ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

N. V. QUE

Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 1 (1967), p. 157-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_157_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 157-223.

DU PROLONGEMENT DES ESPACES FIBRÉS ET DES STRUCTURES INFINITÉSIMALES

par Ngo van QUE

Introduction.

Ce travail a pour point de départ le papier fondamental de D. C. Spencer : « Deformation of structures defined by transitive continuous pseudogroups ». D. C. Spencer y a développé pour la géométrie différentielle une nouvelle méthode dite cohomologique. Cette méthode, qui a été illustrée par l'important mémoire de I. M. Singer et S. Sternberg : « On the infinite groups of Lie and Cartan », s'avère être d'ailleurs un formalisme élégant et essentiel pour l'étude des opérateurs différentiels ou des systèmes différentiels linéaires en général (voir la profonde thèse de D. G. Quillen à Harvard 1964, qui nous est malheureusement parvenue après que ce travail a été conçu). Notre but est de préciser le cadre général dans lequel s'applique la méthode de D. C. Spencer et de l'appliquer à l'étude particulière des structures infinitésimales. Les différents chapitres de ce travail sont précédés chacun par une note explicative qui dégage les résultats essentiels obtenus ; nous y renvoyons donc le lecteur pour une introduction plus détaillée.

Le professeur B. Malgrange m'a donné l'essentiel des idées contenues dans le paragraphe 4 du chapitre II. En particulier, je lui dois l'élégante forme du théorème II-4-b de ce paragraphe. Je profite pour lui présenter ici ma reconnaissance entière.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde gratitude au professeur A. Lichnerowicz dont l'enseignement et les conseils bienveillants ont depuis toujours guidé mes recherches.

(1) Le sujet de ce travail fait partie de la thèse présentée le 16 juin 1966 à la Faculté des Sciences de Paris pour l'obtention du grade de docteur ès-sciences. L'autre partie de la thèse, qui développe les idées de D. C. Spencer en théorie de déformation, sera présentée dans une prochaine publication.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE PREMIER

GROUPOIDE DE LIE ET ESPACE FIBRE ASSOCIE

Nous rappelons dans ce paragraphe la notion de groupoïdes de Lie et des espaces fibrés associés. Il nous a semblé nécessaire pour la suite d'introduire la notion de groupoïdes de Lie qui est cependant équivalente à celle bien connue d'espaces fibrés principaux à groupe structural.

1. Groupoïde de Lie.

DÉFINITION I.1.a. — *Un groupoïde* Φ *sur l'ensemble* V (*ou plus précisément, dont* V *est l'ensemble des unités*) *est un ensemble muni d'une application*

$$\begin{aligned} (a, b) : \quad & \Phi \longrightarrow \mathrm{V} \times \mathrm{V} \\ & z \longrightarrow (a(z), b(z)) \end{aligned}$$

et d'une loi de composition interne associative et partielle, vérifiant les axiomes suivants :

1) z *et* z' *étant deux éléments de* Φ, *le composé* $z \cdot z'$ *est défini si et seulement si* $a(z) = b(z')$. *Et on a*

$$b(z \cdot z') = b(z) \qquad et \qquad a(z \cdot z') = a(z').$$

2) $\forall\, x, x \in \mathrm{V}$, $\exists\, l_x$, *élément de* Φ *tel que*

$$a(l_x) = b(l_x) = x$$

et que si $z \cdot l_x$ *est défini,* $z \cdot l_x = z$
si $l_x \cdot z$ *est défini,* $l_x \cdot z = z$

3) $\forall\, z,\ z \in \Phi$, $\exists\, z^{-1}$, *élément de* Φ *tel que*

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= l_y \qquad où \qquad y = b(z) \\ z^{-1} \cdot z &= l_x \qquad où \qquad x = a(z) \end{aligned}$$

Les applications a et b sont appelées respectivement application « source » et « but » de Φ. L'élément l_x, associé à tout élément x de V d'après l'axiome 2, est unique ; il est appelé l'unité en x de Φ.

On vérifie que l'ensemble des éléments de Φ de source et but confondus au même élément x de V, forme un groupe G_x, appelé le groupe d'isotropie en x de Φ. Et si z_0 est un élément de Φ, de source x et de but y,

$$\begin{aligned} z_0 : \quad G_x &\longrightarrow G_y \\ z &\longrightarrow z_0 \cdot z \cdot z_0^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes de G_x sur G_y.

Dans le cas où l'application (a, b) est surjective, nous dirons que le groupoïde Φ est *transitif*.

DÉFINITION I.1.b. — *Φ étant un groupoïde sur* V, *Φ est un groupoïde différentiable s'il existe sur Φ et* V *des structures de variétés différentiables (de classe infinie et paracompactes) telles que*

1) *l'application (a, b) est différentiable (indéfiniment).*

2) *l'application :*

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow \Phi \\ z &\longrightarrow z^{-1} \end{aligned}$$

soit différentiable,

3) *pour toute variété différentiable* W, *munie de deux applications différentiables f et g de* W *dans Φ vérifiant*

$$a \circ f = b \circ g,$$

l'application

$$\begin{aligned} f \cdot g : \quad W &\longrightarrow \Phi \\ z &\longrightarrow f(z) \cdot g(z) \end{aligned}$$

qui est alors définie, est différentiable.

Suivant Matsushima, nous dirons qu'un groupoïde différentiable est un *groupoïde de Lie,* si l'application (a, b) est une submersion (i.e. surjective et partout de rang maximal). Un groupoïde de Lie est donc transitif.

PROPOSITION I.1. — *Si Φ est un groupoïde de Lie sur la variété* V, *on a :*

1) *les groupes d'isotropie de Φ sont des groupes de Lie isomorphes,*

2) *en posant*

$$\Phi_x = \{z, z \in \Phi, \textit{ tel que } a(z) = x\}$$

Φ_x *est un espace fibré principal différentiable sur* V, *par la projection « but » b, avec comme groupe structural le groupe de Lie d'isotropie* G_x.

En effet,

a) Comme l'application (a, b) est une submersion, les groupes d'isotropie de Φ sont des sous-variétés fermées de Φ (lemme de Thom). Et les conditions 2 et 3 de la définition I.1.b entraînent que leur structure algébrique est compatible avec leur structure différentiable. Ce sont donc des groupes de Lie, qui sont isomorphes puisque Φ, étant un groupoïde de Lie, est transitif ;

b) de même, comme l'application a est aussi une submersion, Φ_x est aussi une sous-variété différentiable fermée de Φ. Et l'application b est une submersion de Φ sur V : Φ_x est donc un espace fibré différentiable sur V. D'autre part, la condition 3 de la définition I.1.b entraîne que G_x est un groupe de Lie opérant à droite sur Φ_x de façon simplement transitive sur les fibres. Alors, en vertu du théorème ci-dessous qui généralise un théorème de Gleason, Φ_x est un espace fibré principal différentiable sur V, avec comme groupe structural le groupe de Lie G_x (l'espace fibré principal à groupe structural étant compris au sens de Steenrod, Topology of fibre bundles).

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace fibré différentiable sur une variété différentiable* V. *Si* G *est un groupe de* Lie *opérant sur la variété différentiable* E, *de façon simplement transitive sur les fibres,* E *est un espace fibré principal différentiable sur* V, *à groupe structural* G.

Démonstration.

LEMME. — *Soit* E *un espace fibré différentiable sur* V. *Tout point de* V *admet un voisinage* U, *muni d'une application différentiable s de* U *dans* E *tel que* $p \circ s = \mathrm{Id.}$, *p étant la projection de* E *sur* V.

Autrement dit, ce lemme assure l'existence des sections différentiables locales définies au voisinage de tout point de V. Ce lemme n'est que la conséquence immédiate de la proposition 2, page 80 du « Theory of Lie Groups », de C. Chevalley, qui reste valable dans le cas différentiable.

Soit donc U, un ouvert de V, muni d'une section différentiable s. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_s : \quad U \times G &\longrightarrow E_U \quad (= p^{-1}(U)) \\ (x, g) &\longrightarrow s(x) \cdot g \end{aligned}$$

où le point du second membre désigne l'action de l'élément g de G sur un élément de E.

L'application φ_s est différentiable (comme l'application de la variété différentiable produit $U \times G$ dans la variété différentiable E_U). Elle est aussi bijective. Et on peut voir facilement que son application tangente est une bijection en tout point. C'est donc un difféomorphisme : φ_s^{-1} existe et est différentiable.

Il reste à voir que les « fonctions de changement de coordonnées » (voir Steenrod) sont des fonctions différentiables à valeurs dans G. Il revient à voir que si s' désigne une autre section différentiable définie sur U, l'application suivante :

$$g : U \longrightarrow G$$

$x \longrightarrow g(x)$, tel que $s'(x) = s(x) \cdot g(x)$ est différentiable. Or l'application g n'est autre que l'application composée

$$f \circ \varphi_s^{-1} \circ s'$$

où f est la projection canonique de $U \times G$ sur G. Comme chacune des applications f, φ_s^{-1}, s' est différentiable, l'application g est donc différentiable.

C.Q.F.D.

De la proposition I-1, nous tirons facilement le corollaire.

COROLLAIRE I.1. — *Le groupoïde de Lie* Φ *est localement isomorphe au groupoïde trivial* $R^n \times G \times R^n$, *où* n *est la dimension de* V, *et* G, *un groupe de Lie isomorphe aux groupes d'isotropie de* Φ.

Le groupoïde de Lie trivial $R^n \times G \times R^n$ admet comme espace des unités R^n et la loi de composition suivante :

$$(z, g', y) \cdot (y, g, x) = (z, g' \cdot g, x).$$

Et de façon précise, le corollaire affirme qu'en tout point de V, il existe un voisinage ouvert U et un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : (a, b)^{-1}(U \times U) &\longrightarrow R^n \times G \times R^n \\ z &\longrightarrow (y(z), g(z), x(z)) \end{aligned}$$

tel que si $a(z') = b(z)$, on ait

$$x(z') = y(z)$$

et

$$\varphi(z' \cdot z) = \varphi(z') \cdot \varphi(z).$$

Exemples.

1) V étant une variété différentiable, désignons par $\Pi^k(V)$, l'ensemble des jets inversibles d'ordre k de V dans V (voir C. Ehresmann - *a* -). $\Pi^k(V)$ est un groupoïde de Lie sur V, de groupes d'isotropie isomorphes au groupe L_n^k.

2) Si E est un espace fibré vectoriel différentiable (localement trivial) sur V, l'ensemble $\Pi(E)$, des isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de E, est un groupoïde de Lie sur V.

3) Si Φ et Φ' sont deux groupoïdes de Lie sur V, soit $\Phi \times \Phi'$ le produit de Whitney de Φ et de Φ', ou l'ensemble de couples (z, z') d'éléments de Φ et de Φ' vérifiant $a(z) = a(z')$ et $b(z) = b(z')$. Alors la loi de composition naturelle :

$$(z_1, z_1') \cdot (z, z') = (z_1 \cdot z, z_1' \cdot z')$$

détermine dans $\Phi \times \Phi'$ une structure de groupoïde de Lie sur V.

2. Espace fibré associé.

DÉFINITION I.2. — *Soient* Φ *un groupoïde Lie sur* V, *et* E *une variété différentiable fibrée sur* V, *i.e. munie d'une submersion* p *sur* V. *Nous dirons que* E *est un espace fibré associé à* Φ, *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\forall z, z \in \Phi$, avec $a(z) = x$ et $b(z) = y$, z *détermine un difféomorphisme de la fibre* E_x $(= p^{-1}(x))$ *sur la fibre* E_y :

$$\begin{aligned} \tilde{z} : E_x &\longrightarrow E_y \\ e &\longrightarrow \tilde{z}(e) \text{ noté } z \cdot e \end{aligned}$$

Et on a

$$\widetilde{z \cdot z'} = \tilde{z} \circ \tilde{z}'.$$

2) *pour toute variété différentiable* W, *munie de deux applications différentiables* f et g *respectivement à valeurs dans* Φ *et* E *telles que*

$$a \circ f = p \circ g$$

l'application $f \cdot g$, *qui est alors définie,*

$$\begin{aligned} f \cdot g : W &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

est différentiable.

PROPOSITION I.2. — E *étant un espace fibré associé à un groupoïde de Lie* Φ, E *est un espace fibré différentiable localement trivial de fibre* F *et à groupe structural* G, *où* F *est une variété différentiable difféomorphe à toute fibre de* E *et* G, *un groupe de Lie isomorphe aux groupes d'isotropie de* Φ.

En effet, désignons par F la fibre E_x de E. Il est facile de voir que E est l'espace fibré obtenu par modelage de F sur le fibré principal Φ_x, dont le groupe structural G_x opère d'après la définition I-2 sur F.

Il est à remarquer que si E est un espace fibré différentiable obtenu par modelage d'une variété F sur le fibré principal Φ_x, E est un espace fibré associé au sens de la définition I-2 au groupoïde de Lie Φ.

Et lorsque sur chaque fibre de E, il existe une structure algébrique (resp. de groupes, d'espaces vectoriels, d'algèbres, etc.) compatible avec leur structure différentiable et que pour tout élément z de Φ, z est un isomorphisme algébrique, E est un espace fibré différentiable à structure algébrique (resp. fibré en groupes, fibré vectoriel, fibré en algèbres, etc.).

1) *Fibré en groupe canonique associé à un groupoïde de Lie.* Soit Φ un groupoïde de Lie sur V. Désignons par G (Φ), l'ensemble $(a,b)^{-1}(\Delta)$, où Δ est la variété diagonale fermée de V $\times$ V. L'application (a, b) étant une submersion, d'après le lemme de Thom, G (Φ) est une sous-variété différentiable fermée de $\Phi \cdot$ G (Φ) est évidemment un espace fibré différentiable sur V, par l'application a ou b, et tel que chacune de ses fibres soit un groupe de Lie, groupe d'isotropie de $\Phi \cdot$ G (Φ) est d'autre part canoniquement associé à Φ, de façon compatible avec la structure algébrique de ses fibres : c'est donc un espace fibré différentiable en groupes sur V.

2) *Un espace de prolongement infinitésimal d'ordre* k d'une variété

différentiable V est par définition un espace fibré associé au groupoïde de Lie $\Pi^k(V)$.

3) Si E et E′ sont deux espaces fibrés sur V associés respectivement aux groupoïdes de Lie Φ et Φ', leur produit de Whitney sur V est encore un espace fibré sur V associé au groupoïde $\Phi \times \Phi'$, produit de Whitney de Φ et Φ' (voir ex. 3, I-1).

3. Sous-groupoïde de Lie et groupoïde d'extension.

Soient Φ et Φ' deux groupoïdes sur V. Un foncteur de Φ' dans Φ est une application f :

$$f : \Phi' \longrightarrow \Phi$$

telle que

$$a \circ f = a', \qquad b \circ f = b'$$

et

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z').$$

Lorsque Φ et Φ' sont des groupoïdes différentiables, un foncteur est toujours supposé différentiable.

Sous-groupoïde de Lie.

Nous disons que Φ' est un sous-groupoïde de Lie du groupoïde de Lie Φ, s'il existe un foncteur injectif de Φ' dans Φ.

Comme dans le cas de groupes de Lie, un foncteur injectif est nécessairement régulier, i.e. partout de rang maximal : Φ' est réalisé comme une sous-variété différentiable de Φ.

DÉFINITION I.3. — *Soit* E *un espace fibré sur* V, *associé au groupoïde de Lie* Φ. *Une section (différentiable) globale de* V *dans E est dite régulière si et seulement si pour tout couple d'éléments x et y de* V, *il existe z, élément de* Φ *de source et de but respectivement en x et en y, tel que*

$$z \cdot s(x) = s(y).$$

PROPOSITION I.3.*a.* — *Toute section régulière s d'un espace fibré* E, *associé à un groupoïde de Lie* Φ, *définit canoniquement un sous-groupoïde de Lie* Φ' *de* Φ.

Démonstration.

Considérons en effet

$$\Phi' = \{ z, z \in \Phi, \text{ tel que } z \cdot s(a(z)) = s(b(z)) \}$$

Φ' est un sous-groupoïde de Φ, transitif sur V : le sous-groupoïde qui laisse invariant la section.

Φ' est un sous-groupoïde de Lie si Φ' est une sous-variété différentiable de Φ. Or, en effet, il nous suffit de regarder localement, i. e. supposer que Φ est un groupoïde de Lie trivial $R^n \times G \times R^n$ (voir corollaire I-1) et que E est un fibré trivial $R_n \times F$, où F est une variété différentiable sur laquelle opère le groupe de Lie G, associé à Φ de la manière suivante :

$$z \in \Phi, \; z = (x, g, y) \quad \text{et} \quad e \in E, \; e = (y, f)$$
$$z \cdot e = (x, g \cdot f).$$

Et soit donc la section régulière s :

$$s : R^n \longrightarrow R^n \times F$$
$$x \longrightarrow (x, s(x)).$$

Considérons l'application différentiable :

$$S : R^n \times G \times R^n \longrightarrow F \times F$$
$$(x, g, y) \longrightarrow (s(x), g \cdot s(y))$$

Il est clair que Φ' est l'ensemble $S^{-1}(\Delta)$, où Δ est la sous-variété diagonale de $F \times F$. Mais comme la section s est régulière, on peut supposer que G opère transitivement sur F, car sinon au lieu de F on peut prendre la sous-variété orbite $G \cdot s(x)$. Et alors, l'application S est transversale à Δ; d'après le théorème de transversalité de Thom, $S^{-1}(\Delta)$ est une sous-variété différentiable fermée de Φ.

C.Q.F.D.

Exemples.

Une structure infinitésimale d'ordre k sur la variété différentiable V, c'est la donnée d'une section (différentiable) d'un espace fibré associé au groupoïde de Lie $\Pi^k(V)$. La structure infinitésimale est régulière si cette section est régulière. Elle détermine donc un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^k(V)$ et ce sous-groupoïde est ce qu'on appelle une G-structure sur V (G, sous-groupe de L_n^k, isomorphe aux groupes d'isotropie du sous-groupoïde).

