ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Si Tiep DINH, Krzysztof KURDYKA & Patrice ORRO

Gradient horizontal de fonctions polynomiales

Tome 59, nº 5 (2009), p. 1999-2042.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_5_1999_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
59, 5 (2009) 1999-2042

GRADIENT HORIZONTAL DE FONCTIONS POLYNOMIALES

par Si Tiep DINH, Krzysztof KURDYKA & Patrice ORRO

Résumé. — Nous étudions les trajectoires du gradient sous-riemannien (appellé horizontal) de fonctions polynômes. Dans ce cadre l'inégalité de Łojasiewicz n'est pas valide et une trajectoire du gradient horizontal peut être de longueur infinie, et peut même s'accumuler sur une courbe fermée. Nous montrons que ces comportement sont exceptionnels ; et que, pour une fonction générique les trajectoires de son gradient horizontal ont des propriétés similaires au cas du gradient riemannien. Pour obtenir la finitude des longueurs des trajectoires, nous changeons la métrique sous-riemanienne de façon convenable. Nous considérons une classe de distributions dites scindées, incluant celles d'Heisenberg et de Martinet. Pour un polynôme générique f l'ensemble V_f des points critiques horizontaux de f est un ensemble algébrique lisse de dimension 1 ou est vide et la restriction $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse. Nous montrons aussi que pour un polynôme générique f, chaque trajectoire du gradient horizontal (qui approche V_f) possède une limite comme dans le cas riemannien étudié par S. Łojasiewicz.

Abstract. — We study trajectories of sub-Riemannian (also called horizontal) gradient of polynomials. In this setting Łojasiewicz's gradient inequality does not hold and a trajectory of a horizontal gradient may be of infinite length, moreover it may accumulate on a closed curve. We show that these phenomena are exceptional; for a generic polynomial function the behavior of the trajectories of horizontal gradients are similar to the behavior of the trajectories of a Riemannian gradient. To obtain the finiteness of the length of trajectories we change suitably the sub-Riemannian metric. We consider a class of splitting distributions which contains those of Heisenberg and Martinet. For a generic polynomial f the set V_f of horizontal critical points, is a smooth algebraic set of dimension 1 or the empty set, moreover $f|_{V_f}$ is a Morse function. We show that for a generic polynomial function any trajectory of the horizontal gradient (which approaches V_f) has a limit, as in the Riemannian case studied by S. Łojasiewicz.

Mots-clés : semi-algébrique, sous-riemannien, généricité, gradient, inégalité de Łojasiewicz.
Classification math. : 14P10, 53C17, 58Kxx, 58A30, 58K14, 93F14.

1. Introduction

L'étude du flot du gradient riemannien fait l'objet de nombreux travaux dans divers domaines des mathématiques. Le flot de ces champs permet de résoudre plusieurs problèmes, par exemple d'optimisation [15], d'analyse en composantes principales [28], [37], de contrôle optimal [18], [36], de réduction de bruit [30], d'estimation de la pose [2], le problème de Procrustes [35], ...

Dans cet article nous nous proposons d'étudier les trajectoires du gradient sous-riemannien (appelé aussi gradient horizontal) de fonctions polynômes, où de façon plus générale de fonctions de classe C^∞. La problématique est la suivante : étant donné une variété analytique M de dimension n, on définit une structure sous-riemannienne analytique sur M en se donnant une distribution analytique Δ de dimension $p < n$ sur M, c'est-à-dire un sous-fibré analytique de dimension p du fibré tangent TM, muni d'une métrique analytique g_{SR} sur Δ, appelée métrique sous-riemannienne où de Carnot - Carathéodory. On suppose aussi que Δ vérifie la condition d'Hörmander, ce qui implique que la distribution est non-intégrable. Soient $X_1, \cdots, X_p$, des champs de vecteurs analytique orthonormés qui engendrent (localement) Δ, on définit le **gradient horizontal** d'une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ par

$$\nabla^h f = \sum_{i=1}^{p} (X_i f) X_i.$$

On désigne par $V_f = \{\nabla^h f = 0\}$ **l'ensemble des points critiques horizontaux** de f.

Rappelons d'abord un résultat classique, dû à S. Łojasiewicz, sur le gradient riemannien d'une fonction au voisinage d'un point critique. Ce résultat est appelé l'inégalité de Łojasiewicz pour le gradient. La première version de cette inégalité est donnée par S. Łojasiewicz [22], [23], [5] pour les fonctions analytiques :

soit f une fonction analytique dans un voisinage ouvert U d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $\nabla f(x_0) = 0$, alors il existe des constantes $C > 0$, $1 > \alpha > 0$ telles que

$$||\nabla f(x)|| \geqslant C|f(x) - f(x_0)|^\alpha \tag{1.1}$$

pour tout $x \in U$ assez proche de x_0. Des résultats sur l'inégalité de Łojasiewicz pour d'autres classes de fonctions ont été ensuite développés, par exemple, pour les fonctions sous-analytiques [21], ou pour les fonctions définissables dans les structures o-minimales [19]. Notons que si f est un polynôme alors l'exposant α peut être borné par une constante qui ne depend que du nombre de variables et du degré de f, voir remarque 2.9.

Une conséquence notable de l'inégalité (1.1) est la finitude locale de la longueur des trajectoires du gradient. De plus, cette longueur est bornée uniformément par une constante A. Ce résultat a été démontré par S. Łojasiewicz dans le cas analytique [25], [24]. Dans le cas polynomial, D. D'Acunto et K. Kurdyka [9] ont démontré récemment que la constante A ne dépend que du degré et du nombre de variables des polynômes. L'inégalité de Łojasiewicz a aussi des applications aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles [7], [17], [31]. Elle est un outil efficace pour étudier la stabilité des champs de gradient [1].

Puisqu'une trajectoire du gradient d'une fonction analytique est de longueur finie, elle possède une limite, et nous avons le théorème de Łojasiewicz suivant

Théorème 1.1. — ([25],[24]) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n$ une fonction analytique, et soit $x(t)$ une trajectoire de ∇f. Si il existe une suite t_m telle que $x(t_m) \to x_0$ lorsque $t_m \to \infty$, alors la longueur de $x(t)$ est finie et donc $x(t) \to x_0$ quand $t \to \infty$.*

Un autre problème concernant le gradient est la conjecture dite du gradient posée par R. Thom [34] : soit $x(t)$ une trajectoire du gradient d'une fonction analytique telle que $x(t) \to x_0$, alors la limite suivante existe

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t) - x_0}{|x(t) - x_0|}.$$

Cette conjecture a été résolue par K. Kurdyka, T. Mostowski et A. Parusiński [20].

Le but cet article est d'étudier dans quelle mesure, le comportement du gradient horizontal d'une fonction polynomiale ou de classe C^∞ et de son flot ressemble à celui du gradient riemannien ; et quels sont les phénomènes nouveaux. En particulier est-ce-que les résultats mentionnés ci-dessus dans le cas riemannien demeurent valides.

Premièrement, on peut observer que l'inégalité de Łojasiewicz n'est pas valide pour le gradient horizontal, comme le montre l'exemple suivant : le gradient horizontal du polynôme $f = 2x_3$ pour la distribution d'Heisenberg (3.1) est $\nabla^h f = -x_2 X_1 + x_1 X_2$. Ainsi V_f est l'axe x_3, et, puisque la restriction de f à V_f n'est pas constante, en effet $f(V_f) = \mathbb{R}$, l'inégalité de Łojasiewicz (1.1) n'est pas vérifiée.

La deuxième observation est qu'une trajectoire du gradient horizontal peut être de longueur infinie, et peut même s'accumuler sur une courbe fermée, comme le montre l'exemple de la section 5.3.2.

Toutefois nous montrons que ces exemples sont exceptionnels dans un certain sens, et que, pour une fonction générique f, les trajectoires de son gradient horizontal ont des propriétés similaires au cas du gradient riemannien. Nous considérons une classe de distributions scindée, la définition de cette classe est donné dans la section 4, cette classe contient par exemple la distribution d'Heisenberg, celle dite de Martinet, ainsi que les structures de contact.

Donnons maintenant les résultats principaux de ce travail. Pour un entier fixé $n \geqslant 1$ notons $\mathbb{R}_d[x]$ l'espace de polynômes à n variables de degré au plus d. Fixons une distribution scindée. Le premier résultat concerne la dimension de l'ensemble V_f des points critiques horizontaux pour un polynôme générique.

Théorème 4.4. — *Génériquement, V_f est un ensemble algébrique lisse de dimension 1 ou est vide, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $K_d \subset \mathbb{R}_d[x]$, semi-algébrique ouvert et dense, tel que V_f est lisse de dimension 1 ou est vide, pour tout $f \in K_d$.*

Ensuite nous montrons :

Théorème 4.12. — *Génériquement, la restriction $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$L_d = \{f \in K_d : f|_{V_f} \text{ est une fonction de Morse}\} \tag{1.2}$$

contient un ensemble semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_d[x]$. En conséquence, pour tout $f \in L_d$ l'ensemble $V_f \cap f^{-1}(c)$ ne contient qu'un nombre fini de points (il peut être vide) pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Une conséquence immédiate du théorème 4.12 est que l'ensemble des points critiques horizontaux V_f ne contient aucune courbe horizontale. Des versions analogues dans le cadre des fonctions C^∞ de ces deux théorèmes sont les théorèmes 4.18 et 4.20 donnés dans la section 4.3.

Pour obtenir la finitude des longueurs des trajectoires, nous changeons la métrique sous-riemanienne g_{SR} de façon convenable. Pour un $\gamma > 0$, posons $\delta = d_{V_f}^{2\gamma} g_{SR}$, où d_{V_f} est la fonction distance à V_f prise avec une métrique riemanienne g, qui prolonge g_{SR}. Alors δ est une métrique sous-riemanienne qui est dégénérée sur V_f. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme. L'exposant γ est choisi de la façon suivante : par inégalité de Łojasiewicz, (voir section 2), il existe des constantes $C_1, C_2 >$

$0, \gamma \geqslant 1 \geqslant \beta > 0$ telles que

$$C_1 d_{V_f}^{\gamma}(x) \leqslant ||\nabla^h f(x)|| \leqslant C_2 d_{V_f}^{\beta}(x) \tag{1.3}$$

pour tout $x \in B$. Pour la métrique δ les trajectoires de $\nabla^h f$ ont des longueurs uniformément bornées. Précisément nous montrons :

Théorème 5.10. — *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme, $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et δ la métrique associée. Si $x : [t_1, t_2] \to B$ est une trajectoire de $\nabla^h f$, alors la longueur de $x(t)$, pour la métrique δ, est bornée par*

$$\frac{|f(x(t_2)) - f(x(t_1))|}{C_1}$$

où C_1 est une constante associée à B par l'inégalité de Łojasiewicz (1.3).

Le théorème suivant montre que pour un polynôme générique f, chaque trajectoire de $\nabla^h f$ possède une limite comme dans le cas riemannien étudié par S. Łojasiewicz.

Théorème 5.14. — *Soit un $f \in \mathbb{R}_d[x]$ un polynôme générique, précisément supposons que $f \in L_d$, où L_d est un ouvert dense semi-algébrique donné par le théorème 4.12. Soient $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $x(t) \subset B$ une trajectoire de $\nabla^h f$. Supposons que $x(t)$ s'approche de V_f, c'est-à-dire qu'il existe une suite $t_m \to t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $d_{V_f}(x(t_m)) \to 0$. Alors $x(t)$ a une limite appartenant à $V_f \cap B$: il existe $x_0 \in V_f \cap B$ tel que*

$$dist_R(x(t), x_0) \to 0 \text{ quand } t \to t_0$$

où $dist_R$ est la distance riemannienne associée à la métrique g donnée par la formule (4.5).

Notons que la métrique δ induit une distance de Carnot-Carathéodory (voir section 3) sur $\mathbb{R}^n \setminus V_f$. En général, cette distance ne se prolonge pas en une distance sur $\mathbb{R}^n$, mais pour $f \in L_d$ nous montrons

Théorème 5.17. — *Pour tout $f \in L_d$, où l'ensemble semi-algébrique dense $L_d \subset \mathbb{R}_d[x]$ est donné par le théorème 4.12, la fonction $dist_1$ associée à f par la formule* (5.6) *est une distance sur $\mathbb{R}^n$.*

On peut observer que ce théorème implique le théorème 5.14.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans la section 2 nous rappelons les éléments nécessaires de la théorie de transversalité et de la géométrie semi-algébrique. Dans la section 3 nous rappellons les résultats fondamentaux sur les structures sous-riemanniennes. Les preuves du théorème 4.4 et du théorème 4.12 sont données dans la section 4. Finalement dans la section 5 nous montrons le théorème 5.17, et nous donnons plusieurs exemples significatifs.

Le gradient horizontal apparaît, par exemple, dans un cadre mesure géométrique sur les groupes de Carnot dans [27], en théorie du potentiel sur les groupes de Carnot dans [3]. A notre connaisance l'étude des trajectoires du gradient horizontal n'a pas encore été entreprise du point de vue que nous avons envisagé.

2. Transversalité et géométrie semi-algébrique

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats sur la transversalité, que l'on peut trouver par exemple dans [16],[12],[14],[26]. Soient X, Y, Z, P des variétés C^∞, $f : X \to Y$ une fonction C^∞, et S une sous-variété C^∞ de Y.

