ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean BOURGAIN & Jean-Pierre KAHANE

Sur les séries de Fourier des fonctions continues unimodulaires

Tome 60, nº 4 (2010), p. 1201-1214.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2010__60_4_1201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
60, 4 (2010) 1201-1214

SUR LES SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES UNIMODULAIRES

par Jean BOURGAIN & Jean-Pierre KAHANE

Résumé. — Les applications continues du cercle T dans T ont des séries de Fourier intéressantes : le théorème établi ici dit que si les coefficients de Fourier $a(n)$ sont de carré sommable avec certains poids pour $n > 0$, il en est de même pour $n < 0$. C'est encore vrai pour VMO, mais faux pour les applications mesurables bornées.

Abstract. — The Fourier series of continuous functions of constant absolute value have interesting properties : according to the main theorem of the article, if the coefficients with positive indices are square-summable with respect to a certain weight (any real positive power of the index), the same is true for negative indices. The result extends to VMO and does not to bounded measurable functions.

Haim Brézis a découvert une formule intéressante qui donne le degré topologique d'une fonction continue unimodulaire en fonction de ses coefficients de Fourier ; à savoir

$$\deg f = \sum_{-\infty}^{\infty} n|a_n|^2 \tag{1}$$

sous les hypothèses ($\sim$ se lit « a pour série de Fourier »)

$$f(e^{it}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\mathrm{int}}, \quad f \in C(S^1, S^1), \tag{2}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|a_n|^2 < \infty. \tag{3}$$ [2]

Rappelons que $\deg f = k$ quand $f(z) = z^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) et que $\deg f = \deg g$ quand f et g sont homotopes dans $C(S^1, S^1)$. L'hypothèse (3) signifie $f \in$

Mots-clés : séries de Fourier, fonctions continues, degré topologique, BMO, VMO.
Classification math. : 42A16, 30D50.

$H^{1/2}(S^1, S^1)$. À partir de là, Brézis a posé la question : est-il vrai que (2) entraîne toujours

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|a_n|^2 \leqslant |\deg f| + \sum_{0}^{\infty} n|a_n|^2 \quad ? \tag{4}$$

De façon équivalente, est-il vrai que sous l'hypothèse (2) on ait l'implication

$$\sum_{0}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|a_n|^2 < \infty \ ? \qquad [3] \tag{5}$$

Cette simple question montre bien que l'analyse harmonique des fonctions unimodulaires est un sujet riche et peut révéler des phénomènes nouveaux et intéressants.

Nous allons élargir la question et y répondre positivement.

Théorème 1. — *Soit* $0 < s < 1$. *Sous l'hypothèse* (2) *on a l'implication*

$$\sum_{0}^{\infty} n^{2s}|a_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2s}|a_n|^2 < \infty. \tag{6}$$

Le membre de droite signifie $f \in H^s(S^1, S^1)$. Quitte à décaler les coefficients, nous supposerons $\deg f = 0$ et nous montrerons que l'hypothèse

$$\sum_{0}^{\infty} n^{2s}|a_n|^2 \leqslant C < \infty \tag{7}$$

entraîne

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2s}|a_n|^2 \leqslant C'(f) < \infty\,. \tag{8}$$

Brézis et Nirenberg ont étendu la notion de degré topologique aux fonctions de la classe VMO, c'est-à-dire limites de fonctions continues dans la norme de BMO (voir [2]). Rappelons la définition :

(9)
$$\| g \|_{BMO(S^1,S^1)} = \sup_{t\in\mathbb{R},\, s>0} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} \Big| g(e^{i(t+u)}) - \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} g(e^{i(t+u')}du'\Big| du.$$

On peut ainsi étendre le théorème 1.

Théorème 2. — *Soit toujours* $0 < s < 1$. *L'implication (6) est valable sous l'hypothèse*

$$f(e^{it}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\mathrm{int}},\ \ f \in VMO(S^1, S^1)\,. \tag{10}$$

Avant de passer aux démonstrations, examinons deux questions :

Q1. Peut-on, dans les hypothèses du théorème 1, remplacer $f \in C(S^1, S^1)$ par $f \in L^\infty(S^1, S^1)$?