1) Désignons par T^*, le fibré cotangent de $V \cdot T^*$, est associé au groupoïde de Lie $\Pi^1(V)$. Le produit symétrique au sens de Whitney de T^* par lui-même, $S^2(T^*)$, est encore associé à $\Pi^1(V)$. Ceci dit, une structure pseudo-riemanienne sur V est la donnée d'une section régulière non nulle de $S^2(T^*)$.

2) De même, le produit extérieur au sens de Whitney de T^*, $\Lambda^2 T^*$, associé à $\Pi^1(V)$. Une section de $\Lambda^2 T^*$, qui est partout de même rang, est une section régulière. Dans le cas où le rang de la section (la 2-forme) est partout égal à la dimension de V, qui doit être donc paire d'après un théorème de Lepage, on a ce qu'on appelle une structure presque symplectique sur V. Une structure presque symplectique est donc régulière.

Groupoïde d'extension.

Soient Φ et Φ' deux groupoïdes sur V. Φ est dit un groupoïde d'extension de Φ', s'il existe un foncteur φ surjectif de Φ sur Φ'.

De même comme dans le cas des groupes de Lie, un foncteur surjectif d'un groupoïde de Lie Φ sur un autre groupoïde de Lie Φ' est nécessairement partout de rang maximal : Φ est fibré sur Φ'.

Et à toute extension Φ de Φ', Φ et Φ' étant deux groupoïdes de Lie, il correspond la suite exacte suivante de fibrés en groupes sur V :

$$1 \to N(\varphi) \to G(\Phi) \to G(\Phi') \to 1 \qquad (1)$$

Si nous appelons une réduction de Φ dans Φ' tout foncteur ρ de Φ' dans Φ tel que $\varphi \circ \rho = \mathrm{Id}$, il correspond à toute réduction de Φ' dans Φ une scission de cette suite exacte de fibrés en groupe. Et cette scission est régulière en ce sens : ρ étant le relèvement de la scission, pour tout couple d'élément x et y de V, il existe z, élément de Φ, de source et de but respectivement en x et en y, tel que

$$g \in G(\Phi'), \quad z \cdot \rho(g) \cdot z^{-1} = \rho(\varphi(z) \cdot g \cdot \varphi(z)^{-1})$$

Et inversement, nous avons la proposition :

PROPOSITION I.3*b*. — *Si Φ est un groupoïde de Lie d'extension du groupoïde de Lie Φ', toute scission de la suite exacte de fibrés en groupes* (1), *telle que pour tout point x de* V, $G_x(\Phi')$ *opère alors par l'opération adjointe sur* $N(\varphi)|_x$ *sans autre point fixe que l'élément neutre, détermine une réduction de Φ' dans Φ.*

En effet, désignons par ρ le relèvement de la scission. Il est immédiat de constater que l'ensemble des éléments z de Φ tels que

$$z \cdot \rho(g) \cdot z^{-1} = \rho(\varphi(z) \cdot g \cdot \varphi(z)^{-1}),$$

pour tout g de $G_x(\Phi')$ avec $x = a(z)$, est sous-groupoïde de Lie de Φ, isomorphe par le foncteur φ à Φ'.

CHAPITRE II

PROLONGEMENT DES ESPACES FIBRES ET OPERATEURS DIFFERENTIELS

Soit donné (E, p, V), i.e. une variété différentiable E fibrée sur la variété différentiable V par la submersion p. Désignons par $J_k(E, p, V)$, ou lorsqu'il n'y a pas de risques de confusion, simplement par $J_k(E)$, l'ensemble des jets d'ordre k des sections (différentiables) de E. C'est encore une variété différentiable fibrée par l'application « source » sur V, dite le fibré de prolongement d'ordre k de E. Et si s est une section différentiable de E, l'application

$$\begin{aligned} j^k s \,:\, V &\longrightarrow J_k(E, p, V) \\ x &\longrightarrow j^k_x s \end{aligned}$$

est une section différentiable de V dans $J_k(E, p, V)$.

Si E est un fibré vectoriel, nous montrerons que le fibré de prolongement est aussi un fibré vectoriel. Et en définissant sur les fibrés de prolongement l'opérateur de Spencer, nous donnerons une contribution à l'étude des opérateurs différentiels.

1. Prolongement de groupoïdes de Lie.

Φ étant un groupoïde de Lie sur V, considérons l'ensemble

$$\Phi^k \subset J_k\,(\Phi, a, V)$$

tel que si X est un jet d'ordre k de section de (Φ, a, V),

$X \in \Phi^k$ si et seulement si $bX \in \Pi^k(V)$, bX désignant le composé de jets.

Proposition II.1*a*. — *L'ensemble Φ^k admet une structure canonique de groupoïde de Lie sur* V.

En effet, considérons les applications suivantes, comme les applications source et but de Φ^k sur V:

$$\begin{aligned} a_k \,:\, \Phi^k &\longrightarrow V \\ X &\longrightarrow \alpha(X), \text{ la source du jet X} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{array}{rl}
b_k : \Phi^k & \longrightarrow V \\
X & \longrightarrow b(\beta(X)),
\end{array}
$$

$\beta(X)$ étant le but du jet X.

Alors si X et X′ sont deux éléments de Φ^k, vérifiant $a_k(X) = b_k(X')$, définissons le composé

$$X \cdot X' = (X\, b\, X') \cdot X'$$

où $X\, b\, X'$ est le composé de jets et le point du second membre est compris de la manière suivante : si $Z = j_x^k f$ et $Z' = j_x^k g$, f et g étant deux applications différentiables de W dans Φ, telles que $a \circ f = b \circ g$, $Z \cdot Z'$ est le jet $j_x^k (f \cdot g)$ de l'application $f \cdot g$ (voir définition I-1-b), ce jet ne dépendant que du jet d'ordre k de f et de g au point x.

Muni de cette loi de composition interne et partielle, Φ^k est évidemment un groupoïde sur V. Pour montrer que c'est en fait un groupoïde de Lie sur V, il suffirait de regarder localement, i.e. supposer que Φ est un groupoïde de Lie trivial $R^n \times G \times R^n$; ce qui est laissé aux soins du lecteur.

C.Q.F.D.

Proposition II.1b. — *Si* E *est un espace fibré différentiable, associé au groupoïde de Lie* Φ, *le fibré de prolongement* $J_k(E)$ *est canoniquement associé au groupoïde de Lie* Φ_k.

En effet, soient $Z \in \Phi^k$, avec $a_k(Z) = x$, et $X \in J_k(E)$, de source x; posons :

$$Z \cdot X = (Z\,(b\,Z)^{-1}) \cdot (X\,(bZ)^{-1})$$

où les éléments entre parenthèses sont des composés de jets et le point du second membre est ainsi défini : si $Y = j_x^k f$ et $Y' = j_x^k g$, f et g étant deux applications de W respectivement dans Φ et dans E, telles que $a \circ f = p \circ g$, on a $Y \cdot Y' = j_x^k (f \cdot g)$, le jet de l'application $f \cdot g$ de W dans E (voir définition II.2), ce jet ne dépendant que du jet d'ordre k de f et de g en x.

$Z \cdot X$ est alors un jet de section de E, de source $y\,(= b_k(Z))$. Et Φ^k opère donc sur $J_k(E)$. Pour la condition de différentiabilité (axiome 2 de la définition I.2), il est encore immédiatement suffisant de regarder localement, i.e. supposer que Φ est un groupoïde de Lie trivial $R^n \times G \times R^n$

et que E est le fibré trivial $R^n \times F$, G étant un groupoïde Lie opérant sur la variété F ; ce qui est laissé aux soins du lecteur.

C.Q.F.D.

Φ^k sera dit le groupoïde de prolongement d'ordre k de Φ. Il est un groupoïde d'extension du groupoïde produit $\Phi \times \Pi^k(V)$, par le foncteur canonique

$$\begin{aligned} \rho : \quad \Phi^k &\longrightarrow \Phi \times \Pi^k(V) \\ Z &\longrightarrow (\beta(Z), bZ) \end{aligned}$$

Et désignons encore par ρ_r l'application canonique qui associe à tout jet d'ordre k le jet d'ordre r inférieur. Appliqué à Φ^k c'est un foncteur surjectif de Φ^k sur Φ^r. Appliqué à $J_k(E)$, c'est V-morphisme de fibrés surjectif de $J_k(E)$ sur $J_r(E)$. Et on a

$$Z \in \Phi^k, \quad X \in J_k(E), \quad \rho_r(Z \cdot X) = \rho_r(Z) \cdot \rho_r(X).$$

2. Prolongement de fibrés vectoriels.

Dans toute la suite, E désignera un fibré vectoriel (différentiable et localement trivial) sur une variété V. Rappelons que $\Pi(E)$, l'ensemble de tous les isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de E, est un groupoïde de Lie auquel le fibré E est associé.

PROPOSITION II.2.a. — *Le fibré de prolongement* $J_k(E)$ *est un fibré vectoriel.*

En effet, $J_k(E)$ étant un fibré associé au groupoïde de Lie $\Pi^k(E)$, il suffit de montrer que chaque fibre de $J_k(E)$ est un espace vectoriel tel que si Z est un élément de $\Pi_k(E)$ de source x et de but y, Z soit un isomorphisme linéaire de $J_k(E)|_x$ sur $J_k(E)|_y$.

Soient donc $X = j^k_x\, s$ et $X' = j^k_x\, s'$ (s et s' étant deux sections de E) ; posons

$$\begin{aligned} X + X' &= j^k_x\,(s + s') \\ \lambda \in R, \qquad \lambda X &= j^k_x\,(\lambda s). \end{aligned}$$

Muni de ces lois de composition, $J_k(E)|_x$ est évidemment un espace vectoriel. Et il est facile de constater que les éléments de $\Pi^k(E)$ sont des isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de $J_k(E)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION II.2.b. — *Pour tout entier k, nous avons la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur* V :

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) \longrightarrow \mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \xrightarrow{\rho_{k-1}} \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E}) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{E}\otimes\mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)$ *est le produit tensoriel au sens de Whitney de* E *par* $\mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)$, *le produit symétrique au sens de Whitney de k exemplaires du fibré cotangent* T* *de la variété de base* V, *et* ρ_{k-1} *est le morphisme canonique qui associe à tout jet de section d'ordre k le jet d'ordre inférieur* $k-1$.

Cette proposition est une conséquence immédiate des lemmes ci-dessous.

LEMME 1. — *En tout point x de* V, *nous avons la suite exacte suivante d'espaces vectoriels*

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)\,|_x \longrightarrow \mathrm{J}_k(\mathrm{E})\,|_x \xrightarrow{\rho_{k-1}} \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E})\,|_x \longrightarrow 0$$

En effet pour démontrer le lemme, on peut évidemment supposer que E est le fibré trivial $\mathrm{R}^n \times \mathrm{F}$, n étant la dimension de V et F, un espace vectoriel isomorphe à la fibre de E. $\mathrm{J}_k(\mathrm{E})$ étant le fibré trivial $\mathrm{R}^n \times \mathrm{T}^k_n(\mathrm{F})$, désignant l'ensemble des jets d'ordre k de source 0 de R^n dans F, le lemme n'est autre que la suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{F} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{R}^{n*}) \longrightarrow \mathrm{T}^k_n(\mathrm{F}) \xrightarrow{\rho_{k-1}} \mathrm{T}^{k-1}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow 0$$

la suite exacte qu'on établit immédiatement au moyen de la représentation polynominale des jets de $\mathrm{T}^k_n(\mathrm{F})$ à partir de la donnée d'une base de F et de la base canonique de R^n.

LEMME 2. — *Pour tout* Z, *élément de* $\Pi^k(\mathrm{E})$, *de source x et de but y, nous avons l'isomorphisme suivant de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{E} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)\,|_x & \longrightarrow & \mathrm{J}_k(\mathrm{E})\,|_x & \longrightarrow & \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E})\,|_x & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \rho_0(\mathrm{Z})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{k-1}(\mathrm{Z})} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{E} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)\,|_y & \longrightarrow & \mathrm{J}_k(\mathrm{E})\,|_y & \longrightarrow & \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E})\,|_y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où ρ_0 *est le foncteur canonique de* $\Pi^k(\mathrm{E})$ *sur* $\Pi(\mathrm{E}) \times \Pi^1(\mathrm{V})$.

Pour l'établissement de cet isomorphisme, il suffit encore de faire une étude locale, i.e. en trivialisant E au voisinage de x et de y ; ce qui est laissé aux soins du lecteur.

Remarque.

Rappelons que les espaces fibrés vectoriels sur V forment une catégorie additive. Il est facile d'établir que

$$J_k : E \longrightarrow J_k(E)$$

est un foncteur exact de cette catégorie additive dans elle-même. Et si h est un V-morphisme de fibrés vectoriels différentiables

$$h : E \longrightarrow E'$$

on a

$$\rho_{k-1} \circ J_k(h) = J_{k-1}(h) \circ \rho_{k-1}$$

en particulier la restriction de $J_k(h)$ au sous-fibré $E \otimes S^k(T^*)$ est à valeurs dans le sous-fibré $E' \otimes S^k(T^*)$ et ce n'est autre que le morphisme $h \otimes Id$.

3. Opérateur D et suite exacte de Spencer.

D'après la proposition II.2.b, nous avons donc en particulier

$$0 \longrightarrow J_k(E) \otimes T^* \longrightarrow J_1[J_k(E)] \xrightarrow{\rho} J_k(E) \longrightarrow 0.$$

Il est immédiat de constater que $J_{k+1}(E)$ est un sous-fibré différentiable de $J_1[J_k(E)]$, et la restriction du morphisme ρ sur ce sous-fibré n'est autre que le morphisme canonique ρ_k.

Considérons une section différentiable s de $J_{k+1}(E)$; s et $j^1(\rho_k \circ s)$ sont deux sections de $J_1[J_k(E)]$, qui se composent avec le morphisme ρ pour donner une même section de $J_k(E)$. D'après la suite exacte précédente, $j^1(\rho_k \circ s) - s$ est une section de $J_k(E) \otimes T^*$. Ainsi, nous définissons un opérateur D, i.e. un V-morphisme R-linéaire du faisceau des sections différentiables de $J_{k+1}(E)$ à valeurs dans le faisceau des sections différentiables de $J_k(E) \otimes T^*$:

$$\begin{aligned} D : J_{k+1}(E) &\longrightarrow J_k(E) \otimes T^* \\ s &\longrightarrow j^1(\rho_k \circ s) - s \end{aligned}$$

opérateur que nous appellerons *opérateur de Spencer* (voir Spencer [2]).

[2] Le faisceau des sections (différentiables) d'un espace fibré vectoriel est, rappelons-le, un faisceau de $\mathcal{D}$-modules, donc en particulier R-linéaire, $\mathcal{D}$ étant le faisceau des fonctions différentiables de la variété de base. Indiquons aussi que dans ce travail tout fibré vectoriel et son faisceau des sections seront représentés par le même symbole, le contexte précisant chaque fois ce qu'on doit considérer.

LEMME 1. — *Si s est une section différentiable de $J_{k+1}(E)$ et f, une fonction différentiable sur la variété de base* V, *on a*

$$D(fs) = f\, D(s) + (\rho_k \circ s) \otimes df,$$

où df est la différentielle extérieure de f.

Ce lemme est une conséquence immédiate de la remarque suivante : si s est une section différentiable du fibré vectoriel E, et f, une fonction différentiable de la variété de base V, on a

$$j^1(fs) = f\, j^1(s) + s \otimes df,$$

où $s \otimes df$ est une section différentiable de $E \otimes T^*$, sous-espace fibré vectoriel de $J_1(E)$, d'après la proposition II.2.b.

Considérons un V-morphisme h de fibrés vectoriels différentiables

$$h : E \longrightarrow E'.$$

D'après les remarques de la fin du paragraphe II.2, il est immédiat que noùs avons

LEMME 2.

$$D \circ J_{k+1}(h) = (J_k(h) \otimes Id) \circ D.$$

Et en particulier, $J_{k+1}(E)$ *étant un sous-espace fibré différentiable de* $J_{k-r}[J_{r+1}(E)]$, *et la restriction de* $J_{k-r}(\rho_r)$ *à ce sous-espace n'étant autre que le morphisme canonique* ρ_{k-1}.

LEMME 2'.

$$D \circ \rho_{r+1} = (\rho_r \otimes Id) \circ D.$$

Enfin, s étant une section différentiable de $J_{k+1}(E)$, nous disons que cette section est intégrable si et seulement si $s = j^{k+1}\sigma$, où σ est une section de E.

LEMME 3. — *s étant une section différentiable de* $J_{k+1}(E)$, *on a* $D(s) = 0$, *la section nulle de* $J_k(E) \otimes T^*$, *si et seulement si s est une section intégrable.*

En effet, il est clair d'après la définition même de l'opérateur D que si s est une section intégrable, $D(s) = 0$. Démontrons que si $D(s) = 0$, s est une section intégrable. Or la propriété est évidente lorsque $k = 0$;

il suffit donc de la démontrer par récurrence sur l'entier k. Considérons la section $\rho_k \circ s$ de $J_k(E)$; d'après le lemme 2', on a

$$D(\rho_k \circ s) = (\rho_{k-1} \otimes Id) \circ D(s) = 0$$

$D(\rho_k \circ s)$ étant nulle, par hypothèse de récurrence

$$\rho_k \circ s = j^k \sigma, \quad \sigma \text{ étant une section de E.}$$

Alors

$$D(s) = j^1(\rho_k \circ s) - s = 0$$

$$s = j^1(\rho_k \circ s) = j^1(j^k \sigma) = j^{k+1} \sigma.$$

THÉORÈME II.3.a. — E *étant un espace fibré vectoriel différentiable sur* V, *il existe un et un seul opérateur* D *de* $J_{k+1}(E)$ *dans* $J_k(E) \otimes T^*$, *tel que*

1) s *étant une section différentiable de* $J_{k+1}(E)$, $D(s) = 0$, *la section nulle de* $J_k(E) \otimes T^*$, *si et seulement si* s *est une section intégrable.*

2) f *étant une fonction différentiable sur* V,

$$D(fs) = fD(s) + (\rho_k \circ s) \otimes df$$

avec df, *la différentielle extérieure de* f.