Définition 2.1. — *On dit que f est transverse à S, si pour tout $x \in f^{-1}(S)$ on a*

$$d_x f(T_x X) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} Y.$$

Si f est transverse à S sur une partie A de X, on note $f \pitchfork_A S$ et parfois de manière abrégée $f \pitchfork S$. On peut remarquer que si f est une submersion, alors elle est transverse à toute sous-variété de Y.

Remarque 2.2. — Dans le cas où $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$, considérons l'application gradient $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Si $\nabla f \pitchfork \{0\}$, alors f est une fonction de Morse.

Proposition 2.3. — *Si $f \pitchfork S$, alors l'image réciproque $f^{-1}(S)$ de S est une sous-variété de X. De plus, si $codim_Y S \leqslant dim X$ et $f(X) \cap S \neq \emptyset$, on a*

$$codim_X f^{-1}(S) = codim_Y S.$$

Supposons $codim_Y S > dim X$, alors $f \pitchfork S$ si et seulement si $f(X) \cap S = \emptyset$.

Proposition 2.4. — ([14]) *Soit $g : Y \to Z$ une submersion C^∞ et soit $z \in Z$. Alors, l'application composée $g \circ f$ est une submersion sur $f^{-1}(g^{-1}(z))$ si et seulement si $f \pitchfork g^{-1}(z)$.*

L'ensemble des applications transverses à S est un ouvert dense, ainsi la transversalité est une propriété générique et stable, comme l'indiquent les deux résultats suivants

Théorème 2.5. — ([12],[14]) *Supposons S fermé. L'ensemble*

$$\{g \in C^\infty(X,Y) : f \pitchfork S\}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie de Whitney.

De plus, soit $J^r(X,Y)$ l'espace de r-jets, et soit V une sous-variété fermée de $J^r(X,Y)$, alors

Théorème 2.6. — ([16],[26]) *(théorème de transversalité de Thom) L'ensemble*

$$\{g \in C^\infty(X,Y) : j^r f \pitchfork V\}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie de Whitney.

Nous utiliserons dans le cadre semi-algébrique le résultat suivant de transversalité à paramètre :

Théorème 2.7. — ([12],[14]) *(théorème de transversalité à paramètre) Soit $F : P \times X \to Y$ une application C^∞. Posons $f_p = F(p,.) : X \to Y$. Si $F \pitchfork S$ et S fermé, alors l'ensemble*

$$D = \{p \in P : f_p \pitchfork S\}$$

est ouvert dense dans P. De plus, si X, Y, S, P sont des ensembles semi-algébriques et si F est une application semi-algébrique, alors D est aussi semi-algébrique.

Preuve. — La démonstration pour l'ouverture et la densité de D est faite dans [12],[14]. La méthode utilisée permet aussi de prouver que D est semi-algébrique dans le cas où X, Y, S, P et F sont semi-algébriques. □

Nous ferons aussi référence aux deux théorèmes suivants :

Théorème 2.8. — ([4],[6]) *(inégalité de Łojasiewicz) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique compact, soient $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues semi-algébriques telles que*

$$\{x \in A : g(x) = 0\} \supset \{x \in A : f(x) = 0\},$$

alors, il existe un nombre entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $C \geqslant 0$ tels que pour tout $x \in A$

$$|g(x)|^N \leqslant C|f(x)|.$$

Remarque 2.9. — Voici une version quantitative de l'inégalité de Łojasiewicz (1.1) établie dans [11] et [10] : supposons que f soit un polynôme de degré d à n variables, alors $\alpha \leqslant 1 - R(d,n)^{-1}$, où $R(d,n) = d(3d-3)^{n-1}$. Une conséquence intéressante est l'inégalité de Łojasiewicz suivante : soit

$g \geqslant 0$ un polynôme de degré d à n variables, alors pour tout compact $B \subset \mathbb{R}^n$ il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \leqslant R(d,n)$, tels que

$$\operatorname{dist}(x, g^{-1}(0))^N \leqslant |f(x)|,\ x \in B. \tag{2.1}$$

En effet la longueur de la trajectoire de $-\nabla g$ qui joint un point $x \in B$ à l'ensemble $g^{-1}(0)$ est majorée par $c|f(x)|^{1-\alpha}$, pour les détails voir [25], [20] ; alors l'estimation ci-dessus pour α implique cette inégalité.

Théorème 2.10. — ([6]) *Soit A un ensemble semi-algébrique dans $\mathbb{R}^n$. Si A est dense dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe un ensemble semi-algébrique ouvert dense B dans $\mathbb{R}^n$ tel que $B \subset A$.*

3. Structures sous-riemanniennes

Définition 3.1. — *Une structure sous-riemannienne C^∞ sur M est la donnée d'une application C^∞*

$$G : T^*M \longrightarrow TM, \quad (x,\xi) \longmapsto (x, G_x\xi)$$

où, pour tout x de M

$$\begin{aligned} G_x : T_x^*M &\longrightarrow T_xM \\ \xi &\longmapsto G_x\xi \end{aligned}$$

est une application linéaire vérifiant

i) *$\langle \lambda, G_x\xi\rangle = \langle \xi, G_x\lambda\rangle$ pour tout λ et ξ dans T_x^*M, où $\langle \lambda, G_x\xi\rangle$ (resp. $\langle \xi, G_x\lambda\rangle$) est la valeur de la forme λ (resp. ξ) appliquée à $G_x\xi$ (resp. $G_x\lambda$),*

ii) *$\langle \xi, G_x\xi\rangle \geqslant 0$ pour tout ξ dans T_x^*M,*

iii) *l'image de G, $\Delta = ImG$, est un sous-fibré C^∞ du fibré tangent, ou encore est une distribution sur M.*

Dans le cas où, pour tout $x \in M$ l'application G_x est un isomorphisme, la variété M est riemannienne, la métrique étant donnée par G.

Pour tout $x \in M$ et pour $u_1, u_2 \in T_x^*M$, posons $v_1 = G_x(u_1), v_2 = G_x(u_2)$. On définit alors un produit scalaire sur Δ_x :

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, G_x(u_2)\rangle = \langle v_2, G_x(u_1)\rangle.$$

Ceci nous emmène à la définition suivante d'une structure sous-riemannienne, qui est équivalente à la précédente ([32]) :

Définition 3.2. — *Une structure sous-riemannienne C^∞ sur M est la donnée de :*

i) *une distribution de classe C^∞, notée Δ, sur M.*

ii) *une métrique C^∞, notée g_{SR}, sur Δ (un produit scalaire sur la distribution en chaque point).*

Nous noterons cette structure sous-riemannienne (Δ, g_{SR}).

Exemple 3.3 (Heisenberg). — Dans $\mathbb{R}^3$, la distribution d'Heisenberg est engendrée par deux champs de vecteurs polynomiaux :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2}x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\[2ex] X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Choisissons $g_{SR} = dx_1^2 + dx_2^2$, alors g_{SR} est une métrique sous-riemannienne rendant le système $\{X_1, X_2\}$ orthonormé. L'application G (voir définition 3.1) qui donne cette structure sous-riemannienne est définie par

$$G(x, dx_1) = X_1, G(x, dx_2) = X_2, G(x, dx_3 + \frac{1}{2}x_2dx_1 - \frac{1}{2}x_1dx_2) = 0.$$

Exemple 3.4 (Martinet). — Dans $\mathbb{R}^3$, la distribution de Martinet est engendrée par deux champs de vecteurs polynomiaux :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\[2ex] X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2}x_1^2\dfrac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Choisissons $g_{SR} = dx_1^2 + dx_2^2$, alors g_{SR} est une métrique sous-riemannienne rendant le système $\{X_1, X_2\}$ orthonormé. L'application G qui donne cette structure sous-riemannienne est déterminée par

$$G(x, dx_1) = X_1, G(x, dx_2) = X_2, G(x, dx_3 - \frac{1}{2}x_1^2dx_2) = 0.$$

DÉFINITION 3.5. — *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On définit le gradient horizontal de f pour la métrique G par $\nabla^h f(x) := G(d_x f)$. Si $X_1, \cdots, X_p$ est une base orthonormée locale de la distribution on a*

$$\nabla^h f = \sum_{i=1}^{p} (X_i f) X_i. \tag{3.3}$$

Remarque 3.6. — Si une métrique riemannienne g étend la métrique G, et si $X_1, \cdots, X_p, X_{p+1}, \cdots, X_n$ est une base orthonormée locale pour g, le gradient de f s'écrit

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} (X_i f) X_i.$$

Ainsi $\nabla^h f$ est la projection orthogonale de ∇f sur la distribution.

Soit Δ une distribution sur M. Posons $\Delta^1 = \Delta$. On définit Δ^r par récurrence de la manière suivante : pour tout $x \in M$, Δ_x^{r+1} est l'espace engendré par les vecteurs de la forme $[X, Y]_x$, où $X \in \Delta$ et $Y \in \Delta^r$.

Définition 3.7. — *Le degré de nonholonomie en $x \in M$, noté $r(x)$ est le plus petit entier, si il existe, tel que $\Delta_x^{r(x)} = T_x M$.*

Si pour tout entier r, $\Delta_x^r \neq T_x M$, on pose $r(x) = +\infty$.

Si pour tout $x \in M$, $r(x) < +\infty$, on dit que la distribution satisfait la condition de Hörmander.

Exemple 3.8. — Les distributions d'Heisenberg et de Martinet dans $\mathbb{R}^3$ satisfont la condition de Hörmander.

Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M, et soit $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ un chemin absolument continu.

Définition 3.9. — *Un chemin γ est dit horizontal si $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}$ presque partout.*

Si γ est un chemin horizontal, sa vitesse $\dot{\gamma}$ se décompose sur une base locale $X_1, \cdots, X_p$ de Δ :

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t) X_i(\gamma(t)) \tag{3.4}$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Dans le cas d'une distribution analytique, la joignabilité entre deux points par un chemin horizontal est équivalente à la condition de Hörmander :

Théorème 3.10. — *(Rachevski-Chow* [8], [29], [33]*) Si Δ satisfait la condition de Hörmander et si M est connexe, alors, deux points de M peuvent toujours être joints par un chemin horizontal. Si de plus, les données sont analytiques, on a l'équivalence.*

Pour tout $v \in T_x M$, posons $||v||_x = \sqrt{g_x(v, v)}$. On définit la longueur de γ :

$$l(\gamma) = \int_0^T ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} dt \tag{3.5}$$

Définition 3.11. — *La distance sous-riemannienne $dist_{SR}$ (ou distance de Carnot-Carathéodory) entre deux points $x, y \in M$ est définie par :*

(3.6)
$$dist_{SR}(x, y) = \inf_{\gamma} \{ l(\gamma) | \gamma(0) = x, \gamma(T) = y, \dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \text{presque partout} \}.$$

Notons dist_R la distance pour une métrique riemannienne sur M qui étend la métrique g_{SR}, et supposons que la distribution Δ satisfasse la condition de Hörmander de degré r, alors on a la comparaison suivante entre la distance riemannienne dist_R et la distance sous-riemannienne dist_{SR} :

THÉORÈME 3.12. — ([13]) *Supposons M compacte, et soient $x, y \in M$, alors*

$$\mathrm{dist}_{SR}(x,y) \leqslant C(\mathrm{dist}_R(x,y))^{1/r} \tag{3.7}$$

où C est une constante.

Remarque 3.13. — Comme par ailleurs, pour tous $x, y \in M$, l'inégalité

$$\mathrm{dist}_R(x,y) \leqslant \mathrm{dist}_{SR}(x,y)$$

est évidente, la distance sous-riemannienne dist_{SR} est Hölder équivalente à la distance riemannienne dist_R.

4. Ensemble des points critiques horizontaux

La compréhension de l'ensemble des points critiques horizontaux est utile pour appréhender les trajectoires du gradient horizontal. Dans ce paragraphe nous étudions l'ensemble de ces points critiques pour des distributions de codimension 1 du type ci-après.

4.1. Distributions polynomiales de codimension 1

Nous nous plaçons dans le cas $\mathbb{R}^n$ ($M = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$) et nous considérons des distributions polynomiales de la forme suivante, que nous appellerons **scindée** :

$$(\Delta) \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + P_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{n-1} = \dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}} + P_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{cases} \tag{4.1}$$

où les P_i sont des polynômes tels que $(P_1, \cdots, P_{n-1})$ ne soit pas un gradient. Ceci implique que la distribution Δ satisfait la condition de Hörmander. Posons

$$g_{SR} = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 \tag{4.2}$$

alors g_{SR} est une métrique sous-riemannienne sur Δ telle que le système $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ soit orthonormé.

Dans la suite de ce chapitre, on fixe une distribution et une métrique sous-riemannienne du type précédent. Les distributions de Heisenberg (3.1) et Martinet plate (3.2) sont de ce type.

Posons

$$d\omega_n = dx_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_i dx_i. \tag{4.3}$$

et

$$X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4.4}$$

Il est facile de voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le système $\{X_1(x), \cdots, X_n(x)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. On peut étendre alors la métrique sous-riemannienne g_{SR} sur Δ donnée par la formule (4.2) en la métrique riemannienne suivante sur $\mathbb{R}^n$

$$g = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 + d\omega_n^2. \tag{4.5}$$

Pour la métrique g, le système $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est orthonormé.

4.2. Propriétés génériques de l'ensemble critique horizontal

Définition 4.1. — *Pour une fonction C^∞ ou un polynôme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note*

$$V_f := \{\nabla^h f = 0\} \tag{4.6}$$

l'ensemble des points critiques horizontaux de f.