Q2. Peut-on, pour obtenir l'implication (7)$\Longrightarrow$(8), remplacer $f \in C(S^1,S^1)$ ou $f \in VMO(S^1, S^1)$ par une hypothèse du type $f \in H^{s'}(S^1, S^1)$?

Les réponses sont négatives (en ce qui concerne Q2, pour $s' < \frac{1}{2}$) et fondées sur les produits de Blaschke.

R1. Soit $g(z)$ un produit de Blaschke tel que $g(0) = 0$. Posons $f(e^{it}) = g(e^{-it})$. Alors $f \in L^\infty(S^1, S^1)$ et le premier membre de (7) est nul. Montrons maintenant qu'on peut choisir g de sorte que $g(e^{it})$ n'appartienne à aucun espace H^s $(s > 0)$; cela achèvera la preuve que la réponse à la question Q1 est négative. Plus généralement, montrons qu'étant donné une suite positive $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, il existe un produit de Blaschke $B(z) = \sum\limits_0^\infty b_n z^n$ tel que $\sum\limits_0^\infty |b_n|^2 \omega_n = \infty$. En effet, partons d'un produit de Blaschke infini que nous écrivons $\prod\limits_1^\infty B_j(z)$, où les $B_j(z)$ sont des produits de Blaschke finis. Il existe alors une suite d'entiers ν_j tendant vers l'infini telle que $B(z) = \prod\limits_1^\infty B_j(z^{\nu_j})$ ait la propriété voulue. Pour la construire, imposons la condition que ν_j divise ν_{j+1} $(i = 1, 2, \ldots)$. Les sommes partielles d'ordre ν_{k+1} des séries de Taylor de $B(z)$ et de $C_k(z) = \prod\limits_1^k B_j(z^{\nu_j})$ sont les mêmes à un facteur multiplicatif près qui tend vers 1 quand $k \to \infty$. Appelons norme d'un produit de Blaschke et notons $\|\ \|$ la norme de la suite de ses coefficients de Taylor dans $\ell^2(\mathbb{N}, \omega)$. Pour avoir la propriété voulue, à savoir $\|B\| = \infty$, il suffit que les normes des sommes partielles d'ordre ν_{k+1} des C_k tendent vers l'infini $(k \to \infty)$; il suffit que $\|C_k\| \to \infty$ (réalisable si les ν_k croissent assez vite) et que les ν_{k+1} croissent assez vite (conditions réalisables par induction).

R2. Revenons au produit de Blaschke $g(z)$ et prenons $f(e^{it}) = e^{-it}g(e^{-it})$. Si $f \in VMO(S^1, S^1)$ et en particulier si $f \in H^{1/2}(S^1, S^1)$, le degré topologique de g est fini, donc $g(z)$ est une fraction rationnelle. Prenons maintenant pour $g(z)$ un produit de Blaschke qui n'est pas une fraction rationnelle et dont les coefficients de Taylor sont $O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$ (Newman et Shapiro 1962 [2]) ; alors $f \in H^{s'}(S^1, S^1)$ pour tout $s' < \frac{1}{2}$, on peut prendre $C = 0$ dans (7) et le premier membre de (8) est infini pour $s \geqslant \frac{1}{2}$. La réponse à Q2 est donc négative quand $s' < \frac{1}{2}$. Quand $s' > \frac{1}{2}$ on est ramené à

$f \in C(S^1, S^1)$ et pour $s' = \frac{1}{2}$ au cas étudié par Brézis, donc la réponse est positive.

Le referee s'est demandé où intervient l'hypothèse $s < 1$ dans la démonstration du théorème 1. Nous répondons à cette question dans la phrase suivant (46). Mais cela suggère une nouvelle question :

Q3. = Peut-on étendre les théorèmes 1 et 2 en remplaçant l'hypothèse $0 < s < 1$ par $s > 0$?

Nous verrons à la fin de l'article que la réponse est positive : c'est le théorème 3.

La preuve du théorème 1 se fera en trois temps : $s = \frac{1}{2}$ (solution de la question de Brézis), $s > \frac{1}{2}$ et $s < \frac{1}{2}$. La preuve du théorème 2 en sera une adaptation.