L'opérateur de Spencer défini précédemment vérifie les deux propriétés du théorème d'après les lemmes 1) et 3). Il nous reste à voir que ces propriétés sont bien caractéristiques, ou que si D' est un opérateur de $J_{k+1}(E)$ dans $J_k(E) \otimes T^*$, vérifiant ces deux propriétés, on a $D' = D$, l'opérateur de Spencer. Or ces deux opérateurs sont identiques s'ils coincident sur les sections locales de $J_{k+1}(E)$; soit donc s une section locale de $J_{k+1}(E)$,

$$s = f^i j^{k+1} \sigma_i \quad (1 < i < q)$$

avec f^i et σ_i, respectivement des fonctions différentiables sur V et des sections différentiables de E, et on a d'après les propriétés 1) et 2)

$$D(s) = j^k \sigma_i \otimes df^i = D'(s).$$

C.Q.F.D.

La propriété 2) nous permet de prolonger de façon naturelle

$$D : J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^p T^* \longrightarrow J_k(E) \otimes \Lambda^{p+1} T^*$$

$$s \otimes \omega \longrightarrow D(s) \Lambda \omega + (\rho_k \circ s) \otimes d\omega$$

où les notations ont des significations évidentes. Et de même pour l'opérateur prolongé, nous avons

$$D \circ (\rho_{r+1} \otimes \mathrm{Id}) = (\rho_r \otimes \mathrm{Id}) \circ D. \tag{1}$$

Désignons par D^2, l'opérateur composé $D \circ D$

$$D^2 : J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^p T^* \xrightarrow{D} J_k(E) \otimes \Lambda^{p+1} T^* \xrightarrow{D} J_{k-2}(E) \otimes \Lambda^{p+2} T^*,$$

LEMME 1. — $D^2 = 0$, *l'opérateur nul qui associe à toute section différentiable de* $J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^p T^*$ *la section nulle de* $J_{k-1}(E) \otimes \Lambda^{p+2} T^*$.

En effet, étant le composé de deux opérateurs, D^2 est encore un opérateur. Il nous suffit de vérifier que toute section locale s de $J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^p T^*$, on a $D^2(s) = 0$. Or localement

$$s = j^{k+1} \sigma_i \otimes \omega^i \qquad (1 \leqslant i \leqslant q)$$

où σ_i sont des sections différentiables de E et ω^i, des p-formes extérieures de V. D'où, on a

$$\begin{aligned} D(s) &= j^k \sigma_i \otimes d\omega^i \\ D^2(s) &= j^{k-1} \sigma_i \otimes d^2 \omega^i = 0, \quad \text{car} \quad d^2 = 0. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

La restriction de l'opérateur D au sous-faisceau

$$E \otimes S^{k+1}(T^*) \otimes \Lambda^p T^*$$

du faisceau $J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^p T^*$ est en fait $\mathcal{O}$-linéaire, et définit donc un V-morphisme de fibrés vectoriels différentiables noté δ de

$$E \otimes S^{k+r}(T^*) \otimes \Lambda^p T^*$$

dans $J_k(E) \otimes \Lambda^{p+r} T^*$. La formule (1) ci-dessus montre que ce morphisme prend ses valeurs dans le sous-fibré vectoriel $E \otimes S^k(T^*) \otimes \Lambda^{p+1} T^*$, et on peut voir que δ n'est autre que le morphisme

$$\begin{aligned} \delta : \quad E \otimes S^{k+r}(T^*) \otimes \Lambda^p T^* &\longrightarrow E \otimes S^k(T^*) \otimes \Lambda^{p+r} T^* \\ e \otimes a^{k+r} \otimes \omega &\longrightarrow -(k+1)\, e \otimes a^k \otimes (a \wedge \omega). \end{aligned}$$

Et nous avons le lemme suivant, qui a été établi par Koszul (Séminaire de Cartan, théorème, l'exposé 20, 1949-50).

LEMME 2. — *La suite suivante de fibrés vectoriels est exacte*

$$0 \to E \otimes S^{k+1}(T^*) \xrightarrow{\delta} E \otimes S^k(T^*) \otimes T^* \xrightarrow{\delta} E \otimes S^{k-1}(T^*) \otimes \Lambda^2 T^* \xrightarrow{\delta} \dots$$

THÉORÈME II.3.b. — *Pour tout entier k, nous avons la suite exacte suivante de faisceaux* R-*linéaires* :

$$0 \to \mathrm{E} \xrightarrow{j^{k+1}} \mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{T}^* \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^2 \mathrm{T}^* \xrightarrow{\mathrm{D}} \dots$$

où j^{k+1} est l'opérateur canonique qui à toute section différentiable s de E *associe la section différentiable $j^{k+1} s$ de* $\mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{E})$.

(Il est entendu que dans le lemme 2 et dans le théorème ci-dessus, comme dans toute la suite, nous avons pris la convention suivante

$$\mathrm{S}^0(\mathrm{T}^*) = \mathrm{R} \times \mathrm{V}, \text{ le fibré en droite trivial sur V,}$$
$$\mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) = 0, \text{ si } k < 0,$$

et $$\mathrm{J}_0(\mathrm{E}) = \mathrm{E}, \ \mathrm{J}_k(\mathrm{E}) = 0 \text{ si } k < 0).$$

Démonstration.

1) Nous avons bien la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{j^{k+1}} \mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{E}) \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{T}^*$$

d'après la propriété caractéristique 1) de l'opérateur D, et que l'opérateur j^{k+1} est évidemment injectif.

2) La suite posée est cohomologique, car $\mathrm{D}^2 = 0$ (lemme 1). Il reste à démontrer l'exactitude de la suite. Or il est clair que la suite suivante est exacte

$$\mathrm{J}_1(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^* \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{E} \otimes \Lambda^{p+1} \mathrm{T}^* \longrightarrow 0,$$

la restriction de l'opérateur D au sous-faisceau $\mathrm{E} \otimes \mathrm{T}^* \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^*$ étant déjà, d'après le lemme 2, surjective.

Démontrons alors par récurrence sur l'entier k que nous avons la suite exacte suivante de faisceaux R-linéaires

$$\mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^{p-1} \mathrm{T}^* \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^* \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^{p+1} \mathrm{T}^*$$

Soit donc une section différentiable s_k^p de $\mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^*$, telle que $\mathrm{D}(s_k^p) = 0$. La section $\rho_{k-1} \circ s_k^p$ de $\mathrm{J}_{k-1}(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^*$ est aussi telle que $\mathrm{D}(\rho_{k-1} \circ s_k^p) = (\rho_{k-2} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}(s_k^p) = 0$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe une section σ_k^{p-1} de $\mathrm{J}_k(\mathrm{E}) \otimes \Lambda^{p-1} \mathrm{T}^*$ telle que

$$\mathrm{D}(\sigma_k^{p-1}) = \rho_{k-1} \circ s_k^p .$$

Et comme le morphisme ρ_k est surjectif, nous pouvons trouver s_{k+1}^{p-1}, section de $J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^{p-1} T^*$, telle que

$$\rho_k \circ s_{k+1}^{p-1} = \sigma_k^{p-1}.$$

Considérons la section $s_k^p - D(s_{k+1}^{p-1})$ de $J_k(E) \otimes \Lambda^p T^*$, c'est en fait une section de sous-fibré $E \otimes S^k(T^*) \otimes \Lambda^p T^*$, car

$$\rho_{k-1} \circ (s_k^p - D(s_{k+1}^{p-1})) = \rho_{k-1} \circ s_k^p - D(\rho_k \circ s_{k+1}^{p-1}) = 0.$$

Elle est d'autre annulée par le morphisme δ :

$$\delta(s_k^p - D(s_{k+1}^{p-1})) = D(s_k^p - D(s_{k+1}^{p-1})) = D(s_k^p) = 0.$$

D'après le lemme 2, il existe donc une section n_{k+1}^{p-1} de

$$E \otimes s^{k+1}(T^*) \otimes \Lambda^{p-1} T^*$$

telle que

$$\delta(n_{k+1}^{p-1}) = s_k^p - D(s_{k+1}^{p-1}).$$

D'où

$$s_k^p = D(n_{k+1}^{p-1} + s_{k+1}^{p-1}),$$

avec $n_{k+1}^{p-1} + s_{k+1}^{p-1}$, une section de $J_{k+1}(E) \otimes \Lambda^{p-1} T^*$.

C.Q.F.D.

Désignons par ρ_k le morphisme canonique de $J_1[J_k(E)]$ sur $J_k(E)$, et encore par D, l'opérateur de Spencer de $J_1[J_k(E)]$ dans $J_k(E) \otimes T^*$, la restriction de ce morphisme et de cet opérateur au sous-fibré différentiable $J_{k+1}(E)$ de $J_1[J_k(E)]$ étant des applications considérées ci-dessus désignées par les mêmes lettres.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une section différentiable s de $J_1[J_k(E)]$ soit une section à valeurs dans le sous-fibré $J_{k+1}(E)$, il faut et il suffit que*

1) $D(\rho_k \circ s) = \rho_{k-1} \circ D(s)$

2) $D^2(s) = 0$, *la section nulle de* $J_{k-1}(E) \otimes \Lambda^2 T^*$.

Les conditions sont évidemment nécessaires. Elles sont suffisantes; en effet, soit s une section de $J_1[J_k(E)]$ telle que les conditions 1) et 2) soient vérifiées, $D(s)$ est donc une section de $J_k(E) \otimes T^*$, telle que

$$D \circ D(s) = D^2(s) = 0$$

il existe d'après le dernier théorème une section σ de $J_{k+1}(E)$:

$$D(\sigma) = D(s).$$

Mais alors, $s - \sigma$ est une section de $J_1 [J_k (E)]$, telle que

$$D (s - \sigma) = D (s) - D (\sigma) = 0.$$

D'après la première propriété carcatéristique de l'opérateur D,

$s - \sigma = j^1 \chi$, avec χ une section différentiable de $J_k (E)$. Et on a

$$D (\chi) = D (\rho_k \circ s - \rho_k \circ \sigma) = (\rho_{k-1} \otimes \mathrm{Id}) D (s - \sigma) = 0$$
$$\chi = j^k \eta, \text{ avec } \eta \text{ une section de E.}$$

et

$$\begin{aligned} s &= j^1 \chi + \sigma = j^1 (j^k \eta) + \sigma \\ &= j^{k+1} \eta + \sigma, \text{ une section de } J_{k+1} (E). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Terminons ce paragraphe, en faisant cette remarque que l'opérateur D de Spencer scinde le faisceau $J_1 (E)$ en une somme directe de deux faisceaux R-linéaires E et $E \otimes T^*$, ou plus précisément deux sections s et s' de $J_k (E)$ sont identiques si et seulement si

$$\rho_{k-1} \circ s = \rho_{k-1} \circ s'$$

et

$$D (s) = D (s').$$

4. Opérateur différentiel et son prolongement.

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur une même base V. Rappelons que nous appelons opérateur tout V-morphisme R-linéaire ∂ du faisceau E dans le faisceau F.

DÉFINITION II.4. — *Un opérateur ∂ de* E *dans* F *sera dit opérateur différentiel d'ordre k si, s étant une section différentiable de* E, $j_x^k\, s = 0$ *entraîne que la section $\partial (s)$ de* F *est nulle au point x.*

Tout V-morphisme de fibrés vectoriels différentiables est évidemment équivalent à un opérateur différentiel d'ordre 0, qui n'est autre qu'un opérateur $\mathcal{O}$-linéaire ($\mathcal{O}$, le faisceau des fonctions différentiables sur la variété de base V).

L'opérateur de Spencer D est, d'après sa deuxième propriété caractéristique, un opérateur différentiel d'ordre 1 de $J_k (E)$ dans

$$J_{k-1} (E) \otimes T^*.$$

Et si ∂ est un opérateur différentiel d'ordre k de E dans F et ∂', un opérateur différentiel d'ordre r de F dans G, le composé $\partial' \circ \partial$ est évidemment un opérateur différentiel d'ordre $r + k$ de E dans G.

Considérons l'opérateur :

$$j^k : \mathrm{E} \to \mathrm{J}_k(\mathrm{E}).$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre k. Et on établit facilement le théorème suivant (voir R. PALAIS, chap. IV, Seminar of Atiyah-Singer index theorem).

THÉORÈME II.4a. — *A tout opérateur différentiel d'ordre k ∂ de* E *dans* F, *il correspond un et un seul* V-*morphisme de fibrés vectoriels* $h(\partial)$ *de* $\mathrm{J}_k(\mathrm{E})$ *dans* F *tel que*

$$\partial = h(\partial) \circ j^k.$$

Soit ∂, un opérateur différentiel d'ordre k de E dans F. Nous appellerons l'opérateur de prolongement d'ordre r de ∂, l'opérateur $j^r \circ \partial$, qui applique E dans $\mathrm{J}_r(\mathrm{F})$. Nous avons de façon évidente

$$h(j^r \circ \partial) = \mathrm{J}_r(h(\partial)),$$

plus exactement la restriction du V-morphisme $\mathrm{J}_r(h(\partial))$ au sous-fibré $\mathrm{J}_{k+r}(\mathrm{E})$ de $\mathrm{J}_r[\mathrm{J}_k(\mathrm{E})]$. Pour tout entier $r \geqslant k$, désignons par

$$\mathfrak{S}_r = \ker(h(j^{r-k} \circ \partial)),$$

le sous-faisceau de ∂-modules du faisceau $\mathrm{J}_r(\mathrm{E})$, formé des sections annulées par l'opérateur $h(j^{r-k} \circ \partial)$, et convenons que

$$\mathfrak{S}_r = \mathrm{J}_r(\mathrm{E}), \quad \text{pour} \quad r < k,$$

et que

$$\mathfrak{S}_r^p = \mathfrak{S}_r \otimes \wedge^p \mathrm{T}^*,$$

produit tensoriel au sens de Whitney de deux faisceaux de $\mathcal{O}$-modules. De la définition de $h(j^{r-k} \circ \partial)$, nous avons

1) $$\rho_r \otimes \mathrm{Id} : \mathfrak{S}_{r+1}^p \longrightarrow \mathfrak{S}_r^p$$

2) $$\mathrm{D} : \mathfrak{S}_{r+1}^p \longrightarrow \mathfrak{S}_r^{p+1}.$$

D'où la suite cohomologique de Spencer relative à l'opérateur différentiel ∂ :

$$0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j^r} \mathfrak{S}_r \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathfrak{S}_{r-1} \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathfrak{S}_{r-2}^2 \xrightarrow{\mathrm{D}} \cdots$$

où Θ désigne le faisceau des solutions de ∂, i.e. des sections de E annulées par l'opérateur ∂. Pour $r \geqslant k$, le début de la suite

$$0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j^r} \mathcal{S}_r \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathcal{S}^2_{r-1}$$

est évidemment exact.

Et en notant

$$\mathcal{N}^p_{r+1} = \ker (\rho_r \otimes \mathrm{Id}),$$

sous-faisceau de $\mathcal{O}$-modules de $\mathcal{S}^p_{r+1}$, nous avons la suite cohomologique de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules

$$\dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}^{p-q}_{r+q} \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}^{p-q+1}_{r+q-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}^p_r \xrightarrow{\delta} \dots$$

dont les faisceaux de cohomologie correspondants seront notés $\mathcal{H}^p_r$.

Supposons que l'opérateur ρ_{r-1}, : $\mathcal{S}_r \to \mathcal{S}_{r-1}$, est surjectif, donc de même pour tout p, l'opérateur $\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{S}^p_r \to \mathcal{S}^p_{r-1}$, est aussi surjectif. Désignons par λ, un relèvement quelconque, i.e. un V-morphisme de faisceaux

$$\lambda : \quad \mathcal{S}^p_{r-1} \longrightarrow \mathcal{S}^p_r,$$
$$(\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda = \mathrm{Id}.$$

Le morphisme

$$\mathrm{D} \circ \lambda \circ \mathrm{D} : \quad \mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{S}^2_{r-1}$$

est tel que

$$(\rho_{r-2} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D} \circ \lambda \circ \mathrm{D} = \mathrm{D} \circ (\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda \circ \mathrm{D} = \mathrm{D}^2 = 0.$$

Il applique donc $\mathcal{S}_r$ dans $\mathcal{N}^2_{r-1}$, prenant des valeurs annulées par l'opérateur D ou δ ; il passe donc au quotient, pour définir un morphisme

$$m = \mathrm{D} \circ \lambda \circ \mathrm{D} : \quad \mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{H}^2_{r-1}.$$

On vérifie immédiatement que ce morphisme est un opérateur $\mathcal{O}$-linéaire ($\mathcal{H}^p_r$ étant évidemment des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules, défini indépendamment du choix du relèvement λ).

THÉORÈME II.4.b. — *Si l'opérateur*

$$\rho_{r-1} : \quad \mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{S}_{r-1}$$

est surjectif, il est défini canoniquement un opérateur $\mathcal{O}$-linéaire

$$m : \quad \mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{H}^2_{r-1}$$

tel que la suite suivante de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules soit exacte

$$\mathcal{S}_{r+1} \xrightarrow{\rho_r} \mathcal{S}_r \xrightarrow{m} \mathcal{H}^2_{r-1}.$$

Démonstration.

En effet, l'opérateur m étant défini précédemment, il est immédiat de constater que

$$m \circ \rho_r = 0.$$

Il nous reste donc à démontrer l'exactitude de cette suite. Le raisonnement se fait en deux pas, que nous précisons sous forme de lemmes.