Notons que V_f est fermé. Il est clair que l'ensemble $\{\nabla f = 0\}$ des points critiques de f est contenu dans V_f, et si $x \in V_f$ n'est pas un point critique de f alors

$$\Delta_x = T_x f^{-1}(f(x)).$$

Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons à la dimension de V_f, ainsi qu'à celle de son intersection avec une surface de niveau pour une fonction générique f. La généricité sera précisée ultérieurement. Dans le cas particulier d'une forme linéaire générique f, nous verrons que V_f est une union finie de droites.

4.2.1. Notations

Nous utiliserons par la suite les notations suivantes

1) $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$,
2) $j^1 f(x) = (x, f(x), d_x f) = (x, f(x), \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$,
3) $\bar{j}^1 f(x) = (x, d_x f) = (x, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)) \in \mathbb{R}^{2n}$,
4) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{n-1}$,
   $F(x,z) = (z_1 + P_1(x')z_n, \cdots, z_{n-1} + P_{n-1}(x')z_n)$,
5) $Z = F^{-1}(0)$,
6) $F_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n-1}$,
   $F_1(x,y,z) = (z_1 + P_1(x')z_n, \cdots, z_{n-1} + P_{n-1}(x')z_n)$,
7) $Z_1 = F_1^{-1}(0)$,
8) $\mathbb{R}_d[x] = \{f \in \mathbb{R}[x], \deg f \leqslant d\}$, $\mathbb{R}_d[x]$ est munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension finie. Posons $A(d) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_d[x] < \infty$. On identifie chaque $f \in \mathbb{R}_d[x]$ avec son vecteur de coefficients, et $\mathbb{R}_d[x]$ avec $\mathbb{R}^{A(d)}$.

4.2.2. Sur la dimension de V_f

Nous commençons ce paragraphe par deux lemmes, qui nous permettrons de montrer que V_f est génériquement de dimension 1.

Lemme 4.2. — *Les ensembles Z et Z_1 sont des variétés algébriques lisses, de dimensions respectives $n+1$ et $n+2$.*

Preuve. — Nous démontrons le lemme pour Z, la preuve pour Z_1 est analogue, ces deux ensembles sont clairement algébriques. Il suffit pour le reste de remarquer que la matrice jacobienne de F contient comme sous-matrice la matrice I_{n-1}. En conséquence, F est une application régulière, et donc $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ est une valeur régulière de F. Ceci implique que Z est une variété algébrique lisse dont dimension est égale à $2n - (n-1) = n+1$ (voir la proposition 2.3). □

Lemme 4.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes*
i) $x \in V_f$,
ii) $\bar{j}^1 f(x) \in Z$,
iii) $j^1 f(x) \in Z_1$.

En conséquence, $V_f = (\bar{j}^1 f)^{-1}(Z) = (j^1 f)^{-1}(Z_1)$.

Preuve. — Montrons que i) est équivalente à ii). La preuve que i) est équivalente à iii) est analogue.
Si $x \in V_f$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = -P_k(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\bar{j}^1 f(x) &= \left(x, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \\ &= \left(x, -P_1(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \cdots, -P_{n-1}(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}F(\bar{j}^1 f(x)) = \Big(-P_1(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + P_1(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \cdots, -P_{n-1}(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ +P_{n-1}(x')\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne $\bar{j}^1 f(x) \in Z$. Réciproquement, si $\bar{j}^1 f(x) \in Z$, alors $F(\bar{j}^1 f(x)) = 0$. Ceci implique que $x \in V_f$. □

Maintenant pour les polynômes de degré borné, nous avons le théorème suivant

Théorème 4.4. — *Génériquement,* V_f *est un ensemble algébrique lisse de dimension* 1 *ou est vide, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble* $K_d \subset \mathbb{R}_d[x]$*, semi-algébrique ouvert et dense, tel que* V_f *est lisse de dimension* 1 *ou est vide, pour tout* $f \in K_d$*. De plus, tout* f *de* K_d *est tel que si* $x \in V_f$ *et* $\nabla f(x) = 0$*, alors* $T_x V_f \cap \Delta_x = \{0\}$.

Preuve. — Ecrivons un polynôme $f \in \mathbb{R}_d[x]$ sous la forme

$$f = \alpha_0 + \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_d(x)$$

où $\alpha_i(x)$ est la partie homogène de degré i de f. Notons la partie linéaire

$$\alpha_1(x) = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n.$$

Posons

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_d[x] \to \mathbb{R}^{2n} \supset Z, \quad L(x, f) = \bar{j}^1 f(x) = (x, d_x f).$$

La différentielle de L s'écrit

$$dL = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & I_n & B \end{pmatrix}$$

Ainsi, dL est de rang $2n$, ce qui montre que L est une submersion, et donc qu'elle est transverse à Z. Posons

$$K_d^1 := \{f \in \mathbb{R}_d[x] : L_f = L(.,f) = \bar{j}^1 f \pitchfork Z\}.$$

D'après le théorème 2.7 de transversalité à paramètre, l'ensemble K_d^1 est un semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_d[x]$. Soit $f \in K_d^1$, on a $V_f = (\bar{j}^1 f)^{-1}(Z)$ par le lemme 4.3. Et par transversalité, si $\bar{j}^1 f(\mathbb{R}^n) \cap Z \neq \emptyset$, on a d'après la proposition 2.3

$$\mathrm{codim} V_f = \mathrm{codim} Z.$$

D'autre part, $\dim Z = n+1$ par le lemme 4.2, donc $\mathrm{codim} Z = n-1$, ceci implique que $\dim V_f = 1$. Notons que V_f est lisse, puisque Z est lisse.

Maintenant la dernière partie de la proposition est obtenue en considérant l'application suivante, définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in R_d[x]$ par :

$$\Theta(x,f) := (\nabla f(x), [a_{ij}(f)]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

où $a_{ij}(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + P_i \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_n} + P_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} + P_i P_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Cette application est une submersion, et la condition est obtenue par la transversalité de $\Theta(.,f)$ à $\{0\} \times \Sigma$, où Σ est le sous-ensemble, de l'espace $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ des matrices symétriques $(n-1)\times(n-1)$, constitué des matrices non-inversibles. Notons que $\{0\} \times \Sigma$ est de codimension $n+1$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. On pose

$$K_d^2 := \{f \in \mathbb{R}_d[x] : \Theta(.,f) = \bar{j}^1 f \pitchfork \{0\} \times \Sigma\}.$$

L'ensemble K_d est alors

$$K_d := K_d^1 \cap K_d^2. \tag{4.7}$$

□

Proposition 4.5. — *Génériquement, l'application $\nabla^h f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ est une submersion sur V_f, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{f \in \mathbb{R}_d[x] : \nabla^h f \text{ est submersive sur } V_f\}$$

est semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_d[x]$.

Preuve. — On peut remarquer que $\nabla^h f$ est la composition de F et $\bar{j}^1 f$: $\nabla^h f = F \circ \bar{j}^1 f$. Puisque F est une submersion (voir la preuve du lemme 4.2), cette composition est, d'après la proposition 2.4, submersive sur $(\bar{j}^1 f)^{-1}(F^{-1}(0)) = (\bar{j}^1 f)^{-1}(Z) = V_f$ (lemme 4.3 pour la dernière égalité) si et seulement si $\bar{j}^1 f \pitchfork Z$. Mais cette dernière condition est satisfaite pour toute $f \in K_d$, où K_d donné par la formule (4.7) est un ensemble ouvert dense. On a donc la généricité. □

Remarque 4.6. — On peut observer que :
- génériquement, V_f ne contient pas de points isolés,
- toujours dans le cas générique, le gradient horizontal et le gradient sont différents par la dimension de leur ensemble des zéros. Ils sont tous les deux submersifs sur leur ensemble des zéros.

Un polynôme f peut être générique pour la dimension de V_f sans que les zéros de ∇f soient isolés et réciproquement. Comme le montrent les deux exemples suivants :

Exemple 4.7. — On considère la distribution

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \\ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \tag{4.8}$$

et le polynôme $f = x_3$. Le gradient de f est $\nabla f = (0, 0, 1)$ qui n'a pas de zéros. Le gradient horizontal de f est égal à

$$\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2$$

où $X_1 f = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad X_2 f = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$. L'ensemble V_f est union de l'axe x_3 et du cylindre $\{1 - x_1^2 - x_2^2\}$, il est donc de dimension 2. Ainsi la fonction f n'est pas générique au sens du théorème 4.4.

Exemple 4.8. — D'autre part, si on considère la distribution

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \\ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \tag{4.9}$$

et le polynôme $f = x_1 + x_1^2 + x_3^2$. Le gradient de f est $\nabla f = (2x_1 + 1, 0, 2x_3)$ qui a la droite $\{x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$ comme ensemble des zéros. Le gradient horizontal de f est

$$\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2$$

où $X_1 f = 2x_1 + 1 - 2x_2 x_3 \quad X_2 f = 2x_1 x_3$. L'ensemble V_f est union de la droite $\{x_1 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$ et de l'hyperbole $\{x_1 = 0, 2x_2 x_3 - 1 = 0\}$, il est donc lisse de dimension 1. Ainsi f est générique au sens du théorème 4.4.

4.2.3. Ensemble V_f pour une forme affine

Si f est une forme affine $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$, alors $X_i f = a_i + a_n P_i(x')$ est un polynôme de $n-1$ variables au plus. Donc, V_f est déterminé par un système de $n-1$ équations d'au plus $n-1$ variables

$$\{X_1 f = 0, \cdots, X_{n-1} f = 0\} = \left\{ P_1(x') = -\frac{a_1}{a_n}, \cdots, P_{n-1}(x') = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \right\}.$$

On peut noter que si $b = (b_1, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ est une solution de ce système, alors la droite $\{(b,t) | t \in \mathbb{R}\}$ qui passe par $(b,0) \in \mathbb{R}^n$ et qui est parallèle à l'axe x_n est contenue dans V_f. De ce fait, par la généricité donnée par le théorème 4.4, le système $\{X_1 f = 0, \cdots, X_{n-1} f = 0\}$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}^{n-1}$ nous obtenons les deux résultats suivants.

Proposition 4.9. — *Il existe un ensemble semi-algébrique ouvert dense U dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que pour tout $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in U$, le système $\{P_1(x') = a_1, \cdots, P_{n-1}(x') = a_{n-1}\}$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}^{n-1}$ (peut être vide).*

Proposition 4.10. — *Génériquement, V_f est une union finie de droites parallèles à l'axe x_n ou est vide, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$K_1 = \{f \in \mathbb{R}_1[x] : V_f \text{ est une union finie de droites parallèles à l'axe } x_n \text{ ou est vide}\} \tag{4.10}$$

est semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_1[x]$.

4.2.4. Perturbations quadratiques

Dans ce paragraphe, nous donnons un résultat de généricité pour des perturbations quadratiques. Celui-ci nous servira dans la preuve du premier résultat de la section suivante. Soit

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

une forme linéaire, et

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j,$$

une forme quadratique avec $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Posons

$$f_{\alpha\beta}(x) = f(x) + \alpha(x) + \beta(x).$$

En appliquant les méthodes de démonstration du théorème 4.4 et de la proposition 4.5, nous obtenons

PROPOSITION 4.11. — *Fixons f dans $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_d[x]$. Alors, les ensembles*

$$W_1 = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} : V_{f_{\alpha\beta}} \text{ lisse de dimension } 1 \text{ ou vide}\}, \tag{4.11}$$

$$W_2 = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} : \nabla^h f_{\alpha\beta} \text{ submersive sur } V_{f_{\alpha\beta}}\} \tag{4.12}$$

sont ouverts denses dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. De plus, W_1 et W_2 sont semi-algébriques si $f \in \mathbb{R}_d[x]$, et tout f de W_1 est tel que si $x \in V_f$ et $\nabla f(x) = 0$, alors $T_xV_f \cap \Delta_x = \{0\}$.

4.2.5. Sur l'intersection $V_f \cap f^{-1}f(c)$

Dans cette section, nous donnons un résultat sur l'intersection de l'ensemble des points critiques horizontaux avec une surface de niveau quelconque pour un polynôme générique. On en déduit la nonhorizontalité de l'ensemble des points critiques horizontaux.

THÉORÈME 4.12. — *Génériquement, la restriction $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$L_d = \{f \in K_d : f|_{V_f} \text{ est une fonction de Morse}\} \tag{4.13}$$

contient un ensemble semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_d[x]$. En conséquence, pour tout $f \in L_d$ l'ensemble $V_f \cap f^{-1}(c)$ ne contient qu'un nombre fini de points (il peut être vide) pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Preuve. — On sépare le problème en deux cas, le cas affine et le cas où $d \geqslant 2$.

1) Le cas affine $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$. Dans ce cas, la généricité est obtenue aisément. Posons $L_1 = K_1 - \{(a_0, \cdots, a_n) | a_n = 0\}$ où K_1 est donnée par la proposition 4.9. Alors L_1 est encore un ensemble semi-algébrique ouvert dense. Par la proposition 4.10, pour tout $(a_0, \cdots, a_n) \in L_1$, l'ensemble V_f est une union finie de droites parallèles à l'axe x_n ou est vide. Pour tout $x \in V_f$, on a

$$d_x(f|_{V_f}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = a_n \neq 0.$$

Donc $f|_{V_f}$ n'a pas de points critiques, alors c'est une fonction de Morse.