Remarque. — On peut se poser la question si l'inégalité (8) reste valable avec $C'(C)$ (en supposant $\deg f = 0$) comme c'est le cas pour $s = \frac{1}{2}$. La réponse est négative comme le montre l'exemple suivant. Posons, pour $0 < a < 1$ et $k \in \mathbb{Z}_+$

$$f(e^{it}) = e^{-ikt} \frac{a - e^{ikt}}{1 - ae^{ikt}} = \frac{1}{a} e^{-ikt} - (1 - a^2) \sum_{j \geqslant -1} a^j e^{ijkt}.$$

Alors $\deg f = 0$.

Laissons $a \to 1$. Pour $0 < s < \frac{1}{2}$, la norme H^s du second terme est de l'ordre de $(1-a)^{\frac{1}{2}-s} k^s \to 0$ pour k fixé (donc C est arbitrairement petite) tandis que (8) $\sim k^{2s}$. Pour $s > \frac{1}{2}$, posons $k = 1$ et considérons la fonction $\overline{f(e^{it})}$. Alors $C \sim 1$ dans (7) et $C' \sim \left(\frac{1}{1-a}\right)^{2s-1}$ dans (8). Par contre, en supposant que $\|f\|_{BMO}$ est suffisamment petite, on a bien $C' = C'(C)$, comme on le montrera dans la preuve du Théorème 2.

Démonstration du théorème 1.

Cas $s = \frac{1}{2}$. Nous nous proposons d'établir (8) à partir de (2), (7) et $\deg f = 0$.

Soit $K_\varepsilon (\varepsilon \downarrow 0)$ une suite de noyaux régularisants et

$$h_\varepsilon = f * K_\varepsilon \tag{11}$$

au sens

$$h_\varepsilon(e^{it}) = \int f(e^{i(t-s)}) K_\varepsilon(e^{is}) ds$$

en écrivant, ici comme dans la suite, $\int$ à la place de $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}$. Posons

$$h_\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\varphi_\varepsilon}, \quad 0 \leqslant \rho_\varepsilon < 1. \tag{12}$$

Quand $\varepsilon \to 0$, les normes $\| f - h_\varepsilon \|_\infty$, $\| 1 - \rho_\varepsilon \|_\infty$ et $\| e^{i\varphi_\varepsilon} - f \|_\infty$ tendent vers 0. Donc, pour ε assez petit,

$$\deg e^{i\varphi_\varepsilon} = 0. \tag{13}$$

Considérons maintenant la fonction anti–analytique

$$R_\varepsilon = \exp(-\log \rho_\varepsilon + i\mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon)), \tag{14}$$

où $\mathcal{H}$ est la transformation de Hilbert et posons

$$H_\varepsilon = h_\varepsilon R_\varepsilon = \exp(i\varphi_\varepsilon + i\mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon)). \tag{15}$$

Comme les K_ε sont régularisants, $H_\varepsilon \in C^\infty(S^1, S^1)$.

La transformation de Hilbert applique L^∞ dans BMO et on sait que dans $VMO(S^1, S^1)$ le degré est une fonction continue en norme BMO([3], ou [1], theorem 1). D'où

$$\begin{aligned} \| \exp(i\mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon)) \|_{BMO} &\leqslant \| \mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon) \|_{BMO} \\ &\leqslant \| \log \rho_\varepsilon \|_\infty = o(1) \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned} \tag{16}$$

donc

$$\deg \exp(i\,\mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon)) = 0 \tag{17}$$

quand ε est assez petit. Compte-tenu de (13) et (15), cela donne

$$\deg H_\varepsilon = 0. \tag{18}$$

On peut alors appliquer la formule de Brézis (1), avec H_ε au lieu de f, ce qui donne

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 = 2\sum_{0}^{\infty} n|\hat{H}_\varepsilon(n)|^2. \tag{19}$$

Estimons le second membre de (19). Pour $I \subset \mathbb{Z}$, posons

$$(P_I F)^\wedge = \hat{F} 1_I. \tag{20}$$

Comme R_ε est anti–analytique, on a d'après (15)

$$P_{[2^{k-1},2^k]}(H_\varepsilon) = P_{[2^{k-1},2^k]}(R_\varepsilon P_{[2^{k-1},\infty[}(h_\varepsilon)). \tag{21}$$