LEMME 1. — *Si s est une section de $\mathcal{S}_r$, il existe une section σ de* $J_1[J_r(E)]$, *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $$J_1[h(j^{r-k} \circ \partial)](\sigma) = 0$$
2) $$\rho(\sigma) = s$$
3) $$(\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ D(\sigma) = D(s).$$

En effet, prenons un relèvement λ de $\mathcal{S}^1_{r-1}$ dans $\mathcal{S}^1_r$. Désignons par η la section $-\lambda \circ D(s)$, que nous considérons comme une section de $J_r(E) \otimes T^*$, sous-espace fibré de $J_1[J_r(E)]$. La section η est donc telle que

1) $$J_1[h(j^{r-k} \circ \partial)](\eta) = -(h(j^{r-k} \circ \partial) \otimes \mathrm{Id}) \circ \lambda \circ D(s) = 0$$
2) $$\rho(\eta) = 0$$
3) $$D(\eta) = \lambda \circ D(s).$$

Et la section $j^1 s$ est une section de $J_1[J_r(E)]$, telle que

1) $$J_1[h(j^{r-k} \circ \partial)](j^1 s) = j^1[h(j^{r-k} \circ \partial)(s)] = 0$$
2) $$\rho(j^1 s) = s$$
3) $$D(j^1 s) = 0$$

La section $\sigma = j^1 s + \eta$ est donc la section qui respond aux conditions du lemme.

LEMME 2. — *Si s est une section de $\mathcal{S}_r$, telle que $m(s) = 0$, il existe une section χ de* $J_1[J_r(E)]$, *vérifiant les trois conditions du lemme* 1, *et la quatrième condition suivante*

4) $$D \circ \dot{D}(\chi) = 0.$$

En effet soit toujours λ un relèvement de $\mathfrak{S}_{r-1}$ dans $\mathfrak{S}_r$. Dire que $m(s) = 0$, c'est dire que

$$\mathrm{D} \circ \lambda \circ \mathrm{D}(s) = \delta(\eta),$$

avec η, une section de $\mathfrak{N}_r^1$. Nous pouvons considérer η comme une section de $\mathrm{J}_r(\mathrm{E}) \otimes \mathrm{T}^*$, sous-espace fibré de $\mathrm{J}_1[\mathrm{J}_r(\mathrm{E})]$. C'est donc une section de $\mathrm{J}_1[\mathrm{J}_r(\mathrm{E})]$, telle que

1) $\mathrm{J}_1[h(j^{r-k} \circ \partial)](\eta) = 0$

2) $\rho(\eta) = 0$

3) $(\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}(\eta) = -(\rho_{r-1} \otimes \mathrm{Id})(\eta) = 0.$

Si σ est une section du lemme 1, la section

$$\chi = \sigma + \eta$$

est une section de $\mathrm{J}_1[\mathrm{J}_r(\mathrm{E})]$, vérifiant les conditions du lemme 2.

Or d'après le corollaire du théorème II.3.b, la section χ du lemme 2 est en fait à valeurs dans le sous-fibré $\mathrm{J}_{r+2}(\mathrm{E})$ de $\mathrm{J}_1[\mathrm{J}_r(\mathrm{E})]$. C'est donc une section de $\mathfrak{S}_{r+1}$, telle que $\rho_r(\chi) = s$.

C.Q.F.D.

Remarques.

1) Un des problèmes importants de l'analyse est de savoir si la suite cohomologique de Spencer relative à un opérateur différentiel ∂ donné est exacte ou non [3].

2) ∂ étant un opérateur différentiel d'ordre k, pour $r \geqslant k$, l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Theta \xrightarrow{j^r} \mathfrak{S}_r \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathfrak{S}_{r-1}$$

signifie que les sections intégrables $j^r s$ de $\mathfrak{S}_r$ ne sont autres que les prolongements des sections de E qui soient des solutions de ∂, i.e.

$$\partial(s) = 0.$$

Disons que l'opérateur différentiel d'ordre k est *complètement intégrable* à l'ordre $r (\geqslant k)$ si et seulement si $\mathfrak{S}_r$ est localement engendré par des sections intégrables, i.e.

[3] D. G. Quillen a démontré en effet que montrer l'exactitude de la suite de Spencer est équivalente à chercher les conditions nécessaires et suffisantes sur la section f de F pour qu'il existe une section s de E, telle que $\partial(s) = f$.

s étant une section de $\mathfrak{S}_r$, on a localement au voisinage de tout point de V : $s = f^i j^r \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, où f^i sont des fonctions différentiables sur la variété de base V, et $j^r \sigma_i$, des sections intégrables de $\mathfrak{S}_r$.

Si l'opérateur différentiel est complètement intégrable à l'ordre r, le morphisme

$$\rho_r : \quad \mathfrak{S}_{r+1} \longrightarrow \mathfrak{S}_r$$

est évidemment surjectif. L'opérateur m, s'il est défini,

$$m : \quad \mathfrak{S}_r \longrightarrow \mathcal{H}^2_{r-1}$$

est alors nul. L'opérateur m se présente donc dans un sens évident comme une obstruction à la complète intégrabilité de l'opérateur différentiel à l'ordre r.

3) Désignons par E_r, l'ensemble

$$\{e, \ e \in J_r(E) \quad \text{tel que} \quad h\,(j^{r-k} \circ \partial)\,(e) = 0\}.$$

L'ensemble E_r est ce qu'on appelle le *système différentiel linéaire* associé à l'opérateur différentiel $j^{r-k} \circ \partial$ d'ordre r. Les ensembles E_r ne sont pas nécessairement des sous-espaces fibrés vectoriels de $J_r(E)$, mais fibres par fibres sur V, chaque fibre de E_r est un sous-espace vectoriel de la fibre de $J_r(E)$; nous pouvons donc faire le produit tensoriel au sens de Whitney de E_r par $\wedge^p T^*$, et nous avons évidemment

$$\mathfrak{S}^p_r = E_r \otimes \wedge^p T^*,$$

le dernier membre désigne l'ensemble des sections différentiables de $J_r(E) \otimes \wedge^p T^*$, à valeurs dans le sous-ensemble $E_r \otimes \wedge^p T^*$.

Nous dirons que le système différentiel E_k est linéaire homogène si E_k est un sous-espace fibré vectoriel de $J_k(E)$. Tout système différentiel linéaire homogène peut être considéré comme le système différentiel associé à l'opérateur différentiel d'ordre k :

$$p \circ j^k : \quad E \xrightarrow{\ j^k\ } J_k(E) \xrightarrow{\ p\ } J_k(E)/E_k$$

où $J_k(E)/E_k$ désigne le fibré quotient $J_k(E)$ par le sous-fibré E_k, et p, le morphisme de projection canonique.

4) Le théorème II.4.b est une forme améliorée d'une proposition connue de Quillen (Singer et Sternberg, On the infinite groups of Lie and Cartan). Il est équivalent, dans le cas analytique (E et F étant des fibrés vectoriels analytiques, l'opérateur différentiel d'ordre k ∂ trans-

porte toute section analytique de E en une section analytique de F), au célèbre théorème de Cartan-Kahler sur les systèmes différentiels linéaires involutifs (C. Buttin, Existence of local solutions for analytic systems of equation).

CHAPITRE III

CONNEXION D'ORDRE SUPERIEUR DANS UN ESPACE FIBRE VECTORIEL

Nous introduisons dans ce chapitre la théorie de connexion dont on sait le rôle en géométrie différentielle. Notre résultat essentiel est que si E est un espace fibré vectoriel associé à un groupoïde de Lie Φ, une connexion d'ordre k au sens de C. Ehresmann dans le groupoïde de Lie Φ détermine canoniquement une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to J_k^0(E) \to J_k(E) \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

Et inversement toute scission de cette suite est déterminée par une connexion d'ordre k dans le groupoïde de Lie $\Pi(E)$, le groupoïde de tous les isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de E.

1. Connexion dans un groupoïde de Lie.

Soit Φ un groupoïde de Lie sur la variété différentiable de base V. Des considérations géométriques, sur lesquelles nous ne reviendrons pas, ont amené C. Ehresmann à poser la définition suivante.

Définition III.1a. — *Un élément de connexion d'ordre k dans Φ est un jet de section* X

$$X \in J_k(\Phi, b, V)$$

tel que

1) $\beta(X) = l_{\alpha(X)}$, $\alpha(X)$ *et* $\beta(X)$ *sont respectivement la source et le but du jet* X;

2) $aX = j^k_{\alpha(X)}\hat{}$ *, le jet d'ordre k de l'application constante qui applique* V *sur le point* $\alpha(X)$.

Proposition III.1a. — *L'espace $Q_k(\Phi)$ de tous les éléments de connexion d'ordre k de Φ est un espace fibré différentiable, par la projection source α, sur* V, *associé au groupoïde de Lie de prolongement Φ^k.*

Démonstration.

En effet, soit X, un élément de connexion de source x, et Z, un élément de Φ^k

de source x et de but y. Désignons par Y,

$$Y = bZ, \quad Y \in \Pi^k(V) \text{ (voir chap. II-1).}$$

On a un nouvel élément de connexion X′ de source y :

$$X' = (ZY^{-1}) \cdot (XY^{-1}) \cdot \beta(Z)^{-1},$$

où les éléments entre parenthèses sont des composés de jets, $\beta(Z)^{-1}$ doit être considéré comme le jet d'ordre k de l'application constante de V sur $\beta(Z)^{-1}$, et les points ont des significations comme dans la démonstration de la proposition II.1a.

Posons $X' = Z \cdot X$. Et il est clair ainsi que Φ^k opère sur $Q_k(\Phi)$. Il nous reste à vérifier les conditions de différentiabilité, ce que nous pouvons faire localement.

Or si Φ est un groupoïde de Lie trivial

$$\Phi = R^n \times G \times R^n,$$

on a $Q_k(\Phi) = T^k_{n,e}(G) \times R^n$, où $T^k_{n,e}(G)$ est, rappelons-le, l'ensemble des jets d'ordre k de R^n dans G, de source 0 et de but l'élément neutre e de G. Rappelons que Φ^k est alors un groupoïde trivial

$\Phi^k = R^n \times G^k \times R^n$, G^k est le produit semi-direct de $T^k_{n,e}(G)$ par le groupe produit $G \times L^k_n$. Ceci étant, l'opération de Φ^k sur $Q_k(\Phi)$ déterminée précédemment est définie par l'opération de G^k sur $T^k_{n,e}(G)$ de la manière suivante :

$$Z \in G^k,\ Z = (g, Y) \cdot X, \text{ avec } (g, Y) \in G \times L^k_n \text{ et } X \in T^k_{n,e}(G)$$
$$Z : T^k_{n,e}(G) \to T^k_{n,e}(G)$$
$$X' \to (g, Y) \cdot X \cdot X' \cdot (g, Y)^{-1},$$

produit d'éléments de G^k, appartenant au sous-groupe $T^k_{n,e}(G)$.
Et ce qui prouve bien que $Q_k(\Phi)$ est un espace fibré différentiable associé au groupoïde de Lie Φ^k.

C.Q.F.D.

DÉFINITION III.1*b*. — *Une connexion d'ordre k dans Φ est la donnée d'une section différentiable du fibré $Q_k(\Phi)$.*

La fibre de $Q_k(\Phi)$, étant isomorphe à $T^k_{n,r}(G)$, est donc contractile. Il est à remarquer que la variété différentiable V étant supposée paracompacte, il existe toujours une connexion d'ordre k dans le groupoïde de Lie Φ.

Et d'après ce qui précède, nous remarquons que le groupe d'isotropie G^k_x de Φ^k opère transitivement sur la fibre $Q_k(\Phi)|_x$. Toute section de $Q_k(\Phi)$ est donc régulière ; elle détermine canoniquement un sous-groupoïde de Lie de Φ^k, le sous-groupoïde la laissant invariante. Il est facile de montrer que ce sous-groupoïde est isomorphe au groupoïde $\Phi \times \Pi^k(V)$, par le foncteur surjectif de Φ^k sur $\Phi \times \Pi^k(V)$. Nous avons ainsi la proposition :

PROPOSITION III.1b. — *Toute connexion d'ordre k dans Φ définit canoniquement une réduction de $\Phi \times \Pi^k(V)$ dans Φ^k.*

De même, il est immédiat d'établir :

PROPOSITION III.1c. — *Si φ est une réduction de $\Phi \times \Pi^k(V)$ dans Φ^k, telle qu'en un certain point x de V, le groupe d'isotropie G_x de $\varphi(\Phi \times \Pi^k(V))$ laisse invariant un élément de connexion d'ordre k en x de Φ, il existe une connexion d'ordre k de Φ définissant cette réduction.*

2. Connexion dans un espace fibré vectoriel.

Soit donné (E, p, V), i.e. une variété différentiable fibrée par une submersion p sur V. Désignons par $F_k(E, p, V)$ ou simplement par $F_k(E)$, lorsqu'il n'y a pas de risques de confusion, l'ensemble des jets d'ordre k de V dans E, tels que

$X \in F_k(E)$, $pX = j^{k\,\wedge}_x$, le jet d'ordre k de l'application constante de V sur le point $x = \alpha(X)$, la source de X.

$F_k(E)$ est évidemment une variété différentiable fibrée par l'application source α sur V. De façon précise nous avons la proposition :

PROPOSITION III.2. — *Si E est un espace fibré associé au groupoïde de Lie Φ, $F_k(E)$ est un espace fibré associé au groupoïde de Lie produit $\Phi \times \Pi^k(V)$.*

La démonstration est identique à celle de la proposition II.1b, en remarquant que le groupoïde $\Phi \times \Pi^k(V)$ opère sur $F_k(E)$ de la façon suivante :

$$(z, Y) \in \Phi \times \Pi^k(V), \text{ de source } x \text{ et de but } y$$
$$X \in F_k(E), \text{ de source } x,$$

avec

$$X = j_x^k\, g, \text{ où } g \text{ est une application de V dans le fibré } E_x,$$
$$Y = j_x^k\, f, \text{ où } f \text{ est un difféomorphisme local de V},$$

on a

$$(z, Y) \cdot X = j_y^k\,(z \cdot (g \circ f^{-1}))$$

$z \cdot (g \circ f^{-1})$ étant, par définition de l'opération (notée par le point) de Φ sur E, une application différentiable définie au voisinage de y de V dans la fibre E_y.

THÉORÈME III.2a. — *Si* E *est un espace fibré associé au groupoïde de Lie* Φ, *toute connexion d'ordre* k *dans* Φ *détermine un* V*-isomorphisme de fibrés différentiables de* $F_k(E)$ *dans* $J_k(E)$.

En effet soit C_x un élément de connexion d'ordre k en x de Φ : $C_x = j_x^k\, f$, où f est une application différentiable définie au voisinage de x de V dans Φ, telle que

$$a \circ f = \hat{x}, \text{ l'application constante de V sur } x;$$
$$b \circ f = \mathrm{Id}.$$

C_x détermine un difféomorphisme de $F_k(E)|_x$ avec $J_k(E)|_x$ de la manière suivante

$$C_x : F_k(E)|_x \to J_k(E)|_x$$
$$X = j_x^k\, g \to X' = j_x^k\,(f \cdot g)$$

où g est une application de V dans la fibre E_x, et $f \cdot g$ est une section définie au voisinage de x de E.

Ainsi une connexion C d'ordre k dans Φ détermine une application bijective de $F_k(E)$ dans $J_k(E)$, qui transforme difféomorphiquement en tout point x de V la fibre $F_k(E)|_x$ sur la fibre $J_k(E)|_x$. Pour que cette application soit un isomorphisme différentiable de fibrés, il reste à démontrer que si s est une section différentiable de $F_k(E)$, $C \circ s$ est une section différentiable de $J_k(E)$; ce qu'on peut faire en trivialisant E (localement).

C.Q.F.D.

Evidemment, nous avons le V-morphisme injectif suivant

$$\begin{aligned} i \,:\, E &\to F_k(E) \\ e &\to j_x^k\, \hat{e}, \end{aligned}$$

où $x = p(e)$ et $\hat{e}$ est l'application constante de V sur le point e. Composé avec le morphisme C défini par une connexion, nous avons un V-morphisme injectif

$$C \circ i \,:\, E \to J_k(E)$$

tel que

$$\rho \circ C \circ i \,:\, E \to J_k(E) \to E$$

(où ρ est le morphisme canonique),

$$\rho \circ C \circ i = \mathrm{Id}.$$

En, effet, soit e dans E tel que $p(e) = x$, et soit

$$C_x = j_x^k\, f\,,$$

nous avons

$$C_x \circ i(e) = j_x(f \cdot \hat{e})$$

D'où

$$\rho \circ C_x \circ i(e) = f(x) \cdot e = e,$$

car d'après la définition d'un élément de connexion en x, on a

$$f(x) = l_x,\ \text{unité en } x \text{ de } \Phi.$$

Dans le cas où E est un espace fibré vectoriel différentiable $F_k(E)$ est aussi un espace fibré vectoriel; et les morphismes i et C, définis précédemment, sont des morphismes de fibrés vectoriels. Nous avons donc

COROLLAIRE. — *Si* E *est un espace fibré vectoriel associé à un groupoïde de Lie* Φ, *toute connexion d'ordre k dans* Φ *détermine canoniquement une scission de la suite exacte suivante de fibrés vectoriels différentiables*

$$0 \to J_k^0(E) \to J_k(E) \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

Dans ce cas de fibrés vectoriels, nous avons aussi le théorème

THÉORÈME III.2b. — E *étant un espace fibré vectoriel différentiable sur* V, *toute scission de la suite exacte*

$$0 \to J_k^0(E) \to J_k(E) \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

est déterminée par une connexion d'ordre k dans le groupoïde de Lie Π (E) *de tous les isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de* E, *auquel le fibré* E *est associé.*

Démonstration.