2) Le cas où $\deg f \geqslant 2$. On va montrer que f peut être perturbée par une forme quadratique pour que la restriction $f|_{V_f}$ soit une fonction de

Morse. Dans un premier temps, nous allons essayer d'établir une condition de Morse de $f|_{V_f}$. Par raison de commodité, nous remplaçons la notation $\bar{j}^1$ par Φ. Posons

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \Phi(x) = (x, d_x f),$$

et

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}, \quad \psi(x,\xi) = (\Phi(x), d_x\Phi(\xi), d_x f(\xi))$$

où $\mathbb{S}^{n-1}$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} G = (F, dF, Id_1) : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\mapsto (F(u), d_u F(v), w). \end{aligned}$$

Puisque F (voir sous-section 4.2.1) est une submersion, G est une submersion. Aussi pour tout $u = (x,z) \in Z$, on a $T_u Z = (d_u F)^{-1}(0)$, donc $TZ \times \{0\} = G^{-1}(0)$.

Dans le cas où V_f est lisse de dimension 1, le lemme suivant caractérise les points critiques de la restriction $f|_{V_f}$.

Lemme 4.13. — *Si V_f est lisse de dimension 1, alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes*

i) $(x,\xi) \in \psi^{-1}(G^{-1}(0)) = \psi^{-1}(TZ \times \{0\})$

ii) $x \in V_f$, $\xi \in T_x V_f \cap \mathbb{S}^{n-1}$ *et x est un point critique de $f|_{V_f}$.*

Preuve. — On a

- $F(\Phi(x)) = 0$ si et seulement si $\Phi(x) \in Z$, donc si et seulement si $x \in V_f$,
- $d_{\Phi(x)} F(d_x\Phi(\xi)) = 0$ si et seulement si $d_x(F \circ \Phi)(\xi) = 0$, mais $d_x(F \circ \Phi) = d_x \nabla^h f$, donc si et seulement si $\xi \in Ker(d_x \nabla^h f) \cap \mathbb{S}^{n-1} = T_x V_f \cap \mathbb{S}^{n-1}$,
- puisque V_f est lisse de dimension 1, si $x \in V_f$ et $\xi \in T_x V_f \cap \mathbb{S}^{n-1}$, alors $d_x f(\xi) = 0$ si et seulement x est un point critique de $f|_{V_f}$. □

La condition que $f|_{V_f}$ soit de Morse s'écrit en terme de transversalité :

Lemme 4.14. — *Si $\psi \pitchfork_{\mathbb{R}^{4n+1}} G^{-1}(0) = TZ \times \{0\}$, alors $f|_{V_f}$ est une fonction de orse.*

Preuve. — La condition $\psi \pitchfork_{\mathbb{R}^{4n+1}} G^{-1}(0) = TZ \times \{0\}$ implique que $\Phi \pitchfork Z$. Alors, d'après le théorème 4.4, $V_f = \Phi^{-1}(Z)$ est lisse de dimension 1 ou est vide. Supposons que V_f soit non vide. Puisque $\psi \pitchfork_{\mathbb{R}^{4n+1}} G^{-1}(0) = TZ \times \{0\}$, alors $f_{|V_f}$ est de Morse d'après la remarque 2.2. D'autre part d'après la proposition 2.3

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}} \psi^{-1}(TZ \times \{0\}) &= \operatorname{codim}_{\mathbb{R}^{4n+1}} TZ \times \{0\} \\ &= 4n + 1 - 2(n+1) = 2n - 1. \end{aligned}$$

Donc $\dim \psi^{-1}(TZ\times\{0\}) = 0$. Par son algébricité, l'ensemble $\psi^{-1}(TZ\times\{0\})$ ne contient qu'un nombre fini de points. D'autre part, puisque $d_x(F\circ\psi)$ est linéaire, donc, si $(x,\xi)\in\psi^{-1}(TZ\times\{0\})$, alors $(x,-\xi)\in\psi^{-1}(TZ\times\{0\})$, de plus $x\in V_f$, $\xi,-\xi\in T_xV_f$ et x est un point critique de $f|_{V_f}$ par le lemme 4.13. En conséquence, le nombre de points critiques de $f|_{V_f}$ est $\dfrac{\#\psi^{-1}(TZ\times\{0\})}{2}$. □

Dans la suite, nous allons montrer que par une perturbation quadratique infinitésimale, on peut rendre $f|_{V_f}$ de Morse. Posons

$$f_{\alpha\beta}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j,$$

où $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ où $\beta=(\beta_{ij})$ est une matrice symétrique.

$$\Phi(\alpha,\beta,x) := \Phi_{\alpha\beta}(x) := (x, d_x f_{\alpha\beta}).$$

Rappelons que l'on identifie toujours un polynôme avec son vecteur de coefficients. On pose

$$\Psi : (W_1\cap W_2)\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$$

$$(\alpha,\beta,x,\xi)\mapsto(\Phi_{\alpha\beta}(x), d_x\Phi_{\alpha\beta}(\xi), d_x f_{\alpha\beta}(\xi)),$$

et l'on écrit $\Psi_{\alpha\beta}(x,\xi)=\Psi(\alpha,\beta,x,\xi)$. Les ensembles W_1, W_2 ont été introduits dans la proposition 4.11, et d'après cette proposition l'intersection $W_1\cap W_2$ est encore un semi-algébrique ouvert dense. Puisque la propriété d'ouverture est garantie, les dérivées de Ψ par rapport à α,β sont permises. On va montrer

Lemme 4.15. — *On a* $\Psi \pitchfork G^{-1}(0)$.

Preuve. — Par la proposition 2.4, il suffit de montrer que $G\circ\Psi$ est une submersion sur $\Psi^{-1}(G^{-1}(0))$. Puisque $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n-\{0\}$, il existe j_0 (dépendant de ξ) tel que $\xi_{j_0}\neq 0$. Nous allons traiter le cas $j_0\neq n$. Le cas $j_0=n$ se traite de manière complètement similaire, en remarquant aussi que seul le cas $\xi=(0,\cdots,0,1)$ est de fait à considérer.

Soit $(\alpha,\beta,x,\xi)\in\Psi^{-1}(G^{-1}(0))$,. Nous distinguons deux cas, celui ou $\nabla f_{\alpha\beta}(x)\neq 0$ (cas 1), et celui ou $\nabla f_{\alpha\beta}(x)=0$ et $d\omega_n(\xi)\neq 0$ (cas 2).

La matrice $M=M_{(\alpha,\beta,x,\xi)}$ de la différentielle de $G\circ\Psi$ est une matrice $(2n-1)\times\left[3n+\dfrac{n(n+1)}{2}-1\right]$.

Cas 1. Soit m tel que $\dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_m}(x) \neq 0$. Nous extrayons de M la matrice $(2n-1)\times(2n-1)$ suivante

$$M_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial\xi_m} & \dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})} \\[2ex] \dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial\xi_m} & \dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})} \\[2ex] \dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial\xi_m} & \dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 1 & & \mathbf{0} & & & & x_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \mathbf{0} & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_{n-1} \\ & & & \ddots & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & 1 & & & & \mathbf{0} & & x_{j_0} \\ \hline \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} & \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_m} & \xi_{j_0}x_1+\xi_1 x_{j_0} & \cdots & \xi_{j_0}x_{j_0} & \cdots & \xi_{j_0}x_{n-1}+\xi_{n-1}x_{j_0} \\ \hline & & & & & * & \xi_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\ & & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \vdots & \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} \\ & & & & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & & * & & & \mathbf{0} & & \xi_{j_0} \end{array}\right)$$

En effectuant des combinaisons des $n-1$ premières lignes avec la ligne n on se ramène à

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 1 & & \mathbf{0} & & & & x_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \mathbf{0} & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_{n-1} \\ & & & \ddots & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & & 1 & & & & \mathbf{0} & & x_{j_0} \\ \hline & & \mathbf{0} & & & \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_m} & & & \mathbf{0} & & \\ \hline & & & & & * & \xi_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\ & & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \vdots & \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} \\ & & & & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & & * & & & \mathbf{0} & & \xi_{j_0} \end{array}\right).$$

Puisque que $\dfrac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$, avec une manipulation sur les lignes on obtient une matrice de même rang de M_2 qui est la suivante

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
1 & & & \mathbf{0} & & & x_{j_0} & & & \mathbf{0} & \\
& \ddots & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & 1 & & & \mathbf{0} & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_{n-1} \\
& & & \ddots & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
& \mathbf{0} & & & 1 & & & & \mathbf{0} & & x_{j_0} \\
\hline
& & \mathbf{0} & & & \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_m} & & & \mathbf{0} & & \\
\hline
& & & & & & \xi_{j_0} & & & \mathbf{0} & \\
& & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} \\
& & & & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & \mathbf{0} & & \xi_{j_0}
\end{array}\right).$$

Comme $\xi_{j_0} \neq 0$, nous obtenons le résultat dans ce premier cas.

Cas 2. Nous extrayons cette fois de M la matrice $(2n-1)\times(2n-1)$ suivante

$$N = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial\alpha_n} & \dfrac{\partial(F\circ\Phi_{\alpha\beta})}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})} \\[2ex]
\dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial\alpha_n} & \dfrac{\partial(d_x f(\xi))}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})} \\[2ex]
\dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial(\alpha_1,..,\alpha_{n-1})} & \dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial\alpha_n} & \dfrac{\partial(d_x(F\circ\Phi_{\alpha\beta})(\xi))}{\partial(\beta_{j_0 1},..,\beta_{j_0 n-1})}
\end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
1 & & \mathbf{0} & & & P_1 & x_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\
& \ddots & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & 1 & & & \vdots & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_{n-1} \\
& & & \ddots & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & & & & 1 & P_{n-1} & & & \mathbf{0} & & x_{j_0} \\
\hline
\xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} & \xi_n & \xi_{j_0}x_1+\xi_1x_{j_0} & \cdots & \xi_{j_0x_{j_0}} & \cdots & \xi_{j_0}x_{n-1}+\xi_{n-1}x_{j_0} \\
\hline
& & & & & u_1 & \xi_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\
& & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & \mathbf{0} & & & \vdots & \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} \\
& & & & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
& & & & & u_{n-1} & & & \mathbf{0} & & \xi_{j_0}
\end{array}\right)$$

en effectuant quelques manipulations sur les lignes ont se ramène à

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
1 & & \mathbf{0} & & & & x_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\
& \ddots & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & 1 & & & \mathbf{0} & x_1 & \cdots & x_{j_0} & \cdots & x_{n-1} \\
& & & \ddots & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & & & & 1 & & & & \mathbf{0} & & x_{j_0} \\
\hline
& & \mathbf{0} & & & d\omega_n(\xi) & & & \mathbf{0} & & \\
\hline
& & & & & & \xi_{j_0} & & \mathbf{0} & & \\
& & & & & & \mathbf{0} & \ddots & & & \\
& & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \xi_1 & \cdots & \xi_{j_0} & \cdots & \xi_{n-1} \\
& & & & & & & & & \ddots & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & \mathbf{0} & & \xi_{j_0}
\end{array}\right).$$

Puisque $d\omega_n(\xi)$ et ξ_{j_0} sont non nuls, la matrice $M_{(\alpha,\beta,x,\xi)}$ est donc aussi de rang $2n-1$ dans ce dernier cas.

Ainsi $G \circ \Psi$ est une submersion. Nous avons ainsi démontré le lemme 4.15. $\square$

Terminons maintenant la démonstration du théorème 4.12. Par le lemme 4.15, on a $\Psi \pitchfork G^{-1}(0)$. En considérant $W_1 \cap W_2$ (voir proposition 4.11) comme espace des paramètres on obtient, d'après le théorème de transversalité 2.7, que l'ensemble

$$W_3 = \{(\alpha, \beta) \in W_1 \cap W_2 : \Psi_{\alpha\beta} \pitchfork G^{-1}(0)\}$$

est un ensemble semi-algébrique ouvert dense dans $W_1 \cap W_2$, et donc est un ensemble semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Pour $(\alpha, \beta) \in W_3$, le lemme 4.14 implique que $f_{\alpha\beta}|_{V_{f_{\alpha\beta}}}$ est une fonction de Morse. Ainsi l'ensemble

$$\{f \in \mathbb{R}_d[x] : f|_{V_f} \text{ est une fonction de Morse}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_d[x]$. Nous allons montrer que cet ensemble est semi-algébrique, donc qu'il contient un ensemble semi-algébrique ouvert dense d'après le théorème 2.10. Posons

$$\Omega : \mathbb{R}_d[x] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$$

$$\Omega(f, x, \xi) = (\Phi(x), d_x\Phi(\xi), d_x f_{\alpha\beta}(\xi)).$$

Pour chaque $f \in \mathbb{R}_d[x]$, notons $\Omega_f(x, \xi) = \Omega(f, x, \xi)$. Par le lemme 4.14, si $\Omega_f \pitchfork G^{-1}(0)$, alors $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse. Mais $\Omega_f \pitchfork G^{-1}(0)$ si et seulement si $\Omega_f \circ G$ est une submersion sur $(\Omega_f \circ G)^{-1}(0)$ par la proposition 2.4. Posons

$$\mathcal{W} = \{f \in \mathbb{R}_d[x] : \Omega_f \circ G \text{ est une submersion sur } (\Omega_f \circ G)^{-1}(0)\}.$$

Alors, pout tout $f \in \mathcal{W}$, $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse. Notons que $\mathcal{W}$ est dense dans $\mathbb{R}_d[x]$. Pour démontrer que $\mathcal{W}$ est semi-algébrique, on l'écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{W} = \{f \in \mathbb{R}_d[x] : \forall x \in (\Omega_f \circ G)^{-1}(0), d(\Omega_f \circ G) \text{ est de rang } 2n - 1\}.$$

Puisque $(\Omega_f \circ G)^{-1}(0)$ est un ensemble algébrique et que le terme « $d(\Omega_f \circ G)$ est de rang $2n - 1$ » peut s'écrire par un nombre fini d'inégalités à partir de déterminants, l'ensemble $\mathcal{W}$ est semi-algébrique. Comme nous avons déjà démontré que $\mathcal{W}$ est dense dans $\mathbb{R}_d[x]$, d'après le théorème 2.10 celui-ci contient un ensemble semi-algébrique ouvert dense. Nous avons donc la généricité, et ainsi le théorème 4.12 est démontré. □

Remarque 4.16. —

– Dans le cas linéaire, une perturbation linéaire est suffisante pour rendre $f|_{V_f}$ de Morse, donc dans tous les cas, on n'a pas besoin d'augmenter le degré en faisant une perturbation.