Prenons les normes dans L^2 :

$$\begin{aligned}\|P_{[2^{k-1},2^k]}(H_\varepsilon)\,\|_2 &\leqslant \|R_\varepsilon P_{[2^{k-1},\infty[}(h_\varepsilon)\|_2\\ &\leqslant \|\frac{1}{\rho_\varepsilon}\|_\infty \|P_{[2^{k-1},\infty[}(h_\varepsilon)\|_2\\ &\leqslant 2\|P_{[2^{k-1},\infty[}(f)\|_2\\ &= 2\Big(\sum_{n\geqslant 2^{k-1}}|a_n|^2\Big)^{1/2}\end{aligned} \tag{22}$$

(on a supposé, ce qui est permis, $\int K_\varepsilon = 1$ ou proche de 1). Comme

$$\sum_0^\infty n|\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 0} 2^k \|P_{[2^{k-1},2^k]}(H_\varepsilon)\|_2^2,$$

(22) donne

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty n|\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 &\leqslant \sum_{k\geqslant 0} 2^{k+2} \sum_{n\geqslant 2^{k-1}} |a_n|^2\\ &\leqslant 16 \sum_{n\geqslant 0} n|a_n|^2\\ &\leqslant 16\ C\end{aligned} \tag{23}$$

d'après l'hypothèse (7). En vertu de (19), nous avons la borne uniforme en ε (pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ assez petit pour avoir (17) donc (18))

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\ |\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 \leqslant 32\ C\,. \tag{24}$$

Comme

$$\|f - H_\varepsilon\|_2 \leqslant \|f - e^{i\varphi_\varepsilon}\|_2 + \|\mathcal{H}(\log\rho_\varepsilon)\|_2$$

d'après la définition de H_ε en (15) et que le second membre tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, on obtient à partir de (24)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\ |a_n|^2 \leqslant 32\ C, \tag{25}$$

la conclusion souhaitée en (8), avec $C' = 32\ C$.

Cas $s > \frac{1}{2}$.

Soit $g_s(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ une fonction continue paire portée par l'intervalle $[-2,2]$, positive et de classe C^2 sur l'intervalle ouvert $]-2,2[$ et égale à

$(2-|x|)^{2s}$ quand $1 \leqslant |x| \leqslant 2$. Posons

$$K_{N,s}(t) = \sum_n g_s\Big(\frac{n}{N}\Big)e^{\mathrm{int}}. \tag{26}$$

LEMME. — *On a*

$$|K_{N,s}(t)| \leqslant cN(1 \wedge (N\|t\|)^{-1-2s}) \tag{27}$$

avec $c = c_s$ *et* $\|t\| = \mathrm{dist}(t, 2\pi\mathbb{Z})$.

Démonstration. — On vérifie en intégrant par parties deux fois que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixu} g_s(x)dx \leqslant c(1 \wedge |u|^{-1-2s})$$

où c ne dépend que de s et de la ligne écrite, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixu} g_s\big(\frac{x}{N}\big)dx \leqslant cN(1 \wedge |Nu|^{-1-2s})$$

et la formule de Poisson donne (27). □

On pose

$$\Delta_{N,s}(n) = N^{2s} g\Big(\frac{n}{N} - 2\Big). \tag{28}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\Delta_{N,s}(n) = n^{2s} \quad \text{quand } 0 \leqslant n \leqslant N \\ &\Delta_{N,s}(n) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } n. \end{aligned} \tag{29}$$

$$\sum \Delta_{N,s}(n) e^{\mathrm{int}} = N^{2s} e^{2iNt} K_{N,s}(t). \tag{30}$$

Nous allons calculer et comparer

$$\begin{cases} I_N = \sum(\Delta_{N,s}(n) + \Delta_{N,s}(-n))|a_n|^2 \\ J_N = \sum(\Delta_{N,s}(n) - \Delta_{N,s}(-n))|a_n|^2. \end{cases} \tag{31}$$

De nouveau nous supposons (2), (7) et $\deg f = 0$ et nous nous proposons d'établir (8). Comme $\deg f = 0$, nous pouvons écrire

$$f(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}\,, \quad \varphi \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})\,. \tag{32}$$

$$a_n = \int e^{i\varphi(t)} e^{-\mathrm{int}} dt \tag{33}$$

et

$$|a_n|^2 = \iint e^{i(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))} e^{-in(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \tag{34}$$

puis, suivant (30)

