, on a l'égalité $G^0_{d,\phi} = G^0_{d,v}$ et l'inclusion $G_{d,\phi} \subset G_{d,v}$. Il existe un ouvert dense U_ϕ de $\phi \cap V^d$ tel que, pour $v \in U_\phi$, cette inclusion soit une égalité.

Lemme. — *Soit $\phi \in \Phi(0)^d_{\max}$ et $F \in CL_q$. On a l'égalité $G_{d,\phi} = R_{d,c} G^0_{d,\phi}$.*

Démonstration. — Puisque $R_{d,c}$ agit trivialement sur V^d, $R_{d,c}$ est inclus dans $G_{d,\phi}$. Soit $v \in U_\phi$. On doit montrer que $R_{d,c}$ s'envoie surjectivement sur $G_{d,v}/G^0_{d,v}$. En projetant par $\pi_{d,v}$, il revient au même de prouver que $\bar{R}_{d,c}$ s'envoie surjectivement sur $\bar{G}_{d,v}/\bar{G}^0_{d,v}$. On a vu dans la preuve du lemme 3.5(iv) que l'application de $N^d_{\mathrm{red},v}$ dans $\bar{G}_{d,v}/\bar{G}^0_{d,v}$, composée de $\pi_{N,d,v}$ et de l'application naturelle de $\bar{N}_d \cap \bar{G}_{d,v}$ dans $\bar{G}_{d,v}/\bar{G}^0_{d,v}$, était surjective. L'image de $\mathcal{R}_{d,c}$ par $\pi_{N,d,v}$ est $\bar{R}_{d,c}$ Il suffit donc de prouver l'égalité :

$$N^d_{\mathrm{red},v} = \mathcal{R}_{d,c}. \tag{2}$$

Soit $n \in N^d_{\mathrm{red},v}$. D'après le choix de v, $n_{\mathbb{R}}$ fixe non seulement v mais aussi tout point de $\phi \cap V^d$. Cet ensemble étant ouvert dans V^d, $n_{\mathbb{R}}$ fixe tout point de V^d. Donc $n \in \mathcal{R}_{d,c}$ d'après le lemme 3.5(i). Cela prouve (2) et le lemme. □

3.8. Soit $F \in CL_q$. Notons $\mathbf{N}_{d,F}$ le normalisateur de $\mathbf{T}_{d,F}$ dans $\mathbf{G}_d$. L'action de $N_{d,F}$ sur $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ conserve l'appartement V^d associé à $\mathbf{T}_{d,F}$. Le sous-groupe R_d de $N_{d,F}$ est celui des éléments qui agissent par translations sur V^d. Le sous-groupe $R_{d,c}$ est celui des éléments qui agissent trivialement.

Puisque $\mathbf{T}_{d,F}$ est le plus grand sous-tore déployé sur F de $\mathbf{T}_d$, le groupe N_d normalise $\mathbf{T}_{d,F}$, donc $N_d \subset N_{d,F}$. Cette inclusion se quotiente en un homomorphisme injectif :

$$N_d/T_{d,+} \longrightarrow N_{d,F}/R_{d,c,+}.$$

Proposition. — *Cet homomorphisme est bijectif.*

Démonstration. — Soient $n \in N_{d,F}$ et $v \in V^d_{(p)}$. Notons v' l'image de v par l'action de n sur $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$. Ce point v' appartient à V^d. Plongeons $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F^{\mathrm{nr}})$ et utilisons la description de cet immeuble donnée en 3.3 comme quotient de $G^{\mathrm{nr}}_d \times V^I$. Les deux éléments (n, v) et $(1, v')$ de $G^{\mathrm{nr}}_d \times V^I$ ont même image dans l'immeuble. On peut donc fixer

$n_1 \in N_d^{\mathrm{nr}}$ et $h_1 \in G_{d,v}^{\mathrm{nr}}$ tels que $n = n_1 h_1$. On a :

$$\mathrm{Ad}(h_1)(\mathbf{T}_{d,F}) = \mathrm{Ad}(n_1^{-1}n)(\mathbf{T}_{d,F}) = \mathrm{Ad}(n_1^{-1})(\mathbf{T}_{d,F}) \subset \mathrm{Ad}(n_1^{-1})(\mathbf{T}_d) = \mathbf{T}_d.$$

Alors $\mathrm{Ad}(h_1^{-1})(\mathbf{T}_d)$ contient $\mathbf{T}_{d,F}$ et est donc un sous-tore maximal du commutant $\mathbf{R}_d$ de $\mathbf{T}_{d,F}$. Il est maximalement déployé sur F^{nr} puisque $\mathbf{T}_d$ l'est et h_1 appartient à G_d^{nr}. Enfin, puisque v appartient à l'appartement associé à $\mathbf{T}_d$ dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F^{\mathrm{nr}})$ et puisque h_1 fixe v, v appartient aussi à l'appartement associé à $\mathrm{Ad}(h_1^{-1})(\mathbf{T}_d)$. Ces deux appartements sont inclus dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{R}_d, F^{\mathrm{nr}})$. En appliquant [10], 2.2.1 à cet immeuble, on voit qu'il existe $h_2 \in R_{d,v}^{\mathrm{nr}}$ tel que $\mathrm{Ad}(h_1^{-1})(\mathbf{T}_d) = \mathrm{Ad}(h_2^{-1})(\mathbf{T}_d)$. Fixons un tel h_2. Alors $h_1 h_2^{-1}$ appartient à N_d^{nr}. D'autre part, $R_{d,v}^{\mathrm{nr}} = R_{d,c}^{\mathrm{nr}}$. En utilisant le lemme 3.6, on peut écrire $h_2 = n_2 h_3$, où $n_2 \in N_d^{R(d),\mathrm{nr}} \cap R_{d,c}^{\mathrm{nr}}$ et $h_3 \in R_{d,c,+}^{\mathrm{nr}}$. Posons $n_3 = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2$. Alors $n_3 \in N_d^{\mathrm{nr}}$ et $n = n_3 h_3$. Soit $\theta \in \Theta$. Puisque $n \in G_d$, on a $\theta(n_3 h_3) = n_3 h_3$ et $n_3^{-1}\theta(n_3) = h_3 \theta(h_3)^{-1}$. Ce dernier élément appartient à $N_d^{\mathrm{nr}} \cap R_{d,c,+}^{\mathrm{nr}} = T_{d,+}^{\mathrm{nr}}$. L'application $\theta \mapsto n_3^{-1}\theta(n_3)$ est un cocycle. Mais $T_{d,+}^{\mathrm{nr}}$ est cohomologiquement trivial ([11], lemme 1.8). On peut donc fixer $t \in T_{d,+}^{\mathrm{nr}}$ tel que $n_3^{-1}\theta(n_3) = t\theta(t)^{-1}$ pour tout θ. Posons $n_4 = n_3 t$ et $h_4 = t^{-1} h_3$. On a maintenant $n_4 \in N_d$, $h_4 \in R_{d,c,+}^{\mathrm{nr}}$, $n = n_4 h_4$. Cela oblige h_4 à appartenir à $R_{d,c,+}$. Alors l'image de n dans $N_{d,F}/R_{d,c,+}$ est égale à celle de n_4. Puisque $n_4 \in N_d$, cela prouve la surjectivité cherchée. □

3.9. Soit $F \in CL_q$. On a deux isomorphismes :

$$N_{\mathrm{red}}^d \overset{(\mathrm{red}\circ\xi_d)^{-1}}{\longrightarrow} N_d/T_{d,+} \longrightarrow N_{d,F}/R_{d,c,+}.$$

On fixe une application :

$$\begin{array}{ccc} N_{\mathrm{red}}^d & \longrightarrow & N_{d,F} \\ n & \longmapsto & n_F \end{array}$$

de sorte que, pour tout $n \in N_{\mathrm{red}}^d$, l'image de n_F dans $N_{d,F}/R_{d,c,+}$ soit égale à celle de n par le composé des isomorphismes ci-dessus.

Cette application est compatible aux actions sur V^d. Pour $n \in N_{\mathrm{red}}^d$, on a :

$$\begin{aligned} n \in N_{\mathrm{red}}^{R(d),d} &\iff n_F \in R_d, \\ n \in \mathcal{R}_{d,c} &\iff n_F \in R_{d,c}. \end{aligned}$$

Soit $v \in V_{(p)}^d$. On a :

$$n \in N_{\mathrm{red},v}^d \iff n_F \in N_{d,F} \cap G_{d,v}.$$

De plus, le diagramme :

(3)
$$\begin{array}{ccc} N^d_{\mathrm{red},v} & \xrightarrow{n\mapsto n_F} & N_{d,F}\cap G_{d,v} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{N,d,v}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{d,v}} \\ \bar N_d\cap \bar G_{d,v} & \longrightarrow & \bar G_{d,v} \end{array}$$

est commutatif.

Soient $n\in N^d_{\mathrm{red}}$ et $v\in V^d_{(p)}$. Posons $v'=n_{\mathbb{R}}(v)$. Alors $\mathrm{Ad}(n_F)(G_{d,v})=G_{d,v'}$ et le diagramme :

(4)
$$\begin{array}{ccc} G_{d,v} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(n_F)} & G_{d,v'} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{d,v}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{d,v'}} \\ \bar G_{d,v} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}\circ\pi_N(n)} & \bar G_{d,v'} \end{array}$$

est commutatif.

Soient $v\in V^d_{(p)}$ et ϕ_1,ϕ_2 deux éléments de $\Phi(0)^d_{\max}$ tels que v appartienne aux adhérences de ϕ_1 et de ϕ_2. On a alors $G_{d,\phi_i}\subset G_{d,v}$ pour $i=1,2$ et :

(5) l'application $n\mapsto n_F$, restreinte à $N^d_{\mathrm{red},v}$, définit par passage au quotient une bijection de $N^d_{\mathrm{red},v}/\mathcal{R}_{d,c}$ sur $G^0_{d,\phi_1}\backslash G_{d,v}/G_{d,\phi_2}$.

En effet, pour $i=1,2$, l'image de G^0_{d,ϕ_i} par $\pi_{d,v}$ est le groupe $\bar B^0_i$ des points sur $\mathbb{F}_q$ d'un sous-groupe de Borel $\bar{\mathbf{B}}^0_i$ de $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$, défini sur $\mathbb{F}_q$ et contenant $\bar{\mathbf{T}}_{d,\mathbb{F}_q}$. Alors (5) résulte des lemmes 3.7 et 3.5(iv) et de la commutativité du diagramme (3).

3.10. Soit $v\in V^d_{(p)}$. Notons $N^{d,0}_{\mathrm{red},v}$ l'image réciproque de $\bar N_d\cap\bar G^0_{d,v}$ par $\pi_{N,d,v}$. On a un homomorphisme injectif :

$$N^{d,0}_{\mathrm{red},v}/(\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d\cap N^{d,0}_{\mathrm{red},v})\longrightarrow N^d_{\mathrm{red}}/N^{R(d),d}_{\mathrm{red}}.$$

Définition. — *On dit que v est spécial si et seulement si cet homomorphisme est bijectif.*

Soit $F\in CL_q$. Bruhat et Tits ont défini la notion de point spécial de $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F)$.

Lemme.

(i) *Soient $v\in V^d_{(p)}$ et $F\in CL_q$. Alors v est spécial au sens de la définition ci-dessus si et seulement s'il l'est dans* $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d,F)$ *au sens de Bruhat-Tits.*

(ii) *Il existe au moins un point spécial dans $V^d_{(p)}$.*

Démonstration. — L'homomorphisme ci-dessus se complète en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N^{d,0}_{\mathrm{red},v}/(\bar{\mathbf{T}}^{I,0}_d \cap N^{d,0}_{\mathrm{red},v}) & \longrightarrow & N^d_{\mathrm{red}}/N^{R(d),d}_{\mathrm{red}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (N_{d,F} \cap G^0_{d,v})/(R_d \cap G^0_{d,v}) & \longrightarrow & N_{d,F}/R_d \end{array}$$

Les flèches verticales se déduisent de l'application $n \mapsto n_F$ et sont des isomorphismes. D'après les définitions de Bruhat et Tits, v est spécial dans $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ si et seulement si la flèche du bas est bijective. L'assertion (i) en résulte.

D'après Bruhat et Tits, il existe au moins un point spécial dans V^d. Le fait qu'un point soit spécial ne dépend que de l'élément $\phi \in \Phi(0)^d$ auquel il appartient. Puisque toute facette coupe $V^d_{(p)}$, l'assertion (ii) en résulte. $\square$

On fixe un point spécial $v_d \in V^d_{(p)}$. Pour tout $F \in CL_q$, on pose simplement $K_d = G_{d,v_d}$. C'est un sous-groupe compact spécial de G_d. Pour $n \in N^d_{\mathrm{red}}$, on a :

$$n \in N^d_{\mathrm{red},v_d} \iff n_F \in K_d.$$

3.11. Soient $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d$. Le groupe N^L_{red} contient $N^{R(d)}_{\mathrm{red}}$. Donc l'application naturelle de $N^{d,0}_{\mathrm{red},v_d}$ dans $N^{L,d}_{\mathrm{red}} \backslash N^d_{\mathrm{red}}$ est surjective. Pour $v \in V^d_{(p)}$, fixons un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $N^{d,0}_{\mathrm{red},v_d}$ tel que l'application déduite :

$$\mathcal{M} \longrightarrow N^{L,d}_{\mathrm{red}} \backslash N^d_{\mathrm{red}}/N^d_{\mathrm{red},v}$$

soit bijective.

Lemme. — *Soient $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$ et $F \in CL_q$. L'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & Q_d \backslash G_d/G_{d,v} \\ n & \longmapsto & Q_d n_F G_{d,v} \end{array}$$

est bijective.

Démonstration. — Il est bien connu que l'application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} N_{d,F} & \longrightarrow & Q_d \backslash G_d/G_{d,v} \\ n & \longmapsto & Q_d n G_{d,v} \end{array}$$

se quotiente en une bijection de $N^L_{d,F} \backslash N_{d,F}/(N_{d,F} \cap G_{d,v})$ sur $Q_d \backslash G_d/G_{d,v}$. Il suffit de traduire cette assertion via l'application $n \mapsto n_F$. $\square$

4. Algèbres de Hecke-Iwahori, fonction de Harish-Chandra, (G, M)-familles

4.1. On fixe $d \in D$. Soit $F \in CL_q$. En [11], 3.2, on a défini une mesure de Haar sur G_d. On va expliquer que les mesures de certains sous-ensembles de G_d sont indépendantes de F. Il serait plus correct de définir abstraitement leurs mesures, puis de dire que, pour tout $F \in CL_q$, les mesures des sous-ensembles en question de G_d sont égales à leurs mesures abstraites. On y a renoncé pour ne pas introduire une kyrielle de notations et on se contentera de la formulation imprécise : les mesures sont indépendantes de F. Ainsi :

- pour $v \in V^d_{(p)}$, la mesure de $G_{d,v}$ est indépendante de F. En effet, d'après la définition de [11], 3.2, elle vaut $|\bar{G}_{d,v}|q^{-\dim(\bar{\mathbf{G}}_{d,v})/2}$;
- pour $v \in V^d_{(p)}$, la mesure de $G_{d,v,+}$ est indépendante de F : c'est le quotient de la précédente par $|\bar{G}_{d,v}|$.

On pourrait facilement montrer que :

- pour $v_1, v_2 \in V^d_{(p)}$ et $n \in N^d_{\mathrm{red}}$, la mesure de $G_{d,v_1} n_F G_{d,v_2}$ est indépendante de F.

On le verra plus loin dans le cas particulier que l'on utilisera.

Soient $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d$ et $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$. On construit les algèbres de Lie $\mathfrak{l}_d$ et $\mathfrak{q}_d$. Notons $\mathfrak{u}_d$ le radical nilpotent de $\mathfrak{q}_d$. D'autre part, pour tout $(v, r) \in V^d \times \mathbb{R}$, on définit dans $\mathfrak{g}_d$ le réseau de Moy-Prasad $\mathfrak{g}_{d,v,r}$. Il résulte des constructions que :

$$\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{q}_d = (\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{l}_d) \oplus (\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{u}_d),$$

$$\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{l}_d = \mathfrak{l}_{d,v,r}.$$

Munissons $\mathfrak{u}_d$ d'une mesure de Haar. Alors :

- pour tout $(v, r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, le nombre $\mathrm{mes}(\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{u}_d)\,\mathrm{mes}(\mathfrak{g}_{d,v,0} \cap \mathfrak{u}_d)^{-1}$ est indépendant de F.

Supposons pour fixer les idées $r \leqslant 0$. On définit dans l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_d$ des sous-espaces $\bar{\mathfrak{q}}_d$, $\bar{\mathfrak{l}}_d$ et $\bar{\mathfrak{u}}_d$ et, pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, un sous-espace $\bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$ ([11], 2.6). Ils vérifient des propriétés analogues à celles ci-dessus. Il y a une projection $\pi_{d,v,s} \colon \mathfrak{g}_{d,v,s} \to \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$, de noyau $\mathfrak{g}_{d,v,s+}$ ($= \mathfrak{g}_{d,v,s+\epsilon}$ pour $\epsilon > 0$ assez petit). On vérifie que $\pi_{d,v,s}$ identifie $(\mathfrak{g}_{d,v,s} \cap \mathfrak{u}_d)/(\mathfrak{g}_{d,v,s+} \cap \mathfrak{u}_d)$ à $\bar{\mathfrak{u}}_d \cap \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}$. Alors :

$$\mathrm{mes}(\mathfrak{g}_{d,v,r} \cap \mathfrak{u}_d)\,\mathrm{mes}(\mathfrak{g}_{d,v,0} \cap \mathfrak{u}_d)^{-1} = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{(p)}, r \leqslant s < 0} |\bar{\mathfrak{u}}_d \cap \bar{\mathfrak{g}}_{d,v,s}|.$$

4.2. Fixons un élément $\phi \in \Phi(0)^d_{\max}$. On note $\phi_1 \dots \phi_m$ les éléments de $\Phi(0)^d$ tels que $\phi_i \cap V^d$ soit contenu dans l'adhérence de $\phi \cap V^d$ et vérifie $\dim(\phi_i \cap V^d) = \dim(V^d) - 1$. Soit $v_0 \in \phi \cap V^d_{(p)}$ et, pour tout $i \in \{1 \dots m\}$, soit $v_i \in \phi_i \cap V^d_{(p)}$. On pose :

$$a_i = \left(\dim(\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v_i}) - \dim(\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v_0})\right)/2.$$

Posons $W^d_{\mathrm{aff}} = N^d_{\mathrm{red}}/\mathcal{R}_{d,c}$. L'action $n \mapsto n_{\mathbb{R}}$ définit par passage au quotient une action de W^d_{aff} sur V^d. Pour $i \in \{1 \dots m\}$, on sait qu'il existe un unique élément $w_i \in W^d_{\mathrm{aff}}$ dont l'action sur V^d soit la symétrie par rapport à l'hyperplan contenant $\phi_i \cap V^d$. On introduit une algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}^d$. C'est l'espace vectoriel complexe de base indexée par W^d_{aff}. Pour $w \in W^d_{\mathrm{aff}}$, on note T_w l'élément de base associé. Le produit dans $\mathcal{H}^d$ est défini par des formules usuelles que l'on ne reproduira pas, *cf.* par exemple [4], théorème 3.6. La relation la plus significative est :

$$(T_{w_i} + 1)(T_{w_i} - q^{a_i}) = 0.$$

Pour tout $i = 1 \dots m$. L'élément neutre est T_1.

4.3. On suppose que le point spécial $v_d \in V^d_{(p)}$ appartient à l'adhérence de la facette ϕ fixée dans le paragraphe précédent. Notons W^d_0 l'image de $N^{d,0}_{\mathrm{red},v_d}$ dans W^d_{aff}. Notons A^d le sous-groupe $N^{R(d),d}_{\mathrm{red}}/\mathcal{R}_{d,c}$ de W^d_{aff}. D'après le lemme 3.5(i), il est formé des éléments qui agissent par translations sur V^d. La définition d'un point spécial implique que W^d_{aff} est le produit semi-direct de A^d et de W^d_0. En suivant Bernstein, on peut donner une autre présentation de l'algèbre $\mathcal{H}^d$. Cette présentation permet de décrire commodément certaines représentations de cette algèbre. On ne rappellera pas la présentation de Bernstein, mais on va décrire les représentations en question.

Pour tout $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d$, on a défini $X^{\Gamma}_{*,L}$ en 2.1, on pose $\mathfrak{a}_L = X^{\Gamma}_{*,L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on note $\mathfrak{a}^*_L$ l'espace dual de $\mathfrak{a}_L$. Pour tout espace vectoriel réel $\mathfrak{a}$, notons $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Remarquons que $\mathfrak{a}_{R(d)}$ est l'espace vectoriel sous-jacent à V^d (lemme 2.4(i)). Pour $a \in A^d$, on note $H(a)$ l'élément de $\mathfrak{a}_{R(d)}$ tel que a agisse sur V^d par la translation de vecteur $-\frac{1}{\log(q)}H(a)$.