– Les points critiques de $f|_{V_f}$ sont le lieu où V_f est tangent à une surface de niveau de f.
– D'après le théorème 4.12, on déduit qu'il n'existe pas une version de l'inégalité de Łojasiewicz pour le gradient horizontal, au moins dans le cas générique.

Proposition 4.17. — *Génériquement, V_f ne contient pas de courbe horizontale, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{f \in \mathbb{R}_d[x] : V_f \text{ ne contient pas une courbe horizontale}\}$$

contient un ensemble semi-algébrique ouvert dense dans $\mathbb{R}_d[x]$.

Preuve. — D'après le théorème 4.4, génériquement V_f est lisse de dimension 1. Supposons que V_f contienne une courbe horizontale. Soit $\alpha(t)$ une paramétrisation de cette courbe. Puisque V_f est lisse de dimension 1, $\alpha(t)$ est lisse et $\dot{\alpha}(t)$ existe pour tout t. D'autre part, puisque $\alpha(t) \in V_f$, on a

$$\Delta_{\alpha(t)} = T_{\alpha(t)} f^{-1}(f(\alpha(t)),$$

où $T_{\alpha(t)} f^{-1}(f(\alpha(t))$ est l'espace tangent à $f^{-1}(f(\alpha(t))$ en $\alpha(t)$, donc,

$$\dot{\alpha}(t) \in T_{\alpha(t)} f^{-1}(f(\alpha(t)).$$

Dans la métrique g, le système $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est orthonormé et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(\alpha(t))] &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle (\nabla^h f(\alpha(t)), X_n f(\alpha(t))), \dot{\alpha}(t) \rangle \\ &= \langle (0, \cdots, 0, X_n f(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc, $f(\alpha(t)) = c$, une constante. Ceci dit que $\alpha(t)$ est contenue dans la fibre $f^{-1}(c)$, mais ceci n'est pas générique par le théorème 4.12. Contradiction. □

4.3. Généricité dans le cas C^∞

Dans le cadre des fonctions C^∞, nous obtenons les résultats de généricité suivants.

Théorème 4.18. — *Génériquement, V_f est lisse de dimension 1 ou est vide, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : V_f \text{ est lisse de dimension } 1 \text{ ou est vide}\}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney.

Preuve. — L'ensemble Z_1 est une variété fermée lisse de $\mathbb{R}^{2n+1} \cong J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Par le théorème de transversalité de Thom (théorème 2.6), l'ensemble

$$K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : j^1 f \pitchfork Z_1\} \tag{4.14}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney. Soit $f \in K$ telle que $j^1 f(\mathbb{R}^n) \cap Z_1 \neq \emptyset$. Par le fait que $V_f = (j^1 f)^{-1}(Z_1)$ (lemme 4.3) on a d'après la proposition 2.3

$$\operatorname{codim} V_f = \operatorname{codim} Z_1.$$

D'autre part, $\dim Z_1 = n+2$ par le lemme 4.2, donc codim $Z_1 = n-1$, ceci implique que $\dim V_f = 1$. On peut noter que V_f est lisse puisque Z_1 est lisse. Maintenant si $j^1 f(\mathbb{R}^n) \cap Z_1 = \emptyset$, alors V_f est vide. Donc pour toute $f \in K$, V_f est lisse de dimension 1 ou est vide et on a ainsi la généricité. □

Proposition 4.19. — *Génériquement, l'application $\nabla^h f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ est une submersion sur V_f, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \nabla^h f \text{ est submersive sur } V_f\}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney.

Preuve. — La preuve est similaire à celle de la proposition 4.5, en utilisant $j^1 f$ au lieu de $\bar{j}^1 f$ et Z_1 au lieu de Z. □

Par une méthode de démonstration analogue à celle du théorème 4.12, nous obtenons une version de ce théorème pour les fonctions C^∞ mais avec une généricité plus faible.

Théorème 4.20. — *Génériquement, la restriction $f|_{V_f}$ est une fonction de Morse, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : f|_{V_f} \text{ est une fonction de Morse}\right\}$$

est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. En conséquence, génériquement, l'ensemble $V_f \cap f^{-1}(c)$ ne contient que des points isolés (peut être vide) pour tout $c \in \mathbb{R}$.

5. Trajectoires du gradient horizontal

Dans ce paragraphe, nous considérons encore des distributions polynomiales, scindées de codimension un, satisfaisant la condition d'Hörmander. La métrique riemannienne g considérée est donnée par la formule (4.5) ; elle prolonge la métrique sous-riemannienne g_{SR} donnée par la formule (4.2). Nous commençons par donner quelques résultats fondamentaux avant d'étudier la longueur et l'existence de limites des trajectoires.

5.1. Flot du gradient horizontal

Le but de cette partie est de donner quelques propriétés des trajectoires du gradient horizontal analogues à celles des trajectoires du gradient riemannien. Puisque l'ensemble des zéros du gradient horizontal et celui du gradient sont essentiellement différents, l'étude des trajectoires au voisinage de son ensemble des zéros ne sera pas abordée immédiatement dans cette section. Les fonctions considérées ici sont des polynômes.

Une première propriété du gradient horizontal, qui ressemble à celle du gradient, est que les trajectoires du gradient horizontal montent aussi "d'une surface de niveau à une autre".

PROPOSITION 5.1. — *Le flot d'un champ de gradient horizontal monte d'une surface de niveau à une autre, en conséquence, le champ de gradient horizontal n'a pas de cycles (une courbe homéomorphe à un cercle ne peut pas être une trajectoire du gradient horizontal).*

Preuve. — Posons
$$v = \frac{\nabla^h f}{||\nabla^h f||^2}$$
où $||.||$ est la norme engendrée par la métrique sous-riemannienne g_{SR} sur la distribution, pour laquelle le système $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ est orthonormé. Le champ v est défini en dehors de l'ensemble $V_f = \{x : \nabla^h f(x) = 0\}$.

Soit $x(t)$ une trajectoire de v. Pour la métrique g qui prolonge la métrique sous-riemannienne ci-dessus, le système $\{X_1, \cdots, X_n\}$ est orthonormé et on a
$$\begin{aligned} f(x(t)) - f(x(t_0)) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}[f(x(\tau))]d\tau = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(\tau)) \frac{dx_i}{dt}(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \langle \nabla f(x(\tau)), v(\tau) \rangle d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \left\langle \nabla^h f(x(\tau)) + X_n f(x(\tau)) X_n, \frac{\nabla^h f(x(\tau))}{||\nabla^h f(x())||^2} \right\rangle d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0 \end{aligned}$$
□

A partir de cette propriété, on déduit le comportement suivant des champs de gradient horizontal.

PROPOSITION 5.2. — *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, soit $x(t)$ une trajectoire de $\nabla^h f$ dans B. Alors, soit $x(t)$ sort de B en temps fini, soit elle* *s'approche de V_f, c'est-à-dire qu'il existe une suite x_m de B contenue dans $x(t)$ telle que $d_{V_f}(x_m) \to 0$, où d_{V_f} est la fonction distance à V_f. De plus, cette suite peut être choisie de telle façon que la suite $f(x_m)$ soit croissante.*

Preuve. — Soit $T(V_f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d_{V_f}(x) \leqslant r\}$ un voisinage tubulaire de V_f de rayon r, et $\partial T(V_f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d_{V_f}(x) = r\}$.

– Supposons que $x(t)$ ne s'approche pas de V_f, il existe donc $r > 0$ tel que $x(t)$ ne touche pas $\partial T(V_f, r)$. Alors, pour tout $x \in x(t)$, on a par inégalité de Łojasiewicz

$$||\nabla^h f(x)|| \geqslant \sqrt{C} d_{V_f}^{\alpha/2}(x) > \sqrt{C} r^{\alpha/2}.$$

Pour $T_0 > 0$ on a

$$\begin{aligned} f(x(T_0)) - f(x(0)) &= \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}\left[f(x(\tau))\right] d\tau = \int_0^{T_0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(\tau)) \frac{dx_i}{dt}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{T_0} \langle \nabla f(x(\tau)), \nabla^h f(x(\tau)) \rangle d\tau \\ &= \int_0^{T_0} ||\nabla^h f(x(\tau))||^2 d\tau \geqslant \int_0^{T_0} C r^\alpha dt = T_0 C r^\alpha. \end{aligned}$$

Posons $M = \max_B f(x) - \min_B f(x)$, on a $M > T_0 C r^\alpha$. Ainsi si $t > \dfrac{M}{C r^\alpha}$ la courbe $x(t)$ sort de B.

Supposons maintenant que $x(t)$ s'approche de V_f, alors, pour tout $r > 0$ suffisamment petit, $x(t)$ intersecte $\partial T(V_f, r)$. Posons $r_1 = d_{V_f}(x(0))$, $r_2 = \dfrac{r_1}{2}, \cdots, r_{m+1} = \dfrac{r_m}{2}, \cdots$. Pour chaque $m = 1, 2, \cdots$, posons

$$T_m = \min\{T : T \geqslant 0, d_{V_f}(x(T)) = r_m\}.$$

Il est évident que T_m est une suite croissante. Posons alors $x_m = x(T_m)$. On a bien sur que $d_{V_f}(x_m) = r_m \to 0$ quand $m \to \infty$, donc la suite x_m s'approche de V_f. Puisque $x(t)$ monte d'une surface de niveau à une autre, et que la suite T_m est croissante, la suite $f(x_m)$ est aussi croissante. □

Remarque 5.3. — Reparamétrons $x(t)$ par des valeurs de la fonction f, c'est-à-dire que $f(x(t)) = t$. Comme la suite $f(x_m)$ est monotone et bornée (f est bornée sur B), il existe $t_0 < \infty$ telle que $d_{V_f}(x_m) = d_{V_f}(x(t_m)) \to 0$ et $f(x_m) = f(x(t_m)) = t_m \to t_0$.

Proposition 5.4. — *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble compact, soit $x(t)$ une trajectoire de $\nabla^h f$ dans B. Si $x(t)$ ne s'approche pas de V_f, alors cette trajectoire a une limite sur ∂B.*

Preuve. — Puisque $x(t)$ ne s'approche pas de V_f, en calculant de la même façon que dans la proposition 5.2, on obtient

$$T_0 < \frac{M}{Cr^\alpha} < +\infty$$

où T_0 est le temps tel que $x(t)$ sorte de B, $r > 0$ est une constante. Posons

$$x_0 = x(T_0) \in \partial B.$$

Alors x_0 est une limite de $x(t)$. □

Dans le cas où $x(t)$ s'approche de V_f, l'existence de la limite sera étudiée dans la section 5.2.

PROPOSITION 5.5. — *Le champ de gradient horizontal $\nabla^h f$ est localement complet sur $\mathbb{R}^n$: pour tout ensemble compact $B \subset \mathbb{R}^n$, pour toute trajectoire $x(t)$ de $\nabla^h f$ dans B qui est une solution maximale, alors soit $x(t)$ arrive au bord de B en temps fini, soit $x(t)$ est complète, c'est-à-dire que le domaine de $x(t)$ est $(-\infty, \infty)$.*

Preuve. — Le problème est trivial quand $B \cap V_f = \emptyset$. Supposons donc que $B \cap V_f \neq \emptyset$. D'après la proposition 5.2, si $x(t)$ arrive au bord de B, le temps t doit être fini, si $x(t)$ n'arrive pas au bord de B, alors elle doit s'approcher de V_f. Montrons que dans ce cas, le temps est infini. Supposons que le contraire se produise : $x(t)$ s'approche de V_f en un temps fini T_0 au point $x_0 \in V_f$.

Considèrons l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = \nabla^h f(x(t)). \tag{5.1}$$

On peut noter que la solution constante $y(t) = x_0$, $t \in (-\infty, \infty)$ est une solution maximale de cette équation. Puisque B est compact, le champ $\nabla^h f$ est lipschitzien sur B. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de (5.1) qui passe par x_0. Mais $x(t)$ et $y(t)$ sont deux solutions maximale différentes de (5.1) passent par x_0, c'est une contradiction. □

Exemple 5.6. — On considère la distribution d'Heisenberg dans $\mathbb{R}^3$ et le polynôme

$$f(x) = 2x_3 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Le gradient horizontal de f est égale à $\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2$ où $X_1 f = x_1 - x_2$, $X_2 f = x_1 + x_2$. L'ensemble des points critiques horizontaux de

f est l'axe x_3. Les trajectoires de $\nabla^h f$ satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

En résolvant les deux premières équations, on obtient

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t(a\sin(t) + b\cos(t)) \\ x_2(t) = e^t(-a\cos(t) + b\sin(t)) \end{cases}$$

où a, b sont des constantes. Alors $\dot{x}_3 = \dfrac{(a^2+b^2)}{2}e^{2t}$, donc

$$x_3 = \frac{(a^2+b^2)}{4}e^{2t} + c$$

où c est une constante. On remarque que toutes les trajectoires de $\nabla^h f$ possèdent une limite (quand $t \to -\infty$) sur l'axe x_3, qui est l'ensemble des points critiques horizontaux de f. Quand $t \to +\infty$, les trajectoires de $\nabla^h f$ s'éloignent de l'axe x_3 de manière exponentielle, donc, dans un compact, les trajectoires de $\nabla^h f$ possèdent au plus un point limite sur l'axe x_3.