(35)
$$\sum \Delta_{n,s}(n)|a_n|^2 = \iint e^{i(\varphi(t_1)-\varphi(t_2))} N^{2s} e^{-2iN(t_1-t_2)} K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2$$
$$\sum \Delta_{n,s}(-n)|a_n|^2 = \iint e^{i(\varphi(t_1)-\varphi(t_2))} N^{2s} e^{-2iN(t_1-t_2)} K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2$$

et, suivant (31), en observant que I_N et J_N sont réelles,

(36)
$$\begin{cases} I_N = 2\iint \cos(\varphi(t_1)-\varphi(t_2))N^{2s}\cos\ 2N(t_1-t_2)K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2 \\ J_N = 2\iint \sin(\varphi(t_1)-\varphi(t_2))N^{2s}\sin\ 2N(t_1-t_2)K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2. \end{cases}$$

Désormais seul J_N nous importe. Comme la valeur moyenne de $\sin 2Nt\, K_{N,s}(t)$ est nulle, on peut écrire

$$(37)\qquad \begin{aligned} J_N = 2\iint &(\sin(\varphi(t_1)-\varphi(t_2)) - (\varphi(t_1)-\varphi(t_2)))N^{2s} \\ &\sin\ 2N(t_1-t_2)K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2 \end{aligned}$$

d'où

$$(38)\qquad |J_N| \leqslant \iint |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3 N^{2s} K_{N,s}(t_1-t_2)dt_1dt_2$$

et, tenant compte de (27),

$$(39)\qquad |J_N| \leqslant c\iint |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3 (N^{1+2s}\wedge \|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2.$$

L'hypothèse (7), compte tenu de (29), donne

$$(40)\qquad \sum \Delta_{N,s}(n)|a_n|^2 \leqslant C$$

soit, dans la notation (31), $I_N + J_N \leqslant 2C$ et

$$(41)\qquad \sum_{|n|\leqslant N} |n|^{2s}|a_n|^2 \leqslant I_N \leqslant |J_N| + 2C\,.$$

Il s'agit de montrer que $\sup\limits_N |J_N|$ est fini.

Pour utiliser (39) et (41), nous allons, enfin, utiliser l'hypothèse $s > \frac{1}{2}$. Jointe à (4), cela entraîne $\sum |n|\,|a_n|^2 < \infty$, soit

$$(42)\qquad \sum_k 2^k s_k^2 < \infty\,,\quad s_k^2 = \sum_{2^k\leqslant |n| < 2^{k+1}} |a_n|^2.$$

Prenons $N = 2^{j+1}$ tel que

$$(43)\qquad 2^j s_j^2 = \max_{k\geqslant j} 2^k s_k^2.$$

Alors

$$\sum_{|n|\geqslant N}|a_n|^2=\sum_{k>j}s_k^2\leqslant s_j^2=\sum_{\frac{N}{2}\leqslant|n|<N}|a_n|^2 \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(|n|\wedge N\big)^{2s}|a_n|^2&\leqslant\sum_{|n|<N}|n|^{2s}|a_n|^2+N^{2s}\sum_{\frac{N}{2}\leqslant|n|<N}|a_n|^2\\&\leqslant(1+2^{2s})\sum_{|n|\leqslant N}|n|^{2s}|a_n|^2.\end{aligned} \tag{45}$$

Dans ce qui suit écrivons $c'(\mathrm{resp}\,C')$ pour un nombre >0 qui pourra dépendre de s $(\mathrm{resp}\,C,s,f)$ et de la ligne écrite, mais non de N. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|n|\wedge N)^{2s}|a_n|^2\geqslant c'\iint|f(e^{it_1})-f(e^{it_2})|^2&\\(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2&\end{aligned} \tag{46}$$

où c' est une constante absolue comme le montre un calcul du second membre en fonction des a_n (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $s<1$) et, d'après (39), (41) et (45),

$$\begin{aligned}&\iint|f(e^{it_1})-f(e^{it_2})|^2(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2\\&\qquad\leqslant C'+c'\iint|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2.\end{aligned} \tag{47}$$

Comme $\varphi\in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\mathbb{R})$, il existe pour tout $\beta>0$ donné un $\alpha=\alpha(\varphi,\beta)>0$ tel que $\|t_1-t_2\|<\alpha$ entraîne $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<\beta$, et

$$|f(e^{it_1})-f(e^{it_2})|=|e^{i\varphi(t_1)}-e^{i\varphi(t_2)}|\simeq|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|.$$