Posons :

$$\Sigma^S = \left\{\alpha \in \Sigma \,; \forall v \in \phi \cap V^d, \langle \alpha, v - v_d\rangle \geqslant 0\right\}.$$

C'est un sous-ensemble parabolique de Σ, précisément, c'est un élément de $\mathcal{P}(R(d))$. Notons δ_S la somme des éléments de Σ^S. On peut considérer ce terme comme un élément de $\mathfrak{a}^*_{R(d)}$. Notons $A^d_{\geqslant 0}$ le sous-ensemble des $a \in A^d$ tels que $\langle H(a), \alpha\rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^S$. Soit $s \in \mathfrak{a}^*_{R(d),\mathbb{C}}$. Notons

$\mathcal{I}(s)$ l'idéal à gauche de $\mathcal{H}^d$ engendré par les éléments $T_a - e^{\langle H(a), s+\delta_S/2\rangle}$ pour $a \in A^d_{\geqslant 0}$. Posons $\mathcal{E}(s) = \mathcal{H}^d/\mathcal{I}(s)$. Pour $h \in \mathcal{H}^d$, notons $\bar{h}$ son image dans $\mathcal{E}(s)$. L'algèbre $\mathcal{H}^d$ agit dans $\mathcal{E}(s)$ par multiplication à gauche. Les propriétés suivantes sont bien connues :

– la famille $(\bar{T}_w)_{w\in W_0^d}$ est une base de $\mathcal{E}(s)$ sur $\mathbb{C}$;
– la droite portée par l'élément $\sum_{w\in W_0^d} \bar{T}_w$ est conservée par T_w pour tout $w \in W_0^d$.

On note $e\colon \mathcal{E}(s) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire qui vaut 1 sur $\bar{T}_1$ et annule $\bar{T}_w$ pour tout $w \in W_0^d \smallsetminus \{1\}$.

4.4. Soit $F \in CL_q$. On pose $I_d = G_{d,\phi}$, où ϕ a été fixée en 4.2. Le groupe G_d est muni de la mesure de Haar définie en [11], 3.2. On note $\mathcal{H}^d_F$ l'algèbre de convolution des fonctions sur G_d, à valeurs complexes, à support compact et biinvariantes par I_d. Posons $W^d_{\mathrm{aff},F} = N_{d,F}/R_{d,c}$. On sait que l'application qui, à $n \in N_{d,F}$, associe sa double classe $I_d n I_d$, se quotiente en une bijection de $W^d_{\mathrm{aff},F}$ sur $I_d\backslash G_d/I_d$. D'autre part, d'après les résultats de 3.8 et 3.9, l'application $n \mapsto n_F$ se quotiente en une bijection de W^d_{aff} sur $W^d_{\mathrm{aff},F}$. Pour $w \in W^d_{\mathrm{aff}}$, notons $C_F(w)$ l'élément de $I_d\backslash G_d/I_d$ qui lui correspond par la composée de ces bijections. Notons $T_{w,F}$ la fonction caractéristique de la double classe $C_F(w)$, divisée par la mesure de I_d. Définissons une application linéaire $\iota_F\colon \mathcal{H}^d \to \mathcal{H}^d_F$ par $\iota_F(T_w) = T_{w,F}$ pour tout $w \in W^d_{\mathrm{aff}}$. Le théorème 3.6 de [4] revient à dire que ι_F est un isomorphisme d'algèbres.

Soient $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d$ et $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$. Il y a un homomorphisme usuel $H_{L_d}\colon L_d \to \mathfrak{a}_L$. Rappelons sa définition. Notons $X^*(L)^\Gamma$ le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{L}$ invariants par l'action de Γ. Par restriction à $\mathbf{T}$, $X^*(L)^\Gamma$ s'identifie à un réseau de $\mathfrak{a}_L^*$. Notons $|.|$ la valeur absolue usuelle de F valant q^{-1} sur une uniformisante. Alors, pour $l \in L_d$ et $x \in X^*(L)^\Gamma$, on a l'égalité $e^{\langle H_{L_d}(l), x\rangle} = |x \circ \xi_d(l)|$. Notons $\mathbf{U}_d$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique $\mathbf{Q}_d$ de $\mathbf{G}_d$. On a l'égalité $G_d = Q_d K_d$ et on définit une fonction $H_{Q_d}\colon G_d \to \mathfrak{a}_L$ par $H_{Q_d}(luk) = H_{L_d}(l)$ pour tous $l \in L_d$, $u \in U_d$, $k \in K_d$.

Définition. — *Pour $H \in \mathfrak{a}_L$, on note $\mathbf{1}_{H,Q_d}$ la fonction caractéristique dans G_d du sous-ensemble des $g \in G_d$ tels que $H_{Q_d}(g) = H$.*

Soit $s \in \mathfrak{a}^*_{R(d),\mathbb{C}}$. Notons $\mathcal{E}_F(s)$ l'espace des fonctions $f\colon G_d \to \mathbb{C}$, localement constantes et telles que :

$$f(xg) = \delta_{S_d}(x)^{1/2} e^{\langle H_{S_d}(x), s\rangle} f(g)$$

pour tous $x \in S_d$ et $g \in G_d$ ($\mathbf{S}_d$ est le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_d$ associé à l'ensemble Σ^S de 4.3 et δ_{S_d} est le module usuel). Le groupe G_d agit dans $\mathcal{E}_F(s)$ par translations à droite. Considérons le sous-espace $\mathcal{E}_F(s)^{I_d}$ des invariants par I_d. L'algèbre $\mathcal{H}_F^d$ agit dans ce sous-espace. On note $\pi_F(s)$ cette représentation de $\mathcal{H}_F(s)$. On introduit les deux éléments $f_{I_d}(s)$ et $f_{K_d}(s)$ de $\mathcal{E}_F(s)$ caractérisés par :

- $f_{I_d}(s)$ est à support dans $S_d I_d$ et vaut 1 sur I_d ;
- $f_{K_d}(s)$ vaut 1 sur K_d.

On note $e_F \colon \mathcal{E}_F(s) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire telle que $e_F(f) = f(1)$ pour tout $f \in \mathcal{E}_F(s)$.

Les propriétés ci-dessous sont bien connues (elles sont prouvées par exemple dans [9] pour le groupe linéaire et les preuves s'étendent au cas général) :

- l'application linéaire de $\mathcal{H}^d$ dans $\mathcal{E}_F(s)^{I_d}$ qui, à $h \in \mathcal{H}^d$, associe $(\pi_F(s) \circ \iota_F(h))(f_{I_d}(s))$, se quotiente en un isomorphisme $\iota_F(s) \colon \mathcal{E}(s) \to \mathcal{E}_F(s)^{I_d}$;
- $\iota_F(s)(\sum_{w \in W_0^d} \bar{T}_w) = f_{K_d}(s)$;
- pour tout $\bar{h} \in \mathcal{E}(s)$, $e(\bar{h}) = e_F \circ \iota_F(\bar{h})$.

Remarque. — Dans le cas particulier où $s = -\delta_S/2$, la fonction $f_{K_d}(s)$ est la fonction constante valant 1 sur tout G_d. Pour $w \in W^d$, on a l'égalité :

$$\pi_F(s)(T_{w,F})(f_{K_d}(s)) = \frac{\mathrm{mes}(C_F(w))}{\mathrm{mes}(I_d)} f_{K_d}(s).$$

La description ci-dessus montre que le coefficient $\mathrm{mes}(C_F(w))$ est indépendant de F, ce qui est un cas particulier d'une propriété énoncée en 4.1.

4.5. Proposition. — *Soient $n \in N^d_{\mathrm{red}}$, $v \in V^d_{(p)}$ et $H \in \mathfrak{a}_{R(d)}$. Il existe une fonction $\mu \colon \bar{G}_{d,v} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que, pour tout $F \in CL_q$ et tout $x \in G_{d,v}$, on ait l'égalité :*

$$\int_{G_{d,v,+}} \mathbf{1}_{H,S_d}(n_F x y) dy \;=\; \mu \circ \pi_{d,v}(x).$$

Démonstration. — Par transformation de Mellin, il revient au même de prouver que, pour $n \in N^d_{\mathrm{red}}$, $v \in V^d_{(p)}$ et $s \in \mathfrak{a}^*_{R(d)}$, il existe une fonction $\mu \colon \bar{G}_{d,v} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que, pour tout $F \in CL_q$ et tout $x \in G_{d,v}$, on ait l'égalité :

$$\sum_{H \in \mathfrak{a}_{R(d)}} e^{\langle H, s+\delta_S/2\rangle} \int_{G_{d,v,+}} \mathbf{1}_{H,S_d}(n_F x y) dy \;=\; \mu \circ \pi_{d,v}(x).$$

Fixons n, v, s, F et, pour simplifier, posons $f = f_{K_d}(s)$. Pour tout $g \in G_d$, on a l'égalité :

$$\sum_{H \in \mathfrak{a}_{R(d)}} e^{\langle H, s+\delta_S/2\rangle} \mathbf{1}_{H,S_d}(g) = f(g).$$

L'égalité à prouver se récrit :

$$(1) \qquad \int_{G_{d,v,+}} f(n_F xy) dy \;=\; \mu \circ \pi_{d,v}(x).$$

On note $J(x)$ l'intégrale ci-dessus. Si $v = v_d$, posons $\phi_1 = \phi$. Si $v \neq v_d$, choisissons une facette $\phi_1 \in \Phi(0)^d_{\max}$ telle que l'adhérence de ϕ_1 contienne un voisinage de v dans le segment joignant v à v_d. On a $G_{d,v,+} \subset G^0_{d,\phi_1} \subset G^0_{d,v}$ et on vérifie l'inclusion $\pi_{d,v}(G^0_{d,\phi_1}) \subset \pi_{d,v}(K_d \cap G^0_{d,v})$. Donc $G^0_{d,\phi_1} \subset G_{d,v,+}K_d$. On peut augmenter cette égalité par le groupe $R_{d,c}$ qui est contenu à la fois dans G_{d,ϕ_1} et dans K_d. Grâce au lemme 3.7, on obtient $G_{d,v,+} \subset G_{d,\phi_1} \subset G_{d,v,+}K_d$. Puisque f est invariante à droite par K_d, il en résulte l'égalité :

$$J(x) = c_1 \int_{G_{d,\phi_1}} f(n_F xy) dy,$$

où $c_1 = \operatorname{mes}(G_{d,v,+}) \operatorname{mes}(G_{d,\phi_1})^{-1}$. Le groupe N^d_{red} agit sur Σ via sa projection dans W. Cette action conserve $\Sigma^{R(d)}$. Posons $n^{-1}(\Sigma^S) = \Sigma^{S'}$. Alors $\Sigma^{S'} \in \mathcal{P}(R(d))$ et $\Sigma^{S'}$ détermine un sous-groupe parabolique $\bar{\mathbf{S}}'_d \cap \bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$ de $\bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}$, défini sur $\mathbb{F}_q$. C'est en fait un sous-groupe de Borel puisque $\bar{\mathbf{R}}^0_{d,c}$ est un tore (lemme 3.4(ii)). Un tel sous-groupe de Borel est déterminé par une unique facette $\phi_2 \in \Phi(0)^d_{\max}$ telle que v appartienne à l'adhérence de ϕ_2. On a alors :

$$\pi_{d,v}(G^0_{d,\phi_2}) = \bar{\mathbf{S}}'_d \cap \bar{\mathbf{G}}^0_{d,v}.$$

De la construction de $\Sigma^{S'}$ résulte l'égalité $\bar{S}'_d \cap \bar{G}^0_{d,v} = \pi_{d,v}(\operatorname{Ad}(n_F^{-1})(S_d) \cap G^0_{d,v})$. Alors $G^0_{d,\phi_2} \subset (\operatorname{Ad}(n_F^{-1})(S_d) \cap G^0_{d,v})G_{d,v,+}$. Considérons la fonction sur G^0_{d,ϕ_2} :

$$z \longmapsto \int_{G_{d,\phi_1}} f(n_F zxy) dy.$$

Elle est invariante à gauche par $\operatorname{Ad}(n_F^{-1})(S_d) \cap G^0_{d,v}$ car H_{S_d} vaut 0 sur le groupe compact $S_d \cap \operatorname{Ad}(n_F)(G^0_{d,v})$. Elle est invariante à droite par $G_{d,v,+}$, ce groupe étant normalisé par x. Elle est donc constante et on obtient :

$$J(x) = c_2 \int_{G^0_{d,\phi_2}} \int_{G_{d,\phi_1}} f(n_F zxy) dy dz,$$

où $c_2 = c_1 \operatorname{mes}(G^0_{d,\phi_2})^{-1}$. Le terme $J(x)$ ne dépend donc que de la double classe $G^0_{d,\phi_2} x G_{d,\phi_1}$. Grâce à 3.9(3), on peut fixer $n' \in N^d_{\mathrm{red},v}$ et supposer $x = n'_F$. Remarquons que n'_F normalise $R_{d,c}$, donc $G^0_{d,\phi_2} n'_F G_{d,\phi_1} = G_{d,\phi_2} n'_F G_{d,\phi_1}$, d'où :

$$J(n'_F) = c_3 \int_{G_{d,\phi_2}} \int_{G_{d,\phi_1}} f(n_F y_2 n'_F y_1) dy_1 dy_2,$$

où $c_3 = c_1 \operatorname{mes}(G_{d,\phi_2})^{-1}$.

Le groupe $N_{d,F}$, donc aussi N^d_{red}, agit transitivement sur $\Phi(0)^d_{\max}$. Fixons $n_1, n_2 \in N^d_{\mathrm{red}}$ tels que $n_{i,\mathbb{R}}(\phi) = \phi_i$ pour $i = 1, 2$. Alors $G_{d,\phi_i} = \mathrm{Ad}(n_{i,F})(I_d)$, d'où l'égalité :

$$J(n'_F) = c_3 \int_{I_d \times I_d} f(n_F n_{2,F} y_2 n^{-1}_{2,F} n'_F n_{1,F} y_1 n^{-1}_{1,F}) dy_1 dy_2.$$

Posons $n_3 = n_2 n' n_1$. On a $n^{-1}_{2,F} n'_F n_{1,F} \in n_{3,F} R_{d,c,+}$. Puisque $R_{d,c,+} \subset I_d$, on peut remplacer ci-dessus $n^{-1}_{2,F} n'_F n_{1,F}$ par $n_{3,F}$. Puisque v_d est spécial, on peut décomposer nn_1 en $n_4 n_5$, avec $n_4 \in N^{R(d),d}_{\mathrm{red}}$ et $n_5 \in N^{d,0}_{\mathrm{red},v_d}$. On peut encore remplacer $n_F n_{2,F}$ par $n_{4,F} n_{5,F}$. Remarquons que $n_{4,F} \in R_d \subset S_d$. On vérifie que $H_{S_d}(n_{4,F}) = H(n_4)$ (l'application H a été définie en 4.3). Donc, pour tout $g \in G_d$:

$$f(n_{4,F} g) = e^{\langle H(n_4), s + \delta_S/2 \rangle} f(g).$$

On obtient :

$$J(n'_F) = c_4 \int_{I_d \times I_d} f(n_{5,F} y_2 n_{3,F} y_1 n^{-1}_{2,F}) dy_1 dy_2,$$

où :

$$c_4 = c_3 e^{\langle H(n_4), s + \delta_S/2 \rangle}.$$

Pour $g \in G_d$, considérons la fonction sur I_d :

$$z \longmapsto \int_{I_d} f(z n_{5,F} y g) dy. \tag{2}$$

Elle est invariante à gauche par $I_d \cap S_d$. Elle est invariante à droite par $G_{d,v_d,+}$ parce que ce groupe est normalisé par $n_{5,F}$ (puisque $n_5 \in N^d_{\mathrm{red},v_d}$). D'après la définition de Σ^S donnée en 4.3, on a l'inclusion $\pi_{d,v_d}(I_d) \subset \pi_{d,v_d}(S_d \cap K_d)$. Donc $I_d \subset (I_d \cap S_d) G_{d,v_d,+}$. La fonction (2) est donc constante. D'où :

$$J(n'_F) = c_5 \int_{I_d \times I_d \times I_d} f(y_1 n_{5,F} y_2 n_{3,F} y_3 n^{-1}_{2,F}) dy_1 dy_2 dy_3,$$

où $c_5 = c_4 \,\mathrm{mes}(I_d)^{-1}$. On peut enfin glisser à droite un élément de I_d puisque f est invariante à droite par ce groupe. Alors :

$$J(n'_F) = c_6 \int_{I_d\times I_d\times I_d\times I_d} f(y_1 n_{5,F} y_2 n_{3,F} y_3 n_{2,F}^{-1} y_4) dy_1 dy_2 dy_3 dy_4,$$

où $c_6 = c_5 \,\mathrm{mes}(I_d)^{-1}$. Pour $i = 2,3,5$, notons w_i l'image de n_i dans W^d_{aff}. Un calcul simple transforme l'expression ci-dessus en :

$$J(n'_F) = c_7 e_F \left(\pi_F(s)(T_{w_5,F} T_{w_3,F} T_{w_2^{-1},F})(f)\right),$$

où :

$$c_7 = c_6 \,\mathrm{mes}(I_d)^7 \,\mathrm{mes}(C_F(w_5))^{-1} \,\mathrm{mes}(C_F(w_3))^{-1} \,\mathrm{mes}(C_F(w_2^{-1}))^{-1}.$$

D'après 4.4, c'est aussi :

$$J(n'_F) = c_7 e(\sum_{w\in W_0^d} \overline{T_{w_5} T_{w_3} T_{w_2^{-1}} T_w}).$$

La constante c_7 est indépendante de F. L'expression ci-dessus l'est donc aussi. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

4.6. Corollaire. — *Soient $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d$, $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, $n \in N^d_{\mathrm{red}}$ et $v \in V^d_{(p)}$. Il existe une fonction $\mu\colon \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que, pour tout $F \in CL_q$ et tout $(H,x) \in \mathfrak{a}_L \times G_{d,v}$, on ait l'égalité :*

$$\int_{G_{d,v,+}} \mathbf{1}_{H,Q_d}(n_F xy) dy \;=\; \mu(H, \pi_{d,v}(x)).$$

Démonstration. — On a fixé en 4.2 une facette ϕ, dont l'adhérence contient v_d. On peut la choisir telle que l'ensemble Σ^S défini en 4.3 soit contenu dans Σ^Q. Il y a une projection naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_{R(d)} & \longrightarrow & \mathfrak{a}_L \\ H & \longmapsto & H_L \end{array}$$

Soit $F \in CL_q$. Alors $\mathbf{S}_d \subset \mathbf{Q}_d$ et on a l'égalité $H_{Q_d}(g) = (H_{S_d}(g))_L$ pour tout $g \in G_d$. L'intégrale de l'énoncé est égale à :

$$\sum_{H'\in\mathfrak{a}_{R(d)}\;;H'_L=H} \int_{G_{d,v,+}} \mathbf{1}_{H',S_d}(n_F xy) dy.$$

Il reste à appliquer la proposition précédente. □

On note $\mu_{Q,n,v}$ la fonction notée μ dans l'énoncé. Si $n=1$, on la note simplement $\mu_{Q,v}$. On note $\bar{\mu}_{Q,n,v}$ (ou $\bar{\mu}_{Q,v}$ si $n=1$) la fonction sur $\mathfrak{a}_L$ définie par :

$$\bar{\mu}_{Q,n,v}(H)=\sum_{\bar{x}\in\bar{G}_{d,v}}\mu_{Q,n,v}(H,\bar{x})$$

pour tout $H\in\mathfrak{a}_L$. Pour tout $F\in CL_q$ et tout $H\in\mathfrak{a}_L$, on a l'égalité :

$$\bar{\mu}_{Q,n,v}(H)=\int_{G_{d,v}}\mathbf{1}_{H,Q_d}(n_F x)dx.$$

4.7. Transcrivons quelques résultats d'Arthur concernant les (G,M)-familles. On munit l'espace $X^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ d'un produit scalaire euclidien invariant par les actions de Γ et W. On en déduit par restriction un produit scalaire euclidien sur $\mathfrak{a}_M^*$ et, par dualité, sur $\mathfrak{a}_M$, pour tout $\mathcal{D}^M\in\mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{D}^M\in\mathcal{L}$. On appelle (G,M)-famille une famille $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ vérifiant les conditions suivantes. Chaque c_P est une fonction C^∞ sur $i\mathfrak{a}_M^*$ (où $i=\sqrt{-1}$), à valeurs complexes. Soient $\Sigma^P,\Sigma^{P'}\in\mathcal{P}(M)$ deux ensembles paraboliques adjacents. Ils déterminent deux chambres dans $\mathfrak{a}_M^*$, séparées par un mur. Notons $\mathfrak{a}_{P,P'}^*$ l'hyperplan de $\mathfrak{a}_M^*$ contenant ce mur. On impose que les restrictions de c_P et $c_{P'}$ à $i\mathfrak{a}_{P,P'}^*$ soient égales. À toute (G,M)-famille $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$, on associe un nombre complexe c_M ([1], p. 37).

Soient $(c_{1,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ et $(c_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ deux (G,M)-familles. Pour $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$, posons $c_P=c_{1,P}c_{2,P}$. Alors $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille. On a une égalité :

$$c_M=\sum_{\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}(M)}c_{1,M}^{Q'}c'_{2,Q'}. \tag{3}$$

Avant de l'expliquer, posons une convention d'écriture. Pour tout $\Sigma^Q\in\mathcal{F}(M)$, il y a une unique donnée de Lévi $\mathcal{D}^L$ telle que $\Sigma^Q\in\mathcal{P}(L)$. On l'utilisera souvent sans l'introduire explicitement, c'est-à-dire qu'on notera sans plus de commentaire $\mathcal{D}^L$, $\mathcal{D}^{L'}$ *etc.* la donnée de Lévi associée à Σ^Q, $\Sigma^{Q'}$ *etc.* Soit $\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}(M)$. Notons $\mathcal{P}^{L'}(M)$ l'analogue de $\mathcal{P}(M)$ quand on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^{L'}$. Soit $\Sigma^{P'}\in\mathcal{P}^{L'}(M)$. Posons $\Sigma^P=\Sigma^{P'}\cup(\Sigma^{Q'}\smallsetminus\Sigma^{L'})$. Alors $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$. On pose $c_{1,P'}^{Q'}=c_{1,P}$. Alors $(c_{1,P'}^{Q'})_{\Sigma^{P'}\in\mathcal{P}^{L'}(M)}$ est une (L',M)-famille. Le terme $c_{1,M}^{Q'}$ intervenant dans (3) est son nombre associé. Le terme $c'_{2,Q'}$ est défini en [1], 6.3. Pour $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$ avec $\Sigma^P\subset\Sigma^{Q'}$, la restriction de $c_{2,P}$ à $i\mathfrak{a}_{L'}^*$ ne dépend pas de Σ^P. On note $c_{2,Q'}$ cette restriction. Alors $c'_{2,Q'}$ ne dépend que de cette fonction $c_{2,Q'}$. Dans le cas particulier où $\Sigma^{Q'}=\Sigma$, $c'_{2,Q'}=1$.