Soit λ le relèvement de la scission; et soit $(e_1, e_2, ..., e_q)$ un système de base de l'espace vectoriel E_x, la fibre en x de E. Posons

$$\lambda\,(e_i) = j_x^k\; s_i$$

où on peut évidemment prendre les sections différentiables s_i, définies sur un même voisinage de x dans V, et telles que dans ce voisinage les s_i forment une base du faisceau E de $\mathcal{O}$-modules localement libre. Sur ce même voisinage de x, considérons la section différentiable f de $(\Pi(E), b, V)$ telle que

$$\begin{aligned} &1)\ a \circ f = \hat{x},\ \hat{x} : V \to x \\ &2)\ f\,(y) \cdot e_i = s_i\,(y). \end{aligned}$$

Et on doit avoir

$$f\,(x) = l_x,\ \text{unité en } x \text{ en de } \Pi\,(E)$$

car pour tout i

$$f\,(x) \cdot e_i = s_i\,(x) = e_i.$$

Le jet $X = j_x^k\ f$ est donc un élément de connexion d'ordre k en x de Π (E). Et cet élément de connexion est défini évidemment de façon indépendante du choix de la base $(e_1, ..., e_q)$ de E, et détermine justement le relèvement λ au point x.

A tout point x de V, nous associons ainsi un élément de connexion d'ordre k dans Π (E); autrement dit, nous avons une section, que nous noterons C, de V dans l'espace de connexion $Q_k\,[\Pi\,(E)]$. C'est une section différentiable. En effet, soit Φ le sous-groupoïde de Π^k (E), laissant invariant cette section. C'est un sous-groupoïde transitif sur V, car Π_k (E) opère de façon transitive sur l'espace $Q_k\,[\Pi\,(E)]$. Le sous-groupoïde Φ est aussi le sous-groupoïde de Π^k (E) qui laisse invariant le relèvement λ, considéré comme une section différentiable de $J_k\,(E) \otimes E^*$ ($J_k\,(E) \otimes E^*$ étant associé de façon canonique au groupoïde de Lie Π^k (E)). Φ étant transitif sur V, la section λ est une section régulière. Φ est donc un sous-groupoïde de Lie de Π^k (E). Et la section C, laissée invariante par un sous-groupoïde de Lie, est une section différentiable.

C.Q.F.D.

Le corollaire du théorème III.2a et le dernier théorème montrent donc l'équivalence entre la notion de connexion dans un espace fibré vectoriel associé à un groupoïde de Lie, notion due à C. Ehresmann, et celle de « surconnexion » introduite par P. Libermann comme une scission de la suite exacte

$$0 \to J_k^0(E) \to J_k(E) \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

3. Dérivation covariante et connexion d'ordre 1.

Soit donc donnée une connexion d'ordre k dans l'espace fibré vectoriel E, ce qui revient, d'après notre étude, à la donnée d'une scission de la suite exacte précédente. Désignant par λ_k le relèvement de la scission, nous avons l'opérateur différentiel suivant

$$\begin{aligned} \nabla_k : E &\longrightarrow J_{k-1}(E) \otimes T^* \\ s &\longrightarrow \nabla_k(s) = D \circ \lambda_k(s), \end{aligned}$$

avec D, l'opérateur de Spencer.

L'opérateur différentiel ∇_k vérifie évidemment les propriétés suivantes, en posant $\lambda_{k-1} = \rho_{k-1} \circ \lambda_k : E \longrightarrow J_{k-1}(E)$, le relèvement de la connexion d'ordre $k - 1$ induite,

1) $$(\rho_{k-2} \otimes \mathrm{Id}) \circ \nabla_k(s) = D \circ \lambda_{k-1}(s) = \nabla_{k-1}(s)$$
2) $$D \circ \nabla_k(s) = 0$$
3) $$\nabla_k(fs) = f\, \nabla_k(s) + \lambda_{k-1}(s) \otimes df,$$

pour toute fonction différentiable f sur V. De façon précise, nous avons la proposition.

PROPOSITION III.3.a. — *Soient donnés un relèvement λ_{k-1} de* E *dans* $J_{k-1}(E)$, *et un opérateur différentiel*

$$\nabla_k : E \longrightarrow J_{k-1}(E) \otimes T^*$$

vérifiant les trois propriétés précédentes, il existe un et un seul relèvement λ_k de E *dans* $J_k(E)$ *tel que*

D *étant l'opérateur de Spencer,*

1) $$\lambda_{k-1} = \rho_{k-1} \circ \lambda_k$$
2) $$\nabla_k = D \circ \lambda_k,$$

Démonstration.

Soit donc s une section différentiable de E. Prenons σ une section de J_k (E), telle que

$$\rho_{k-1}(\sigma) = \lambda_{k-1}(s).$$

Nous avons, d'après la propriété 1 de ∇_k,

$$(\rho_{k-2} \otimes \mathrm{Id})\,(\nabla_k(s) - D(\sigma)\,) = (\rho_{k-2} \otimes \mathrm{Id}) \circ \nabla_k(s) - D \circ \lambda_{k-1}(s) = 0.$$

Il en résulte que $\nabla_k(s) - D(\sigma)$ est une section du sous-fibré

$$E \otimes S^{k-1}(T^*) \otimes T^* \quad \text{de} \quad J_{k-1}(E) \otimes T^*,$$

telle que

$$D\,(\nabla_k(s) - D(\sigma)\,) = 0\,;$$

d'après le lemme 2 de II.3.b,

$$\nabla_k(s) - D(\sigma) = D(\chi),$$

avec χ une section de $E \otimes S^k(T^*)$. La section $\sigma + \chi$ de J_k (E) est donc telle que

1) $$\rho_{k-1}(\sigma + \chi) = \lambda_{k-1}(s),$$

2) $$D(\sigma + \chi) = \nabla_k(s).$$

Une telle section est évidemment unique. Et nous définissons ainsi un morphisme τ de faisceaux

$$\tau : \quad E \longrightarrow J_k(E)$$

qui à toute section s de E associe une section de J_k (E), vérifiant les conditions 1) et 2) ci-dessus. Et si f est une fonction différentiable sur V, on a évidemment par la troisième propriété de l'opérateur ∇_k :

$$\tau(fs) = f\,\tau(s).$$

Le morphisme τ est donc un morphisme $\mathcal{O}$-linéaire : il existe un morphisme λ_k de fibrés vectoriels de E dans J_k (E) tel que

$$s \in E, \quad \lambda_k(s) = \tau(s).$$

Le morphisme λ_k est le relèvement qui répond à la question.

C.Q.F.D.

Comme cas particulier où $k = 1$, nous avons ce corollaire qui est un théorème classique de la géométrie différentielle :

COROLLAIRE. — *Soit donné un opérateur différentiel*

$$\nabla : \quad E \longrightarrow E \otimes T^*$$

tel que f étant une fonction différentiable sur V,

$$s \in E, \quad \nabla (fs) = f \nabla (s) + s \otimes df.$$

Il existe un et un seul relèvement λ *de* E *dans* J_1 (E), *défini par une connexion d'ordre* 1 *dans* E, *tel que*

$$s \in E, \quad \nabla (s) = D \circ \lambda (s).$$

L'opérateur différentiel ∇ associé à toute connexion d'ordre 1 sur E est ce qu'on appelle la *dérivation covariante* de la connexion dont nous allons rappeler ici quelques propriétés importantes .Ces propriétés étant classiques (voir par exemple J. L. Koszul, Lectures on fibre bundles and differential geometry), nous ferons ces rappels sans en donner la démonstration.

Soit donc donnée une connexion d'ordre 1 dans un groupoïde de Lie Φ défini sur V. Pour tout espace fibré vectoriel E sur V, associé à Φ nous désignerons par la même lettre ∇ la dérivation covariante associée à cette connexion :

$$\nabla : \quad \begin{array}{l} E \longrightarrow E \otimes T^* \\ s \longrightarrow \nabla (s) \end{array}$$

et noterons par $\nabla_X (s)$ la valeur dans un sens évident de $\nabla (s)$ au champ de vecteurs X de V (un champ de vecteurs étant une section différentiable du fibré tangent T).

PROPOSITION III.3.b. — a)*Si* E *est un espace fibré vectoriel associé à un groupoïde de Lie* Φ, *il en est de même du fibré dual* E^*, *et les dérivations covariantes dans* E *et* E^*, *associées à une même connexion d'ordre* 1 *dans* Φ, *sont reliées par la relation suivante :*

$$s \in E, \quad \omega \in E^*, \quad X \in T, \quad [\nabla_X (\omega)] (s) = X \cdot \omega (s) - \omega [\nabla_X (s)]$$

où $X \cdot \omega (s)$ *est la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs* X *de la fonction* $\omega (s)$.

b) *Si* E *et* F *sont deux espaces fibrés vectoriels associés à un même groupoïde de Lie* Φ, *il en est de même du fibré* $E \otimes F$, *et les dérivations covariantes respectivement dans* E, F *et* $E \otimes F$, *associées à une même connexion d'ordre* 1 *dans* Φ. *sont reliées par la relation suivante :*

$$s \in E, \quad w \in F, \quad X \in T, \quad \nabla_X (s \otimes w) = \nabla_X (s) \otimes w + s \otimes \nabla_X (w).$$

Désignons par $\mathcal{G}(\Phi)$ le fibré en algèbre de Lie correspondant au fibré en groupes de Lie canonique $G(\Phi)$ du groupoïde de Lie Φ (voir exemple 1 de I.2). Pour toute connexion d'ordre 1 dans Φ, on définit une section différentiable de $\mathcal{G}(\Phi) \otimes \Lambda^2 T^*$, dite le *tenseur de courbure* de la connexion, que nous noterons par R. Et notons aussi par ∇ l'opérateur

$$\nabla : \quad E \otimes \Lambda^p T^* \longrightarrow E \otimes \Lambda^{p+1} T^*$$

$\nabla = D \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id})$, λ étant le relèvement de E dans $J_1(E)$, défini par la connexion.

PROPOSITION III.3.c. — *Etant donnée une connexion d'ordre* 1 *dans un groupoïde de Lie* Φ, *dont* R *désigne le tenseur de courbure,*

1) *dans le fibré vectoriel* E *associé à* Φ, *l'opérateur*

$$\nabla^2 : \quad E \xrightarrow{\nabla} E \otimes T^* \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Lambda^2 T^*$$

est en fait $\mathcal{O}$*-linéaire, et il est égal à la représentation linéaire* $\mathcal{R}(R)$ *de* R *dans un sens évident,* $\mathcal{G}(\Phi)$ *étant un fibré en algèbres de Lie opérant sur* E ;

2) *si* $\mathcal{R}(R) = 0$, *ou ce qui revient au même si* $\nabla^2 = 0$, *la connexion dans* E *sera dite intégrable ou de façon précise, en tout point* x *de* V, *il existe des sections locales* $s_1, \ldots, s_q$ *telles que les sections* s_i *forment une base au voisinage de* x *du faisceau* E *de* $\mathcal{O}$*-modules localement libre et que*

$$\lambda(s_i) = j^1 s_i, \quad \forall i, \text{ ou autrement dit } \nabla(s_i) = 0.$$

CHAPITRE IV

PROLONGEMENT DU FIBRE TANGENT

Nous montrerons qu'il existe sur le faisceau $J_k(T)$, $J_k(T)$ étant le fibré de prolongement d'ordre k du fibré tangent T d'une variété différentiable V, une structure canonique de faisceau de R-algèbre de Lie. Une structure infinitésimale régulière d'ordre k sur V est équivalente alors à la donnée d'un sous-espace fibré vectoriel différentiable E_k de $J_k(T)$, tel que le faisceau E_k soit un sous-faisceau de R-algèbre de Lie du faisceau $J_k(T)$.

1. Structure de faisceau de R-algèbres de Lie.

T étant le fibré tangent d'une variété différentiable V, rappelons que le crochet de Poisson [,] des champs de vecteurs (i.e. des sections différentiables de T) définit dans le faisceau des sections T une structure de faisceau de R-algèbre de Lie, ou de façon précise vérifie les axiomes suivants :

X, Y, Z étant des sections de T, et α, β des nombres réels

1) $$[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha [X, Y] + \beta [X, Z]$$

2) $$[X, Y] = -[Y, X]$$

3) $$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

De plus si f est une fonction différentiable sur V, nous savons que

$$[X, fY] = f[X, Y] + (X \cdot f) Y$$

où $X \cdot f$ est la fonction, dérivée de Lie de f par rapport au champ de vecteurs X.

PROPOSITION IV.1. — *Pour tout entier k, il existe dans le faisceau* $J_k(T)$ *une et une seule structure de faisceau de* R*-algèbres de Lie telle que*

1) *si σ et η sont deux sections intégrables de* $J_k(T)$, *avec* $\sigma = j^k X$ *et* $\eta = j^k Y$, *on ait*

$$[\sigma, \eta] = j^k [X, Y],$$

2) *σ et η étant deux sections différentiables de* $J_k(T)$ *et* f, *une fonction différentiable sur* V, *on ait*

$$[\sigma, f\eta] = f[\sigma, \eta] + (\rho(\sigma)\cdot f)\,\eta$$

$\rho(\sigma)$ étant le champ de vecteurs, image de la section σ par le morphisme canonique de $J_k(T)$ *sur* T.

Démonstration.

Supposons qu'une telle structure existe, nous avons immédiatement ces deux lemmes.

LEMME 1. — *ρ_r étant le morphisme canonique de* $J_k(T)$ *sur* $J_r(T)$, $r \leqslant k$

$$\rho_r([\sigma, \eta]) = [\rho_r(\sigma), \rho_r(\eta)].$$

En effet ce lemme est évident avec la première propriété lorsque σ et η sont des sections intégrables. Il en est de même lorsque σ et η sont de la forme $fj^k X$ et $gj^k Y$. Le lemme est donc exact par linéarité, toute section de $J_k(T)$ étant localement de la forme $\sum_{i=1}^{m} f^i j^k X_i$.

LEMME 2. — D *étant l'opérateur de Spencer, on a la relation*

$$\mathrm{D}([\sigma, \eta]) = [\mathrm{D}(\sigma), \rho_{k-1}(\eta)] + [\rho_{k-1}(\sigma), \mathrm{D}(\eta)]$$
$$+ \mathrm{D}(\sigma) \barwedge (\rho \otimes 2\mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}(\eta) - \mathrm{D}(\eta) \barwedge (\rho \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}(\sigma)$$

où les éléments du second membre sont des sections de $J_{k-1}(T) \otimes T^*$, *dont la valeur sur un champ de vecteurs* X *est respectivement donnée par les formules suivantes*

$$[\mathrm{D}(\sigma), \rho_{k-1}(\eta)](X) = [\mathrm{D}_X(\sigma), \rho_{k-1}(\eta)] = \mathrm{D}_{[X, \rho(\eta)]}(\sigma)$$
$$[\mathrm{D}(\sigma) \barwedge (\rho \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}(\eta)](X) = (\mathrm{D}(\sigma))(\rho \circ \mathrm{D}_X(\eta)).$$

Il suffit encore de vérifier pour σ et η de la forme $fj^k Y$ et $gj^k Z$. Ce qui est immédiat.

Ces lemmes étant établis, l'existence d'une telle structure d'autre part connue pour le faisceau T, ce qui est le cas où $k = 0$, il nous suffit de démontrer la proposition par récurrence sur l'entier k. Or soient σ et η deux sections de $J_k(T)$, qu'on peut supposer de la forme, ce qui étant vrai localement,

$$\sigma = f^i j^k X_i \qquad \text{et} \qquad \eta = g^i j^k Y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Posons

$$[\sigma, \eta] = [f^i j^k X_i,\ g^i j^k Y_i]$$

où le second membre est une section χ de $J_k(T)$, parfaitement déterminé en raison des deux propriétés de la proposition. Et d'après le lemme 1 et le lemme 2, $\rho_{k-1}(\chi)$ et $D(\chi)$ ne dépendent que de $\rho_{k-1}(\sigma)$, $\rho_{k-1}(\eta)$, $D(\sigma)$ et $D(\eta)$. D'après la remarque de la fin de II.3, cette section χ est parfaitement déterminée indépendamment du choix des sections intégrables $j^k X_i$ et $j^k Y_i$, avec lesquelles sont exprimés σ et η. Le crochet $[\sigma, \eta]$, ainsi défini, détermine bien dans le faisceau $J_k(T)$, la structure de faisceau de R-algèbre de Lie précisée par la proposition.

C.Q.F.D.

Il est à remarquer que d'après la deuxième propriété, le crochet entre les sections de $J_k^0(T)$ est en fait $\mathcal{O}$-linéaire. $J_k^0(T)$ est donc canoniquement un fibré en algèbres de Lie.

Et nous verrons qu'une structure infinitésimale régulière d'ordre k sur V est essentiellement la donnée d'un morphisme h de fibrés vectoriels différentiables

$$h: \quad J_k(T) \longrightarrow F$$

où F est un certain fibré vectoriel différentiable sur V, tel que le sous-faisceau de $\mathcal{O}$-modules

$$\mathfrak{S}_k = \ker(h)$$

soit aussi un sous-faisceau de R-algèbres de Lie de $J_k(T)$. Il nous est utile d'établir la proposition suivante :

Proposition IV.1.b. — *Si h est un* V*-morphisme de fibrés vectoriels de* $J_k(T)$ *dans un fibré* F *tel que*

$$\mathfrak{S}_k = \ker(h)$$

soit un sous-faisceau de R*-algèbres de Lie de* $J_k(T)$, *le faisceau de prolongement*

$$\mathfrak{S}_{k+r} = \ker J_r(h),$$

noyau du morphisme $J_r(h)$ *qui applique* $J_{k+r}(T)$ *dans* $J_r(F)$, *est aussi pour tout entier r un sous-faisceau de* R*-algèbres de Lie de* $J_{k+r}(T)$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $r = 1$. Soient donc σ et η deux sections de $\mathfrak{S}_{k+1}$.

$$\rho_k \circ J_1(h)([\sigma, \eta]) = h \circ \rho_k([\sigma, \eta]) = h([\rho_k(\sigma), \rho_k(\eta)])$$

comme ρ_k applique $\mathfrak{S}_{k+1}$ dans $\mathfrak{S}_k$, on a donc

$$\rho_k \circ \mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta]) = 0.$$

D'autre part

$$\mathrm{D} \circ \mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta]) = (h \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathrm{D}([\sigma, \eta])\ ;$$

mais il est immédiat d'après le lemme 2 que

$$\mathrm{D}([\sigma, \eta]) \text{ est une section de } \mathfrak{S}_k^1 \ (= \mathfrak{S}_k \underset{\omega}{\otimes} \mathrm{T}^*)$$

l'opérateur D de Spencer applicant $\mathfrak{S}_{k+1}$ dans $\mathfrak{S}_k^1$. Donc

$$\mathrm{D} \circ \mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta]) = 0.$$

D'après la remarque de la fin de II.3, la section $\mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta])$ étant telle que

1) $$\rho_k \circ \mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta]) = 0$$
2) $$\mathrm{D} \circ \mathrm{J}_1(h)([\sigma, \eta]) = 0$$

est une section nulle ; $[\sigma, \eta]$ est une section de $\mathfrak{S}_{k+1}$.