Alors

$$\begin{aligned}&\iint|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2\\&=\iint_{\|t_1-t_2\|\geqslant\alpha}+\iint_{\|t_1-t_2\|<\alpha}\leqslant c'\alpha^{-2s}\|\varphi\|_\infty^3+c'\beta\iint|f(e^{it_1})\\&\quad-f(e^{it_2})|^2(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2.\end{aligned} \tag{48}$$

En choisissant β assez petit, on obtient d'après (47) et (48)

$$\iint|f(e^{it_1})-f(e^{it_2})|^2(N^{1+2s}\wedge\|t_1-t_2\|^{-1-2s})dt_1dt_2<C' \tag{49}$$

et C' ne dépend pas de N, d'où résulte $f\in H^s(S^1,S^1)$, c'est-à-dire (8). $\square$

Cas $s < \frac{1}{2}$.

Ici tout ce qui suit (41) est en défaut. Mais tout ce qui va de (26) à (41) est valable, à commencer par le lemme et la formule (27), qui s'établit ici avec une seule intégration par parties. Nous allons utiliser ces formules en remplaçant f par la fonction H_ε définie en (15).

Auparavant, quitte à changer C dans (7), nous nous ramenons au cas où l'argument de f est proche de 0,

$$|\arg f| < \delta_0 \tag{50}$$

(δ_0 sera fixé plus tard et dépendra seulement de la constante $c = c_0$ figurant en (39)) ; il suffit pour cela de multiplier la fonction f donnée par une fonction $\in C^\infty(S^1, S^1)$ convenable. Il en résulte, dans les notations (11) et (12), que

$$|\varphi_\varepsilon| < \delta_0 \tag{51}$$

(en se restreignant aux noyaux de convolution K_ε de moyenne 1). Écrivons, suivant (15),

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= e^{i\varphi} \\ \varphi &= \varphi_\varepsilon + \mathcal{H}(\log \rho_\varepsilon) \end{aligned} \tag{52}$$

(c'est la nouvelle signification de φ). D'après (16) et (51), on peut choisir ε assez petit pour que

$$\|\varphi\|_{BMO} < \delta_0\,. \tag{53}$$

De nouveau nous avons $H_\varepsilon \in C^\infty(S^1, S^1)$. Nous allons d'abord établir l'analogue de (7) pour H_ε, à savoir

$$\sum_0^\infty n^{2s} |\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 < C\,, \tag{54}$$

C désignant ici et à partir de maintenant un nombre $C(f, s)$ dépendant de f et de s, mais non de ε. Il suffit de reprendre les calculs de (20) à (23), en écrivant ici

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty n^{2s} |\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 &\leqslant \sum_{k \geqslant 0} 4^{ks} \|P_{[2^{k-1}, 2^k]}(H_\varepsilon)\|_2^2 \\ &\leqslant \sum_{k \leqslant 0} 4^{ks+1} \sum_{n \geqslant 2^{k-1}} |a_n|^2 \\ &\leqslant 4^{s+1}(1 - 4^{-s})^{-1} \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 \end{aligned} \tag{55}$$

qui est bien de la forme (54).

Partant de (52), suivons les notations et les calculs de (26) à (41), en remplaçant a_n par $\hat{H}_\varepsilon(n)$. Comme $\varphi \in C^\infty$, (39) et (41) donnent

$$|J| \leqslant c_0 \iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2 \tag{56}$$

puis, en faisant tendre N vers l'infini

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\hat{H}_\varepsilon(n)|^2 \leqslant c_0 \iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2 + 2C \tag{57}$$

C étant le second membre de (54). Le premier membre de (57) est $\|H_\varepsilon\|^2_{H^s}$, qui, à une équivalence numérique près, s'écrit aussi sous forme d'intégrale. L'inégalité

$$|u-v| \leqslant |e^{iu}-e^{iv}| + |u-v|^{3/2} \quad (u,v\in\mathbb{R}) \tag{58}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}&\iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^2}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2\\ &\leqslant \iint \frac{|H_\varepsilon(e^{it_1})-H_\varepsilon(e^{it_2})|^2}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2 + \iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2\end{aligned}$$

d'où, par (57),

$$\iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^2}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2 \leqslant (Ac_0+1) \iint \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|^3}{\|t_1-t_2\|^{1+2s}} dt_1 dt_2 + AC \tag{59}$$