Nous ne considérerons que des (G,M)-familles $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ pour lesquelles il existe une famille $(H_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ d'éléments de $\mathfrak{a}_M$ de sorte que $c_P(\lambda)=e^{-\langle\lambda,H_P\rangle}$ pour tout $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$. Dans la situation ci-dessus, supposons que $(c_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$ soit associée à la famille $(H_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)}$. Soit $\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}(M)$ et soit $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$ avec $\Sigma^P\subset\Sigma^{Q'}$. Alors la projection orthogonale de $H_{2,P}$ sur $\mathfrak{a}_{L'}$ ne dépend pas de Σ^P. Notons $H_{2,Q'}$ cette projection. Alors $c_{2,Q'}$ ne dépend que de $H_{2,Q'}$ (on a $c_{2,Q'}(\lambda)=e^{-\langle\lambda,H_{2,Q'}\rangle}$ pour $\lambda\in i\mathfrak{a}_{L'}$). Le terme $c'_{2,Q'}$ ne dépend lui-aussi que de $H_{2,Q'}$, on peut considérer que c'est la valeur en $H_{2,Q'}$ d'une fonction $u_{Q'}$ définie sur $\mathfrak{a}_{L'}$.

On peut généraliser les constructions en fixant un sous-ensemble parabolique $\Sigma^Q\in\mathcal{F}(M)$. On définit une (Q,M)-famille comme étant une famille $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ comme ci-dessus, à ceci près que l'ensemble d'indices $\mathcal{P}(M)$ est remplacé par le sous-ensemble $\mathcal{P}^Q(M)$ des $\Sigma^P\in\mathcal{P}(M)$ tels que $\Sigma^P\subset\Sigma^Q$. On obtient le résultat suivant. Pour tout $\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}^Q(M)$ (c'est-à-dire que $\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}(M)$ et $\Sigma^{Q'}\subset\Sigma^Q$), il existe une fonction $u^Q_{Q'}$ sur $\mathfrak{a}_{L'}$ de sorte que l'égalité ci-dessous soit vérifiée. Soient $(c_{1,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$, $(c_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ deux (Q,M)-familles. Notons $(c_P)_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ leur produit. Supposons que $(c_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ soit associée à la famille $(H_{2,P})_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ d'éléments de $\mathfrak{a}_M$. Alors :

$$c_M=\sum_{\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}^Q(M)}c^{Q'}_{1,M}u^Q_{Q'}(H_{2,Q'}).\tag{4}$$

Dans le cas où $\Sigma^{Q'}=\Sigma^Q$, la fonction $u^Q_{Q'}$ est constante de valeur 1.

Appliquons cela aux fonctions poids. Soit $d\in D$, supposons $\mathcal{D}^M\in\mathcal{L}_d$. Soit $F\in CL_q$. Pour $\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}(M)$, on définit la fonction $H_{Q'_d}$ sur G_d comme en 4.4. Soient $\Sigma^Q\in\mathcal{F}(M)$, $\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)$ et $g\in G_d$. On définit la fonction $v^Q_P(g)$ sur $i\mathfrak{a}^*_M$ par $v^Q_P(g,\lambda)=e^{-\langle\lambda,H_{P_d}(g)\rangle}$. Alors $(v^Q_P(g))_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ est une (Q,M)-famille. On note $v^Q_M(g)$ son nombre associé. Soient $g_1,g_2\in G_d$. Définissons une autre (Q,M)-famille $(v^Q_P(g_1,g_2))_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ par :

$$v^Q_P(g_1,g_2,\lambda)=e^{-\langle\lambda,H_{P_d}(g_1g_2)-H_{P_d}(g_1)\rangle}.$$

Alors $(v^Q_P(g_1g_2))_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ est le produit des deux (Q,M)-familles $(v^Q_P(g_1))_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$ et $(v^Q_P(g_1,g_2))_{\Sigma^P\in\mathcal{P}^Q(M)}$. Appliquons-lui la formule (4). Le terme $H_{2,Q'}$ qui y intervient est égal à $H_{Q'_d}(g_1g_2)-H_{Q'_d}(g_1)$. On obtient :

$$v^Q_M(g_1g_2)=\sum_{\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}^Q(M)}v^{Q'}_M(g_1)u^Q_{Q'}(H_{Q'_d}(g_1g_2)-H_{Q'_d}(g_1)).\tag{5}$$

5. Intégrales orbitales pondérées. Quelques réductions

5.1. Soit $d \in D$. On a défini en [11], 2.4 une décomposition en facettes de l'ensemble $V^I \times \mathbb{R}$. On note Φ l'ensemble ce ces facettes (l'ensemble $\Phi(0)$ de 1.3 est celui des intersections non vides d'éléments de Φ avec $V^I \times \{0\}$). On note Φ^d le sous-ensemble des éléments de Φ conservés par l'action ρ_d de Γ. Pour $\phi \in \Phi^d$, on a défini en [11], 2.8 un espace $\bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$ sur $\mathbb{F}_q$ et noté $\mathcal{S}(\phi)$ l'espace des fonctions sur cet espace. On note $r(\phi)$ la borne supérieure de la projection de ϕ sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$\mathcal{S}^d = \oplus_{\phi \in \Phi^d} \mathcal{S}(\phi),$$

et, pour $r \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}^d_r = \oplus_{\phi \in \Phi^d, r(\phi) \geqslant r} \mathcal{S}(\phi), \ \mathcal{S}^d_{r+} = \oplus_{\phi \in \Phi^d, r(\phi) > r} \mathcal{S}(\phi).$$

5.2. Soit $F \in CL_q$. Pour $(v,r) \in V^d \times \mathbb{R}$, on définit les réseaux de Moy-Prasad $\mathfrak{g}_{d,v,r}$ et $\mathfrak{g}_{d,v,r+}$ dans $\mathfrak{g}_d$. Supposons $(v,r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, notons ϕ l'élément de Φ^d auquel appartient (v,r). Il y a un homomorphisme surjectif :

$$\pi_{d,v,r} \colon \mathfrak{g}_{d,v,r} \longrightarrow \bar{\mathfrak{g}}_{d,\phi}$$

dont le noyau est $\mathfrak{g}_{d,v,r+}$ ([11], lemme 2.7.2). En fait, les applications $(v,r) \mapsto \mathfrak{g}_{d,v,r}$ et $(v,r) \mapsto \pi_{d,v,r}$ sont constantes sur ϕ. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$, on note $\mathrm{rea}_F(\varphi)$ la fonction sur $\mathfrak{g}_d$, à support dans $\mathfrak{g}_{d,v,r}$, qui coïncide sur ce réseau avec $\varphi \circ \pi_{d,v,r}$. En faisant varier ϕ, on obtient une application linéaire :

$$\mathrm{rea}_F \colon \mathcal{S}^d \longrightarrow C^\infty_c(\mathfrak{g}_d),$$

où $C^\infty_c(\mathfrak{g}_d)$ est l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}_d$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact.

On note $\mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}_d$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$, on note $\mathbf{T}_X$ son centralisateur dans $\mathbf{G}_d$. On munit T_X d'une mesure de Haar comme en [11], 3.3. D'où une mesure sur $T_X \backslash G_d$.

Soient $\mathcal{D}^M \in \mathcal{L}_d$, $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}_d)$ et $X \in \mathfrak{m}_d \cap \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$. On pose :

$$J^G_M(X,f) = \Delta^G(X)^{1/2} \int_{T_X \backslash G_d} f(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)) v^G_M(g)\, dg,$$

où $\Delta^G(X)$ est le facteur usuel :

$$\Delta^G(X) = \det(ad(X)|\mathfrak{t}_X \backslash \mathfrak{g}_d).$$

5.3. Soient $\mathcal{D}^M$, $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}(M)$, soient $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$ et $(v,r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$. L'ensemble de facettes Φ^d dépend de notre donnée $\mathcal{D}$. En remplaçant cette donnée par $\mathcal{D}^L$, on obtient un autre ensemble de facettes $\Phi^{L,d}$, moins fin que le précédent. Notons ϕ^L l'élément de $\Phi^{L,d}$ auquel appartient (v,r). On note $\mathcal{S}^{L,d}$ l'espace analogue à $\mathcal{S}^d$ quand on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^L$ dans les définitions. À la facette ϕ^L est associé un sous-espace $\mathcal{S}(\phi^L) \subset \mathcal{S}^{L,d}$. Soit :

$$\nu\colon \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v} \longrightarrow \mathcal{S}(\phi^L)$$

une application. Introduisons la fonction

$$\mu_{Q,v}\colon \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie en 4.6. Posons :

$$\varphi_\nu = \sum_{(H,\bar{x})\in \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v}} \mu_{Q,v}(H,\bar{x})\nu(H,\bar{x}).$$

Lemme 5.1. — *Sous ces hypothèses, pour tout $\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}_d$ tel que $\mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^{L'} \leqslant \mathcal{D}^L$, il existe $\varphi^{L'} \in \mathcal{S}^{L',d}$ de sorte que :*

(i) $\varphi^L = \varphi_\nu$;

(ii) *pour tout $F \in CL_q$ et tout $X \in \mathfrak{m}_d \cap \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$, on a l'égalité :*

$$\Delta^L(X)^{1/2} \int_{G_{d,v}} \int_{T_X\backslash L_d} f_{\nu,x}(\mathrm{Ad}(l^{-1})(X)) v_M^Q(lx)\, dl\, dx \\ = \sum_{\mathcal{D}^{L'}\in\mathcal{L}_d\ ;\mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^{L'} \leqslant \mathcal{D}^L} J_M^{L'}(X, \mathrm{rea}_F(\varphi^{L'})),$$

où on a posé $f_{\nu,x} = \mathrm{rea}_F \circ \nu(H_{Q_d}(x), \pi_{d,v}(x))$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l'entier $\dim(\mathfrak{a}_M) - \dim(\mathfrak{a}_L)$, en supposant le résultat acquis pour toutes autres données pour lesquelles cet entier est strictement plus petit. Remarquons que cette hypothèse est vide dans le cas minimal où $\mathcal{D}^M = \mathcal{D}^L$.

Soient $F \in CL_q$ et $X \in \mathfrak{m}_d \cap \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$. Appliquons l'égalité 4.7(3) au terme $v_M^Q(lx)$ intervenant dans l'égalité du (ii) de l'énoncé. Le membre de gauche de cette égalité devient :

$$(1) \qquad \sum_{\Sigma^{Q'}\in\mathcal{F}^Q(M)} \Delta^L(X)^{1/2} \int_{G_{d,v}} \int_{T_X\backslash L_d} f_{\nu,x}(\mathrm{Ad}(l^{-1})(X)) \\ \cdot v_M^{Q'}(l) u_{Q'}^Q(H_{Q'_d}(lx) - H_{Q'_d}(l))\, dl\, dx.$$

Considérons le terme indexé par $\Sigma^{Q'} = \Sigma^Q$. Pour $l \in L_d$, on a $v_M^Q(l) = v_M^L(l)$. La fonction u_Q^Q est constante de valeur 1. Le terme en question est donc égal à $J_M^L(X, f)$, où :

$$f = \int_{G_{d,v}} f_{\nu,x} dx.$$

Pour tout $g \in G_d$, on a l'égalité :

$$\sum_{H \in \mathfrak{a}_L} \mathbf{1}_{H,Q_d}(g) = 1. \tag{2}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{H \in \mathfrak{a}_L} \int_{G_{d,v}} f_{\nu,x} \mathbf{1}_{H,Q_d}(x) dx \\ &= \sum_{H \in \mathfrak{a}_L} \int_{G_{d,v}} \mathrm{rea}_F \circ \nu(H, \pi_{d,v}(x)) \mathbf{1}_{H,Q_d}(x) dx \\ &= \sum_{H \in \mathfrak{a}_L} \sum_{x \in G_{d,v}/G_{d,v,+}} \mathrm{rea}_F \circ \nu(H, \pi_{d,v}(x)) \int_{G_{d,v,+}} \mathbf{1}_{H,Q_d}(xy) dy \\ &= \sum_{H \in \mathfrak{a}_L} \sum_{\bar{x} \in \bar{G}_{d,v}} \mathrm{rea}_F \circ \nu(H, \bar{x}) \mu_{Q,v}(H, \bar{x}) \\ &= \mathrm{rea}_F(\varphi_\nu). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le terme indexé par $\mathcal{D}^{L'} = \mathcal{D}^L$ du membre de droite de l'égalité du (ii) de l'énoncé. Il suffit maintenant de prouver que tous les autres termes de la formule (1) s'expriment sous la forme de ce membre de droite, où on limite la somme aux $\mathcal{D}^{L'}$ tels que $\mathcal{D}^{L'} < \mathcal{D}^L$. On fixe $\Sigma^{Q'} \in \mathcal{F}^Q(M)$ avec $\Sigma^{Q'} \neq \Sigma^Q$ et on considère le terme correspondant de la formule 5.3(1). On note $\mathcal{D}^{L'}$ la donnée de Lévi associée à $\Sigma^{Q'}$. On fixe un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $N_{\mathrm{red},v_d}^{L,d,0}$ formant un système de représentants de l'ensemble de doubles classes $N_{\mathrm{red}}^{L',d} \backslash N_{\mathrm{red}}^{L,d} / N_{\mathrm{red},v}^{L,d}$. Grâce au lemme 3.11, l'intégrale sur $T_X \backslash L_d$ se décompose en la somme sur $n \in \mathcal{M}$ d'intégrales sur $T_X \backslash (Q'_d \cap L_d) n_F L_{d,v}$. De nouveau, on peut fixer $n \in \mathcal{M}$ et ne considérer que la contribution de l'intégrale correspondante. Posons $v' = n_{\mathbb{R}}(v)$. On a l'égalité $\mathrm{Ad}(n_F)(G_{d,v}) = G_{d,v'}$ qui permet, par changement de variables, de remplacer l'intégration sur $G_{d,v}$ par une intégration sur $G_{d,v'}$. On a aussi l'égalité :

$$T_X \backslash (Q'_d \cap L_d) n_F L_{d,v} = T_X \backslash (Q'_d \cap L_d) L_{d,v'} n_F.$$

Notons $\mathbf{U}'_d$ le radical unipotent de $\mathbf{Q}'_d \cap \mathbf{L}_d$ et fixons une mesure de Haar sur U'_d. On peut remplacer la variable d'intégration l par $l'u'yn_F$, où $l' \in T_X \backslash L'_d$, $u' \in U'_d$, $y \in L_{d,v'}$, et intégrer en l', u', y. Le Jacobien de ce changement de variables est constant. Notons-le c_1. En utilisant l'égalité $Q'_d \cap L_{d,v'} = L'_{d,v'}(U'_d \cap L_{d,v'})$, on calcule :

$$c_1 = \mathrm{mes}(L'_{d,v'})^{-1}\,\mathrm{mes}(U'_d \cap L_{d,v'})^{-1},$$

ces mesures étant calculées respectivement dans L'_d et U'_d. À ce point, le terme que l'on considère s'écrit :

$$\begin{aligned}(3)\quad c_1\Delta^L(X)^{1/2}\int_{G_{d,v'}}\int_{L_{d,v'}}\int_{U'_d}\int_{T_X\backslash L'_d} & f_{\nu,n_F^{-1}xn_F} \\ \cdot\,(\mathrm{Ad}(l'u'yn_F)^{-1}(X))v_M^{Q'}(l'u'yn_F)&u_{Q'}^Q(H_{Q'_d}(l'u'yxn_F) \\ &- H_{Q'_d}(l'u'yn_F))\,dl'\,du'\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Notons ϕ'^L l'élément de $\Phi^{L,d}$ auquel appartient (v',r). L'application $\mathrm{Ad}(\pi_N(n))$ définit un isomorphisme de $\bar{G}_{d,v}$ sur $\bar{G}_{d,v'}$ et de $\mathcal{S}(\phi^L)$ sur $\mathcal{S}(\phi'^L)$. Définissons une application :

$$\nu_1 \colon \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v'} \longrightarrow \mathcal{S}(\phi'^L)$$

par $\nu_1(H,\bar{x}) = \mathrm{Ad}(\pi_N(n)) \circ \nu(H, \mathrm{Ad}(\pi_N(n))^{-1}(\bar{x}))$. Pour $x \in G_{d,v'}$, posons :

$$f_{\nu_1,x} = \mathrm{rea}_F \circ \nu_1(H_{Q_d}(x), \pi_{d,v'}(x)).$$

Alors :

(4) pour tout $x \in G_{d,v'}$ et tout $Y \in \mathfrak{l}_d$, on a l'égalité :

$$f_{\nu,n_F^{-1}xn_F}(\mathrm{Ad}(n_F^{-1})(Y)) = f_{\nu_1,x}(Y).$$

On utilise le diagramme 3.9(4) et un diagramme similaire reliant les applications $\pi^L_{d,v,r}$ et $\pi^L_{d,v',r}$. La commutativité de ces diagrammes entraîne formellement l'égalité :

$$f_{\nu,n_F^{-1}xn_F}(\mathrm{Ad}(n_F^{-1})(Y)) = f(Y),$$

où $f = \mathrm{rea}_F \circ \mathrm{Ad}(\pi_N(n)) \circ \nu(H_{Q_d}(n_F^{-1}xn_F), \mathrm{Ad}(\pi_N(n))^{-1} \circ \pi_{d,v'}(x))$. Il suffit alors de prouver l'égalité $H_{Q_d}(n_F^{-1}xn_F) = H_{Q_d}(x)$. Parce que $n_F \in K_d$, on a $H_{Q_d}(n_F^{-1}xn_F) = H_{Q_d}(n_F^{-1}x)$. Parce que $n_F \in L_d$, on a $H_{Q_d}(n_F^{-1}x) = H_{L_d}(n_F^{-1}) + H_{Q_d}(x)$. Enfin $H_{L_d}(n_F^{-1}) = 0$ car n_F appartient au sous-groupe compact $L_d \cap K_d$ de L_d. Cela prouve (4).

On simplifie la formule (3) en utilisant (4). On la simplifie aussi en utilisant les égalités :

$$v_M^{Q'}(l'u'yn_F) = v_M^{Q'}(l'y),\ \ H_{Q'_d}(l'u'yxn_F) = H_{L'_d}(l') + H_{Q'_d}(yx),$$

$$H_{Q'_d}(l'u'yn_F) = H_{L'_d}(l') + H_{Q'_d}(y).$$

Celles-ci résultent des relations $l' \in L'_d$, $u' \in U'_d$, $n_F \in K_d$. L'expression (3) devient :

$$(5)\quad c_1 \Delta^L(X)^{1/2} \int_{G_{d,v'}} \int_{L_{d,v'}} \int_{U'_d} \int_{T_X \backslash L'_d} f_{\nu_1,x}(\mathrm{Ad}(l'u'y)^{-1}(X)) v_M^{Q'}(l'y) \cdot u_{Q'}^G(H_{Q'_d}(yx) - H_{Q'_d}(y))\, dl'\, du'\, dy\, dx.$$

On introduit la projection orthogonale :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_{L'} & \longrightarrow & \mathfrak{a}_L \\ H & \longmapsto & H_L \end{array}$$

et la fonction $\mu_{Q',v'}$ analogue à $\mu_{Q,v}$. Définissons une application :

$$\nu_2 \colon \mathfrak{a}_{L'} \times \bar{L}_{d,v'} \longrightarrow \mathcal{S}({\phi'}^L)$$

par :

$$\nu_2(H, \bar{y}) = \sum_{\bar{x} \in \bar{G}_{d,v'}} \sum_{H' \in \mathfrak{a}_{L'}} \mathrm{Ad}(\bar{y}) \circ \nu_1(H'_L, \bar{y}^{-1}\bar{x}) u_{Q'}^Q(H' - H) \mu_{Q',v'}(H', \bar{x})$$

pour tout $(H, \bar{y}) \in \mathfrak{a}_{L'} \times \bar{L}_{d,v'}$. Pour $y \in L_{d,v'}$, posons

$$f_{\nu_2,y} = \mathrm{rea}_F \circ \nu_2(H_{Q'_d}(y), \pi^L_{d,v'}(y)).$$

Montrons que :

(6) pour tout $y \in L_{d,v'}$, on a l'égalité :

$$\int_{G_{d,v'}} \mathrm{Ad}(y) \circ f_{\nu_1,y} u_{Q'}^Q(H_{Q'_d}(yx) - H_{Q'_d}(y))\, dx \;=\; f_{\nu_2,y}.$$

Par le changement de variables $x \mapsto y^{-1}x$, le membre de gauche de cette égalité devient $\mathrm{rea}_F(\varphi)$, où :

$$\varphi = \int_{G_{d,v'}} \mathrm{Ad}(\pi_{d,v'}(y)) \circ \nu_1(H_{Q_d}(x), \pi_{d,v'}(y^{-1}x)) u_{Q'}^Q(H_{Q'_d}(x) - H_{Q'_d}(y)) dx.$$

Utilisons l'analogue de (2) relative à Q'_d. Alors :

$$\varphi = \sum_{H' \in \mathfrak{a}_{L'}} \int_{G_{d,v'}} \mathrm{Ad}(\pi_{d,v'}(y)) \circ \nu_1(H_{Q_d}(x), \pi_{d,v'}(y^{-1}x)) u_{Q'}^Q(H_{Q'_d}(x) - H_{Q'_d}(y)) \mathbf{1}_{H',Q'_d}(x)\, dx.$$

Si $\mathbf{1}_{H',Q'_d}(x)=1$, on a $H_{Q'_d}(x)=H'$ et $H_{Q_d}(x)=H'_L$. Alors :

$$\varphi=\sum_{H'\in\mathfrak{a}_{L'}}\ \sum_{x\in G_{d,v'}/G_{d,v',+}}\operatorname{Ad}(\pi_{d,v'}(y))\circ\nu_1(H'_L,\pi_{d,v'}(y^{-1}x^{-1}))\\ \cdot u^{Q}_{Q'}(H'-H_{Q'_d}(y))\int_{G_{d,v',+}}\mathbf{1}_{H',Q'_d}(xz)\,dz.$$

La dernière intégrale vaut $\mu_{Q',v'}(H',\pi_{d,v'}(x))$. L'ensemble $G_{d,v'}/G_{d,v',+}$ s'identifie à $\bar{G}_{d,v'}$. On obtient

$$\varphi=\nu_2(H_{Q'_d}(y),\pi_{d,v'}(y))=\nu_2(H_{Q'_d}(y),\pi^{L}_{d,v'}(y))$$

(car $\pi_{d,v'}(y)=\pi^{L}_{d,v'}(y)$). Cela démontre (6).