5.2. Limites et longueur des trajectoires

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme. Dans cette partie, nous montrons que par un changement de la métrique, qui dépend de la fonction f, on peut borner uniformément la longueur des trajectoires du gradient horizontal de f. Ensuite nous montrons que pour un un polynôme générique f les limites des trajectoires existent.

Rappelons que $V_f = \{\nabla^h f = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ dénote l'ensemble des points critiques horizontaux de f. On note toujours $d_{V_f}(x)$ la fonction distance à V_f.

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact ; par l'inégalité de Łojasiewicz (théorème 2.8), il existe des constantes $C_1, C_2 > 0, \gamma \geqslant 1 \geqslant \beta > 0$ telles que

$$C_1 d_{V_f}^{\gamma}(x) \leqslant ||\nabla^h f(x)|| \leqslant C_2 d_{V_f}^{\beta}(x) \tag{5.2}$$

pour tout $x \in B$.

Remarque 5.7. — L'exposant γ dans l'inégalité (5.2) peut être majoré explicitement de la façon suivante. Supposons que les degrés de tous les coefficients des champs X_i sont majorés par l'entier D et posons $d = \deg f$.

Alors le polynôme $g = ||\nabla^h f||^2$ est de degré au plus $2(D+d-1)$. Donc d'aprés la remarque 2.9, on a $\gamma \leqslant O(d+D)^n$.

Notons :

$\langle\langle .,. \rangle\rangle$ et $||.||$, respectivement le produit scalaire et la norme pour la métrique riemannienne

$$g = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 + d\omega_n^2,$$

$\langle .,. \rangle$ et $|.|$, respectivement le produit scalaire et la norme pour la métrique

$$\delta = d_{V_f}^{2\gamma}(x)(dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2) + d\omega_n^2, \tag{5.3}$$

où $d\omega_n = dx_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_i dx_i$. Rappelons que $g_{SR} = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2$ est la métrique sous-riemannienne sur la distribution rendant le système $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ orthonormé. On note aussi

$$\delta_{SR} = d_{V_f}^{2\gamma}(x)(dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2). \tag{5.4}$$

Alors δ et δ_{SR} dépendent non seulement de l'ensemble compact B, mais aussi du polynôme f. De plus elles sont dégénérées sur V_f. Précisons que la distance $d_{V_f}(x)$ est prise avec la métrique riemannienne g. Les distances sous-riemanniennes entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$ pour la métrique g_{SR} (notée $\operatorname{dist}(x,y)$) et pour la métrique δ_{SR} (notée $\operatorname{dist}_1(x,y)$) sont données respectivement par les formules suivantes :

(5.5)

$$\operatorname{dist}(x,y) = \inf_\alpha \left\{ \int_0^T ||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x, \alpha(T) = y, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\},$$

(5.6)

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_1(x,y) &= \inf_\alpha \left\{ \int_0^T |\dot\alpha(t)|_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x, \alpha(T) = y, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\} \\ &= \inf_\alpha \left\{ \int_0^T d_{V_f}^{\gamma}(\alpha(t)) ||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x, \alpha(T) = y, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\}.\end{aligned}$$

On peut observer que dist est une distance sur $\mathbb{R}^n$ tandis que dist_1 n'est pas forcément une distance sur $\mathbb{R}^n$. En fait dist_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n \backslash V_f$, et la fonction $\operatorname{dist}_1(x,y)$ est quand même définie même si $x, y \in V_f$; mais $\operatorname{dist}_1(x,y)$ peut être nulle pour x différent de y.

Le gradient horizontal dans la métrique δ peut être calculé à partir du gradient pour la métrique g, comme le montre le lemme suivant. Rappelons que $\{X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ est une base orthonormée pour la métrique riemannienne g.

Lemme 5.8. — *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus V_f$ nous avons*

$$^{\delta}\nabla f = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i, \qquad ^{\delta}\nabla^h f = \sum_{i=1}^{n-1} u_i X_i$$

où $u_i = \dfrac{X_i f}{d_{V_f}^{2\gamma}}, i = 1, \dots, n-1$ *et* $u_n = X_n f$. *D'où* $^{\delta}\nabla^h f = \dfrac{\nabla^h f}{d_{V_f}^{2\gamma}}$ *et* $|^{\delta}\nabla^h f| = \frac{||\nabla^h f||}{d_{V_f}^{\gamma}}$.

Preuve. — Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, la valeur de la forme *df* sur v est

$$df(v) = \langle\langle \nabla f, v \rangle\rangle = \langle ^{\delta}\nabla f, v \rangle = \langle\langle d_{V_f}^{2\gamma} \nabla^h f + X_n f, v \rangle\rangle.$$

Ceci implique que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i f) v_i = \sum_{i=1}^{n-1} d_{V_f}^{2\gamma} u_i v_i + u_n v_n$ d'où le résultat.

□

Remarque 5.9. — Pour tout $x \in B \setminus V_f$, $|^{\delta}\nabla^h f| \geqslant C_1$ où C_1 est une constante dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2).

Voici la version sous-riemannienne du résultat de Łojasiewicz sur une borne uniforme pour la longueur des trajectoires du gradient (riemannien).

Théorème 5.10. — *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme, $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et δ la métrique associée par (5.3). Si $x : [t_1, t_2] \to B$ est une trajectoire de $\nabla^h f$, alors la longueur de $x(t)$, pour la métrique δ, est bornée par*

$$\frac{|f(x(t_2)) - f(x(t_1))|}{C_1} \tag{5.7}$$

où C_1 est la constante associée à B dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2).

Preuve. — Posons

$$v = \frac{^{\delta}\nabla^h f}{|^{\delta}\nabla^h f|^2}.$$

Alors $x(t)$ est aussi une trajectoire de v. Le flot de v nous donne

$$\begin{aligned} f(x(t)) - f(x(t_0)) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}[f(x(\tau))] d\tau = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(\tau)) \frac{dx_i}{dt}(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \left\langle ^{\delta}\nabla f(x(\tau)), v(x(\tau)) \right\rangle d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \left\langle (^{\delta}\nabla^h f(x(\tau)) + X_n f(x(\tau)) X_n), \frac{^{\delta}\nabla^h f(x(\tau))}{|^{\delta}\nabla^h f(x(\tau))|^2} \right\rangle d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0. \end{aligned}$$

Donc pour le champ v, $x(t)$ est paramétrée par des valeurs de f. On peut donc supposer que $t_1 = f(x(t_1))$, $t_2 = f(x(t_2))$. D'après la remarque 5.9, on a la majoration suivante de la longueur $l(x(t))$ de $x(t)$:

$$l(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{{}^\delta\nabla^h f(x(\tau))}{|{}^\delta\nabla^h f(x(\tau))|^2} \right| d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{|{}^\delta\nabla^h f(x(\tau))|} d\tau$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{C_1} d\tau = \frac{|t_2 - t_1|}{C_1},$$

où C_1 est une constante dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2), d'où l'on déduit que la longueur des trajectoires de $\nabla^h f$ est bornée dans B. □

Dans le lemme suivant, on examine le rapport entre les distances dist et dist_1 en comparant la convergence des suites. Ce lemme sert à démontrer un autre résultat intermédiaire, le lemme 5.12, qui mène au théorème 5.14.

Lemme 5.11. — *Soit $x_0 \in V_f$ et soit x_m une suite dans B.*
i) Si $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dist}(x_m, x_0) = 0$, alors $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dist}_1(x_m, x_0) = 0$.
ii) Si $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dist}_1(x_m, x_0) = 0$, alors $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dist}(x_m, V_f) = 0$.

Preuve. — i) On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}_1(x_m, x_0) = \\
&= \inf_\alpha \left\{ \int_0^T |\dot\alpha(t)|_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x_m, \alpha(T) = x_0, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\} \\
&= \inf_\alpha \left\{ \int_0^T d_{V_f}^\gamma(\alpha(t)) ||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x_m, \alpha(T) = x_0, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\} \\
&\leqslant \inf_\alpha \left\{ \int_0^T C ||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt : \alpha(0) = x_m, \alpha(T) = x_0, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\} \\
&= C\ \mathrm{dist}(x_m, x_0),
\end{aligned}$$

où C est une constante positive, et l'inégalité est obtenue par la compacité de B. Ainsi on obtient i).

ii) Nous raisonnons par l'absurde, supposons que $\mathrm{dist}(x_m, V_f) \not\to 0$. Puisque B est compact, il existe $y_0 \in B \setminus V_f$ et une sous-suite x_{m_p} de x_m tels que

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{dist}(x_{m_p}, y_0) = 0.$$

La condition i) implique

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{dist}_1(x_{m_p}, y_0) = 0.$$

Mais $\lim_{p\to\infty} \mathrm{dist}_1(x_{m_p}, x_0) = 0$ puisque $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dist}_1(x_m, x_0) = 0$, d'où

$$\mathrm{dist}_1(x_0, y_0) \leqslant \mathrm{dist}_1(x_0, x_{m_p}) + \mathrm{dist}_1(x_{m_p}, y_0) \to 0.$$

Ceci implique que $\mathrm{dist}_1(x_0, y_0) = 0$. Précisément que

$$\mathrm{dist}_1(x_0, y_0) = \inf_\alpha \left\{ \int_0^T d_{V_f}^\gamma(\alpha(t))||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt : \right.$$
$$\left. \alpha(0) = x_0, \alpha(T) = y_0, \dot\alpha(t) \in \Delta_{\alpha(t)} \right\} = 0.$$

Notons que $r = d_{V_f}(y_0) > 0$, car $y_0 \notin V_f$. Soit $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale telle que $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(T) = y_0$. Par continuité de α, il existe un $\bar T \in (0, T)$ tel que $d_{V_f}(\alpha(t)) \geqslant \frac{r}{2}$ pour tout $t \in [\bar T, T]$ et $d_{V_f}(\alpha(\bar T)) = \frac{r}{2}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_{\bar T}^T d_{V_f}^\gamma(\alpha(t))||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt &\geqslant \left(\frac{r}{2}\right)^\gamma \int_{\bar T}^T ||\dot\alpha(t)||_{\alpha(t)} dt \\ &\geqslant \left(\frac{r}{2}\right)^\gamma \mathrm{dist}\left(y_0,\ \mathrm{Tub}(V_f, \frac{r}{2})\right) > 0,\end{aligned}$$

où $\mathrm{Tub}(V_f, \frac{r}{2})$ est un voisinage tubulaire de rayon $\frac{r}{2}$ de V_f. Contradiction. □

Le lemme suivant est la clé pour démontrer qu'une limite de trajectoire du gradient horizontal existe.

Lemme 5.12. — *Soit $x(t) \subset B$, une trajectoire de $\nabla^h f$ paramétrée par des valeurs de f, c'est-à-dire que $f(x(t)) = t$. Supposons que $x(t)$ s'approche de V_f, c'est-à-dire qu'il existe une suite $t_m \to t_0 < \infty$ telle que $d_{V_f}(x(t_m)) \to 0$. Alors,*

$$\lim_{t\to t_0} d_{V_f}(x(t)) = 0. \tag{5.8}$$

Preuve. — Posons $x_m = x(t_m)$. Puisque B est compact, on peut extraire de la suite x_m une sous-suite qui converge vers un point $x_0 \in V_f$ (pour la métrique g donnée par (4.5)). Pour simplifier nous noterons aussi cette suite par x_m. Puisque $\mathrm{dist}(x_m, x_0) \to 0$, on a $\mathrm{dist}_1(x_m, x_0) \to 0$ par le lemme 5.11. Nous allons montrer que pour toute suite $s_p \to t_0$ on a

$$\mathrm{dist}_1(y_p, x_0) \to 0,$$

où $y_p = x(s_p)$. Soit $\{u_i\} = \{t_1, s_1, t_2, s_2, t_3, \cdots\}$. Puisque $t_m \to t_0$ et $s_p \to t_0$, alors $u_i \to t_0$. Notons que $t_0 < \infty$, donc u_i est une suite de Cauchy.

Désignons par $x(y_p, x_p)$ la courbe horizontale partie de $x(t)$ joignant y_p à x_p, et par $l(x(y_p, x_p))$ sa longueur. Fixons un $\epsilon > 0$, puisque $\mathrm{dist}_1(x_p, x_0) \to$

0 il existe q_1 tel que pour tout $p \geqslant q_1$ on a $\mathrm{dist}_1(x_p, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi pour tout $p \geqslant q_1$

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_1(y_p, x_0) &\leqslant \mathrm{dist}_1(y_p, x_p) + \mathrm{dist}_1(x_p, x_0) \\ &\leqslant l(x(y_p, x_p)) + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \int_{s_p}^{t_p} \frac{1}{|{}^{\delta}\nabla^h f(x(t))|} dt + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leqslant \int_{s_p}^{t_p} \frac{1}{C_1} dt + \frac{\epsilon}{2} = \frac{|s_p - t_p|}{C_1} + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

où C_1 est une constante dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2). Pour p assez grand $\frac{|s_p - t_p|}{C_1} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ puisque la suite u_i est de Cauchy. On en déduit que $\mathrm{dist}_1(y_p, x_0) \to 0$. Et par le lemme 5.11, on obtient $\mathrm{dist}(x(t), V_f) \to 0$. $\square$

Remarque 5.13. — La limite $\lim_{t \to t_0} x(t)$ n'existe pas forcément, on peut le voir dans la partie 5.3.2 où $x(t)$ peut s'accumuler sur un cycle.