C.Q.F.D.

2. Notions de torsion.

La structure de faisceau de R-algèbres de Lie sur $\mathrm{J}_k(\mathrm{T})$ revient à la donnée d'un opérateur, i.e. V-morphisme R-linéaire de faisceaux

$$\mathrm{J}_k(\mathrm{T}) \underset{\mathrm{R}}{\wedge} \mathrm{J}_k(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{J}_k(\mathrm{T})$$

où $\mathrm{J}_k(\mathrm{T}) \underset{\mathrm{R}}{\wedge} \mathrm{J}_k(\mathrm{T})$ est le produit extérieur au sens de Whitney de faisceaux R-linéaires. Cet opérateur est un opérateur différentiel d'ordre 1 si l'un des facteurs du premier membre est fixé ; il définit donc (voir II.4) un V-morphisme de fibrés vectoriels différentiables

$$\tau : \ \mathrm{J}_1[\mathrm{J}_k(\mathrm{T})] \wedge \mathrm{J}_1[\mathrm{J}_k(\mathrm{T})] \longrightarrow \mathrm{J}_k(\mathrm{T})$$

En particulier, comme on a $\mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{J}_1[\mathrm{J}_k(\mathrm{T})]$,

$$\tau : \ \mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{T}) \wedge \mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{J}_k(\mathrm{T}).$$

DÉFINITION IV.2. — *Une connexion d'ordre $k+1$ dans* T *étant une scission de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}_{k+1}^0(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{J}_{k+1}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{T} \longrightarrow 0$$

dont λ désigne le relèvement, nous appellerons le tenseur de torsion de la connexion le morphisme $-\tau \circ \lambda$:

$$-\tau \circ \lambda : T \wedge T \longrightarrow J_k(T).$$

Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur V, on a

$$-\tau \circ \lambda (X \wedge Y) = D_X(\lambda(Y)) - D_Y(\lambda(X)) - \rho_k([\lambda(X), \lambda(Y)])$$

formule qu'on établit immédiatement en exprimant le morphisme τ en fonction de l'opérateur D et du crochet. Dans le cas particulier de la connexion d'ordre 1, on a

$$-\tau \circ \lambda (X \wedge Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$$

et nous retrouvons la notion classique de la torsion d'une dérivation covariante ∇ ($= D \circ \lambda$) dans T.

Il est à remarquer que le relèvement λ de T dans $J_{k+1}(T)$ peut être considéré comme une section différentiable de $J_{k+1}(T) \otimes T^*$, tel que

$$(\rho \otimes \mathrm{Id})(\lambda) = \mathrm{Id}, \text{ section « identité » de } T \otimes T^*.$$

Et nous avons

$$D: \quad J_{k+1}(T) \otimes T^* \longrightarrow J_k(T) \otimes \Lambda^2 T^*$$
$$(D(\lambda))(X \wedge Y) = D_X(\lambda(X)) - D_Y(\lambda(X)) - \rho_k \circ \lambda([X, Y])$$

Il est donc immédiat, $\tau \circ \lambda$ étant considéré comme une section différentiable de $J_k(T) \otimes \Lambda^2 T^*$, d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION IV.2.a. — *Dans le cas de la connexion d'ordre* 1, *on a*

$$-\tau \circ \lambda = D(\lambda).$$

Le cas de la connexion d'ordre 1 dans T est bien connu ; il nous est cependant utile pour la suite de rappeler les deux propositions suivantes :

Considérons le morphisme δ introduit au II.3

$$\begin{array}{llll} \delta : & T \otimes S^k(T^*) \otimes \Lambda^p T^* & \longrightarrow & T \otimes S^{k-1}(T) \otimes \Lambda^{p+1} T^* \\ & e \otimes a^k \otimes w & \longrightarrow & -k\, e \otimes a^{k-1} \otimes (a \wedge w) \end{array}$$

PROPOSITION IV.2.b. — *Le tenseur de courbure* R *d'une connexion d'ordre* 1 *dans* T *étant une section de* $T \otimes T^* \otimes \Lambda^2 T^*$, *on a*

$$\nabla(-\tau \circ \lambda) = -\delta(R)$$

où $\nabla(-\tau \circ \lambda)$ *est la dérivée covariante de la torsion de la connexion.*

En effet,

$$\nabla(-\tau \circ \lambda) = \nabla[\mathrm{D}(\lambda)] = \nabla^2(\mathrm{Id}),$$

Id désignant la section « identité » de $\mathrm{T} \otimes \mathrm{T}^*$. L'égalité posée, qui est ce qu'on appelle l'indentité de Bianchi, est alors une conséquence immédiate de l'assertion 1) de la proposition III.3.c.

D'après le théorème III.2.b, toute connexion d'ordre 1 dans T est défini par une connexion d'ordre 1 dans le groupoïde de Lie $\Pi^1(\mathrm{V})$. Comme pour tout entier k, $\mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*)$ est aussi canoniquement associé au groupoïde de Lie $\Pi^1(\mathrm{V})$, une connexion d'ordre 1 dans ce groupoïde définit donc aussi un opérateur de dérivation covariante

$$\nabla : \quad \mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^* \longrightarrow \mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^{p+1} \mathrm{T}^*.$$

Ce rappel étant fait,

Proposition IV.2.c. — *Si la connexion d'ordre* 1 *dans* T *est sans torsion* (*i.e. la section* $-\tau \circ \lambda$ *est une section nulle de* $\mathrm{T} \otimes \Lambda^2 \mathrm{T}^*$), *on a le diagramme anticommutatif suivant,* $\delta \circ \nabla = -\nabla \circ \delta$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^p \mathrm{T}^* & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^{k-1}(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^{p+1} \mathrm{T}^* \\
\downarrow \nabla & & \downarrow \nabla \\
\mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^k(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^{p+1} \mathrm{T}^* & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{T} \otimes \mathrm{S}^{k-1}(\mathrm{T}^*) \otimes \Lambda^{p+2} \mathrm{T}^*
\end{array}$$

Cette proposition est une conséquence directe de la formule donnée dans Koszul (Fibres bundles and differential geometry) :

ω étant une section dans T^*,

$$\delta \circ \nabla(\omega) = d\omega,$$

où ∇ est la dérivation covariante dans T^*, correspondante à une connexion sans torsion dans T, δ le morphisme d'antisymétrisation

$$\begin{array}{rcl}
\delta : \quad \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{T}^* & \longrightarrow & \Lambda^2 \mathrm{T}^* \\
a \otimes b & \longrightarrow & a \wedge b
\end{array}$$

et $d\omega$ la différentielle extérieure de ω.

3. Système différentiel linéaire associé à une structure infinitésimale régulière.

Soit X un champ de vecteurs sur V. Nous savons que X définit sur V un groupe local de transformation à un paramètre (R. Palais, Lie theory of transformation groups, définition II, page 33) noté couramment Exp. t X, où t est le paramètre réel :

— pour tout x dans V, il existe un nombre réel positif ε tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, Exp. t X est un difféomorphisme d'un voisinage de x dans un ouvert de V.

Considérons alors l'application, définie pour tout x dans V,

$$\begin{aligned}]-\varepsilon, \varepsilon[&\longrightarrow \Pi^k_x\,(V) \\ t &\longrightarrow j^k_x\,(\text{Exp. t X}). \end{aligned}$$

Cette application est une germe de courbe différentiable dans Π^k_x (V). D'où son vecteur tangent φ_x (X) au paramètre $t = 0$:

$\varphi_x (X) \in T_x [\Pi^k_x (V)]$, espace des vecteurs tangents au point l_x de Π^k_x (V). On démontre que ce vecteur tangent ne dépend que du jet d'ordre k en x de la section X de T.

LEMME (P. Libermann). — *Pour tout entier k, il existe un isomorphisme linéaire canonique* φ *de* $J_k(T)|_x$ *avec* $T_x [\Pi^k_x (V)]$, *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} J_k(T)|_x & \xrightarrow{\varphi} & T_x[\Pi^k_x(V)] \\ \downarrow \rho_r & & \downarrow \rho_r \\ J_r(T)|_x & \xrightarrow{\varphi} & T_x[\Pi^k_x(V)] \end{array}$$

L'isomorphisme est l'application précédente qui associe à tout jet de section j^k_x (X) le vecteur φ_x (X). Ce lemme peut être établi par un calcul local direct (voir P. Libermann, Pseudogroupes infinitésimaux, prop. 1 par. 2).

Rappelons qu'une structure infinitésimale régulière d'ordre k sur V détermine un sous-groupoïde de Lie Φ de Π^k (V) (voir I-3). Φ étant un sous-groupoïde de Lie, $T_x (\Phi_x)$ est un sous-espace vectoriel de $T_x (\Pi^k_x (V))$. D'après le lemme, nous avons donc

$$\cup\ T_x (\Phi_x) \simeq E_k, \text{ sous-ensemble de } J_k (T).$$

Le sous-ensemble E_k de J_k (T) est ce qu'on appelle le *système différentiel* associé à la structure infinitésimale régulière. Et nous énonçons le théorème suivant dont nous ne donnerons pas la démonstration pour ne pas alourdir notre exposé.

THÉORÈME IV.3. — *Le système différentiel* E_k *associé à une structure infinitésimale régulière est un système différentiel linéaire homogène,* i.e.

E_k *est un sous-espace vectoriel différentiable de* $J_k(T)$. *Il est sans terme constant,* i.e. *la restriction du morphisme* ρ *à* E_k *est surjective :*

$$E_k \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Et le faisceau des sections E_k *est un sous-faisceau de* R-*algèbres de Lie du faisceau de* R-*algèbres de Lie* $J_k(T)$.

Inversement, tout système différentiel linéaire homogène E_k, *sans terme constant, et tel que le faisceau des sections* E_k *soit un sous-faisceau de* R-*algèbres de Lie du faisceau de* R-*algèbres de Lie* $J_k(T)$ *peut être considéré comme le système différentiel associé à une structure infinitésimale régulière d'ordre k sur* V.

Remarques.

1) Une idée de la démonstration peut être trouvée dans Rodriguès (The first and second fundamental theorems of Lie for pseudogroups, Am. J. Math. 84). On montre que le faisceau de R-algèbres de Lie $J_k(T)$ est canoniquement isomorphe au faisceau de R-algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur le fibré principal à groupe structural $\Pi_x(V)$. Et alors le faisceau E_k est isomorphe au faisceau des champs de vecteurs invariants à droite sur le fibré principal à groupe structural Φ_x. En paticulier le fibré en algèbres de Lie E_k^0, i.e. le noyau du morphisme ρ de E_k sur T, est isomorphe au fibré en algèbres de Lie $\mathcal{G}(\Phi)$.

2) Si F est un espace fibré associé au groupoïde de Lie $\Pi_k(V)$, F est un espace de prolongement de $(V, \wedge(V))$, $\wedge(V)$ étant le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de V, dans le sens que tout difféomorphisme local f, de source U et de but U′, se relève en un difféomorphisme $\tilde{f}$ de fibrés

$$\begin{tikzcd} F|U \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & F|U' \arrow[d] \\ U \arrow[r, "f"] & U' \end{tikzcd}$$

Une structure infinitésimale étant la donnée d'une section différentiable S de F, rappelons que le pseudogroupe des automorphismes locaux de la structure $\Gamma(S)$ est l'ensemble des difféomorphismes locaux de V tels que

$$\tilde{f} \circ S \circ f^{-1} = S,$$

ou autrement dit laissant invariant la section S.

Alors, le système différentiel E_k de la structure infinitésimale S est un espace de prolongement de (V, Γ (S)).

Et si nous désignons par Θ le faisceau des solutions de E_k, i.e. l'ensemble des sections locales X de T telles que $j^k X$ soit une section de J_k (T) à valeurs dans le sous-fibré E_k. Le faisceau Θ est dit le faisceau des automorphismes infinitésimaux de la structure, dans le sens que le groupe local à un paramètre Exp. tX défini par les sections X, solutions de E_k, est pour t fixé un élément de Γ (S). Il est immédiat d'après le théorème IV-3 que le faisceau des automorphismes infinitésimaux d'une structure infinitésimale régulière est un faisceau de R-algèbre de Lie sur V.

3) Dans la pratique, pour trouver par exemple le système différentiel. E_1 associé à la structure infinitésimale d'ordre 1 sur V, définie par la donnée d'une section S de $T^p_q = \overset{p}{\otimes} T \overset{q}{\otimes} T^*$, on procède ainsi :

Considérons l'opérateur S

$$\begin{aligned} S : T &\longrightarrow T^p_q \\ X &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \cdot S \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(X) \cdot S$ étant une section locale de T^p_q, dérivée de Lie du tenseur S par rapport au champ local de vecteurs X. L'opérateur S est un opérateur différentiel d'ordre 1; il définit donc un morphisme de fibrés

$$h(S) : J_1(T) \longrightarrow T^p_q ;$$

le système E_1 est le noyau du morphisme

$$E_1 = \{ e \in J_1(T) \text{ tel que } h(S)(e) = 0 \}.$$

CHAPITRE V

SYSTEME DIFFERENTIEL D'UNE G-STRUCTURE

Nous reprenons ici la terminologie consacrée (D. Bernard, Géo. dif. des G-structures) pour désigner par G-structure toute structure infinitésimale régulière d'ordre 1 sur une variété différentiable V. Et nous allons appliquer la théorie de Spencer à l'étude des G-structures. Le théorème fondamental II.4b nous permet en particulier de définir de nouveaux tenseurs qui soient des obstructions à l'intégrabilité (dans le sens bien connu, que nous préciserons d'ailleurs) de la structure, la première obstruction étant le tenseur de structure de D. Bernard.

1. Type et degré de la structure.

Soit donc donné sur V une structure infinitésimale régulière d'ordre 1, i.e. une section régulière S d'un espace de prolongement infinitésimal d'ordre 1 de V. Désignons par Φ le sous-groupoïde de Lie de $\Pi^1(V)$ laissant invariant la section, et par E_1 le système différentiel linéaire homogène associé à la structure (théorème IV-3). Rappelons que E_1 est un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_1(T)$ et posons N_1 tel que la suite suivante de fibrés vectoriels soit exacte :

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Comme E_1 est un sous-faisceau de R-algèbres de Lie de $J_1(T)$, N_1 est un sous-fibré en algèbres de Lie de $J_1(T) = T \otimes T^* \cdot N_1$ est de plus un espace fibré en algèbres de Lie associé à Φ, appelé couramment le *fibré en algèbres de Lie d'isotropie* de la structure, étant identique au fibré $\mathcal{G}(\Phi)$, le fibré des algèbres de Lie des groupes d'isotropie de Φ.

E_1 étant un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_1(T)$, nous considérons donc (voir remarque 3 de II-4) le morphisme canonique

$$h : J_1(E) \longrightarrow J_1(E) / E_1 = F$$

$J_1(T) / E$ étant le fibré vectoriel quotient de $J_1(T)$ par E_1. Et désignons par $\mathfrak{S}_k$ le sous-faisceau $\ker(J_{k-1}(h))$ dans $J_k(T)$,

$$J_{k-1}(h) : J_k(T) \rightarrow J_{k-1}(F).$$

Le sous-faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{S}_k$ est aussi d'après la proposition IV.1b un sous-faisceau de R-algèbres de Lie de $J_k(T)$. Les faisceaux $\mathcal{S}_k$ sont aussi définis par la relation de récurrence suivante :
$\mathcal{S}_1$ étant le sous-faisceau E_1 de $J_1(T)$, $\mathcal{S}_k$ est le sous-faisceau de $J_k(T)$ tel que :

$$1)\ \rho_{k-1} : \mathcal{S}_k \longrightarrow \mathcal{S}_{k-1}$$

$$2)\ D : \mathcal{S}_k \longrightarrow \mathcal{S}^1_{k-1}\ (= \mathcal{S}_{k-1} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} T^*).$$

Désignons par $\mathcal{N}_k$ le sous-faisceau ker (ρ_{k-1}) dans $\mathcal{S}_k$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{S}_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} \mathcal{S}_{k-1}\,.$$

$\mathcal{N}_k$ est le sous-faisceau des sections de $T \otimes S^k(T^*)$ à valeurs dans l'ensemble N_k, le sous-ensemble N_k de $T \otimes S^k(T^*)$ étant défini par récurrence comme le sous-ensemble de $T \otimes S^k(T^*)$ tel que

$$\delta : T \otimes S^k(T^*) \longrightarrow T \otimes S^{k-1}(T^*) \otimes T^*$$
$$N_k = \delta^{-1}(N_{k-1} \otimes T^*).$$

Et comme N_1 est un sous-fibré vectoriel de $T \otimes T^*$ associé au groupoïde de Lie Φ, les sous-ensembles N_k sont aussi des sous-fibrés vectoriels différentiables $T \otimes S_k(T^*)$ associés au groupoïde de Lie Φ; le faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{N}_k$ est donc localement libre :

$$\mathcal{N}_k = N_k\,.$$

DÉFINITION V.1a. — *La structure infinitésimale régulière* S *sera dite de type p s'il existe un entier p tel que*

$$N_p \neq 0 \ \text{ et } \ N_{p+1} = 0 \ \ (\text{alors } \forall\, k > p,\ N_k = 0).$$

Dans le cas contraire, la structure sera dite de type infini.

Il est à remarquer que le type d'une structure infinitésimale régulière S ne dépend que de la structure d'algèbre linéaire des fibres de N_1. Ainsi nous avons les exemples suivants :

Exemples.