Grâce à (6), l'expression (5) devient :

$$(7)\quad c_1\Delta^{L}(X)^{1/2}\int_{L_{d,v'}}\int_{U'_d}\int_{T_X\backslash L'_d}f_{\nu_2,y}(\operatorname{Ad}(l'u')^{-1}(X))v^{Q'}_{M}(l'y)\,dl'\,du'\,dy.$$

Pour tout groupe réductif $\mathbf{R}$ défini sur F, il y a une correspondance naturelle entre mesures de Haar sur R et sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$. En effet une mesure de Haar est déterminée par une forme différentielle invariante (disons à droite) de degré maximal, et les espaces de telles formes s'identifient à $\bigwedge^{N}\mathfrak{r}^*$, où $\mathfrak{r}^*$ est le dual de $\mathfrak{r}$ et N sa dimension. Supposons que le groupe $\mathbf{R}$ soit nilpotent et qu'il soit muni d'une structure de schéma en groupes lisse sur $\mathfrak{o}$. On vérifie que, pour des mesures qui se correspondent, les groupes $\mathbf{R}(\mathfrak{o})$ et $\mathfrak{r}(\mathfrak{o})$ ont même mesure. Introduisons la mesure de Haar sur $\mathfrak{u}'_d$ correspondant à celle que l'on a fixée sur U'_d. La structure de schéma en groupes lisse sur $\mathbf{L}_{d,v'}$ (*cf.* 3.3) en induit une sur $\mathbf{U}'_d$. On en déduit l'égalité $\operatorname{mes}(U'_d\cap L_{d,v'})=\operatorname{mes}(\mathfrak{u}'_d\cap\mathfrak{l}_{d,v',0})$. Pour l' et y fixés, considérons l'intégrale sur U'_d intervenant dans l'expression (7). On a $\operatorname{Ad}(l')^{-1}(X)\in\mathfrak{l}'_d$ et on peut écrire :

$$\operatorname{Ad}(l'u')^{-1}(X)=\operatorname{Ad}(l')^{-1}(X)+N(u'),$$

où $N(u')\in\mathfrak{u}'_d$. L'application $u'\mapsto N(u')$ est une bijection de U'_d sur $\mathfrak{u}'_d$, dont le Jacobien est constant de valeur $\Delta^{L}(X)^{-1/2}\Delta^{L'}(X)^{1/2}$. L'expression (7) devient :

$$(8)\quad c_1\Delta^{L'}(X)^{1/2}\int_{L_{d,v'}}\int_{T_X\backslash L'_d}\int_{\mathfrak{u}'_d}f_{\nu_2,y}(\operatorname{Ad}(l')^{-1}(X)+N)v^{Q'}_{M}(l'y)\,dN\,dl'\,dy.$$

Introduisons l'ensemble de facettes $\Phi^{L',d}$ relatif à la donnée $\mathcal{D}^{L'}$, soit $\phi^{L'}$ l'élément de $\Phi^{L',d}$ auquel appartient (v',r). L'espace $\bar{\mathfrak{l}}'_{d,\phi^{L'}}=\bar{\mathfrak{l}}'_{d,v',r}$ s'identifie à $\bar{\mathfrak{l}}_{d,\phi'^{L}}\cap\bar{\mathfrak{l}}'_d=\bar{\mathfrak{l}}_{d,v',r}\cap\bar{\mathfrak{l}}'_d$. On a utilisé ici, et on utilise ci-dessous, les notations de [11], 2.6 reprises plus haut en 4.1. Définissons une application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}({\phi'}^{L}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\phi^{L'}) \\ \psi & \longmapsto & \psi^{Q'\cap L} \end{array}$$

par :

$$\psi^{Q'\cap L}(\bar{Y}) = |\bar{\mathfrak{l}}_{d,v',r} \cap \bar{\mathfrak{u}}'_d|^{-1} \sum_{\bar{N}\in\bar{\mathfrak{l}}_{d,v',r}\cap\bar{\mathfrak{u}}'_d} \psi(\bar{Y}+\bar{N})$$

pour tout $\bar{Y} \in \bar{\mathfrak{l}}'_{d,v',r}$. On vérifie que, pour tout $\psi \in \mathcal{S}({\phi'}^{L})$ et tout $Y \in \mathfrak{l}'_d$, on a l'égalité :

$$\int_{\mathfrak{u}'_d} \mathrm{rea}_F(\psi)(Y+N)dN \;=\; \mathrm{mes}(\mathfrak{u}'_d \cap \mathfrak{l}_{d,v',r})\,\mathrm{rea}_F(\psi^{Q'\cap L})(Y).$$

Définissons une application :

$$\nu_3 \colon \mathfrak{a}_{L'} \times \bar{L}_{d,v'} \longrightarrow \mathcal{S}(\phi^{L'})$$

par $\nu_3(H,\bar{y}) = \nu_2(H,\bar{y})^{Q'\cap L}$. Pour $y \in L_{d,v'}$, posons

$$f_{\nu_3,y} = \mathrm{rea}_F \circ \nu_3(H_{Q'_d}(y), \pi_{d,v'}(y)).$$

Alors l'expression (8) devient :

$$\text{(9)} \qquad c_2\Delta^{L'}(X)^{1/2} \int_{L_{d,v'}} \int_{T_X\backslash L'_d} f_{\nu_3,y}(\mathrm{Ad}(l')^{-1}(X)) v_M^{Q'}(l'y)\,dl'\,dy,$$

où :

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1\,\mathrm{mes}(\mathfrak{u}'_{d,v',r}) \\ &= \mathrm{mes}(L'_{d,v'})^{-1}\,\mathrm{mes}(U'_d \cap L_{d,v'})^{-1}\,\mathrm{mes}(\mathfrak{u}'_d \cap \mathfrak{l}_{d,v',r}) \\ &= \mathrm{mes}(L'_{d,v'})^{-1}\,\mathrm{mes}(\mathfrak{u}'_d \cap \mathfrak{l}_{d,v',0})^{-1}\,\mathrm{mes}(\mathfrak{u}'_d \cap \mathfrak{l}_{d,v',r}). \end{aligned}$$

Ainsi qu'on l'a expliqué en 4.1, cette constante c_2 est indépendante de F. D'autre part, $v_M^{Q'}$ coïncide sur L_d avec $v_M^{Q'\cap L}$. Alors l'expression (9) est de la même forme que celle du (ii) de l'énoncé : on a remplacé $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^L$ et Σ^Q par $\mathcal{D}^L$, $\mathcal{D}^{L'}$ et $\Sigma^{Q'}\cap\Sigma^L$. Grâce à l'hypothèse de récurrence (qui s'applique puisqu'on a supposé $\Sigma^{Q'} \neq \Sigma^Q$ donc $\mathcal{D}^{L'} < \mathcal{D}^L$), l'expression (9) est de la forme voulue. Cela achève la preuve. □

5.4. Soient $\mathcal{D}^M$, $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}(M)$, soient $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, $(v,r) \in V^d_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, $n \in N^{d,0}_{\mathrm{red},v_d}$ et $\chi\colon \mathfrak{a}_L \to \mathbb{C}$ une fonction. Notons ϕ l'élément de Φ^d auquel appartient (v,r) et $\mathbf{U}_d$ le radical unipotent de $\mathbf{Q}_d$.

LEMME. — *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$. Pour tout $\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}_d$ tel que $\mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^{L'} \leqslant \mathcal{D}^L$, il existe $\varphi^{L'} \in \mathcal{S}^{L',d}$ de sorte que, pour tout $F \in CL_q$, tout $X \in \mathfrak{m}_d \cap \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$ et toute mesure de Haar sur U_d, on ait l'égalité :*

$$\Delta^G(X)^{1/2}\,\mathrm{mes}(U_d \cap \mathrm{Ad}(n_F)(G_{d,v}))^{-1} \int_{G_{d,v}} \int_{T_X\backslash L_d} \int_{U_d} \mathrm{rea}_F(\varphi)(\mathrm{Ad}(lun_Fx)^{-1}(X))v_M^Q(lun_Fx)\chi(H_{Q_d}(n_Fx))\,du\,dl\,dx = \sum_{\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}_d\ ;\mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^{L'} \leqslant \mathcal{D}^L} J_M^{L'}(X, \mathrm{rea}_F(\varphi^{L'})).$$

Démonstration. — Comme dans la preuve précédente, on se débarrasse du n_F en remplaçant (v, r) par $(n_{\mathbb{R}}(v), r)$ et φ par $(\mathrm{Ad}(\pi_N(n)))(\varphi)$. Supposons donc $n = 1$. Définissons une application :

$$\nu\colon \mathfrak{a}_L \times \bar{G}_{d,v} \longrightarrow \mathcal{S}(\phi)$$

par $\nu(H, \bar{x}) = \chi(H)\,\mathrm{Ad}(\bar{x})(\varphi)$. Pour $F \in CL_q$ et $x \in G_{d,v}$, posons $f_{\nu,x} = \mathrm{rea}_F \circ \nu(H_{Q_d}(x), \pi_{d,v}(x))$. Remarquons que le terme u peut être supprimé dans l'expression $v_M^Q(lux)$. Alors le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé devient :

$$\Delta^G(X)^{1/2}\,\mathrm{mes}(U_d \cap G_{d,v})^{-1} \int_{G_{d,v}} \int_{T_X\backslash L_d} \int_{U_d} f_{\nu,x} \cdot (\mathrm{Ad}(lu)^{-1}(X))v_M^Q(lx)\,du\,dl\,dx.$$

À des changements de notations près, c'est exactement l'expression (7) de la preuve précédente. La suite de cette preuve entraîne la conclusion. $\square$

5.5. Soient $\mathcal{D}^M \in \mathcal{L}_d$ et $(v, r) \in V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Notons ϕ l'élément de Φ^d auquel appartient (v, r).

LEMME. — *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$. Pour tout $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}(M)$, il existe $\varphi^L \in \mathcal{S}^{L,d}$ de sorte que :*

(i) $\varphi^G = \varphi$;

(ii) *pour tout $F \in CL_q$ et tout $X \in \mathfrak{m}_d \cap \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$, on ait l'égalité :*

$$\mathrm{mes}(G_{d,v})^{-1} \int_{G_{d,v}} J_M^G(X, \mathrm{Ad}(x) \circ \mathrm{rea}_F(\varphi))dx = \sum_{\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}(M)} J_M^L(X, \mathrm{rea}_F(\varphi^L)).$$

Démonstration. — Par un changement de variables, le membre de gauche de l'égalité du (ii) s'écrit :

$$\mathrm{mes}(G_{d,v})^{-1}\Delta^G(X)^{1/2}\int_{G_{d,v}}\int_{T_X\backslash G_d}\mathrm{rea}_F(\varphi)(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X))v_M^G(gx)\,dg\,dx.$$

On applique les constructions de 5.3 à $\mathcal{D}^L=\mathcal{D}$ et l'application ν constante de valeur $\mathrm{mes}(G_{d,v})^{-1}\varphi$. L'expression ci-dessus est alors celle qui figure dans le (ii) du lemme 5.3. On vérifie que la fonction φ_ν définie en 5.3 est égale à φ. Il ne reste qu'à appliquer ce lemme 5.3. □

5.6. Proposition. — *Soient $\mathcal{D}^M\in\mathcal{L}_d$ et $r\in\mathbb{Z}_{(p)}$. Pour tout $\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}(M)$, il existe une application linéaire $\ell^L\colon\mathcal{S}_r^d\to\mathcal{S}^{L,d}$ de sorte que :*

(i) $\ell^G(\mathcal{S}_r^d)\subset\mathcal{S}_{r+}^d$;

(ii) *pour tout $\varphi\in\mathcal{S}_r^d$, tout $F\in CL_q$ et tout $X\in\mathfrak{m}_{d,r+}\cap\mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$, on ait l'égalité :*

$$J_M^G(X,\mathrm{rea}_F(\varphi))=\sum_{\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}(M)}J_M^L(X,\mathrm{rea}_F\circ\ell^L(\varphi)).$$

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la proposition 3.4 de [11], que l'on avait inutilement compliquée. Comme dans cette preuve, on peut fixer $v\in V_{(p)}^d$, noter ϕ l'élément de Φ^d qui contient (v,r) et se contenter de définir les applications linéaires ℓ^L sur $\mathcal{S}(\phi)$. Remarquons que, si on définit de telles applications, pas forcément linéaires, vérifiant les conclusions du lemme, on peut après coup les remplacer par les applications linéaires coïncidant sur une base de $\mathcal{S}(\phi)$ avec celles supposées définies. Autrement dit, on peut fixer $\varphi\in\mathcal{S}(\phi)$ et se contenter de définir ses images $\ell^L(\varphi)$.

On a défini en [11], 7.3 une application linéaire :

$$s_\phi\colon\ \oplus_{\phi'\in\omega_\phi^d}\mathcal{S}(\phi')\longrightarrow\mathcal{S}(\phi)$$

et le lemme 7.3.2 de [11] nous fournit une application linéaire $\ell\colon\mathcal{S}(\phi)\to\oplus_{\phi'\in\omega_\phi^d(>r)}\mathcal{S}(\phi')$. On pose $\ell^G(\varphi)=\ell(\varphi)$. On a bien $\ell^G(\varphi)\in\mathcal{S}_{r+}^d$ par définition de $\omega_\phi^d(>r)$. Soit $\mathcal{D}^L\in\mathcal{L}_d$ tel que $\mathcal{D}^M\leqslant\mathcal{D}^L<\mathcal{D}$. Le lemme 5.5 appliqué à φ nous fournit un élément $\varphi^L\in\mathcal{S}^{L,d}$. Appliqué à $s_\phi\circ\ell(\varphi)$, il nous fournit un élément que l'on note ψ^L. Posons $\ell^L(\varphi)=\psi^L-\varphi^L$. Soient $F\in CL_q$ et $X\in\mathfrak{m}_{d,r+}\cap\mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$, montrons que l'égalité du (ii) de l'énoncé est satisfaite. Notons J la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\phi)$ qui, à tout $\xi\in\mathcal{S}(\phi)$, associe :

$$J(\xi)=\mathrm{mes}(G_{d,v})^{-1}\int_{G_{d,v}}J_M^G(X,\mathrm{Ad}(x)\circ\mathrm{rea}_F(\xi))dx.$$

Remarquons que l'on a aussi :

$$J(\xi) = J_M^G(X, \mathrm{rea}_F(\tilde{\xi})),$$

où :

$$\tilde{\xi} = |\bar{G}_{d,v}|^{-1} \sum_{\bar{x} \in \bar{G}_{d,v}} \mathrm{Ad}(\bar{x}) \circ \xi.$$

La forme linéaire J est donc invariante par adjonction par $\bar{G}_{d,v}$. L'hypothèse $X \in \mathfrak{m}_{d,r+}$ entraîne que J est à support nilpotent ([11], lemme 7.4). Alors le lemme 7.3.2 de [11] implique l'égalité $J(\varphi) = J \circ s_\phi \circ \ell(\varphi)$. D'après le lemme 5.5, on a :

$$J(\varphi) = J_M^G(X, \mathrm{rea}_F(\varphi)) + \sum_{\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d, \mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^L < \mathcal{D}} J_M^L(X, \mathrm{rea}_F(\varphi^L)),$$

$$J \circ s_\phi \circ \ell(\varphi) = J_M^G(X, \mathrm{rea}_F \circ s_\phi \circ \ell(\phi)) + \sum_{\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}_d, \mathcal{D}^M \leqslant \mathcal{D}^L < \mathcal{D}} J_M^L(X, \mathrm{rea}_F(\psi^L)).$$

Or $\mathrm{rea}_F \circ s_\phi = \mathrm{rea}_F$ d'après [11], 7.4(1), donc $\mathrm{rea}_F \circ s_\phi \circ \ell(\varphi) = \mathrm{rea}_F \circ \ell^G(\varphi)$. L'égalité des deux expressions ci-dessus entraîne celle de l'énoncé. □

6. r-centralisateurs

6.1. Dans ce chapitre, on considère la situation suivante. La donnée $\mathcal{D}$ est toujours fixée comme en 1.1.

On fixe trois autres données de racines munies d'actions de Γ :

$$\mathcal{D}^M = (X^*, \Sigma^M, \Delta^M, X_*, \check{\Sigma}^M, \check{\Delta}^M),$$
$$\mathcal{D}' = (X'^*, \Sigma', \Delta', X'_*, \check{\Sigma}', \check{\Delta}'),$$
$$\mathcal{D}^{M'} = (X'^*, \Sigma^{M'}, \Delta^{M'}, X'_*, \check{\Sigma}^{M'}, \check{\Delta}^{M'}).$$

On suppose que $\mathcal{D}^M$ est une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}^{M'}$ est une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}'$. On affecte d'exposants ^{M}, ${}'$, ${}^{M'}$ les analogues pour les données $\mathcal{D}^M$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}^{M'}$ des objets précédemment définis pour $\mathcal{D}$.

On suppose donné un couple d'isomorphismes de groupes de X'^* sur X^* et de X'_* sur X_*, en dualité. Pour simplifier, on note ψ chacun de ces isomorphismes, ainsi que tout homomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité. On suppose $\psi(\Sigma'^+) \subset \Sigma^+$, $\psi(\check{\Sigma}'^+) \subset \check{\Sigma}^+$, $\psi(\Delta^{M'}) \subset \Delta^M$, $\psi(\check{\Delta}^{M'}) \subset \check{\Delta}^M$, $\psi(\Sigma^{M'}) = \psi(\Sigma') \cap \Sigma^M$. On suppose que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $w \in W^M$ tel que $\psi \circ \gamma = w \circ \gamma \circ \psi$. Cet élément est unique, on le note $w_\psi(\gamma)$.

On suppose donné un élément $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On définit un espace $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$. On l'a défini en [11], 4.2, mais il y a dans cette référence une fâcheuse erreur de signe. Rappelons la définition. On écrit $r = \frac{n}{e}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathbb{N}_{p'}$. Pour $\sigma \in I$, on définit $\sigma_e \in \zeta_e(\bar{\mathbb{F}}_q)$ comme en 1.3. En tant qu'espace vectoriel sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$ est égal à $\bar{\mathfrak{t}}'$, ou encore à $X'_* \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q$. Il est muni de l'action de Γ ainsi définie. Le groupe Θ agit comme sur $\bar{\mathfrak{t}}'$, c'est-à-dire par produit tensoriel de ses actions sur X'_* et $\bar{\mathbb{F}}_q$. Pour $\sigma \in I$, $x \in X'_*$ et $z \in \bar{\mathbb{F}}_q$, on pose $\sigma(x \otimes z) = \sigma(x) \otimes \sigma_e^n z$.

On suppose donné un élément $\bar{Z}' \in \bar{\mathfrak{t}}'(r)^{\Gamma}$. On suppose que :

$$\psi(\Sigma') = \big\{\alpha \in \Sigma \; ; \langle \alpha, \psi(\bar{Z}')\rangle = 0\big\}$$

(l'élément $\langle \alpha, \psi(\bar{Z}')\rangle \in \bar{\mathbb{F}}_q$ se définit naturellement en identifiant $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$ à $\bar{\mathfrak{t}}'$).

Soient $d' \in D^{M'}$ et $F \in CL_q$. En [11], 5.1, on a associé à d' un élément d de D^M. Dans les paragraphes 8 et 9 de [11], on a défini des plongements $\psi_{F,d'} \colon \mathbf{M}'_{d'} \to \mathbf{M}_d$ et $\psi_{\mathrm{Imm},d'} \colon \mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F) \to \mathrm{Imm}(\mathbf{M}_d, F)$, vérifiant de multiples propriétés. Considérant d' comme un élément de D' et d comme un élément de D, on peut aussi définir des plongements $\psi_{F,d'} \colon \mathbf{G}'_{d'} \to \mathbf{G}_d$ et $\psi_{\mathrm{Imm},d'} \colon \mathrm{Imm}(\mathbf{G}'_{d'}, F) \to \mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$. Mais il n'est pas clair que ces différents plongements sont compatibles aux inclusions $\mathbf{M}'_{d'} \subset \mathbf{G}'_{d'}$ et $\mathbf{M}_d \subset \mathbf{G}_d$. On va reprendre les constructions pour assurer cette compatibilité.