Finalement, nous avons tous les éléments nécessaires pour prouver le théorème suivant, qui montre que pour un polynôme f générique, chaque trajectoire du gradient horizontal possède une limite.

THÉORÈME 5.14. — *Soit un $f \in \mathbb{R}_d[x]$ un polynôme générique, précisément supposons que $f \in L_d$, où L_d est un ouvert dense semi-algébrique donné par le théorème 4.12. Soient $B \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $x(t) \subset B$ une trajectoire de $\nabla^h f$. Supposons que $x(t)$ s'approche de V_f, c'est-à-dire qu'il existe une suite $t_m \to t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $d_{V_f}(x(t_m)) \to 0$. Alors $x(t)$ a une limite appartenant à $V_f \cap B$: il existe $x_0 \in V_f \cap B$ tel que*

$$\mathit{dist}_R(x(t), x_0) \to 0 \text{ quand } t \to t_0$$

où dist_R est la distance riemannienne avec la métrique g donnée par la formule (4.5).

Preuve. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(t)$ est paramétrée par des valeurs de f, c'est-à-dire que $f(x(t)) = t$, alors $t_0 < +\infty$ puisque B est compact. Par le lemme 5.12,

$$\mathrm{dist}_R(x(t), V_f) = d_{V_f}(x(t)) \to 0.$$

Puisque $x(t)$ est paramétrée par des valeurs de f, on a

$$\mathrm{dist}_R(x(t), f^{-1}(t_0) \cap B) \to 0.$$

Ceci signifie que

$$\mathrm{dist}_R(x(t), V_f \cap f^{-1}(t_0) \cap B) \to 0.$$

Par le théorème 4.12, l'intersection $V_f \cap f^{-1}(t_0)$ ne contient qu'un nombre fini de points. Donc, $V_f \cap f^{-1}(t_0) \cap B$ ne contient qu'un nombre fini de points (isolés). Mais dist_R est une distance, en conséquence, il existe un unique point $x_0 \in V_f \cap f^{-1}(t_0) \cap B$ tel que

$$\mathrm{dist}_R(x(t), x_0) \to 0.$$

Le théorème a ainsi démontré. □

Remarquons que dist_1 n'est pas forcément une distance sur $\mathbb{R}^n$ mais elle l'est lorsque la fonction f est générique au sens du théorème 4.12. Pour le prouver, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 5.15. — *Pour tout polynôme $f \in K_d$ où l'ensemble K_d est défini par la formule (4.7), on peut choisir les exposants $\gamma = \beta = 1$ dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2). C'est-à-dire que pour chaque compact $B \subset \mathbb{R}^n$, il existe des constantes C_1, C_2, $0 < C_1 \leqslant C_2$ telles que*

$$C_1 d_{V_f}(x) \leqslant ||\nabla^h f(x)|| \leqslant C_2 d_{V_f}(x)$$

pour tout $x \in B$.

Preuve. — D'après la proposition 4.5, pour tout $f \in K_d$, $\nabla^h f$ est une submersion sur V_f. Ceci signifie que en tout $x \in V_f$, la matrice jacobienne de $\nabla^h f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ est de rang constant $n-1$. D'après le théorème du rang constant, pour tout $x \in V_f$, il existe $u : U_1^x \to U^x$ un difféomorphisme d'un voisinage U_1^x de $0 \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage U^x de x, $u(0) = x$, et $w : W \to W_1$ un difféomorphisme d'un voisinage W de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ sur un voisinage W_1 de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $w(0) = 0$ tels que l'on ait

$$A(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n) = (y_1, \cdots, y_{n-1})$$

où $A = w \circ \nabla^h f \circ u$. Par ailleurs $u^{-1}(V_f) = \{y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0\} \cap U_1^x =: V_1 f$, et de plus

$$||A(y)|| = ||(y_1, \cdots, y_{n-1})|| = \mathrm{dist}(y, V_1 f), \tag{5.9}$$

où $\mathrm{dist}(., V_1 f)$ est la distance à $V_1 f$ pour la métrique standard dans $\mathbb{R}^n$. Puisque u et w sont des difféomorphismes (définis sur des ensembles convexes), ils sont bilipschitziens, c'est-à-dire que u, v et u^{-1}, v^{-1} sont lipschitziens. Il existe alors deux constantes $0 < C_1^x \leqslant C_2^x < +\infty$ telles que pour tout $z \in U^x$ nous ayons

$$C_1^x d_{V_f}(z) \leqslant ||\nabla^h f(z)|| \leqslant C_2^x d_{V_f}(z) \tag{5.10}$$

d'après (5.9). Par compacité de $B \cap V_f$, on peut trouver un recouvrement fini de $B \cap V_f$ par des ouverts U^{x_i}, $i = 1, \cdots, k$, tels que (5.10) soit vrai dans chaque U^{x_i}. Remarquons qu'il existe $r > 0$ tel que si $z \in \tilde{B} = B - \bigcup_i U^{x_i}$ alors $d_{V_f}(z) \geqslant r$,. Posons donc

$$\tilde{C}_1 = \min_{\tilde{B}} \frac{||\nabla^h f||}{d_{V_f}}, \quad \tilde{C}_2 = \max_{\tilde{B}} \frac{||\nabla^h f||}{d_{V_f}}.$$

Nous obtenons

$$\tilde{C}_1 d_{V_f}(z) \leqslant ||\nabla^h f(z)|| \leqslant \tilde{C}_2 d_{V_f}(z),\ z \in \tilde{B}.$$

Enfin, posons $C_1 = \min\{C_1^{x_1}, \cdots, C_1^{x_k}, \tilde{C}_1\}$, $C_2 = \max\{C_2^{x_1}, \cdots, C_2^{x_k}, \tilde{C}_2\}$. Alors pour tout $z \in B$, on a

$$C_1 d_{V_f}(z) \leqslant ||\nabla^h f(z)|| \leqslant C_2 d_{V_f}(z).$$

Nous avons ainsi démontré le lemme. □

Remarque 5.16. — Par le lemme 5.15, pour tout $f \in K_d$ la majoration

$$|^{\delta}\nabla^h f| \leqslant C_2$$

est valable dans $B \setminus V_f$, où C_2 est une constante dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2).

Le lemme 5.15 implique le théorème suivant

THÉORÈME 5.17. — *Pour tout $f \in L_d$, où l'ensemble semi-algébrique dense $L_d \subset \mathbb{R}_d[x]$ est donné par le théorème 4.12, la fonction* dist_1 *associé à f par la formule* (5.6) *est une distance sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. — Nous nous plaçons dans le cas générique du théorème 4.12. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n, a \neq b$. Nous allons montrer que $\mathrm{dist}_1(a, b) \neq 0$. Il y trois cas à considérer :

(1) $a \in V_f$ et $b \notin V_f$,

(2) $a \notin V_f$ et $b \notin V_f$,

(3) $a \in V_f$ et $b \in V_f$.

LEMME 5.18. — *Soit $\alpha : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale, supposons que $d_{V_f}(\alpha(t)) \geqslant r > 0$. Alors la longueur (par rapport à la métrique δ) de α est minoré par r fois la longueur de α par rapport à la métrique riemanienne g.*

Preuve. — Le lemme est évident puisque $\delta = d_{V_f}^{2\gamma}(dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2) + d\omega_n^2$ et $\gamma = 1$ dans notre cas. □

Examinons maintenant le cas 1 : supposons que $2r = d_{V_f}(b) > 0$. Soit $\alpha : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale joignant a et b. Il existe un $t_1 \in (t_0, t_2)$ tel que $r = d_{V_f}(\alpha(t_1))$ et $d_{V_f}(\alpha(t)) \geqslant r$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. Donc par lemme 5.18 la longueur (par rapport à la métrique δ) de α est $\geqslant r^2$, car $\mathrm{dist}(\alpha(t_1), b) \geqslant r$ donc la longueur (pour la métrique g) de $\alpha([t_1, t_2])$ est au moins égale à r. Ainsi

$$\mathrm{dist}_1(a, b) \geqslant r^2 > 0.$$

Dans la cas 2 : posons $2r = \min\{d_{V_f}(a), d_{V_f}(b)\} > 0$. Soit $\alpha : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale joignant a et b. Si $d_{V_f}(\alpha(t)) \geqslant r$, $t \in [t_0, t_2]$, alors par lemme 5.18 la longueur (par rapport à la métrique δ) de α est $\geqslant r\mathrm{dist}(a, b)$. Si il existe un $t_1 \in (t_0, t_2)$ tel que $r = d_{V_f}(\alpha(t_1))$, alors, par l'argument employé dans le cas 1, la longueur (par rapport à la métrique δ) de α est $\geqslant 2r^2$. Donc

$$\mathrm{dist}_1(a, b) \geqslant \min\{2r^2, r\mathrm{dist}(a, b)\} > 0.$$

Il reste à régler le cas 3, où les deux points a, b sont dans V_f. Dans un premier temps supposons que $f(a) < f(b)$. Soit $\alpha : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale joignant a et b.

En enlevant les parties où $f \circ \alpha$ est décroissante on obtient une courbe (bien sûr de longueur plus courte), on peut supposer que $\alpha(t)$ monte d'une surface de niveau à une autre pour tout t. Fixons un $r > 0$. S'il existe un $t_1 \in (t_0, t_2)$ tel que $2r = d_{V_f}(\alpha(t_1))$ alors, par l'argument du cas 1, la longueur de α est $\geqslant r^2$. Donc on supposera que $d_{V_f}(\alpha(t)) \leqslant 2r$, $t \in [t_0, t_2]$. Prenons l'ensemble compact

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \, d_{V_f}(x) \leqslant 2r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)\}.$$

Supposons $\alpha(t)$ paramétrée par les valeurs de f, alors grâce à l'inégalité de Schwartz on a

$$1 = \frac{df(\alpha(t))}{dt} = \langle {}^{\delta}\nabla^h f(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle \leqslant ||{}^{\delta}\nabla^h f(\alpha(t))||\dot{\alpha}(t)|.$$

Donc par le lemme 5.15 et la remarque 5.16, on obtient

$$|\dot{\alpha}(t)| \geqslant \frac{1}{|{}^{\delta}\nabla^h f(\alpha(t))|} \geqslant \frac{1}{C_2} > 0$$

où C_2 est une constante dans l'inégalité de Łojasiewicz (5.2). La constante C_2 dépend de l'ensemble compact B fixé ci-dessus. Alors

$$\mathit{longueur}(\alpha(t)) \geqslant \int_{f(a)}^{f(b)} |\dot{\alpha}(t)| dt \geqslant \frac{1}{C_2}(f(b) - f(a)) > 0.$$

Finalement, on peut conclure que

$$\mathrm{dist}_1(a,b) \geqslant \min\left\{r^2, \frac{1}{C_2}(f(b)-f(a))\right\} > 0.$$

Il reste encore le cas où $f(a) = f(b)$. Puisque f restreinte à V_f est une fonction de Morse et $\dim V_f = 1$, l'ensemble $f^{-1}(f(a)) \cap V_f$ n'a qu'un nombre fini des points. Nous allons distinguer deux cas. Si a et b ne sont pas inclus dans le même composante connexe de V_f alors, on choisissant $r > 0$ suffisamment petit on voit que tout chemin horizontal, joignant a et b, doit sortir du voisinage tubulaire $\{d_{V_f} \leqslant r\}$. Ainsi on peut appliquer l'argument du cas 1.

Si a et b sont dans la même composante connexe de V_f on choisit $r > 0$ de la façon suivante : soit $r_1 = \frac{1}{2}\sup_{y\in[a,b]}|f(y)-f(a)|$, ou $[a,b]$ désigne l'ensemble de points de V_f qui se trouvent entre a et b. Ceci a bien sens si la composante de V_f qui contient ces points est homéomorphe à la droite $\mathbb{R}$, sinon cette composante est homéomorphe à un cercle et on prend cette composante entière comme $[a,b]$. Notons $R = \sup_{y\in[a,b]}|y| + r_1$ et $\lambda = \sup_{|x|\leqslant R}|\nabla f|$. Finalement choisissons $0 < r \leqslant \min\{r_1, \frac{r_1}{\lambda}\}$ de façon que $T := \{d_{V_f} \leqslant r\} \cap \{|x| \leqslant R\}$ soit un voisinage tubulaire de $[a,b]$.

Soit $\alpha : [t_0,t_2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe horizontale joignant a et b. Alors soit α sort du tube $\{d_{V_f} \leqslant r\}$ et on peut appliquer l'argument du cas 1. Soit α reste dans la tube $\{d_{V_f} \leqslant r\}$, et il existe un $t_1 \in (t_0,t_2)$ tel que $|f(\alpha(t_1)) - f(a)| \geqslant r_1 > 0$, on peut donc appliquer l'argument du cas 3 ou $f(a) < f(b)$. Ainsi $\mathrm{dist}_1(a,b) > 0$ aussi dans ce dernier cas. Le théorème 5.17 est ainsi démontré. □

Remarque 5.19. — D'après les théorèmes 5.10 et 5.17, pour tout $f \in L_d$ la longueur des trajectoires de $\nabla^h f$ est bornée uniformément et $(\mathbb{R}^n, \mathrm{dist}_1)$ est un espace métrique. Ainsi le théorème 5.14 n'est qu'une conséquence du théorème 5.17.