1) Une structure Lorentzienne sur V, i.e. S est une section partout de rang maximal de $S^2(T^*)$, est de type 1 : $N_2 = 0$ (voir W. Guillemin et S. Sternberg, Transitive diff. Geometry, par. 3, A).

2) Une structure presque complexe ou presque symplectique sur V est de type infini (voir plus généralement Y. Matsushima, théorème 3, Algèbre de Lie linéaire semi-involutive).

Il est clair qu'étant donné

$$\delta(N_k) \subset N_{k-1} \otimes T^*,$$

pour tout entier q, la restriction du morphisme δ au sous-espace fibré vectoriel $N_k \otimes \wedge^q T^*$ de $T \otimes S^k(T^*) \otimes \wedge^p T^*$ est à valeurs dans $N_{k-1} \otimes \wedge^{q+1} T^*$. Considérons donc la suite cohomologique :

$$N_{p+1} \otimes \wedge^{q-1} T^* \xrightarrow{\delta} N_p \otimes \wedge^q T^* \xrightarrow{\delta} N_{p-1} \otimes \wedge^{q+1} T^*$$

dont nous désignerons par $H_p^q(S)$, l'espace de cohomologie correspondant $H_p^q(S)$ est évidemment un espace fibré vectoriel sur V associé au groupoïde de Lie Φ; le faisceau $H_p^q(S)$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{H}_p^q$ de cohomologie de la suite (voir chap. II.4).

$$\mathcal{N}_{p+1}^{q-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}_p^q \xrightarrow{\delta} \mathcal{N}_{p-1}^{q+1}.$$

DÉFINITION V.1b. — *Le degré de la structure infinitésimale régulière* S *est le plus petit entier* k *tel que si* $p \geqslant k$, *on a pour tout entier* q,

$$H_p^q(S) = 0.$$

Cette définition a un sens en vertu du théorème suivant :

THÉORÈME V.1. — *Pour toute structure infinitésimale régulière* S, *il existe un entier* k *tel que si* $p \geqslant k$,

$$H_p^q(S) = 0, \textit{ pour tout entier } q.$$

L'équivalence algébrique de ce théorème, i.e. en ne regardant que la structure d'algèbre linéaire des fibres de N_1, a été démontré par I. Singer et S. Sternberg (section 6, chap. IV, The infinite groups of Lie and Cartan). Nous renvoyons donc le lecteur à ce travail pour la démonstration de ce théorème.

Exemple.

Le degré d'une structure 0-déformable est 1 (on dit alors qu'elle est involutive).

2. S-connexion.

DÉFINITION V.2. — *Une* S-*connexion est une connexion d'ordre* 1 *dans le groupoïde de Lie* Φ.

Dans le cas où l'espace de prolongement infinitésimal F dont la structure infinitésimale considérée est définie comme la donnée d'une section différentiable S, est un espace fibré vectoriel, une S-connexion n'est autre qu'une connexion d'ordre 1 dans $\Pi^1(V)$, déterminant dans le fibré vectoriel F (voir chap. III-3) une dérivation covariante ∇ telle que la section S soit à dérivée covariante nulle :

$$\nabla(S) = 0.$$

Toute S-connexion définit évidemment une scission de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \otimes T^* \longrightarrow J_1(T) \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Et rappelons qu'étant donné une dérivation covariante ∇ dans T, A. Lichnerowicz a introduit (Géom. des groupes de transformation, par. 19) une nouvelle dérivation covariante $\overline{\nabla}$ dans T, dite « associée » à ∇, ayant son tenseur de torsion opposé à celui de ∇, ou de façon précise si X et Y sont deux champs de vecteurs sur V,

$$[X, Y] = \overline{\nabla}_X(Y) - \nabla_Y(X) = \nabla_X(Y) - \overline{\nabla}_Y(X).$$

Ceci dit, nous avons

PROPOSITION V.2. — *Si* ∇ *est la dérivation covariante dans* T *définie par une* S-*connexion, la dérivation covariante associée* $\overline{\nabla}$ *est telle que la scission correspondante de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow T \otimes T^* \longrightarrow J_1(T) \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0$$

soit à relèvement λ *appliquant* T *dans* E_1, *ou autrement dit cette scission est en fait une scission de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Et inversement toute scission de cette dernière suite détermine dans T *une dérivation covariante* $\overline{\nabla}$, *telle que son associée* ∇ *soit définie par une* S-*connexion.*

Démonstration.

Nous ne donnerons pas une démonstration générale de la proposition, mais seulement une vérification directe dans le cas par exemple où la structure infinitésimale considérée est la donnée d'une section S de $T \otimes T^*$ (cas de structure 0-déformable).

En effet, précisons d'abord que dans ce cas une section σ de $J_1(T)$ est en fait une section de E_1 si et seulement si X étant un champ de vecteur quelconque sur V, on a :

$$[\rho(\sigma), S(X)] - S([\rho(\sigma), X]) + D_{S(X)}(\sigma) - S(D_X(\sigma)) = 0.$$

Et soit donc une dérivation covariante ∇ dans T, définie par une S-connexion, i.e. pour tout couple de champs de vecteurs X et Y,

$$\nabla_X(S(Y)) - S(\nabla_X(Y)) = 0 \tag{1}$$

et $\overline{\overline{\nabla}}$ étant la dérivation covariante associée

$$\nabla_X(S(Y)) - \overline{\overline{\nabla}}_{S(Y)}(X) - [X, S(Y)] = 0 \tag{2}$$

$$\nabla_X(Y) - \overline{\overline{\nabla}}_Y(X) - [X, Y] = 0. \tag{3}$$

De ces trois relations, on déduit facilement :

$$[X, S(Y)] - S[X, Y]) + \overline{\overline{\nabla}}_{S(Y)}(X) - S(\overline{\overline{\nabla}}_Y(X) = 0 \tag{4}$$

ou encore, λ désignant le relèvement de la scission correspondante à la dérivation covariante $\overline{\overline{\nabla}}$,

$$[X, S(Y)] - S[X, Y]) + D_{S(Y)}(\lambda(X)) - S(D_Y(\lambda(X))) = 0$$

Ce qui prouve bien que pour tout champ de vecteurs X, $\lambda(X)$ est une section de E_1.

Inversement soit λ le relèvement d'une scission de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Pour tout couple de champs de vecteurs X et Y, nous avons la dernière relation ou encore la relation (4), en désignant par ∇ la dérivation covariante associée à $\overline{\overline{\nabla}}$, vérifiant donc les relations (2) et (3), nous en déduisons immédiatement que ∇ vérifie la relation

$$\nabla_X(S(Y)) - S(\nabla_X(X)) = 0. \tag{1}$$

La dérivation covariante ∇ est donc bien définie par une S-connexion.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — *Toute* S-*connexion sans torsion détermine canoniquement une scission de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{p} T \longrightarrow 0.$$

Plus généralement nous avons le théorème suivant (où nous reprenons les notations de V-1, en convenant que $N_0 = T$).

THÉORÈME V.2. — *Toute* S-*connexion sans torsion détermine canoniquement un relèvement*

$$\lambda_k : N_k \longrightarrow \mathfrak{S}_{k+1}$$

i.e. *un morphisme* $\mathcal{O}$-*linéaire de faisceaux de* $\mathcal{O}$-*modules tel que*

$$\rho_k \circ \lambda_k = \mathit{Identit\acute{e}}.$$

Démonstration.

D'après le corollaire précédent, le théorème est vrai pour $k = 0$. Nous allons donc le démontrer par récurrence sur l'entier k.

Soit donc donné une S-connexion sans torsion, dont nous désignerons par la même lettre ∇ la dérivation covariante correspondante dans les espaces fibrés N_k, ces derniers étant tous des espaces fibrés vectoriels associés au groupoïde de Lie Φ. Et supposons par hypothèse de récurrence que cette connexion définit canoniquement des relèvements

$$\lambda_{k-p} : N_{k-p} \longrightarrow \mathfrak{S}_{k-p+1}$$

pour tout entier p avec $k \geqslant p \geqslant 1$, et tel que si η est une section de N_{k-1}, on ait

$$D \circ \lambda_{k-1}(\eta) = \nabla(\eta) + (\lambda_{k-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta(\eta).$$

Prenant une section η de N_k, considérons la section χ de $\mathfrak{S}_k^1$:

$$\chi = \nabla(\eta) + (\lambda_{k-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta(\eta),$$

on a évidemment :

$$(\rho_{k-1} \otimes \mathrm{Id})(\chi) = \delta(\eta)$$
$$D(\chi) = \delta \circ \nabla(\eta) + \nabla \circ \delta(\eta),$$

par hypothèse de récurrence,

$$D(\chi) = 0,$$

d'après la proposition IV.2c.

Montrons qu'il existe une section σ de $J_{k+1}(T)$ telle que

1) $\rho_k(\sigma) = \eta$
2) $D(\sigma) = \chi$.

En effet, soit σ' une section de $J_{k+1}(T)$ telle que $\rho_k(\sigma') = \eta$.

La section $D(\sigma') - \chi$ est donc une section de $J_k(T) \otimes T^*$, vérifiant

$$(\rho_{k-1} \otimes \mathrm{Id})(D(\sigma') - \chi) = \delta(\eta) - \delta(\eta) = 0$$
$$D(D(\sigma') - \chi) = D^2(\sigma') - D(\chi) = 0\,;$$

il existe donc une section η' de $T \otimes S^{k+1}(T^*)$, telle que

$$D(\sigma') - \chi = \delta(\eta').$$

Et la section $\sigma = \sigma' - \eta'$ répond à la question. Cette section vérifiant les conditions 1 et 2 est en fait une section de $\mathfrak{S}_{k+1}$; elle est évidemment unique, dépend $\mathcal{O}$-linéairement de la section η. Nous avons donc un relèvement de N_k dans $\mathfrak{S}_{k-1}$.

C.Q.F.D.

3. Structures intégrables.

DÉFINITION V.3. — *La structure infinitésimale* S *sera dite intégrable si et seulement si tout point* x *de* V, *il existe des automorphismes infinitésimaux* X_i, i.e. *des solutions de* E_1, *définis au voisinage de* x, *tels que dans ce voisinage les* X_i *forment une base du faisceau* T *de* $\mathcal{O}$*-modules localement libres et que*

$[X_i, X_j] = 0$, *pour tout* i *et* j.

Dans ce voisinage U de x, considérons le relèvement

$$\lambda : T \mid U \longrightarrow E_1 \mid U$$

tel que pour tout i,

$$\lambda(X_i) = j^1 X_i.$$

Ce relèvement définit évidemment sur ce voisinage U une S-connexion sans courbure et sans torsion, dont nous désignerons par la même lettre ∇ la dérivation covariante dans $T \mid U$ et dans les espaces fibrés vectoriels $N_k \mid U$.

Un tel voisinage U sera dit voisinage de platitude. Convenons dans la suite pour simplifier les notations que les espaces fibrés et les faisceaux considérés seront toujours pris pour leur restriction à un voisinage de platitude donné, i.e. par exemple $T \mid U$ sera désigné simplement par T.

Nous avons ainsi par le relèvement considéré un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels

$E_1 \simeq T + N_1$ (somme directe au sens de Whitney) et avec cet isomorphisme, une dérivation covariante sans courbure

$$\begin{aligned} \nabla : E_1 &\longrightarrow E_1 \otimes T^* \\ X + n &\longrightarrow \nabla(X) + (\delta + \nabla)(n) \end{aligned}$$

où X et n sont respectivement des sections de T et de N. Cette dérivation covariante est définie par un relèvement

$$\lambda : E_1 \longrightarrow J_1(E_1)$$
$$\nabla = D \circ \lambda.$$

Ce relèvement est tel que pour toute section $\sigma = X + n$ de E_1 on ait

1) $D^2 \circ \lambda(\sigma) = \nabla(\nabla(X) + \delta(n)) + \delta \circ \nabla(n) = 0$

2) $(\rho \otimes \mathrm{Id}) \circ D \circ \lambda(\sigma) = \nabla(X) + \delta(n) = D(\sigma)$.

D'après le corollaire du théorème II.3b, il est donc à valeurs dans $J_2(T)$. On vérifie immédiatement qu'il est plus exactement à valeurs dans le faisceau $\mathfrak{S}_2$:

$$\lambda : E_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_2.$$

Nous avons donc la suite exacte de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{\rho_1} E_1 \longrightarrow 0$$

Le faisceau $\mathfrak{S}_2$ est localement libre; le système différentiel de prolongement E_2 (voir remarque 3 de II-4), qui est dans ce cas-ci

$$E_2 = J_2(T) \cap J_1(E_1),$$

est alors un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_2(T)$, avec un isomorphisme de fibrés vectoriels canonique

$$\begin{aligned} E_2 &\simeq E_1 + N_2 \\ &\simeq T + N_1 + N_2. \end{aligned}$$

De façon générale, par un facile raisonnement de récurrence, nous avons pour tout entier k le système différentiel de prolongement

$$E_k = J_k(T) \cap J_{k-1}(E_1)$$

comme un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_k(T)$, avec un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} E_k &\simeq E_{k-1} + N_k \\ &\simeq T + N_1 + \dots + N_{k-1} + N_k \end{aligned}$$

Cet isomorphisme détermine sur E_{k-1} une dérivation covariante sans courbure ∇_{k-1} telle que avec l'isomorphisme considéré on ait

$$\begin{aligned} \nabla_{k-1} : E_{k-1} &\longrightarrow E_{k-1} \otimes T^* \\ X + n_1 + \dots + n_{k-1} &\longrightarrow \nabla(X) + (\delta + \nabla)(n) + \dots + (\delta + \nabla)(n_{k-1}). \end{aligned}$$

La dérivation covariante ∇_{k-1} étant sans courbure, l'assertion 2 de la proposition III-3-c nous permet en outre de conclure que le système différentiel E_1 est complètement intégrable à l'ordre $k — 1$, i.e.

$$\mathfrak{S}_{k-1} = E_{k-1}$$

est localement engendré par des sections intégrables (voir remarque 2 de II-4), ou encore que tout élément de E_{k-1} est le jet d'ordre $k — 1$ d'une solution de E_1.

De cette étude locale, nous avons donc le théorème global suivant.

THÉORÈME V.3. — *Si la structure infinitésimale* S *est intégrable, le système différentiel* E_1 *est complètement intégrable à tous les ordres et pour tout entier k, le système différentiel de prolongement* E_k *est un sous-espace fibré vectoriel différentiable de* $J_k(T)$, *tel que nous ayons la suite exacte suivante de fibrés vectoriels*

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow E_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} E_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Remarque.

Désignons par Θ le faisceau des automorphismes infinitésimaux de la structure infinitésimale S, i.e. le faisceau des solutions de E_1. Le faisceau Θ sera dit de type fini ou infini suivant que l'espace de ses germes en un point quelconque de la base V est un espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

Il est immédiat d'après le théorème précédent que si la structure infinitésimale S est intégrable, le faisceau Θ est de même type que la structure (définition V-1-a).

4. Tenseur de structure de D. Bernard.

Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Toute scission de cette suite est équivalente à la donnée d'une section λ, le relèvement de la scission, de $E_1 \otimes T^*$, telle que

$$\begin{aligned} \rho \otimes \mathrm{Id} : \quad & E_1 \otimes T^* \longrightarrow T \otimes T^* \\ (\rho \otimes \mathrm{Id})(\lambda) \ = \ & \mathrm{Id.}, \text{ section « identité ».} \end{aligned}$$

Toute autre scission de la suite est à relèvement λ' de la forme

$$\lambda' = \lambda + \eta$$

où η est une section quelconque de $N_1 \otimes T^*$, sous-espace fibré de $E_1 \otimes T^*$. D'où pour le tenseur de torsion correspondant (voir IV.2)

$$D(\lambda') = D(\lambda + \eta) = D(\lambda) + \delta(\eta).$$

Ce qui entraîne que nous avons une section canonique t_S du fibré vectoriel quotient $T \otimes \wedge^2 T^* / \delta(N_1 \otimes T^*)$, définie indépendamment de tout relèvement λ :

$$t_S = D(\lambda) \bmod. \delta(N_1 \otimes T^*).$$

Et nous avons la proposition évidente suivante, en sachant que d'après la proposition V.2 toute scission de la suite exacte considérée définissant une dérivation covariante sans torsion dans T, est déterminée par une S-connexion.

PROPOSITION V.4.a. — *La nullité de la section t_S est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une* S-*connexion sans torsion.*

Remarque A.

1) La section t_S est donc une donnée de la structure infinitésimale S. D. Bernard, qui l'a définie (Géom. diff. des G-structures), l'appelle pour cette raison le tenseur de structure.

2) La section t_S est automatiquement nulle si

$$\delta(N_1 \otimes T^*) = T \otimes \wedge^2 T^*.$$

C'est le cas d'une structure Lorentzienne, i.e. S est une section régulière partout de rang maximal de S^2 (T*). Dans ce cas, $N_2 = 0$, on a un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\delta : \quad N_1 \otimes T^* \longrightarrow T \otimes \wedge^2 T^*.$$

Il existe donc dans le cas d'une structure Lorentzienne une et une seule S-connexion sans torsion.

Soit Γ un pseudogroupe de transformations différentiables sur V. Rappelons qu'un espace fibré F, i.e. muni d'une submersion p sur V, sera dit un espace de prolongement de (V, Γ) si tout élément f de Γ, de source U, définit un difféomorphisme $\tilde{f}$ de $F|U$ sur $F|f(U)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} F|U & \xrightarrow{\tilde{f}} & F|f(U) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{f} & f(U) \end{array}$$

Un élément f de Γ de source x et de but y définit donc un difféomorphisme

$$\tilde{f}_x : F_x \to F_y \ (F_x = p^{-1}(x)).$$

L'espace de prolongement F sera dit de façon plus précise l'espace de prolongement d'ordre k de (V, Γ) si nous avons la relation suivante

$$(\tilde{f}_x = \tilde{g}_x) \Leftrightarrow (j^k_x(f) = j^k_x(g)).$$

Et si s_U désigne la restriction à U d'une section différentiable s de F sur V, $\tilde{f} \circ s_U \circ f^{-1}$ est une section différentiable de F définie sur $f(U)$. Nous dirons que la section s est un invariant de (V, Γ) si pour tout élément f de Γ, de source U on a

$$\tilde{f} \circ s_U \circ f^{-1} = s_{f(U)}.$$

Dans le cas où F est un espace de prolongement d'ordre k de (V, Γ), une telle section s sera dite un invariant d'ordre k de (V, Γ).