6.2. Le quadruplet $(\mathcal{D}^{M'}, \psi, r, \bar{Z}')$ appartient à l'ensemble noté $\mathcal{L}(\mathcal{D}^M)$ en [11], 5.1 (l'ensemble noté $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ en [11] n'a rien à voir avec celui que l'on a noté $\mathcal{L}$ en 2.1). On peut lui appliquer directement les constructions des paragraphes 8 et 9 de [11] que nous allons rappeler brièvement. De ψ se déduisent par fonctorialité des homomorphismes :

$$\psi_{\mathrm{red}} \colon N_{\mathrm{red}}^{M'} \longrightarrow N_{\mathrm{red}}^{M}, \;\psi_{D^{M'}} \colon D^{M'} \longrightarrow D^M, \;\psi_{V'} \colon V' \longrightarrow V.$$

On définit des fonctions $n_\psi \colon \Gamma \to N_{\mathrm{red}}^M$ et $z_{\varpi,\psi} \colon \Gamma \to T_\varpi \subset N_{\mathrm{red}}^M$ (*cf.* [11], 8.2). Il existe un sous-groupe Γ_0 de Γ, d'indice fini premier à p, tel que $z_{\varpi,\psi}$ se factorise en une fonction sur Γ/Γ_0. On définit un élément $z_0 \in T_\varpi$ par :

$$z_0 = [\Gamma \colon \Gamma_0]^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} z_{\varpi,\psi}(\gamma).$$

Soit $d' \in D^{M'}$. Posons $d = \psi_{D^{M'}}(d')$. On définit un cocycle $d_0 \colon \Gamma \to N_{\mathrm{red}}^M$ par $d_0(\gamma) = \psi_{\mathrm{red}} \circ d'(\gamma) n_\psi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Posons $V^{d_0} = \{v \in V \; ; \forall \gamma \in \Gamma, d_0(\gamma)_{\mathbb{R}} \circ \gamma(v) = v\}$. L'application $z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}$ envoie ${V'}^{d'}$ dans V^{d_0} ([11], lemme 9.2). La proposition [11], 9.3 nous fournit deux éléments $n \in N_{\mathrm{red}}^M$ et $k \in \bar{\mathbf{M}}$. L'application $n_{\mathbb{R}}$ se restreint en un isomorphisme de

V^{d_0} sur V^d. On définit l'application affine :

$$\begin{array}{rccc} \psi_{V',d'}\colon & V'^{d'} & \longrightarrow & V^d \\ & v' & \longmapsto & n_{\mathbb{R}} \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v'). \end{array}$$

Soit $F \in CL_q$. On note $\psi_F\colon \mathbf{M}' \to \mathbf{M}$ le plongement naturel de $\mathbf{M}'$ dans $\mathbf{M}$. Il est défini comme en 2.2 mais n'est pas en général équivariant pour les actions de Γ. On définit un cocycle $n_{\psi,F}$ de Γ dans $N^{M,\mathrm{mod}}$ ([11], 8.3). Pour cela, on doit fixer un relèvement Z'_F de $\bar{Z}'$ dans $\mathfrak{t}'$. Rappelons comment on le choisit. Notons $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}$ le sous-espace des $X \in \mathfrak{t}'$ tels que $\langle \alpha', X\rangle = 0$ pour tout $\alpha' \in \Sigma'$. Notons $\mathfrak{t}'_r$ le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{t}'$ tels que $\mathrm{val}(\langle x, X\rangle) \geqslant r$ pour tout $x \in X'^*$, où val est la valuation de F^{sep} qui vaut 1 sur une uniformisante de F. Écrivons $r = \frac{n}{e}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathbb{N}_{p'}$. Tout élément de $\mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_r$ est une somme d'éléments $x \otimes \varpi^n_{\frac{1}{e}} z$, avec $x \in X'_*$ et $z \in F^{\mathrm{mod}}$ vérifiant $\mathrm{val}(z) \geqslant 0$. Notons $\bar{z}$ l'image de z dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ et envoyons l'élément $x \otimes \varpi^n_{\frac{1}{e}} z$ sur $x \otimes \bar{z}$, que l'on considère comme un élément de $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$. Cela définit une application linéaire de $\mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_r$ dans $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$. L'action de Γ sur ce dernier ensemble a été définie pour que cette application linéaire soit Γ-équivariante. Cette application se restreint donc en une application linéaire de $\mathfrak{t}'_r$ dans $\bar{\mathfrak{t}}'(r)^{\Gamma}$. D'après la preuve du lemme 5.4 de [11], $\bar{Z}'$ appartient à l'image de $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}} \cap \mathfrak{t}'_r$ par cette application. On choisit pour Z'_F un élément de $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}} \cap \mathfrak{t}'_r$ qui s'envoie sur $\bar{Z}'$.

On relève ensuite n et k en des éléments n_F et k_F de $\mathbf{M}$ ([11], 9.9) et on définit $\psi_{F,d'}\colon \mathbf{M}'_{d'} \to \mathbf{M}_d$ de sorte que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}'_{d'} & \xrightarrow{\psi_{F,d'}} & \mathbf{M}_d \\ \big\downarrow \xi'_{d'} & & \big\downarrow \xi_d \\ \mathbf{M}' & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(k_F^{-1} n_F)\circ\psi_F} & \mathbf{M} \end{array}$$

soit commutatif. Alors $\psi_{F,d'}$ est équivariant pour les actions de Γ. On définit un plongement $\psi_{\mathrm{Imm},d'}\colon \mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F) \to \mathrm{Imm}(\mathbf{M}_d, F)$. C'est l'unique plongement qui coïncide avec $\psi_{V',d'}$ sur $V'^{d'}$ et qui soit compatible avec $\psi_{F,d'}$, en un sens précisé par le lemme 9.9.1 de [11].

6.3. Puisque $\psi(\Sigma')$ est l'annulateur de $\psi(\bar{Z}')$ dans Σ, c'est un sous-ensemble de Lévi, si l'on oublie les actions de Γ. Il existe donc $w \in W$ tel que $w^{-1} \circ \psi(\Delta') \subset \Delta$. Fixons un tel w et posons $\tilde{\psi} = w^{-1} \circ \psi$. Alors le quadruplet $(\mathcal{D}', \tilde{\psi}, r, \bar{Z}')$ appartient à l'ensemble noté $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ en [11], 5.1. Appliquons-lui les constructions de [11]. De $\tilde{\psi}$ se déduisent par fonctorialité des homomorphismes :

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{red}}\colon N'_{\mathrm{red}} \longrightarrow N_{\mathrm{red}},\ \tilde{\psi}_{V'}\colon V' \longrightarrow V.$$

On définit des fonctions $n_{\tilde{\psi}}\colon \Gamma \to N_{\mathrm{red}}$ et $z_{\varpi,\tilde{\psi}}\colon \Gamma \to T_{\varpi} \subset N_{\mathrm{red}}$. Comme dans le paragraphe précédent, on déduit de $z_{\varpi,\tilde{\psi}}$ un élément de T_{ϖ} que l'on note $\tilde{z}_0$.

On définit $\bar{\mathfrak{t}}(r)$ comme on a défini $\bar{\mathfrak{t}}'(r)$. On a défini en [11], 1.2 le groupe $\mathbb{G}_{m,\mathrm{red}} = \mathbb{Z}_{(p)} \times \bar{\mathbb{F}}_q^{\times}$ et on l'a muni d'une action de Γ. On vérifie la relation suivante :

(1) soient $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{t}}(r)$ et $x \in X^*$ tel que $x(\bar{X}) \neq 0$; pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité dans $\mathbb{G}_{m,\mathrm{red}}$: $\gamma(r, x(\bar{X})) = (r, \gamma(x)(\gamma(\bar{X})))$.

On a l'égalité $T_{\mathrm{red}} = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,\mathrm{red}}$ et l'action de Γ sur T_{red} est le produit tensoriel de ses actions sur X_* et $\mathbb{G}_{m,\mathrm{red}}$. On note encore $\psi\colon \bar{\mathfrak{t}}'(r) \to \bar{\mathfrak{t}}(r)$ l'isomorphisme déduit de ψ par fonctorialité. Il vérifie l'égalité $\psi \circ \gamma = w_{\psi}(\gamma) \circ \gamma \circ \psi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Posons $\bar{Z} = \psi(\bar{Z}') \in \bar{\mathfrak{t}}(r)$. Les conditions imposées à ψ et w entraînent l'inclusion $w^{-1}(\psi(\Sigma') \cap \Sigma^+) \subset \Sigma^+$. Pour $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha > 0$ et $w^{-1}(\alpha) < 0$, on a donc $\alpha \notin \psi(\Sigma')$, d'où $\alpha(\bar{Z}) \neq 0$. On peut légitimement définir un élément de τ de T_{red} par :

$$\tau = \prod_{\alpha \in \Sigma\ ;\alpha > 0, w^{-1}(\alpha) < 0} \check{\alpha} \otimes (r, \alpha(\bar{Z})),$$

où on a noté multiplicativement la loi de groupe sur T_{red}.

Lemme.

(i) *L'élément τ commute à $\psi_{\mathrm{red}}(N_{\mathrm{red}}^{M'})$.*

(ii) *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité :*

$$\tau \bar{n}(w) n_{\tilde{\psi}}(\gamma) \gamma(\tau \bar{n}(w))^{-1} = n_{\psi}(\gamma).$$

(iii) *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité :*

$$\tau_{\mathbb{R}} + (w(z_{\varpi,\tilde{\psi}}(\gamma)))_{\mathbb{R}} - (w_{\psi}(\gamma) \circ \gamma(\tau))_{\mathbb{R}} = z_{\varpi,\psi}(\gamma)_{\mathbb{R}}.$$

Démonstration. — Pour (i), il suffit de prouver que τ est fixe par l'action de $\psi(W^{M'})$. Soit u un élément de ce groupe. Montrons que :

(2) u conserve l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha > 0$ et $w^{-1}(\alpha) < 0$.

D'après l'hypothèse $\psi(\Delta^{M'}) \subset \Delta^M$, l'ensemble $\psi(\Sigma^{M'})$ est un sous-ensemble de Lévi standard de Σ, si l'on oublie les actions de Γ, et u appartient à son groupe de Weyl. Alors les seules racines inversées par u appartiennent à $\psi(\Sigma^{M'})$. Or l'ensemble de racines intervenant dans (2) ne coupe pas $\psi(\Sigma^{M'})$: on a déjà dit qu'il était contenu dans $\Sigma \setminus \psi(\Sigma')$. Si

α vérifie $\alpha > 0$ et $w^{-1}(\alpha) < 0$, on a donc $u(\alpha) > 0$. Un même raisonnement s'applique à $w^{-1} \circ \psi(\Sigma^{M'})$, qui est aussi un sous-ensemble de Lévi standard, et à l'élément $w^{-1}uw$ de son groupe de Weyl. Pour α comme ci-dessus, $w^{-1}uw$ conserve le signe de $w^{-1}(\alpha)$. D'où $w^{-1}u(\alpha) < 0$. Cela prouve (2).

On a :

$$u(\tau) = \prod_{\alpha \in \Sigma \; ; \alpha > 0, w^{-1}(\alpha) < 0} u(\check{\alpha}) \otimes (r, \alpha(\bar{Z})).$$

Mais $\bar{Z}$ est fixé par $\psi(W^{M'})$ donc $\alpha(\bar{Z}) = u(\alpha)(\bar{Z})$ pour tout α comme ci-dessus. Grâce à (2), on peut effectuer le changement de variables $\alpha \mapsto u^{-1}(\alpha)$ et on conclut $u(\tau) = \tau$, ce que l'on voulait.

Pour tout $\alpha \in \Sigma \smallsetminus \psi(\Sigma')$, définissons l'élément de T_{red} :

$$\tau_\alpha = \check{\alpha} \otimes (r, \alpha(\bar{Z})).$$

Posons $\tilde{Z} = \tilde{\psi}(\bar{Z}')$ et, pour $\alpha \in \Sigma \smallsetminus \tilde{\psi}(\Sigma')$, définissons l'élément de T_{red} :

$$\tilde{\tau}_\alpha = \check{\alpha} \otimes (r, \alpha(\tilde{Z})).$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, posons :

$$E_\gamma = \{\alpha \in \Sigma \; ; \alpha > 0, w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0\},$$
$$\tilde{E}_\gamma = \{\alpha \in \Sigma \; ; \alpha > 0, w_{\tilde{\psi}}(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0\}.$$

D'après [11], 8.2, on définit les éléments de T_{red} :

$$z_\psi(\gamma) = \prod_{\alpha \in E_\gamma} \tau_\alpha, \;\; z_{\tilde{\psi}}(\gamma) = \prod_{\alpha \in \tilde{E}_\gamma} \tilde{\tau}_\alpha,$$

et on a les égalités :

$$n_\psi(\gamma) = z_\psi(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma)), \;\; n_{\tilde{\psi}}(\gamma) = z_{\tilde{\psi}}(\gamma)\bar{n}(w_{\tilde{\psi}}(\gamma)).$$

On calcule $w_{\tilde{\psi}}(\gamma) = w^{-1}w_\psi(\gamma)\gamma(w)$. Alors :

(3) $$\tau\bar{n}(w)n_{\tilde{\psi}}(\gamma)\gamma(\tau\bar{n}(w))^{-1}$$
$$= \tau w_\psi(\gamma) \circ \gamma(\tau)^{-1} w(z_{\tilde{\psi}}(\gamma))\bar{n}(w)\bar{n}(w^{-1}w_\psi(\gamma)\gamma(w))\bar{n}(\gamma(w))^{-1}.$$

Le produit des trois derniers termes se calcule grâce au lemme 2.1.A de [8]. Pour $w_1, w_2 \in W$, définissons l'élément de $\bar{\mathbf{T}}$:

$$\nu(w_1, w_2) = \prod_{\alpha \in \Sigma \; ; \alpha > 0, w_1^{-1}(\alpha) < 0, w_2^{-1}w_1^{-1}(\alpha) > 0} \check{\alpha}(-1).$$

Ce lemme affirme l'égalité :

(4) $$\bar{n}(w_1 w_2) = \nu(w_1, w_2)\bar{n}(w_1)\bar{n}(w_2).$$

Posons :

$$E'_\gamma = \left\{\alpha\in\Sigma\ ;\alpha>0, w^{-1}(\alpha)<0, w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0, \gamma(w)^{-1}w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0\right\},$$

$$E''_\gamma = \left\{\alpha\in\Sigma\ ;\alpha>0, w^{-1}(\alpha)>0, w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0, \gamma(w)^{-1}w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0\right\}.$$

Définissons l'élément de $\bar{\mathbf{T}}$:

$$t(\gamma) = \prod_{\alpha\in E'_\gamma\cup E''_\gamma} \check{\alpha}(-1).$$

Grâce à (4), on calcule :

$$\bar{n}(w)\bar{n}(w^{-1}w_\psi(\gamma)\gamma(w))\bar{n}(\gamma(w))^{-1} = t(\gamma)\bar{n}(w_\psi(\gamma)).$$

Jointe à (3), cette égalité montre que l'égalité du (ii) de l'énoncé équivaut à :

$$\tau w(z_{\tilde{\psi}}(\gamma))t(\gamma) = z_\psi(\gamma)w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\tau). \tag{5}$$

Par définition, $\tau = \prod_{\alpha\in E}\tau_\alpha$, où $E = \{\alpha\in\Sigma\ ;\alpha>0, w^{-1}(\alpha)<0\}$. Soit $\alpha\in E$. En utilisant (1), on a les égalités dans $\mathbb{G}_{m,\mathrm{red}}$:

$$\begin{aligned}\gamma(r,\alpha(\bar{Z})) = (r,\gamma(\alpha)(\gamma(\bar{Z}))) &= (r, w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\alpha)(w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\bar{Z})))\\ &= (r, w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\alpha)(\bar{Z})),\end{aligned}$$

car $w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\bar{Z}) = \bar{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned}w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\tau_\alpha) &= w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\check{\alpha})\otimes\gamma(r,\alpha(\bar{Z}))\\ &= w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\check{\alpha})\otimes(r, w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\alpha)(\bar{Z})) = \tau_{w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc :

$$w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\tau) = \prod_{\alpha\in w_\psi(\gamma)\circ\gamma(E)}\tau_\alpha.$$

On a :

$$w_\psi(\gamma)\circ\gamma(E) = \{\alpha\in\Sigma\,;\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0, w^{-1}\circ\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0\}.$$

Mais l'action de Γ conserve Σ^+. La condition $\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0$ équivaut donc à $w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0$. De même la condition $w^{-1}\circ\gamma^{-1}\circ w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0$ équivaut à $\gamma(w)^{-1}w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0$. Donc :

$$w_\psi(\gamma)\circ\gamma(E) = \{\alpha\in\Sigma\ ; w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)>0, \gamma(w)^{-1}w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha)<0\}.$$

On a $\tilde{Z} = w^{-1}(\bar{Z})$. Pour $\alpha\in\tilde{E}_\gamma$, on a :

$$\begin{aligned}w(\tilde{\tau}_\alpha) = w(\check{\alpha})\otimes(r,\alpha(\tilde{Z})) &= w(\check{\alpha})\otimes(r,\alpha\circ w^{-1}(\bar{Z}))\\ &= w(\check{\alpha})\otimes(r, w(\alpha)(\bar{Z})) = \tau_{w(\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc :

$$w(z_{\tilde{\psi}}(\gamma)) = \prod_{\alpha \in w(\tilde{E}_\gamma)} \tau_\alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned} w(\tilde{E}_\gamma) &= \left\{\alpha \in \Sigma \,; w^{-1}(\alpha) > 0, w_{\tilde{\psi}}(\gamma)^{-1} w^{-1}(\alpha) < 0\right\} \\ &= \left\{\alpha \in \Sigma \,; w^{-1}(\alpha) > 0, \gamma(w)^{-1} w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0\right\}. \end{aligned}$$

On vérifie que $E \cap w(\tilde{E}_\gamma) = \emptyset$ et $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(E) \cap E_\gamma = \emptyset$. L'égalité (5) équivaut à :

$$\left(\prod_{\alpha \in E \cup w(\tilde{E}_\gamma)} \tau_\alpha\right)\left(\prod_{\alpha \in E'_\gamma \cup E''_\gamma} \check{\alpha}(-1)\right) = \prod_{\alpha \in w_\psi(\gamma) \circ \gamma(E) \cap E_\gamma} \tau_\alpha.$$

On vérifie qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}$ tel que :

- $E \cup w(\tilde{E}_\gamma)$ est union disjointe de $\mathcal{E}$, E'_γ et $-E'_\gamma$;
- $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(E) \cup E_\gamma$ est union disjointe de $\mathcal{E}$, E''_γ et $-E''_\gamma$.

Alors (5) équivaut à :

$$\prod_{\alpha \in E'_\gamma} \check{\alpha}(-1)\tau_\alpha\tau_{-\alpha} = \prod_{\alpha \in E''_\gamma} \check{\alpha}(-1)\tau_\alpha\tau_{-\alpha}.$$

Or on vérifie l'égalité $\tau_\alpha\tau_{-\alpha} = \check{\alpha}(-1)$ pour tout $\alpha \in \Sigma \smallsetminus \psi(\Sigma')$. L'égalité ci-dessus en résulte, cela prouve le (ii) de l'énoncé.

Le (iii) résulte de l'égalité (5) à laquelle on applique l'homomorphisme $n \mapsto n_{\mathbb{R}}$ de N_{red} dans le groupe des automorphismes affines de V. □

6.4. On a défini deux homomorphismes :

$$\psi_{\mathrm{red}} \colon N_{\mathrm{red}}^{M'} \longrightarrow N_{\mathrm{red}}^{M}, \ \tilde{\psi}_{\mathrm{red}} \colon N'_{\mathrm{red}} \longrightarrow N_{\mathrm{red}}.$$

Comparons-les :

(6) pour $n \in N_{\mathrm{red}}^{M'}$, on a l'égalité $\psi_{\mathrm{red}}(n) = \bar{n}(w)\tilde{\psi}_{\mathrm{red}}(n)\bar{n}(w)^{-1}$.

Cette égalité est triviale pour $n \in T'_{\mathrm{red}}$. Il suffit alors de prouver l'égalité pour $n = \bar{n}'(u')$, où $u' \in W^{M'}$. Posons $u = \psi(u')$. Par définition, $\psi_{\mathrm{red}}(\bar{n}'(u')) = \bar{n}(u)$, tandis que $\tilde{\psi}_{\mathrm{red}}(\bar{n}'(u')) = \bar{n}(w^{-1}uw)$. On doit prouver $\bar{n}(u)\bar{n}(w) = \bar{n}(w)\bar{n}(w^{-1}uw)$. Cela résulte de (4) parce que la longueur de uw est la somme des longueurs de u et w, et est aussi la somme des longueurs de w et $w^{-1}uw$.

Soit $d' \in D^{M'}$, notons d son image dans D^M par l'application $\psi_{D^{M'}}$. Définissons un cocycle $\tilde{d}_0 \colon \Gamma \to N_{\mathrm{red}}$ par $\tilde{d}_0(\gamma) = \tilde{\psi}_{\mathrm{red}} \circ d'(\gamma) n_{\tilde{\psi}}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose :

$$V^{\tilde{d}_0} = \{v \in V\ ; \forall \gamma \in \Gamma, \tilde{d}_0(\gamma)_{\mathbb{R}} \circ \gamma(v) = v\}.$$

Le lemme 9.2 de [11] reste valable, c'est-à-dire que l'application $\tilde{z}_{0,\mathbb{R}} \circ \tilde{\psi}_{V'}$ envoie $V'^{d'}$ dans $V^{\tilde{d}_0}$.

On a fixé $n \in N_{\mathrm{red}}^M$ et $k \in \bar{\mathbf{M}}$ en 6.2. Posons $\tilde{n} = n\tau\bar{n}(w)$, $\tilde{k} = k$.