5.3. Quelques phénomènes particuliers

Le gradient horizontal est la projection du gradient sur la distribution. Puisque la distribution n'est pas forcément orthogonale aux fibres de la fonction f, le gradient horizontal n'est pas forcément orthogonal aux fibres de la fonction. De plus, au voisinage de l'ensemble des points critiques horizontaux $V_f = \{\nabla^h f = 0\}$, le gradient horizontal est très proche des plans tangents aux fibres. De ce fait, le gradient horizontal est beaucoup plus petit que le gradient au voisinage de V_f, et dans le même esprit que

[9] l'on peut imaginer que les trajectoires du gradient horizontal pourraient être beaucoup plus longues que celles du gradient, et que leur longueur pourrait n'être pas bornée uniformément, et même, pas bornée. Les deux parties qui suivent donnent des exemples de ce type de comportement pour le gradient horizontal.

5.3.1. La longueur des trajectoires du gradient horizontal n'est pas forcément bornée uniformément

Voici un exemple qui illustre la particularité du gradient horizontal où l'inégalité de Łojasiewicz n'existe plus.

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^3$ où l'on considère la distribution d'Heisenberg, et le polynôme $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_3$. Le gradient horizontal de f s'écrit

$$\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2 = -x_2 X_1 + x_1 X_2.$$

L'ensemble des points critiques horizontaux V_f de f est l'axe x_3. Donc la généricité de dimension 1 de V_f, et la généricité sur la finitude de l'intersection de V_f avec une surface de niveau de f sont satisfaites.

Les trajectoires de $\nabla^h f$ sont déterminées par le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{2}x_2(-x_2) + \dfrac{1}{2}x_1 x_1 = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \tag{5.11}$$

En résolvant ce système, nous obtenons

$$x_1 = r\cos(t) + c\sin(t)$$

où r, c sont des constantes.

Prenons $c = 0$, on a $x_1 = r\cos(t)$, $x_2 = r\sin(t)$ et $x_3 = \dfrac{1}{2}r^2 t + C$ où C est une constante, ainsi avec $C = 0$ nous avons $x_3 = \dfrac{1}{2}r^2 t$.

Calculons la longueur des trajectoires contenues dans la boîte

$$B = \left\{-\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\right\}$$

Soit t un temps pour lequel une trajectoire reste encore dans la boîte, on a $0 \leqslant x_3 = \dfrac{1}{2}r^2 t \leqslant 1$, donc $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{r^2}$, donc la longueur de toute trajectoire de $\nabla^h f$ dans B contenue dans le cylindre $\{x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ est

$$L(r) = \int_0^{\frac{2}{r^2}} ||\nabla^h f(x(t))||dt = \int_0^{\frac{2}{r^2}} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}dt = \int_0^{\frac{2}{r^2}} rdt = \frac{2}{r}.$$

Puisque r est la distance à l'axe x_3, la longueur des trajectoires du gradient n'est pas bornée uniformément dans cette boîte. En effet, la longueur devient de plus en plus grande quand la trajectoire s'approche de l'axe x_3. La vitesse de montée est plus petite que celle de rotation.

Dans cet exemple, les trajectoires de $\nabla^h f$ n'ont pas de points limites sur l'axe x_3.

5.3.2. Les trajectoires du gradient horizontal peuvent s'accumuler sur un cycle

Voici une autre propriété particulière du gradient horizontal. Dans cet exemple, il n'y a pas la généricité de dimension 1 de l'ensemble critique horizontal, ni la généricité sur la finitude de l'intersection de l'ensemble critique horizontal avec une surface de niveau de la fonction.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la distribution

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2} x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2} x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \tag{5.12}$$

et le polynôme $f = 2x_3 - \dfrac{1}{6}(1 - x_1^2 - x_2^2)^3$. Le gradient horizontal de f est

$$\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2$$

avec

$$\begin{cases} X_1 f = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ X_2 f = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases} \tag{5.13}$$

La projection du champ de gradient horizontal dans le plan (x_1, x_2) s'accumule sur le cercle $\{1 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}$. L'ensemble des points critiques horizontaux de f est

$$V_f = \{1 - x_1^2 - x_2^2 = 0\} \cup (\{x_2 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\} \cap \{x_1 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\}).$$

Donc, cet ensemble est l'union de l'axe x_3 et du cylindre $\{1 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}$.

Les trajectoires de $\nabla^h f$ sont déterminées par le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)^2. \end{cases} \tag{5.14}$$

Soit $x(t)$ une solution de ce système avec la condition initiale

$$x(0) = a = (a_1, a_2, a_3)$$

telle que $\frac{1}{2} < a_1^2 + a_2^2 < 1$. Montrons que $x(t)$ s'approche du tube $\{1 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}$:

Posons $R = r^2 = x_1^2 + x_2^2$, on a

$$\dot{R} = 2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} = 2r^2(1-r^2)^2 = 2R(1-R)^2 \geqslant 0. \tag{5.15}$$

Alors R est croissant sur $x(t)$. Notons que $\dot{x_3} = \frac{1}{4}\dot{R}$. On a

$$x_3(\infty) - x_3(0) = x_3(\infty) - a_3 = \int_0^\infty \dot{x_3}(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^\infty \dot{R}(t)dt = \frac{R(\infty) - R(0)}{4}.$$

Nous allons montrer que $R(t) \to 1$ quand $t \to \infty$. Puisque V_f contient le cylindre $\{1 - r^2 = 0\}$, la trajectoire $x(t)$ n'arrive jamais à ce cylindre en temps fini par la proposition 5.5, donc $x(t)$ ne traverse pas ce cylindre. D'autre part $R(0) = r^2(0) < 1$, donc $x(t)$ reste toujours à l'intérieur du cylindre, ce qui signifie que $R(t) < 1$ pour tout t. Maintenant, cherchons une fonction qui borne R inférieurement et qui tende vers 1. Puisque $R(0) > \frac{1}{2}$ et R est croissant, on a $0 < 1 - R < \frac{1}{2} < R$ et on obtient la minoration suivante de $\dot{R}$ à partir de l'équation (5.15) : $\dot{R} \geqslant 2(1-R)^3$.

Posons $u = 1 - R$, on a $-\dot{u} \geqslant 2u^3$. Alors $-\frac{du}{u^3} \geqslant 2dt$.

Prenons l'intégrale, on a $\int_0^t -\frac{du}{u^3} \geqslant 2t$. Donc $\frac{1}{2u^2(t)} - \frac{1}{2u^2(0)} \geqslant 2t$.

Alors $u(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{4t + \frac{1}{u^2(0)}}}$. Ainsi, on a $1 - R(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{4t + \frac{1}{(1-R(0))^2}}}$.

Et finalement $R(t) \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{4t + \frac{1}{(1-R(0))^2}}} \to 1$ quand $t \to \infty$.

Rappelons que $R(t) < 1$ pour tout t, on en déduit que $R(t) \to 1$ quand $t \to \infty$. Cela signifie que $x_3(\infty) = x_3(0) + \frac{1-R(0)}{4}$.

Ainsi la trajectoire $x(t)$ s'accumule sur le cercle $\{1 - x_1^2 - x_2^2 = 0, x_3 = x_3(0) + \frac{1-R(0)}{4}\}$, ce cercle est contenu dans la fibre $f = 2x_3(0) + \frac{1-R(0)}{2}$ de la fonction f. De ce fait, la longueur de $x(t)$ n'est pas bornée et $x(t)$ n'a pas de limite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.-A. Absil & K. Kurdyka, « On the stable equilibrium points of gradient systems », *Systems Control Lett.* **55** (2006), n° 7, p. 573-577.

[2] M. Baeg, U. Helmke & J. B. Moore, « Gradient flow techniques for pose estimation of quadratic surfaces », in *Proceedings of the World Congress in Computational Methods and Applied Mathematics*, 1994.

[3] Z. M. Balogh, I. Holopainen & J. T. Tyson, « Singular solutions, homogeneous norms, and quasiconformal mappings in Carnot groups », *Math. Ann.* **324** (2002), p. 159-186.

[4] R. Benedetti & J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann, 1991.

[5] E. Bierstone & P. D. Milman, « Semianalytic and subanalytic sets », *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* (1988), n° 67, p. 5-42.

[6] J. Bochnak, M. Coste & M. Roy, *Géométrie semi-algébrique réelle*, Springer, 1987.

[7] R. Chill, « The Lojasiewicz-Simon gradient inequality », *J. Funct. Anal.* **201** (2003), p. 572-601.

[8] W. L. Chow, « Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung », *Math. Ann.* **117** (1939), p. 98-105.

[9] K. K. D. D'Acunto, « Bounds for gradient trajectories of polynomial and definable functions with application » (soumis) J. Diff. Geometry (2004).

[10] D. D'Acunto & K. Kurdyka, « Explicit bounds for the Lojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials », *Ann. Polon. Math.* **87** (2005), p. 51-61.

[11] A. Gabrielov, « Multiplicities of Pffafian intersections and the Lojasiewicz inequality », *Selecta Math. (N.S.)* **1** (1995), p. 113-127.

[12] M. Goresky & R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, Springer, 1988.

[13] M. Gromov, *Carnot-Caratheodory spaces seen from within. Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, vol. 144, Birkhäuser Verlag, 1996.

[14] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.

[15] U. Helmke & J. B. Moore, *Optimization and dynamical systems*, Springer, 1994.

[16] M. Hirsch, *Differential topology*, Springer, 1976.

[17] S.-Z. Huang, *Gradient inequalities with applications to asymptotic behavior and stability of gradient-like systems*, vol. 126, AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2006.

[18] D. Jiang & J. B. Moore, « A gradient flow approach to decentralised output feedback optimal control », *Systems Control Lett.* **27** (1996), n° 4, p. 223-231.

[19] K. Kurdyka, « On gradients of functions definable in o-minimal structures », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), n° 3, p. 769-783.

[20] K. Kurdyka, T. Mostowski & A. Parusiński, « Proof of the Gradient Conjecture of R. Thom », *Ann. of Math.* **152** (2000), p. 163-792.

[21] K. Kurdyka & A. Parusiński, « w_f-stratification of subanalytic functions and the Łojasiewicz inequality », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), n° 2, p. 129-133.

[22] S. Łojasiewicz, « Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels », in *Colloques internationaux du CNRS. Les équations aux dérivées partielles* (Paris) (B. Malgrange (Paris 1962). Publications du CNRS, éd.), vol. 117, 1963.

[23] ———, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette, 1965.

[24] ———, « Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique », in *Seminari di Geometria* (Bologna), 1982-1983, p. 115-117.

[25] ———, « Sur la géométrie semi- et sous- analytique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), n° 5, p. 1575-1595.

[26] Y. C. Lu, *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory*, Springer, 1976.

[27] V. Magnani, « A Blow-up theorem for regular hypersurfaces on nilpotent groups », *Manuscripta Math.* **110** (2003), n° 1, p. 55-76.

[28] J. H. Manton, U. Helmke & I. M. Y. Mareels, « A dual purpose principal and minor component flow », *Systems Control Lett.* **54** (2005), n° 8, p. 759-769.

[29] P. K. Rashevsky, « Any two points of a totally nonholonomic space may be connected by an admissible line », *Uch. Zap. Ped. Inst. im. Liebknechta. Ser. Phys. Math.* **2** (1938), p. 83-94.

[30] D. Ridout & K. Judd, « Convergence properties of gradient descent noise reduction », *Physica. D* **165** (2002), n° 1-2, p. 26-47.

[31] L. Simon, « Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems », *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), n° 3, p. 525-571.

[32] R. S. Strichartz, « Sub-riemannian geometry », *J. Diff. Geom.* **24** (1986), p. 221-263.

[33] H. J. Sussmann, « Orbits of families of vector fields and integrability of distributions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **180** (1973), p. 171-188.

[34] R. Thom, « Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématiques : un bilan », *Publ. Math. IHES* **70** (1989), p. 200-214.

[35] N. T. Trendafilov & R. A. Lippert, « The multimode Procrustes problem », *Linear Algebra Appl.* **349** (2002), p. 245-264.

[36] W. Y. Yan, K. L. Teo & J. B. Moore, « A gradient flow approach to computing LQ optimal output feedback gains », *Optimal Control Appl. Methods* **15** (1994), n° 1, p. 67-75.

[37] S. Yoshizawa, U. Helmke & K. Starkow, « Convergence analysis for principal component flows », *Mathematical theory of networks and systems (Perpignan, 2000). Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* **11** (2001), n° 1, p. 223-236.

Manuscrit reçu le 5 juin 2008,
accepté le 3 octobre 2008.

Si Tiep DINH
Institute of Mathematics
18 Hoang Quoc Viet Road
Cau Giay District 10307
Hanoi (Vietnam)
tiepmrs@yahoo.fr

Krzysztof KURDYKA & Patrice ORRO
Université de Savoie
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5175 du CNRS
Campus Scientifique
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex (France)
krzysztof.kurdyka@univ-savoie.fr
patrice.orro@univ-savoie.fr