Ces notions étant rappelées, il est immédiat de montrer que le tenseur de structure t_S est un invariant d'ordre 1 de (V, Γ), où Γ désigne le pseudogroupe des automorphismes locaux de la structure infinitésimale S (remarque 2 de IV.3). Nous dirons simplement que t_S est un invariant d'ordre 1 de la structure.

PROPOSITION V.4.b. (D. Bernard). — *Le tenseur de structure t_S est un invariant d'ordre 1 de la structure qui est une obstruction à son intégrabilité,* i.e.

$$t_S = 0, \text{ la section nulle de } T \otimes \Lambda^2 T^* / \delta (N_1 \otimes T^*)$$

est une condition nécessaire pour que la structure infinitésimale S *soit intégrable.*

En effet sur tout ouvert U de platitude, il existe une S-connexion sans torsion ; donc la restriction de t_S à U doit être nulle. Il en découle que si la structure infinitésimale S est intégrable, t_S doit être nul.

Rappelons que le morphisme ρ de E_1 sur T étant surjectif, il est défini un morphisme m de fibrés tels que la suite suivante de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules soit exacte

$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{\rho_1} E_1 \xrightarrow{m} H_0^2 (S)$$

où $H_0^2(S)$ est le fibré vectoriel $T \otimes \Lambda^2 T^* / \delta (N_1 \otimes T^*)$. Il est immédiat de montrer que le morphisme m considéré comme une section différentiable de $H_0^2 (S) \otimes E_1^*$ est un invariant d'ordre 2 de la structure. Et nous allons démontrer que le morphisme m, qui est une obstruction à la complète intégrabilité de E_1, est nul si le tenseur de structure t_S est nul. De façon précise, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME V.4. — *Si le tenseur de structure t_S est nul, nous avons la suite exacte de fibrés vectoriels*

$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0$$

où E_2 *est le système différentiel de prolongement d'ordre* 2 *de* E_1.

Démonstration.

Il suffit de démontrer que le morphisme

$$\mathfrak{S}_2 \xrightarrow{\rho_1} E_1$$

est surjectif. Le tenseur de structure t_S étant nul, il existe un relèvement λ de T dans E_1, déterminant une dérivation covariante ∇ sans torsion sur T. D'après le théorème V.2, nous savons déjà que $\rho_1 (\mathfrak{S}_2)$ contient le sous-faisceau N_1 de E_1. Il reste donc à montrer que le morphisme

$$m \circ \lambda : \quad T \longrightarrow E_1 \longrightarrow H_0^2 (S)$$

est nul. Ce qui est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme. — Pour toute section X *de* T, $\nabla^2(X)$ *est une section de* $\delta(N_1 \otimes T^*)$.

Or en effet, la dérivation covariante ∇, étant sans torsion, est déterminée par une S-connexion, dont le tenseur de courbure R est une section de $N_1 \otimes \wedge^2 T^*$ ($N_1 = \mathcal{G}(\Phi)$). Et nous avons pour tout couple de champs de vecteurs Y et Z

$$\nabla^2(X)(Y \wedge Z) = R(Y \wedge Z)(X).$$

Or d'après l'identité de Bianchi (proposition IV.2.b), appliquée au cas où le tenseur de torsion est nul, on a

$$R(Y \wedge Z)(X) + R(Z \wedge X)(Y) + R(X \wedge Y)(Z) = 0$$

ou encore

$$R(Y \wedge Z)(X) = R(X \wedge Z)(Y) - R(X \wedge Y)(Z)$$

ce qui exprime que pour tout X fixé, $\nabla^2(X)$ est une section de $\delta(N_1 \otimes T^*)$.

C.Q.F.D.

Remarque B.

1) Si S est une structure de parallélisme absolu, nous avons $N_1 = 0$ et

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0.$$

Identifiant E_1 avec T, le morphisme $m : E_1 \longrightarrow T \otimes \wedge^2 T^* = H_0^2(S)$ n'est autre que le tenseur de courbure de la connexion canonique ; le morphisme m est donc nul. La nullité du tenseur de structure t_S veut dire dans ce cas que la S-connexion canonique, qui est sans courbure, est aussi sans torsion. Une structure de parallélisme absolu, à tenseur de structure nul, est donc intégrable.

2) Dans le cas où la structure S est involutive, i.e. de degré 1, ($N_1 \neq 0$, ce qui entraîne que S est de type infini, voir Matsushima, Algèbres de Lie semi-involutives) nous pouvons appliquer par récurrence le théorème II.4.b pour affirmer que si le tenseur de structure t_S est nul, ou si le morphisme $m : E \longrightarrow H_0^2(S)$ est nul, nous avons pour tout entier k la suite exacte de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur V

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow \mathcal{S}_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} \mathcal{S}_{k-1} \longrightarrow 0$$

ou encore de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow E_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} E_{k-1} \longrightarrow 0$$

les systèmes de prolongement E_k étant des sous-espaces fibrés vectoriels différentiables de $J_k(T)$. Mais même dans ce cas, nous ne pouvons rien conclure sur la complète intégrabilité de E_1, l'existence des solutions formelles n'impliquant pas l'existence des solutions de E. D. C. Spencer conjecture que si la structure S est de plus elliptique, i.e. E_1 définit un opérateur différentiel elliptique de T à valeurs dans $J_1(T)/E_1$ (voir D. C. Spencer III), la structure infinitésimale S est complètement intégrable (nous avons en effet le théorème de Newlander-Nirenberg qui affirme que la structure presque complexe à tenseur de structure nul est intégrable).

5. Obstruction à l'ordre supérieur. Cas des structures de type fini.

De façon générale, supposons que la structure infinitésimale S est telle que pour tout $k \leqslant p$, nous ayons la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow E_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} E_{k-1} \longrightarrow 0$$

E_k étant respectivement des sous-espaces fibrés vectoriels différentiables de $J_k(T)$. Il est alors défini d'après le théorème II.4.b un morphisme

$$m: \quad E_p \longrightarrow H^2_{p-1}(S)$$

tel que la suite suivante de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules soit exacte

$$0 \longrightarrow N_{p+1} \longrightarrow \mathfrak{S}_{p+1} \xrightarrow{\rho_p} E_p \xrightarrow{m} H^2_{p-1}(S).$$

Ce morphisme définit une section de $H^2_{p-1}(S) \otimes E_p^*$, que nous noterons désormais par $0(p)$, qui est évidemment un invariant d'ordre p de la structure. La nullité de cette section entraîne que nous ayons la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_{p+1} \longrightarrow \mathfrak{S}_{p+1} \xrightarrow{\rho_p} E_p \longrightarrow 0$$

ou encore la suite exacte de fibrés vectoriels, avec E_{p+1} un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_{p+1}(T)$,

$$0 \longrightarrow N_{p+1} \longrightarrow E_{p+1} \longrightarrow E_p \longrightarrow 0$$

Nous avons ainsi défini dans un sens évident $0(p)$ comme une obstruction à l'ordre p de la complète intégrabilité de la structure.

Dans le cas où le tenseur de la structure t_S est nul, le théorème V.2 affirme que la restriction du morphisme m au sous-fibré N_p de E_p est en fait nulle ; le morphisme m passe donc au quotient pour définir un morphisme m'

$$m' : \quad E_{p-1} \longrightarrow H^2_{p-1}(S)$$

ou encore une section $0'(p)$ de $H^2_{p-1}(S) \otimes E^*_{p-1}$, qui est un invariant d'ordre $p - 1$ de la structure, et est dans ce cas la véritable obstruction à l'ordre p à la complète intégrabilité de la structure.

Si la structure infinitésimale est de degré p, la nullité de ces obstructions jusqu'à l'ordre p entraîne évidemment encore que pour tout entier k, E_k est un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_k(T)$ et nous avons la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow E_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} E_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Comme dans la remarque B.2 de V.4, nous ne pouvons pas en conclure en général que la structure est complètement intégrable. Dans le cas particulier de structure de type fini, nous avons le théorème

THÉORÈME V.5.a. — *Si la structure infinitésimale* S *est de type* $p - 1$, i.e. $N_p = 0$, *et a toutes ses obstructions nulles jusqu'à l'ordre* p, *le système différentiel* E_1 *est complètement intégrable à tous les ordres.*

Démonstration.

En effet, pour tout $k \geqslant p$, nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_k \longrightarrow E_{k-1} \longrightarrow 0$$

Il nous suffit de démontrer que E_p est complètement intégrable. D'après l'assertion 2 de la proposition III.3.c, il revient à vérifier que l'isomorphisme canonique

$$\lambda : \quad E_p \longrightarrow E_{p+1}$$

définit dans E_p une dérivation covariante $\nabla = D \circ \lambda$ sans courbure. Or nous avons évidemment

$$(\lambda \otimes \mathrm{Id}) \circ D \circ \lambda = D \circ \lambda',$$

où λ' est l'isomorphisme canonique de E_p dans E_{p+2}. D'où

$$\nabla^2 = D \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}) \circ D \circ \lambda = D \circ D \circ \lambda' = 0.$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE (voir remarque de V.3). — *Avec les hypothèses du théorème précédent, le faisceau Θ des automorphismes infinitésimaux de la structure est de type fini.*

Démonstration.

En effet soient $(j^{p+1} X_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ les sections intégrables qui forment une base de E_{p+1}, faisceau de $\mathcal{O}$-modules localement libre au voisinage U d'un point x de V. Toute section Y de Θ est au voisinage de x de la forme

$$j^{p+1} Y = f^i j^{p+1} X_i,$$

où f^i sont des fonctions différentiables de V définies au voisinage de x. Nous avons donc

$$D (j^{p+1} Y) = j^p X_i \otimes df^i = 0.$$

Or les $j^p X_i$ forment aussi une base de E_p, faisceau de $\mathcal{O}$-modules localement libre ; cette relation entraîne que

$$df^i = 0$$
$$f^i = a^i, \text{ constant.}$$

Nous avons donc

$$Y = a^i X_i.$$

C.Q.F.D.

Remarque A.

Toujours dans l'hypothèse du théorème V.5.a, désignons par X une section globale de Θ. Il est immédiat d'après la démonstration du corollaire que l'ensemble

$$\{x, x \in V \text{ tel que } j^p_x X = 0\}$$

est un ensemble ouvert. D'autre part cet ensemble est évidemment fermé, étant l'ensemble des « zéros » d'une section différentiable. Si V est connexe, l'application

$$\begin{array}{rcl} j^p_x : \quad H^0(V, \Theta) & \longrightarrow & E_p|_x \\ X & \longrightarrow & j^p_x X \end{array}$$

est donc injective ; on en conclut que $H^0(V, \Theta)$ est un espace vectoriel de dimension finie. Et un simple raisonnement dû à Palais montre que le groupe des automorphismes globaux de la structure est alors un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie n'est autre que la sous-algèbre de Lie de $H^0(V, \Theta)$, formée des éléments engendrant un groupe global de transformation à un paramètre (R. Palais, Lie theory of transformation groups). Nous retrouvons ainsi le théorème de S. Kobayashi, disant que le groupe des automorphismes globaux d'une structure de parallélisme absolu est un groupe de Lie.

De façon plus précise, il est immédiat que nous avons le théorème suivant qui précise le corollaire précédent

THÉORÈME V.5.b. — *Si la structure infinitésimale* S *est de type* $p - 1$, *et a toutes ses obstructions nulles jusqu'à l'ordre* p, *le faisceau* Θ *des automorphismes infinitésimaux de la structure est un faisceau de* R-*algèbres de Lie localement constant.*

En particulier, si V est simplement connexe, le faisceau Θ est un faisceau constant, i.e. isomorphe à $V \times \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie isomorphe à Θ_x. Si G est le groupe de Lie simplement connexe, ayant $\mathcal{G}$ comme algèbre de Lie, G est un groupe local d'automorphisme sur V au sens de Palais (définition II, page 33, *loc. cit.*).

Remarques B.

Reprenons le cas général. Rappelons que d'après la proposition IV.1.b, le faisceau $\mathfrak{S}_k$ est un faisceau de R-algèbre de Lie. Donc dans le cas de la nullité des obstructions à la complète intégrabilité jusqu'à l'ordre p, E_k est pour tout $k \leqslant p + 1$ est un sous-espace fibré vectoriel différentiable de $J_k(T)$, sans terme constant, i.e. le morphisme $\rho : E_k \longrightarrow T$ est surjectif, et dont le faisceau des sections $E_k \simeq \mathfrak{S}_k$ est un sous-faisceau de R-algèbres de Lie de $J_k(T)$; E_k définit donc d'après le théorème IV.3 un sous-groupoïde de Lie Φ_k de $\Pi^k(V)$, dit groupoïde de prolongement holonome d'ordre k de Φ. Le fibré en algèbres de Lie d'isotropie $\mathcal{G}(\Phi_k)$ n'est autre que le fibré E_k^0 défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_k^0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0$$

et la structure d'algèbre de Lie d'isotropie de E_k^0 est ce qu'on appelle la structure déduite de la structure d'algèbre de Lie des fibres de $N_1 \simeq \mathcal{G}(\Phi)$

(voir Y. Matsushima, Algèbres de Lie linéaires semi-involutives, ou W. Guillemin et S. Sternberg, Transitive differential geometry). Et évidemment pour tout $q \leqslant k$, nous avons

$$\Phi_k \xrightarrow{\rho_q} \Phi_q \longrightarrow 1.$$

On peut démontrer de plus que E_k est un espace fibré vectoriel associé au groupoïde de Lie Φ_{k+1}.

Dans IV.2, nous avons défini un morphisme

$$\tau : \quad J_k(T) \wedge J_k(T) \longrightarrow J_{k-1}(T).$$

Il est immédiat de constater que nous avons

$$\tau : \quad E_k \wedge E_k \longrightarrow E_{k-1}.$$

Ce morphisme considéré comme une section de $E_{k-1} \otimes \wedge^2 E_k^*$ est alors laissé invariant par le groupoïde de prolongement holonome Φ_{k+1}, qui opère de façon évidente d'après ce qui précède sur l'espace fibré considéré. Ce morphisme τ est donc un invariant d'ordre $k+1$ de la structure ; et c'est cet invariant que considèrent W. Guillemin et S. Sternberg dans le travail cité.

Si la structure infinitésimale S est de type $p-1$, nous avons

$$0 \longrightarrow E_p \xrightarrow{\rho_{p-1}} E_{p-1} \longrightarrow 0.$$

En identifiant E_{p-1} avec E_p, le morphisme

$$\tau : \quad E_{p-1} \wedge E_{p-1} \longrightarrow E_{p-1}$$

définit une structure d'algèbre de Lie sur chacune des fibres de E_{p-1}. De fait les considérations précédentes montrent que E_{p-1}, muni de cette structure d'algèbre de Lie définie sur chacune de ses fibres, est un espace fibré en algèbres de Lie associée au groupoïde de Lie de prolongement holonome Φ_p. Et on peut démontrer que cette structure d'algèbre de Lie n'est autre que la structure d'algèbre de Lie de Θ_x, l'espace des germes en x du faisceau de R-algèbre de Lie Θ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Bernard, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier*, 10 (1960).

[2] C. Chevalley, Theory of Lie groups, *Princ. Univ. Press* (1948).

[3] C. Ehresmann, *a*) Prolongement d'une variété différentiable, C.R.A.S., Paris (1951-52).
b) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. géom. diff. Strasbourg* (1953).
c) Structures locales, *Ann. Math. Pura Appl.*, 36 (1954).
d) Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti del V cong. dell'Un. Math. Italia*, Torino (1956).

[4] W. Guillemin et S. Sternberg, Transitive differential geometry, *Bull. of the A.M.S.* 70 (1964).

[5] R. Godement, Théorie des faisceaux, Hermann Paris (1958).

[6] J. L. Koszul, On fibre bundles and differential geometry, *Tata Inst. Bombay* (1960).

[7] P. Libermann, *a*) Pseudogroupes infinitésimaux, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959).
b) Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels, *Ann. Inst. Fourier* (1964).

[8] A. Lichnerowicz, *a*) Théorie des connexions et des groupes d'holonomie. Ed. Cremonese Roma (1955).
b) Géométrie des groupes de transformation, Dunod Paris (1958).

[9] Y. Matsushima, *a*) Pseudogroups de Lie transitifs, *Sem. Bourbaki* (1955).
b) Sur les algèbres de Lie linéaires semi-involutives. Coll. de topologie Strasbourg (1954).

[10] R. Palais, *a*) A global formulation of the Lie theory of transformation groups, *Memoir A.M.S.* (1957).
b) Differential operators on vector bundles Sem. on the Atiyah-Siger index theorem, *Princ. Univ. Press Study* 57 (1965).

[11] N. V. Que, *a*) Prolongement des groupoides de Lie, *C.R.A.S. Paris* (1963).
b) De la connexion d'ordre supérieur, *C.R.A.S. Paris* (1964).

[12] D. G. Quillen, Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations, (*Thèse Havard*, 1964).

[13] A. M. Rodriguès, The first and the second fundamental theorems of Lie for Lie pseudogroups, *Am. Journ. of Math.* 84 (1962).

[14] D. C. Spencer, Deformation of structures defined by transitive continuous pseudogroups, *Ann. of Math.* 76 (1962).

[15] N. Steenrod, The topology of fibre bundles, *Princ. Univ. Press* (1951).

[16] R. Thom, Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. de la Soc. Math. Mexicana* 2nd Series (1956).

Manuscrit reçu le 12 janvier 1967.

Ngô Van Que,
Department of Mathematics,
Stanford University,
Stanford, California (U.S.A.)