Lemme 6.1. — *Ces éléments $\tilde{n}$ et $\tilde{k}$ vérifient les conditions de la proposition 9.3 de* [11] *pour le cocycle $\tilde{d}_0$.*

Démonstration. — Grâce aux assertions (i) et (ii) du lemme 6.3 et à la relation (6) ci-dessus, on vérifie l'égalité :

$$\tilde{d}_0(\gamma) = (\tau\bar{n}(w))^{-1} d_0(\gamma)\gamma(\tau\bar{n}(w)) \tag{7}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. Donc $(\tau\bar{n}(w))_{\mathbb{R}}$ se restreint en un isomorphisme de $V^{\tilde{d}_0}$ sur V^{d_0}. L'assertion (i) de la proposition 9.3 de [11] est que $\tilde{n}_{\mathbb{R}}(V^{\tilde{d}_0}) \subset V^d$. Cela résulte de ce que l'on vient de dire et de la propriété similaire $n_{\mathbb{R}}(V^{d_0}) \subset V^d$. De même, les assertions (ii) et (iii) de cette proposition résultent des assertions similaires concernant les éléments n et k, et de l'égalité (7). □

6.5. On définit l'application affine :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\psi}_{V',d'}\colon & V'^{d'} & \longrightarrow & V^d \\ & v' & \longmapsto & \tilde{n}_{\mathbb{R}} \circ \tilde{z}_{0,\mathbb{R}} \circ \tilde{\psi}_{V'}(v') \end{array}$$

Comparons-la avec l'application $\psi_{V',d'}$ de 6.2. Soit τ' l'élément de T'_{red} tel que $\psi_{\mathrm{red}}(\tau') = \tau$. Comme en [11], 2.8(1), on voit qu'il existe un sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$, d'indice fini premier à p, tel que Γ_0 fixe τ'. Posons :

$$z' = [\Gamma\colon \Gamma_0]^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \gamma(\tau').$$

Grâce au (i) du lemme 6.3, cet élément commute à $N_{\mathrm{red}}^{M'}$. Il est invariant par l'action naturelle de Γ. Il l'est donc aussi par l'action $\rho_{d'}$ de Γ. Donc $z'_{\mathbb{R}}$ se restreint en un automorphisme affine de $V'^{d'}$.

Lemme. — *On a l'égalité $\tilde{\psi}_{V',d'} = \psi_{V',d'} \circ z'_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — On a les égalités :

$$\tilde{\psi}_{V',d'} = \tilde{n}_{\mathbb{R}} \circ \tilde{z}_{0,\mathbb{R}} \circ \tilde{\psi}_{V'} = n_{\mathbb{R}} \circ \tau_{\mathbb{R}} \circ w \circ \tilde{z}_{0,\mathbb{R}} \circ w^{-1} \circ \psi_{V'} = n_{\mathbb{R}} \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ x_{\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}, \tag{8}$$

où $x = z_0^{-1}\tau w(\tilde{z}_0)$. Utilisons les définitions de z_0 et $\tilde{z}_0$ dans lesquelles on peut choisir le même groupe Γ_0. Alors :

$$x_{\mathbb{R}} = [\Gamma\colon \Gamma_0]^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \Big(\tau_{\mathbb{R}} + (w(z_{\varpi,\tilde{\psi}}(\gamma)))_{\mathbb{R}} - z_{\varpi,\psi}(\gamma)_{\mathbb{R}}\Big)$$

$$= [\Gamma\colon \Gamma_0]^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0} (w_\psi(\gamma)\circ\gamma(\tau))_{\mathbb{R}},$$

d'après le (iii) du lemme 6.3. Cette dernière expression n'est autre que $\psi_{\mathrm{red}}(z')_{\mathbb{R}}$. On a l'égalité $\psi_{\mathrm{red}}(z')_{\mathbb{R}}\circ\psi_{V'} = \psi_{V'}\circ z'_{\mathbb{R}}$ et la suite d'égalités (8) se poursuit en :

$$\tilde{\psi}_{V',d'} = n_{\mathbb{R}}\circ z_{0,\mathbb{R}}\circ\psi_{V'}\circ z'_{\mathbb{R}} = \psi_{V',d'}\circ z'_{\mathbb{R}}.$$

□

6.6. Soit $F\in CL_q$. On a introduit en 6.2 le plongement $\psi_F\colon \mathbf{M}'\to\mathbf{M}$. On note $\tilde{\psi}_F\colon \mathbf{G}'\to\mathbf{G}$ le plongement analogue (qui, lui non plus, n'est pas défini sur F, en général). On définit un cocycle $n_{\tilde{\psi},F}$ de Γ dans N^{mod} (*cf.* [11], 8.3) en utilisant le même élément Z'_F que l'on a fixé en 6.2. On définit $\tau_F\in T^{\mathrm{mod}}$ par :

$$\tau_F = \prod_{\alpha\in\Sigma\ ;\alpha>0, w^{-1}(\alpha)<0} \check{\alpha}\circ\alpha(Z'_F). \tag{9}$$

On a bien sûr $\mathrm{red}(\tau_F)=\tau$. Posons $\tilde{n}_F = n_F\tau_F n(w)$ et $\tilde{k}_F = k_F$. On définit $\tilde{\psi}_{F,d'}\colon \mathbf{G}'_{d'}\to\mathbf{G}_d$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G}'_{d'} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{F,d'}} & \mathbf{G}_d \\
\downarrow \xi'_{d'} & & \downarrow \xi_d \\
\mathbf{G}' & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\tilde{k}_F^{-1}\tilde{n}_F)\circ\tilde{\psi}_F} & \mathbf{G}
\end{array}$$

Lemme.

(i) *L'homomorphisme $\tilde{\psi}_{F,d'}$ est défini sur F.*

(ii) *Sa restriction à $\mathbf{M}'_{d'}$ coïncide avec $\psi_{F,d'}$.*

Démonstration. — On montre d'abord :

(10) pour $x\in\mathbf{M}'$, on a l'égalité $\psi_F(x) = n(w)\tilde{\psi}(x)n(w)^{-1}$.

L'égalité est évidente si $x\in\mathbf{T}'$. Il suffit alors que l'on ait l'égalité similaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}'$, et il suffit même que l'on ait cette égalité pour les éléments de l'épinglage. Soit $\alpha'\in\Delta^{M'}$, posons $\alpha=\psi(\alpha')$, $\beta=\tilde{\psi}(\alpha')$. Ces deux racines appartiennent à Δ et on a $w(\beta)=\alpha$. On note $E_{\alpha'}$, resp. E_α et E_β les éléments de l'épinglage de $\mathbf{M}'$, resp. $\mathbf{G}$, associés à α', resp. α et β. On a prouvé en [11], 8.2 que les seules hypothèses $\alpha,\beta\in\Delta$ et $w(\beta)=\alpha$ entraînaient l'égalité $\mathrm{Ad}(n(w))(E_\beta)=E_\alpha$. Or $\psi_F(E_{\alpha'})=E_\alpha$ et $\tilde{\psi}_F(E_{\alpha'})=E_\beta$. D'où l'égalité $\psi_F(E_{\alpha'}) = \mathrm{Ad}(n(w))\circ\tilde{\psi}_F(E_{\alpha'})$, qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant :

(11) τ_F appartient au centre de $\psi_F(\mathbf{M}')$.

Notons $\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$ l'image réciproque de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$. Chaque coracine se relève en une coracine de $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$. On peut définir un relèvement de τ_F dans $T_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{mod}}$ par la même formule (9). Il suffit de montrer que ce relèvement commute à l'image réciproque de $\psi_F(\mathbf{M}')$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$. Parce que ce dernier groupe est simplement connexe, il suffit de montrer que le relèvement de τ_F est invariant par l'action de $\psi(W^{M'})$. Cela se prouve comme le (i) du lemme 6.3.

La preuve se poursuit comme celle du lemme 6.3 : on prouve l'égalité :

$$\tau_F n(w) n_{\tilde{\psi},F}(\gamma)\gamma(\tau_F n(w))^{-1} = n_{\psi,F}(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, puis on montre que $\tilde{n}_F$ et $\tilde{k}_F$ vérifient les conditions du paragraphe 9.9 de [11]. Cela entraîne le (i) de l'énoncé. Le (ii) résulte de (10), (11), et des définitions. □

6.7. Soit $F \in CL_q$. On montre comme en [11], lemme 9.9.1 qu'il existe un unique plongement $\tilde{\psi}_{\mathrm{Imm},d'} : \mathrm{Imm}(\mathbf{G}'_{d'}, F) \to \mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ qui coïncide avec $\tilde{\psi}_{V',d'}$ sur $V'^{d'}$ et qui soit compatible à $\tilde{\psi}_{F,d'}$ en ce sens que, pour tous $g' \in G'_{d'}$ et $v' \in \mathrm{Imm}(\mathbf{G}'_{d'}, F)$, on ait l'égalité :

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{Imm},d'}(g'(v')) = \tilde{\psi}_{F,d'}(g')(\tilde{\psi}_{\mathrm{Imm},d'}(v')).$$

On a défini un élément $z' \in T'_{\mathrm{red}}$ en 6.5. Il est invariant par Γ et commute à $N_{\mathrm{red}}^{M'}$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} {M'_{d'}}^{\mathrm{nr}} \times V'^{I} & \longrightarrow & {M'_{d'}}^{\mathrm{nr}} \times V'^{I} \\ (m', v') & \mapsto & (m', z'_{\mathbb{R}}(v')) \end{array}$$

se quotiente en un automorphisme de $\mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F^{\mathrm{nr}})$, qui se restreint en un automorphisme de $\mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F)$. On note encore $z'_{\mathbb{R}}$ ce dernier automorphisme. Il commute à l'action de $M'_{d'}$. Remarquons qu'un tel automorphisme est à peu près invisible. Par exemple, pour $v' \in \mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F)$, posons $v'' = z'_{\mathbb{R}}(v')$. Alors les groupes $M'_{d',v'}$ et $M'_{d',v''}$ sont égaux.

Lemme. — *La restriction de* $\tilde{\psi}_{\mathrm{Imm},d'}$ *à* $\mathrm{Imm}(\mathbf{M}'_{d'}, F)$ *coïncide avec* $\psi_{\mathrm{Imm},d'} \circ z'_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — Ces deux applications sont compatibles aux actions de $M'_{d'}$, grâce au (ii) du lemme 6.6. Il suffit alors qu'elles coïncident sur $V'^{d'}$. C'est ce qu'affirme le lemme 6.5. □

6.8. On définit les espaces $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_{M'}$, *cf.* 4.3. On a :

(1) $\mathfrak{a}_M \subset \psi(\mathfrak{a}_{M'})$.
En effet, $\mathfrak{a}_M$ est l'ensemble des $H \in X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tels que $\gamma(H) = H$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $\langle \alpha, H\rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M$. Cette condition entraîne :

(2) $\langle \psi(\alpha'), H\rangle = 0$ pour tout $\alpha' \in \Sigma^{M'}$, et $w(H) = H$ pour tout $u \in W^M$. Donc :

(3) $w_\psi(\gamma) \circ \gamma(H) = H$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Les conditions (2) et (3) sont celles qui caractérisent $\psi(\mathfrak{a}_{M'})$. Cela prouve (1).

Soit $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}^G(M)$. Posons $\Sigma^{L'} = \{\alpha' \in \Sigma' \,; \psi(\alpha') \in \Sigma^L\}$, $\Sigma^{L'+} = \Sigma'^+ \cap \Sigma^{L'}$, soit $\Delta^{L'}$ l'ensemble de racines simples de $\Sigma^{L'}$ associé au sous-ensemble positif $\Sigma^{L'+}$. On introduit les ensembles correspondants $\check{\Sigma}^{L'}$ et $\check{\Delta}^{L'}$ de coracines et on pose :

$$\mathcal{D}^{L'} = (X'^*, \Sigma^{L'}, \Delta^{L'}, X'_*, \check{\Sigma}^{L'}, \check{\Delta}^{L'}).$$

Alors $\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}^G(M)$. On a l'inclusion $\mathfrak{a}_L \subset \psi(\mathfrak{a}_{L'})$ analogue à (1). Remarquons que la notation est cohérente : si $\mathcal{D}^L = \mathcal{D}^M$, on a $\mathcal{D}^{L'} = \mathcal{D}^{M'}$. Soit $\Sigma^Q \in \mathcal{P}(L)$, posons $\Sigma^{Q'} = \{\alpha' \in \Sigma' \,; \psi(\alpha') \in \Sigma^Q\}$. Alors $\Sigma^{Q'} \in \mathcal{P}(L')$.

On munit l'espace $X'^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ du produit scalaire euclidien déduit par ψ de celui que l'on a fixé sur $X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Soit $\Sigma^Q \in \mathcal{F}(M)$, définissons $\Sigma^{Q'} \in \mathcal{F}(M')$ comme ci-dessus. Pour tout $\Sigma^{S'} \in \mathcal{F}^{Q'}(M')$, Arthur définit un nombre réel, que nous noterons $d^Q_{M'}(M, S')$, vérifiant la propriété ci-dessous. Soit $(\mathbf{c}_{P'})_{\Sigma^{P'} \in \mathcal{P}^{Q'}(M')}$ une (Q', M')-famille. Pour $\Sigma^P \in \mathcal{P}^Q(M)$, définissons comme ci-dessus $\Sigma^{P'} \in \mathcal{P}^{Q'}(M')$. Pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$, posons $c_P(\lambda) = \mathbf{c}_{P'} \circ \psi^{-1}(\lambda)$. Alors $(c_P)_{\Sigma^P \in \mathcal{P}^Q(M)}$ est une (Q, M)-famille. On a l'égalité ([2], proposition 7.1) :

$$c_M = \sum_{\Sigma^{S'} \in \mathcal{F}^{Q'}(M')} d^Q_{M'}(M, S') \mathbf{c}^{S'}_{M'}. \tag{12}$$

Remarque. — La formulation d'Arthur est un peu différente. Il ne somme pas sur tous les sous-ensembles paraboliques mais seulement sur l'image d'une certaine application. Il suffit de définir le coefficient $d^Q_{M'}(M, S')$ comme étant nul hors de cette image pour réconcilier l'égalité ci-dessus avec celle d'Arthur.

6.9. On fixe $d' \in D^{M'}$, on pose $d = \psi_{D^{M'}}(d')$ et on effectue les constructions des paragraphes précédents. On fixe un point spécial $v_{d'} \in V^{d'}_{(p)}$ qui va nous permettre de définir des intégrales orbitales pondérées.

PROPOSITION. — *Supposons $\bar{Z}' \neq 0$. Pour tout $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}^G(M)$, il existe une application linéaire $\ell^L\colon \mathcal{S}_r^d \to \mathcal{S}^{L,d}$ et, pour tout $\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}^{G'}(M')$, il existe une application linéaire $\lambda^{L'}: \mathcal{S}_r^d \to \mathcal{S}^{L',d'}$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(i) *L'application $\ell^G\colon \mathcal{S}_r^d \to \mathcal{S}^d$ est l'injection naturelle.*

(ii) *Soient $\varphi \in \mathcal{S}_r^d$, $F \in CL_q$, $Z' \in \mathfrak{m}'_{d'}$, $X' \in \mathfrak{m}'_{d'} \cap \mathfrak{g}'_{d',\mathrm{reg}}$. Supposons :*

(a) *$\xi'_{d'}(Z') \in \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}} \cap \mathfrak{t}'_r$ et son image dans $\bar{\mathfrak{t}}(r)^\Gamma$ est égale à $\bar{Z}'$;*

(b) *$X' \in \mathfrak{m}'_{d',r+}$.*

Posons $X = \psi_{F,d'}(Z' + X')$. Alors on a l'égalité :

$$\sum_{\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}^G(M)} J_M^L(X, \mathrm{rea}_F \circ \ell^L(\varphi)) = \sum_{\mathcal{D}^{L'} \in \mathcal{L}^{G'}(M')} J_{M'}^{L'}(X', \mathrm{rea}'_F \circ \lambda^{L'}(\varphi)).$$

Démonstration. — Comme dans la preuve de la proposition 5.6, on peut fixer $(v, r) \in V_{(p)}^d \times \mathbb{Z}_{(p)}$, noter ϕ l'élément de Φ^d contenant (v, r), fixer $\varphi \in \mathcal{S}(\phi)$ et se limiter à définir les images $\ell^L(\varphi)$ et $\lambda^{L'}(\varphi)$. Posons :

$$\tilde{\varphi} = |\bar{G}_{d,v}|^{-1} \sum_{\bar{x} \in \bar{G}_{d,v}} \mathrm{Ad}(\bar{x}) \circ \varphi$$

et supposons le problème résolu pour $\tilde{\varphi}$. Le lemme 5.5 nous fournit des éléments φ^L. Posons $\lambda^{L'}(\varphi) = \lambda^{L'}(\tilde{\varphi})$ pour $\mathcal{D}^{L'}$ comme dans l'énoncé. Posons $\ell^G(\varphi) = \varphi$ et $\ell^L(\varphi) = \ell^L(\tilde{\varphi}) + \varphi^L$ pour $\mathcal{D}^L$ comme dans l'énoncé avec $\mathcal{D}^L \neq \mathcal{D}$. On voit que ces termes résolvent notre problème pour φ. Oubliant la définition de $\tilde{\varphi}$, on est ramené au cas où φ est invariante par adjonction par $\bar{G}_{d,v}$, ce que l'on suppose désormais.

Soient F, Z', X', X comme dans l'énoncé, posons $f = \mathrm{rea}_F(\varphi)$. Reprenons la preuve du paragraphe 10.4 de [11]. Avec une légère modification des définitions, on a l'analogue de [11], 10.4(3) :

$$J_M^G(X, f) = \sum_{v' \in \mathcal{V}'_v} J_{v'},$$

où :

$$J_{v'} = \Delta^G(X)^{1/2} \int_{T_X \backslash \tilde{\psi}_{F,d'}(G'_{d'}) g_{v',v} G_{d,v}} f(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)) v_M^G(g)\, dg.$$

L'ensemble $\mathcal{V}'_v$ est défini en [11], 10.3 et $g_{v',v} \in G_d$ est un élément vérifiant les conditions du lemme 10.2 de [11]. En fait, les constructions de [11], 10.2 étaient inutilement compliquées. Notre discussion du chapitre 3 montre que l'on peut remplacer l'ensemble $\mathcal{M}_{d,v}$ de [11], 10.2 par N_{red}^d. Pour $\mu = n \in N_{\mathrm{red}}^d$, la commutativité du diagramme 3.9(4) et d'un diagramme analogue concernant les algèbres de Lie montre que l'élément $g = n_F$ satisfait les conditions du lemme 10.2 de [11]. La situation se simplifie ainsi : $\mathcal{V}'_v$ est un ensemble fini de points dans $V'^{d'}$; pour tout $v' \in \mathcal{V}'_v$, il y a un élément $n_{v',v} \in N^d_{\mathrm{red}}$, que l'on fixe, tel que $n_{v',v,\mathbb{R}}(v) = \tilde{\psi}_{V',d'}(v')$; alors $g_{v',v} = n_{v',v,F}$.

On peut fixer $v' \in \mathcal{V}'_v$ et montrer que $J_{v'}$ s'exprime sous la forme voulue. Fixons v', posons $\nu = n_{v',v}$, notons ϕ' l'élément de $\Phi'^{d'}$ auquel appartient (v', r). Un calcul simple de mesures de Haar montre que l'on a l'égalité :

$$J_{v'} = \Delta^G(X)^{1/2} \operatorname{mes}(G'_{d',v'})^{-1} \int_{G_{d,v}} \int_{T'_{X'}\backslash G'_{d'}} \cdot f(\mathrm{Ad}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x)^{-1}(X)) v^G_M(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x)\, dg'\, dx.$$

Puisque φ est invariante par adjonction par $\bar{G}_{d,v}$, on a l'égalité :

$$f(\mathrm{Ad}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x)^{-1}(X)) = f(\mathrm{Ad}(\nu_F^{-1})\tilde{\psi}_{F,d'}(Z' + \mathrm{Ad}(g')^{-1}(X'))).$$

La démonstration du paragraphe 10.4 de [11] exhibe un élément $\varphi' \in \mathcal{S}'(\phi')$ (indépendant de F) tel que ce terme soit égal à $f'(\mathrm{Ad}(g')^{-1}(X'))$, où $f' = \mathrm{rea}'_F(\varphi')$. Elle montre aussi que $\Delta^G(X)\Delta^{G'}(X')^{-1}$ est une puissance q^N de q, où N est un entier relatif indépendant de X et F. Quitte à multiplier φ' par $q^{N/2} \operatorname{mes}(G'_{d',v'})^{-1}$, on obtient l'égalité :

$$(13) \quad J_{v'} = \Delta^{G'}(X')^{1/2} \int_{G_{d,v}} \int_{T'_{X'}\backslash G'_{d'}} \cdot f'(\mathrm{Ad}(g')^{-1}(X')) v^G_M(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x)\, dg'\, dx.$$

Soient $g' \in G'_{d'}$ et $x \in G_{d,v}$. Appliquons les constructions de 6.8 à la (G', M')-famille $(v^{G'}_{P'}(g'))_{\Sigma^{P'} \in \mathcal{P}^{G'}(M')}$. On en déduit une (G, M)-famille $(c_P(g'))_{\Sigma^P \in \mathcal{P}(M)}$. Notons $(e_P)_{\Sigma^P \in \mathcal{P}(M)}$ la (G, M)-famille telle que $e_P = c_P(g')^{-1} v^G_P(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x)$. Elle est associée à la famille $(H_P)_{\Sigma^P \in \mathcal{P}(M)}$ d'éléments de $\mathfrak{a}_M$ définie ainsi. Rappelons que l'on note $H \mapsto H_M$ la projection orthogonale de $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sur $\mathfrak{a}_M$. Pour $\Sigma^P \in \mathcal{P}(M)$, soit $\Sigma^{P'} \in \mathcal{P}^{G'}(M')$ son ensemble associé comme en 6.8. Alors :

$$H_P = H_{P_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x) - \psi(H'_{P'_{d'}}(g'))_M.$$

On applique à nos familles la formule 4.7(3). Remarquons que, pour $\Sigma^Q \in \mathcal{F}(M)$ de donnée de Lévi associée $\mathcal{D}^L$ et pour $\Sigma^P \in \mathcal{P}^Q(M)$, la projection H_Q de H_P sur $\mathfrak{a}_L$ est égale à :

$$H_Q = H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(g'))_L,$$

où $\Sigma^{Q'} \in \mathcal{F}^{G'}(M')$ est l'ensemble associé à Σ^Q. On obtient :

$$v_M^G(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')n_F x) = \sum_{\Sigma^Q \in \mathcal{F}(M)} c_M^G(g')u_Q^G(H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(g'))_L).$$

La (Q,M)-famille $(c_P^Q(g'))_{\Sigma^P \in \mathcal{P}^Q(M)}$ qui intervient ici n'est autre que celle déduite de la (Q',M')-famille $(v_{P'}^{Q'}(g'))_{\Sigma^{P'} \in \mathcal{P}^{Q'}(M')}$. En appliquant 6.8(1), on obtient :

$$v_M^G(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')n_F x) = \sum_{\Sigma^Q \in \mathcal{F}(M)} \sum_{\Sigma^{S'} \in \mathcal{F}^{Q'}(M')} d_{M'}^Q(M,S')v_{M'}^{S'}(g') \cdot u_Q^G(H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(g')\nu_F x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(g'))_L).$$

Reportons cette égalité dans la formule (13). Cela décompose $J_{v'}$ en une somme d'intégrales $J_{v',\Sigma^Q,\Sigma^{S'}}$ indexées par les couples Σ^Q, $\Sigma^{S'}$ comme ci-dessus. De nouveau, on peut fixer Σ^Q et $\Sigma^{S'}$ et montrer que l'intégrale correspondante est de la forme voulue. Fixons donc Σ^Q et $\Sigma^{S'}$, notons $\mathcal{D}^L$ et $\mathcal{D}^{R'}$ leurs données de Lévi associées. Fixons un sous-ensemble $\mathcal{M}'$ de $N'^{d',0}_{\mathrm{red},v'_{d'}}$ formant un ensemble de représentants de l'ensemble de doubles classes $N^{R',d'}_{\mathrm{red}} \backslash N'^{d'}_{\mathrm{red}} / N'^{d'}_{\mathrm{red},v'}$. Notons $\mathbf{U}_{d'}^{S'}$ le radical unipotent de $\mathbf{S}'_{d'}$ et munissons $U_{d'}^{S'}$ d'une mesure de Haar. Le même calcul que dans la preuve du lemme 5.3 conduit à l'égalité :

$$\begin{aligned}(14)\qquad J_{v',\Sigma^Q,\Sigma^{S'}} = \Delta^{G'}(X')^{1/2} \sum_{n' \in \mathcal{M}'} c(n') \int_{G_{d,v}} \int_{G'_{d',v'}} \int_{U_{d'}^{S'}} \int_{T'_{X'} \backslash R'_{d'}} \\ \cdot f'(\mathrm{Ad}(r'u'n'_F y')^{-1}(X'))v_{M'}^{S'}(r'u'n'_F y') \\ \cdot u_Q^G(H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(r'u'n'_F y')\nu_F x) \\ - \psi(H'_{Q'_{d'}}(r'u'n'_F y'))_L)\, dr'\, du'\, dy'\, dx,\end{aligned}$$

où :

$$c(n') = \mathrm{mes}(U_{d'}^{S'} \cap \mathrm{Ad}(n'_F)(G'_{d',v'}))^{-1}\, \mathrm{mes}(R'_{d'} \cap \mathrm{Ad}(n'_F)(G'_{d',v'}))^{-1}.$$

Encore une fois, on peut fixer $n' \in \mathcal{M}'$ et se borner à étudier le terme correspondant de l'intégrale ci-dessus. Fixons de plus r', u', y' et considérons l'intégrale :

$$(15)\qquad \int_{G_{d,v}} u_Q^G(H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(r'u'n'_F y')\nu_F x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(r'u'n'_F y'))_L)\, dx.$$

Notons $\mathcal{D}^{L'}$ la donnée de Lévi associée à $\mathcal{D}^{Q'}$ et $\mathbf{U}_{d'}^{Q'}$ le radical unipotent de $Q'_{d'}$. Rappelons que Σ^S est inclus dans $\Sigma^{Q'}$. On peut écrire $u' = u'_1 u'_2$, où $u'_1 \in U^{S'}_{d'} \cap L'_{d'}$ et $u'_2 \in U^{Q'}_{d'}$. La fonction $H'_{L'_{d'}}$ est nulle sur le groupe dérivé de $L'_{d'}$, en particulier sur $U^{S'}_{d'} \cap L'_{d'}$. Donc :

$$H'_{Q'_{d'}}(r'u'n'_F y') = H'_{L'_{d'}}(r'u'_1) + H'_{Q'_{d'}}(u'_2 n'_F y') = H'_{L'_{d'}}(r') + H'_{Q'_{d'}}(n'_F y').$$

Les éléments $\tilde{\psi}_{F,d'}(r')$, resp. $\tilde{\psi}_{F,d'}(u'_1)$, $\tilde{\psi}_{F,d'}(u'_2)$, appartiennent à L_d, resp. au groupe dérivé de L_d, resp. au radical unipotent de Q_d. Le même calcul que ci-dessus conduit à l'égalité :

$$H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(r'u'n'_F y')\nu_F x) = H_{L_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(r')) + H_{Q_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(n'_F y')\nu_F x).$$

Montrons que, pour tout $l' \in L'_{d'}$, on a l'égalité :

(16) $$\psi(H'_{L'_{d'}}(l'))_L = H_{L_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(l')).$$

Les objets qui interviennent ici sont de nature algébrique, on peut étendre les scalaires pour démontrer l'égalité. Cela permet de se limiter à deux cas : l' appartient au groupe dérivé de $\mathbf{L}'_{d'}$; l' appartient au centre de $\mathbf{L}'_{d'}$. Dans le premier cas, $\tilde{\psi}_{F,d'}(l')$ appartient au groupe dérivé de $\mathbf{L}_d$ et les deux membres de (16) sont nuls. Dans le second, l' appartient à $\mathbf{T}'_{d'}$. Posons $\xi'_{d'}(l') = t' \in \mathbf{T}'$. On a $H'_{L'_{d'}}(l') = H'_{L'}(t')$. D'après le lemme 6.6(ii), on a $\tilde{\psi}_{F,d'}(l') = \psi_{F,d'}(l') = \xi'^{-1}_{d'} \circ \mathrm{Ad}(k_F^{-1}n_F) \circ \psi_F(t')$, d'où :

$$H_{L_d}(\tilde{\psi}_{F,d'}(l')) = H_L(\mathrm{Ad}(k_F^{-1}n_F) \circ \psi_F(t')).$$

Les éléments k_F et n_F appartiennent à $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$ et l'application H_L est constante sur toute classe de conjugaison par $\mathbf{L}$. Le terme ci-dessus est donc égal à $H_L(\psi_F(t'))$ et on est ramené à prouver l'égalité :

$$\psi(H'_{L'}(t'))_L = H_L(\psi_F(t')).$$

Celle-ci est immédiate.

Posons $v_1 = \tilde{\psi}_{V',d'}(v')$, $v_2 = \tilde{\psi}_{V',d'} \circ n'_{\mathbb{R}}(v')$. On a :

(17) il existe $\mu \in N^d_{\mathrm{red}}$ tel que $\mu_{\mathbb{R}}(v_1) = v_2$; pour un tel μ, $\tilde{\psi}_{F,d'}(n'_F)$ appartient à $\mu_F G_{d,v_1}$.

D'après la définition de l'application $n' \mapsto n'_F$, $n'_{\mathbb{R}}(v')$ est l'image de v' par l'action de n'_F sur l'immeuble $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}'_{d'}, F)$. D'après la compatibilité de $\tilde{\psi}_{\mathrm{Imm},d'}$ avec $\tilde{\psi}_{F,d'}$, on a l'égalité $\tilde{\psi}_{F,d'}(n'_F)(v_1) = v_2$ dans l'immeuble $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$. Deux éléments de V^d sont dans la même orbite pour l'action de G_d sur $\mathrm{Imm}(\mathbf{G}_d, F)$ si et seulement s'ils sont dans la même orbite pour l'action de $N_{d,F}$. D'après 3.9, cette dernière condition équivaut à être dans la même orbite pour l'action $n \mapsto n_{\mathbb{R}}$ de N^d_{red}. Cela prouve la première assertion de (17). Pour $\mu \in N^d_{\mathrm{red}}$ tel que $\mu_{\mathbb{R}}(v_1) = v_2$, on a aussi $\mu_F(v_1) = v_2$, donc $\mu_F^{-1}\tilde{\psi}_{F,d'}(n'_F)$ fixe v_1. La seconde assertion de (17) s'ensuit.

Fixons μ comme en (17), posons $\tilde{\psi}_{F,d'}(n'_F) = \mu_F y_1$, avec $y_1 \in G_{d,v_1}$. On a aussi $\tilde{\psi}_{F,d'}(y') \in G_{d,v_1}$ puisque $y' \in G'_{d',v'}$. Posons $x_1 = \nu_F^{-1} y_1 \tilde{\psi}_{F,d'}(y')\nu_F$. Puisque $\nu_{\mathbb{R}}(v) = v_1$, on a $x_1 \in G_{d,v}$. Tous ces calculs transforment l'intégrale (15) en :

$$\int_{G_{d,v}} u_Q^G(H_{Q_d}(\mu_F \nu_F x_1 x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(n'_F y'))_L)\, dx.$$

On a déjà utilisé la relation $\mu_F\nu_F \in (\mu\nu)_F R_{d,c,+} \subset (\mu\nu)_F G_{d,v}$. Par changement de variables, l'expression ci-dessus devient :

$$\int_{G_{d,v}} u_Q^G(H_{Q_d}((\mu\nu)_F x) - \psi(H'_{Q'_{d'}}(n'_F y'))_L)\, dx,$$

ou encore :

$$\sum_{H\in\mathfrak{a}_L} u_Q^G(H - \psi(H'_{Q'_{d'}}(n'_F y'))_L) \int_{G_{d,v}} \mathbf{1}_{H,Q_d}((\mu\nu)_F x)\, dx.$$

Introduisons la fonction $\bar{\mu}_{Q,\mu\nu,v}$ sur $\mathfrak{a}_L$ définie en 4.6. Définissons une fonction $\chi\colon \mathfrak{a}_{L'} \to \mathbb{C}$ par :

$$\chi(H') = \sum_{H\in\mathfrak{a}_L} u_Q^G(H - \psi(H')_L)\bar{\mu}_{Q,\mu\nu,v}(H).$$

Alors l'expression précédente (c'est-à-dire l'intégrale (15)) est égale à $\chi(H'_{Q'_{d'}}(n'_F y'))$. Remplaçons l'intégrale (15) par $\chi(H'_{Q'_{d'}}(n'_F y'))$ dans le terme indexé par n' de l'expression (14). Ce terme a alors exactement la forme de celui calculé par le lemme 5.4. Grâce à ce lemme, il est égal à :

$$\sum_{\mathcal{D}^{R''}\in\mathcal{L}^{G'}\ ;\mathcal{D}^{M'}\leqslant\mathcal{D}^{R''}\leqslant\mathcal{D}^{R'}} J_{M'}^{R''}(X, \mathrm{rea}'_F(\varphi^{R''})),$$

où bien sûr, les $\varphi^{R''}$ ne dépendent pas de F. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

7. Le théorème principal

7.1. On fixe une donnée de Lévi standard $\mathcal{D}^M$ de $\mathcal{D}$. Rappelons quelques définitions et résultats du chapitre 4 de [11]. Notons $\tilde{\mathcal{Z}}$ l'ensemble des familles $(\bar{Z}_1 \dots \bar{Z}_k\ ; r_1 \dots r_k)$ vérifiant les conditions (i) à (v) ci-dessous :

(i) $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 1$ si $\Sigma \neq \emptyset$;

(ii) $r_1 \dots r_k \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $r_1 < \cdots < r_k$;

(iii) pour tout $i = 1 \dots k$, $\bar{Z}_i \in \bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ et $\bar{Z}_i \neq 0$.

Pour tout $i = 1 \dots k$, on note Σ_i l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\bar{Z}_j) = 0$ pour tout $j \in \{1 \dots i\}$. Notons $X_{*,i,\mathrm{der}}$ l'intersection de X_* et de l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_i$. Posons $\bar{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{der}} = X_{*,i,\mathrm{der}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_q \subset \bar{\mathfrak{t}}$ et notons $\bar{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{der}}(r_i)$ le sous-espace de $\bar{\mathfrak{t}}(r_i)$ auquel il s'identifie. Alors :

(iv) pour tout $i = 1 \dots k-1$, $\bar{Z}_{i+1} \in \bar{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{der}}(r_i)$;

(v) si $k \neq 0$, $\{0\} = \bar{\mathfrak{t}}_{k,\mathrm{der}} \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{\mathfrak{t}}_{1,\mathrm{der}} \subsetneq \bar{\mathfrak{t}}$.

Le groupe $W \rtimes \Gamma$ agit naturellement sur $\tilde{\mathcal{Z}}$. On pose $\mathcal{Z} = (\tilde{\mathcal{Z}}/W)^{\Gamma}$. À tout $z \in \mathcal{Z}$, on associe un groupe abélien fini D_z muni d'un homomorphisme $\psi_{D_z} : D_z \to D$. Soit $F \in CL_q$. On pose :

$$\mathfrak{g}_D = \sqcup_{d \in D} \mathfrak{g}_d.$$

On note $\mathfrak{t}_{G-\mathrm{reg}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et on pose $\mathcal{Z}_F = (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}/W)^{\Gamma}$. Cet ensemble $\mathcal{Z}_F$ paramètre les classes de conjugaison stable semi-simples régulières dans $\mathfrak{g}_D$. On définit une application $\tilde{\zeta}_F : \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}} \to \tilde{\mathcal{Z}}$ de la façon suivante. Rappelons que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a défini en 6.2 un sous-groupe $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_r \subset \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$ et, quand $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, un homomorphisme de $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_r$ dans $\bar{\mathfrak{t}}(r)$. Soit $X \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}$. Si $X = 0$, le fait que X soit G-régulier entraîne que $\mathbf{G}$ est un tore. La famille vide appartient alors à $\tilde{\mathcal{Z}}$ et on pose $\tilde{\zeta}(X) = \emptyset$. Supposons $X \neq 0$, posons $X_1 = X$. Notons r_1 la borne supérieure de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tels que $X_1 \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_r$. On montre que $r_1 \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $X_1 \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{r_1}$. On note $\bar{Z}_1$ l'image de X_1 dans $\bar{\mathfrak{t}}(r_1)$. On définit Σ_1 et $X_{*,1,\mathrm{der}}$ comme plus haut. On note $X_{*,1,\mathrm{cent}}$ l'annulateur de Σ_1 dans X_* et on pose :

$$\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{1,\mathrm{cent}} = X_{*,1,\mathrm{cent}} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod}}, \quad \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{1,\mathrm{der}} = X_{*,1,\mathrm{der}} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod}}.$$

Ce sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$. Écrivons $X_1 = X_{1,\mathrm{cent}} + X_2$, où $X_{1,\mathrm{cent}} \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{1,\mathrm{cent}}$ et $X_2 \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{1,\mathrm{der}}$. Si $X_2 \neq 0$, on recommence en remplaçant X_1 par X_2 : on en déduit des éléments r_2, $\bar{Z}_2$ et un élément $X_3 \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{2,\mathrm{der}}$. On poursuit ce procédé et on montre qu'il finit par s'arrêter, c'est-à-dire qu'il y a un entier $k \geqslant 1$ pour lequel $X_{k+1} = 0$. On montre que la famille $(\bar{Z}_1 \dots \bar{Z}_k \,; r_1 \dots r_k)$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}$. Par définition, $\tilde{\zeta}_F(X)$ est cette famille.

De l'application $\tilde{\zeta}_F$ se déduit une application $\zeta_F : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}$ grâce à laquelle $\mathcal{Z}$ devient une approximation indépendante de F de l'ensemble de classes de conjugaison stable $\mathcal{Z}_F$. Soit $z_F \in \mathcal{Z}_F$, posons $z = \zeta_F(z_F)$ et notons $C(z_F)$ la classe de conjugaison stable paramétrée par z_F. On définit une application $\delta_F : C(z_F) \to D_z$ dont les fibres sont exactement les classes de conjugaison ordinaire.

Tout cela s'adapte au cadre pondéré. On pose $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}} = (\tilde{\mathcal{Z}}/W^M)^\Gamma$. Soit $z \in \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$, choisissons un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il y a un unique élément de W^M, que l'on note $w_z(\gamma)$, tel que $w_z(\gamma) \circ \gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}$. On pose $X_{*,z} = X_*$, on note $\psi_z : X_{*,z} \to X_*$ l'identité et on munit $X_{*,z}$ de l'action de Γ telle que $\psi_z \circ \gamma = w_z(\gamma) \circ \gamma \circ \psi_z$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose $D_z = (X_{*,z})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$. De ψ_z se déduit naturellement un homomorphisme $\psi_{D_z} : D_z = (X_{*,z})_{\Gamma,\mathrm{tors}} \to D^M = (X_*/X^M_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tors}}$. Si l'on change de relèvement $\tilde{z}$, les objets que l'on obtient sont canoniquement isomorphes aux précédents.

Soit $F \in CL_q$. Posons :

$$\mathfrak{m}_{D^M} = \sqcup_{d \in D^M} \mathfrak{m}_d, \ \mathfrak{g}_{D,\mathrm{reg}} = \sqcup_{d \in D} \mathfrak{g}_{d,\mathrm{reg}}$$

et $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F} = (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}/W^M)^\Gamma$. Cet ensemble $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F}$ paramètre les classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{m}_{D^M}$, qui sont semi-simples et G-régulières, c'est-à-dire contenues dans $\mathfrak{g}_{D,\mathrm{reg}}$.

L'application $\tilde{\zeta}_F$ définie ci-dessus se quotiente en une application

$$\zeta^M_{G-\mathrm{reg},F} : \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F} \to \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}.$$

Soit $z_F \in \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F}$, posons $z = \zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}(z_F)$, notons $C(z_F)$ la classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{m}_{D^M}$ paramétrée par z_F. On définit comme en [11], 4.4 l'application $\delta_F : C(z_F) \to D_z$. Elle est surjective. Pour $X, X' \in C(z_F)$, on a $\delta_F(X) = \delta_F(X')$ si et seulement si X et X' sont conjugués au sens ordinaire, c'est-à-dire qu'il existe $d \in D^M$ et $m \in M_d$ de sorte que $X, X' \in \mathfrak{m}_d$ et $X' = \mathrm{Ad}(m)(X)$.

7.2. Soit $\mathcal{D}^L \in \mathcal{L}(M)$. Même si $\mathcal{D}^L$ n'est pas standard, $\mathcal{D}^M$ est une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}^L$. On peut remplacer le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^M)$ par $(\mathcal{D}^L, \mathcal{D}^M)$ dans les constructions précédentes. En particulier, on définit l'ensemble $\mathcal{Z}^M_{L-\mathrm{reg}} = (\tilde{Z}^L/W^M)^\Gamma$. Appliquons les constructions de [11], 11.2 à $\mathcal{D}_H = \mathcal{D}^L$. On définit une application $\tilde{\epsilon}_{L,G} : \tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{\mathcal{Z}}^L$, équivariante pour les actions de $W^L \rtimes \Gamma$, qui se descend en une application $\epsilon_{L,G} : \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}} \to \mathcal{Z}^M_{L-\mathrm{reg}}$. Celle-ci vérifie la propriété suivante. Soit $F \in CL_q$. Il y a une injection naturelle :

$$\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F} = (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}/W^M)^\Gamma \longrightarrow \mathcal{Z}^M_{L-\mathrm{reg},F} = (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{L-\mathrm{reg}}/W^M)^\Gamma.$$

Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F} & \xrightarrow{\zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}} & \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}} \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon_{L,G} \\ \mathcal{Z}^M_{L-\mathrm{reg},F} & \xrightarrow{\zeta^M_{L-\mathrm{reg},F}} & \mathcal{Z}^M_{L-\mathrm{reg}} \end{array}$$

est commutatif. Les constructions du paragraphe précédent sont compatibles, en un sens plus ou moins évident, avec l'application $\epsilon_{L,G}$.

7.3. On pose :

$$\mathcal{S} = \oplus_{d \in D} \mathcal{S}^d.$$

Pour $F \in CL_q$, on pose :

$$C_c^\infty(\mathfrak{g}_D) = \oplus_{d \in D} C_c^\infty(\mathfrak{g}_d).$$

Les différentes applications linéaires $\mathrm{rea}_F \colon \mathcal{S}^d \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_d)$ se regroupent en une application linéaire $\mathrm{rea}_F \colon \mathcal{S} \to C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$. Pour $X \in \mathfrak{m}_{D^M} \cap \mathfrak{g}_{D,\mathrm{reg}}$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$, on pose :

$$J_M^G(X, f) = J_M^G(X, f_d),$$

où $d \in D^M$ est l'élément tel que $X \in \mathfrak{m}_d$ et f_d est la composante de f dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$.

Théorème. — *Soient $z \in \mathcal{Z}_{G-\mathrm{reg}}^M$ et $\boldsymbol{\delta} \in D_z$. Il existe une forme linéaire $J_M^G(z, \boldsymbol{\delta}, .)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z_F \in \mathcal{Z}_{G-\mathrm{reg},F}^M$, $X \in C(z_F)$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\zeta_{G-\mathrm{reg},F}^M(z_F) = z$ et $\delta_F(X) = \boldsymbol{\delta}$. Alors on a l'égalité :*

$$J_M^G(X, \mathrm{rea}_F(\varphi)) = J_M^G(z, \boldsymbol{\delta}, \varphi).$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle de [11], 6.2. On utilise les propositions 5.6 et 6.9 en lieu et place des propositions 3.4 et 10.1 de [11]. Nos propositions 5.6 et 6.9 ont une formulation un peu plus compliquée que celles de [11], ce qui nécessite un raisonnement par récurrence sur la donnée $\mathcal{D}$. Cette récurrence est justifiée par les compatibilités énoncées en 7.2. On laisse les détails au lecteur. □

8. Endoscopie

8.1. On a adapté dans le chapitre 11 de [11] la théorie de l'endoscopie à notre formulation abstraite des intégrales orbitales. Expliquons comment cela se généralise au cadre des intégrales orbitales pondérées.

On conserve la donnée $\mathcal{D}^M$ du chapitre précédent. On considère de plus une donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{M'}, \eta, s)$ de $\mathcal{D}^M$, *cf.* [11], 11.1. Le terme :

$$\mathcal{D}^{M'} = (X'^*, \Sigma^{M'}, \Delta^{M'}, X'_*, \check{\Sigma}^{M'}, \check{\Delta}^{M'})$$

est une donnée de racines munie d'une action de Γ. Le terme η est un couple d'isomorphismes de X'^* sur X^* et de X'_* sur X_*, en dualité. On note aussi η chacun de ces isomorphismes. On impose $\eta(\Sigma^{M'+}) \subset \Sigma^{M+}$, $\eta(\check{\Sigma}^{M'+}) \subset \check{\Sigma}^{M+}$ (ce qui est un tout petit peu plus fort que la condition de [11], 11.1) et que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un élément $w_\eta(\gamma) \in W^M$ tel que $\eta \circ \gamma = w_\eta(\gamma) \circ \gamma \circ \eta$. On pose :

$$\hat{T}^{M'} = X'^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times,\ \hat{Z}^{M'} = \{t \in \hat{T}^{M'}\ ; \forall \alpha \in \Sigma^{M'}, \check{\alpha}(t) = 1\}.$$

Alors s est un élément de $\hat{Z}^{M',\Gamma}$. On suppose que :

$$\{\alpha \in \Sigma\ ; \check{\alpha} \circ \eta(s) = 1\} = \eta(\Sigma^{M'}).$$

Comme en [11], 11.2, on introduit l'ensemble $\tilde{\mathcal{Y}}$ des familles $(\bar{Y}_1 \dots \bar{Y}_k\ ; r_1 \dots r_k)$ telles que :

– pour tout $i = 1 \dots k$, on ait $r_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\bar{Y}_i \in \bar{\mathfrak{t}}^{M'}(r_i)$;
– $(\eta(\bar{Y}_1) \dots \eta(\bar{Y}_k)\ ; r_1 \dots r_k)$ appartienne à $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Le groupe $W^{M'} \rtimes \Gamma$ agit sur cet ensemble. Évidemment, de η se déduit une bijection $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} \colon \tilde{\mathcal{Y}} \to \tilde{\mathcal{Z}}$. Pour tous $w \in W^{M'}$ et $\gamma \in \Gamma$, on a les égalités $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} \circ w = \eta(w) \circ \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$, $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} \circ \gamma = w_\eta(\gamma) \circ \gamma \circ \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$. Posons $\mathcal{Y}^{M'}_{G-\mathrm{reg}} = (\tilde{\mathcal{Y}}/W^{M'})^\Gamma$. La bijection $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ se descend en une application $\eta_{\mathcal{Y}} \colon \mathcal{Y}^{M'}_{G-\mathrm{reg}} \to \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$, qui n'est plus une bijection, en général.

8.2. Soit $F \in CL_q$. De η se déduit un homomorphisme de $\mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}$ dans $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$. On note $\mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}$ par cet homomorphisme et on pose :

$$\mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F} = (\mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}}/W^{M'})^\Gamma.$$

De l'homomorphisme ci-dessus se déduit une application :

$$\eta_{\mathcal{Z},F} \colon \mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F} \longrightarrow \mathcal{Z}^{M}_{G-\mathrm{reg},F}.$$

On définit $\tilde{\tau}_F \colon \mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}} \to \tilde{\mathcal{Y}}^{M'}_{G-\mathrm{reg}}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}'^{\,\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}} & \longrightarrow & \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{G-\mathrm{reg}} \\ \Big\downarrow \tilde{\tau}_F & & \Big\downarrow \tilde{\zeta}_F \\ \tilde{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}} & \tilde{\mathcal{Z}} \end{array}$$

De $\tilde{\tau}_F$ se déduit une application :

$$\tau_F \colon \mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F} \longrightarrow \mathcal{Y}^{M'}_{G-\mathrm{reg}}.$$

Cette application est surjective ([11], lemme 11.3.2).

Soit $z'_F \in \mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F}$. Notons $z_F = \eta_{\mathcal{Z},F}(z'_F)$. Via l'inclusion naturelle $\mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F} \subset \mathcal{Z}^{M'}_{M'-\mathrm{reg},F}$, z'_F paramètre une classe de conjugaison stable $C(z'_F) \subset \mathfrak{m}'_{D^{M'}}$ d'éléments semi-simples et G-réguliers. L'élément z_F paramètre la classe de conjugaison stable $C(z_F) \subset \mathfrak{m}_{D^M}$ qui lui correspond.

On définit comme en [11], 11.4 une fonction $X \mapsto \Delta(z'_F, X)$ sur $C(z_F)$. Si $d \in D^M$ est tel que $C(z_F) \cap \mathfrak{m}_d$ n'est pas vide, la restriction de cette fonction à $C(z_F) \cap \mathfrak{m}_d$ est un facteur de transfert de Langlands-Shelstad, privé du facteur Δ_{IV}, et convenablement normalisé. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_D)$, on pose :

$$J^G_{M'}(z'_F, f) = \sum_X \Delta(z'_F, X) J^G_M(X, f),$$

où X parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison ordinaire dans $C(z_F)$.

8.3. Proposition. — *Soit $y \in \mathcal{Y}^{M'}_{G-\text{reg}}$. Il existe une forme linéaire $J^G_{M'}(y, .)$ sur $\mathcal{S}$ vérifiant la condition suivante. Soient $F \in CL_q$, $z'_F \in \mathcal{Z}^{M'}_{G-\text{reg},F}$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. Supposons $\tau_F(z'_F) = y$. Alors on a l'égalité :*

$$J^G_{M'}(z'_F, \text{rea}_F(\varphi)) = J^G_{M'}(y, \varphi).$$

La preuve est similaire à celle de la proposition 12.1 de [11]. $\square$

8.4. Posons $\hat{T} = X^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. On définit les sous-groupes $\hat{Z}^M$ et $\hat{Z}^G$ de $\hat{T}$ comme on a défini $\hat{Z}^{M'}$ en 8.1. Soit $s' \in s\eta^{-1}(\hat{Z}^{M,\Gamma})$. Posons :

$$\check{\Sigma}^{G(s')} = \left\{x \in X'_* \,; \eta(x) \in \check{\Sigma} \text{ et } x(s') = 1\right\} ;$$
$$\Sigma^{G(s')} = \left\{\eta^{-1}(\alpha) \,; \alpha \in \Sigma \text{ et } \check{\alpha} \in \eta(\check{\Sigma}^{G(s')})\right\}.$$

On introduit la base $\Delta^{G(s')}$ de $\Sigma^{G(s')}$ associée au sous-ensemble positif $\eta^{-1}(\Sigma^+) \cap \Sigma^{G(s')}$ de $\Sigma^{G(s')}$ et la base correspondante $\check{\Delta}^{G(s')}$ de $\check{\Sigma}^{G(s')}$. On pose :

$$\mathcal{D}^{G(s')} = (X'^*, \Sigma^{G(s')}, \Delta^{G(s')}, X'_*, \check{\Sigma}^{G(s')}, \check{\Delta}^{G(s')}).$$

C'est une donnée de racines munie d'une action de Γ. Le triplet $(\mathcal{D}^{G(s')}, \eta, s')$ est une donnée endoscopique de $\mathcal{D}$. La donnée $\mathcal{D}^{M'}$ est une donnée de Lévi standard de $\mathcal{D}^{G(s')}$.

Notons $\tilde{\mathcal{Z}}^{G(s')}$ l'analogue de $\tilde{\mathcal{Z}}$ quand on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^{G(s')}$. On définit comme en [11], 11.2 une application que nous noterons $\tilde{\epsilon}^{s'} : \tilde{\mathcal{Y}} \to \tilde{\mathcal{Z}}^{G(s')}$. Elle se quotiente en une application $\epsilon^{s'} : \mathcal{Y}^{M'}_{G-\text{reg}} \to \mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\text{reg}}$.

Pour $F \in CL_q$, de l'injection naturelle $\mathfrak{t}'^{\,\text{mod}}_{G-\text{reg}} \to \mathfrak{t}'^{\,\text{mod}}_{G(s')-\text{reg}}$ se déduit une injection $\mathcal{Z}^{M'}_{G-\text{reg},F} \to \mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\text{reg},F}$. L'application $\epsilon^{s'}$ est faite pour rendre le diagramme suivant commutatif :

(1)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}^{M'}_{G-\text{reg},F} & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\text{reg},F} \\ \big\downarrow \tau_F & & \big\downarrow \zeta^{M'}_{G(s'),F} \\ \mathcal{Y}^{M'}_{G-\text{reg}} & \xrightarrow{\epsilon_{s'}} & \mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\text{reg}} \end{array}$$

Introduisons la notion de donnée endoscopique elliptique. Par exemple, on dit que la donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{M'},\eta,s)$ de $\mathcal{D}^M$ est elliptique si $\hat{Z}^{M,\Gamma,0}=\eta(\hat{Z}^{M',\Gamma,0})$, où $\hat{Z}^{M,\Gamma,0}$ et $\hat{Z}^{M',\Gamma,0}$ sont les composantes neutres des groupes de points fixes $\hat{Z}^{M,\Gamma}$ et $\hat{Z}^{M',\Gamma}$. Cette condition équivaut à $\mathfrak{a}_M=\eta(\mathfrak{a}_{M'})$. Supposons que $(\mathcal{D}^{M'},\eta,s)$ soit elliptique. On note $\tilde{\mathcal{E}}_{M'}(G)$ l'ensemble des $s'\in s\eta^{-1}(\hat{Z}^{M,\Gamma})$ tels que la donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{G(s')},\eta,s')$ de $\mathcal{D}$ soit elliptique. Pour un tel s', on pose :

$$i_{M'}(G,G(s'))=[\hat{Z}^{M',\Gamma}\colon \hat{Z}^{M,\Gamma}][\hat{Z}^{G(s'),\Gamma}\colon \hat{Z}^{G,\Gamma}]^{-1}.$$

Que se passe-t-il quand on remplace s' par un élément de sa classe $s'\eta^{-1}(\hat{Z}^{G,\Gamma})$? Les objets $\mathcal{D}^{G(s')}$, $\mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\mathrm{reg}}$, $\epsilon^{s'}$ ne changent pas. La condition que $(\mathcal{D}^{G(s')},\eta,s')$ soit elliptique non plus. Quand elle est vérifiée, la constante $i_{M'}(G,G(s'))$ ne change pas non plus. Cela nous autorise à poser $\mathcal{E}_{M'}(G)=\tilde{\mathcal{E}}_{M'}(G)/\eta^{-1}(\hat{Z}^{G,\Gamma})$ et à considérer que nos différents termes $\mathcal{D}^{G(s')}$, $\mathcal{Z}^{M'}_{G(s')-\mathrm{reg}}$ *etc.* sont définis pour s' dans cet ensemble. La seule chose qui change est le facteur de transfert. Soient $F\in CL_q$, $z'_F\in\mathcal{Z}^{G(s')}_{G-\mathrm{reg},F}$, posons $z_F=\eta_{\mathcal{Z},F}(z'_F)$ et notons $C(z_F)\subset\mathfrak{g}_D$ la classe de conjugaison stable paramétrée par z_F. Comme en 8.2, on définit un facteur de transfert sur $C(z_F)$ que, pour plus de précision, nous notons ici $X\mapsto\Delta^{s'}(z'_F,X)$. Remplaçons s' par $s'\eta^{-1}(a)$, où $a\in\hat{Z}^{G,\Gamma}$. Rappelons que D est muni d'une structure de groupe abélien. D'après [7], son dual de Pontryagin est $\hat{Z}^{G,\Gamma}/\hat{Z}^{G,\Gamma,0}$. En envoyant a dans ce quotient, a définit un caractère de D, que l'on note χ_a. Pour $d\in D$ et $X\in C(z_F)\cap\mathfrak{g}_d$, on vérifie l'égalité :

$$\Delta^{s'\eta^{-1}(a)}(z'_F,X)=\chi_a(d)^{-1}\Delta^{s'}(z'_F,X).$$

8.5. On dit que $\mathcal{D}$ est non ramifiée si le groupe d'inertie I agit trivialement sur X^* et X_*. Supposons qu'il en soit ainsi. On peut supposer, et on suppose, que D contient l'élément $d_0=0$. Le point 0 appartient à V^{d_0}. On peut choisir, et on choisit, le point spécial v_{d_0} égal à 0. En effet, ce point est spécial et même hyperspécial (on a $\bar{\mathbf{G}}_{d_0,v_{d_0}}=\bar{\mathbf{G}}$). On note $\phi_0\in\Phi^{d_0}$ la facette qui le contient et $\varphi_0\in\mathcal{S}(\phi_0)$ la fonction constante sur $\bar{\mathfrak{g}}_{d_0,\phi_0}$, de valeur $|\bar{G}|^{-1}q^{\dim(\bar{\mathbf{G}})/2}$ (pour $F\in CL_q$, cette valeur n'est autre que $\mathrm{mes}(G_{d_0,v_{d_0}})^{-1}$).

Supposons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^M$ non ramifiés. On définit une fonction $r^G_{M'}$ sur $\mathcal{Y}^{M'}_{G-\mathrm{reg}}$ par $r^G_{M'}(y)=J^G_{M'}(y,\varphi_0)$ pour tout $y\in\mathcal{Y}^{M'}_{G-\mathrm{reg}}$. De même, soit $F\in CL_q$, on définit une fonction $r^G_{M',F}$ sur $\mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F}$ par

$$r^G_{M',F}(z'_F)=J^G_{M'}(z'_F,\mathrm{rea}_F(\varphi_0)).$$

Que se passe-t-il quand on remplace s par un élément $s' \in s\eta^{-1}(\hat{Z}^{M,\Gamma})$? Rien ne change, sauf le facteur de transfert. On a expliqué dans le paragraphe précédent comment il se transformait (on l'a expliqué pour la donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{G(s')}, \eta, s')$ de $\mathcal{D}$ qu'il convient de remplacer par la donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{M'}, \eta, s)$ de $\mathcal{D}^M$). Il est multiplié par une fonction sur $\mathfrak{m}_{D^M}$ constante sur chaque $\mathfrak{m}_d$, pour $d \in D^M$, et y valant $\chi(d)$, où χ est un caractère de D^M. Mais φ_0 est un élément de $\mathcal{S}^{d_0}$, où $d_0 = 0$ est l'élément neutre de D. Donc le facteur de transfert ne change pas sur les éléments de $\mathfrak{m}_{D^M}$ qui sont conjugués à un élément du support de $\mathrm{rea}_F(\varphi_0)$. Donc la fonction $r^G_{M',F}$ ne change pas. De même, la fonction $r^G_{M'}$ ne change pas.

8.6. Considérons le cas particulier où $\mathcal{D}^{M'} = \mathcal{D}^M$ et η est l'identité. L'élément s appartient à $\hat{Z}^{M,\Gamma}$. L'ensemble $\mathcal{E}_M(G)$ est inclus dans $\hat{Z}^{M,\Gamma}/\hat{Z}^{G,\Gamma}$ et contient l'élément neutre 1 de ce groupe. On a $\mathcal{D}^{G(1)} = \mathcal{D}$. Si $s' \in \mathcal{E}_M(G) \smallsetminus \{1\}$, $\Sigma^{G(s')}$ est strictement inclus dans Σ.

Supposons $\mathcal{D}$ non ramifiée. Remarquons que $\mathcal{Y}^M_{G-\mathrm{reg}} = \mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$. On peut considérer que r^G_M est définie sur $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$. Pour $s' \in \mathcal{E}_M(G)$, on peut aussi considérer que $\epsilon^{s'}$ est une application de $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$ dans $\mathcal{Z}^M_{G(s')-\mathrm{reg}}$. Cela permet de définir par récurrence sur le nombre d'éléments de Σ une fonction s^G_M sur $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg}}$ par l'égalité :

$$s^G_M = r^G_M - \sum_{s' \in \mathcal{E}_M(G) \smallsetminus \{1\}} i_M(G, G(s')) s^{G(s')}_M \circ \epsilon^{s'}. \tag{2}$$

Soit $F \in CL_q$. Pour tout $s' \in \mathcal{E}_M(G)$, on a les inclusions :

$$\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F} \subset \mathcal{Z}^M_{G(s')-\mathrm{reg},F} \subset (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}/W^M)^\Gamma.$$

On définit par récurrence sur le nombre d'éléments de Σ une fonction $s^G_{M,F}$ sur $\mathcal{Z}^M_{G-\mathrm{reg},F}$ par :

$$s^G_{M,F} = r^G_{M,F} - \sum_{s' \in \mathcal{E}_M(G) \smallsetminus \{1\}} i_M(G, G(s')) s^{G(s')}_{M,F}. \tag{3}$$

Lemme. — *Pour tout $F \in CL_q$, on a l'égalité $s^G_{M,F} = s^G_M \circ \zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}$.*

Démonstration. — L'application τ_F coïncide dans notre cas particulier avec $\zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}$. La proposition 8.3 nous dit donc que $r^G_{M,F} = r^G_M \circ \zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}$. Pour $s' \in \mathcal{E}_M(G) \smallsetminus \{1\}$, on peut supposer par récurrence que $s^{G(s')}_{M,F} = s^{G(s')}_M \circ \zeta^M_{G(s')-\mathrm{reg},F}$. Mais $\zeta^M_{G(s')-\mathrm{reg},F} = \epsilon^{s'} \circ \zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}$ d'après la commutativité du diagramme 8.4(1). Donc $s^{G(s')}_{M,F} = s^{G(s')}_M \circ \epsilon^{s'} \circ \zeta^M_{G-\mathrm{reg},F}$. L'assertion du lemme résulte alors des formules de définition (2) et (3). □

8.7. Revenons aux hypothèses de 8.1, mais supposons que les données $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{M'}$ sont non ramifiées et que la donnée endoscopique $(\mathcal{D}^{M'}, \eta, s)$ de $\mathcal{D}^M$ est elliptique. Soit $F \in CL_q$. Arthur a posé une conjecture appelée lemme fondamental pondéré ([3], conjecture 5.1). Celle-ci concerne les groupes, mais elle se descend immédiatement aux algèbres de Lie en la conjecture suivante :

$(LFP)_F$ *pour tout* $z'_F \in \mathcal{Z}^{M'}_{G-\mathrm{reg},F}$, *on a l'égalité :*

$$r^G_{M',F}(z'_F) = \sum_{s' \in \mathcal{E}_{M'}(G)} i_{M'}(G, G(s')) s^{G(s')}_{M',F}(z'_F).$$

Posons la conjecture analogue, où F n'apparaît plus :

(LFP) *on a l'égalité :*

$$r^G_{M'} = \sum_{s' \in \mathcal{E}_{M'}(G)} i_{M'}(G, G(s')) s^{G'(s)}_{M'} \circ \epsilon^{s'}.$$

Théorème. — *Pour tout $F \in CL_q$, l'assertion $(LFP)_F$ équivaut à (LFP).*

Démonstration. — Soit $F \in CL_q$. D'après la proposition 8.3, le membre de gauche de $(LFP)_F$ est égal à celui de (LFP) évalué au point $\tau_F(z'_F)$. La commutativité du diagramme 8.4(1) et le lemme 8.6 montrent qu'il en est de même des membres de droite. Alors l'égalité de $(LFP)_F$ équivaut à celle de (LFP), restreinte à l'image de l'application τ_F. Mais τ_F est surjective. □

Il résulte du théorème que la validité de $(LFP)_F$ est indépendante de $F \in CL_q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arthur, « The trace formula in invariant form », *Ann. of Math. (2)* **114** (1981), nº 1, p. 1-74.

[2] ———, « The invariant trace formula. I. Local theory », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), nº 2, p. 323-383.

[3] ———, « A stable trace formula. I. General expansions », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), nº 2, p. 175-277.

[4] P. Cartier, « Representations of p-adic groups : a survey », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 111-155.

[5] R. Cluckers, T. C. Hales & F. Loeser, « Transfer principle for the fundamental lemma », preprint, 2007.

[6] R. Cluckers & F. Loeser, « Fonctions constructibles exponentielles, transformation de Fourier motivique et principe de transfert », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), n° 12, p. 741-746.

[7] R. E. Kottwitz, « Stable trace formula : elliptic singular terms », *Math. Ann.* **275** (1986), n° 3, p. 365-399.

[8] R. P. Langlands & D. Shelstad, « On the definition of transfer factors », *Math. Ann.* **278** (1987), n° 1-4, p. 219-271.

[9] J. D. Rogawski, « On modules over the Hecke algebra of a p-adic group », *Invent. Math.* **79** (1985), n° 3, p. 443-465.

[10] J. Tits, « Reductive groups over local fields », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 29-69.

[11] J.-L. Waldspurger, « Endoscopie et changement de caractéristique », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), n° 3, p. 423-525.

Manuscrit reçu le 17 décembre 2007,
accepté le 16 janvier 2009.

Jean-Loup WALDSPURGER
CNRS
Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris (France)
waldspur@math.jussieu.fr