A étant une constante absolue. Les deux membres de (59) s'expriment à l'aide des $P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)$ (définis comme en (20)) et (59) s'écrit

$$\sum_{k\geqslant 0} 4^{ks} \|P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)\|_2^2 \leqslant B(c_0+1) \sum_{k>0} 4^{ks} \|P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)\|_3^3 + BC \tag{60}$$

B étant une constante absolue. Or,

$$\|P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_{BMO} \tag{61}$$

donc, d'après (53)

$$\|P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)\|_3^3 \leqslant \delta_0 \|P_{[2^{k-1},2^k]}(\varphi)\|_2^2. \tag{62}$$

Choisissons au départ $\delta_0 = \frac{1}{2B(c_0+1)}$. Alors, d'après (60) et (62),

$$\|\varphi\|^2_{H^s} \leqslant C = C(f,s) \tag{63}$$

et il en résulte

$$\|H_\varepsilon\|^2_{H^s} \leqslant C = C(f,s) \tag{64}$$

uniformément par rapport à ε et en faisant tendre ε vers 0 on a

$$f \in H^s(S^1, S^1), \tag{65}$$

la conclusion voulue.

Récapitulation et preuve du théorème 2.

La preuve du théorème 1 s'est déroulée en trois étapes et les principaux ingrédients sont apparus dans l'examen des cas $s = \frac{1}{2}$ et $s > \frac{1}{2}$. Ces ingrédients sont utilisés dans le cas $s < \frac{1}{2}$, dont le traitement s'étend immédiatement au cas général $0 < s < 1$. Pour établir le théorème 2, il suffit donc d'adapter la preuve donnée dans ce dernier cas en remplaçant l'hypothèse $f \in C(S^1, S^1)$ par $f \in VMO(S^1, S^1)$.

Seul le début est à changer, jusqu'à la formule (53). Tout ce qui suit (53) est à conserver littéralement.

À la place de (50), nous nous ramenons au cas $\deg f = 0$ et

$$\|f\|_{BMO} < \delta_0\,, \ \|\arg f\|_{BMO} < \delta_0 \tag{66}$$

d'où résulte

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{BMO} < \delta_0. \tag{67}$$

D'après Brézis et Nirenberg [2] on a

$$\|1 - \rho_\varepsilon\|_\infty = o(1) \quad (\varepsilon \to 0)\ ; \tag{68}$$

rappelons la preuve :

$$1 - \Big|\frac{1}{|I|}\int_I f\Big| \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I \Big|f - \frac{1}{|I|}\int f\Big| = o(1) \quad (|I| \to 0) \tag{69}$$

d'après (66), d'où $1 - |h_\varepsilon| = o(1)$ $(\varepsilon \to 0)$, c'est-à-dire (68). (67) et (68) donnent

$$\|\varphi_\varepsilon + \mathcal{H}(\log\rho_\varepsilon)\|_{BMO} < \delta_0 + o(1) \quad (\varepsilon \to 0)\,, \tag{70}$$

ce qui établit (53), d'où la conclusion.

Les auteurs remercient le referee pour sa lecture attentive de l'article et en particulier pour une amélioration qu'il a suggérée, à savoir de ne pas nous limiter au cas $0 < s < 1$, mais de traiter le cas $s > 0$.

Réponse à la question Q3, extension au cas $s \geqslant 1$.

Théorème 3. — *Les théorèmes 1 et 2 sont valables en remplaçant* $0 < s < 1$ *par* $s > 0$.

Démonstration. — Soit $s \geqslant 1$, $f \in VMO(S^1, S^1)$ et $Pf \in H^s(S^1, \mathbb{C})$, où $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ et $Pf = \sum_0^{\infty} a_n z^n$. Nous savons déjà que $f \in H^{s'}(S^1, S^1)$ pour tout $s' < 1$, donc $f = e^{i\varphi}$ où $\varphi \in H^{s'}(S^1, \mathbb{R})$ [1]. Quitte à multiplier f par une fonction de classe C^∞ comme nous l'avons fait dans l'étude du cas $s < 1/2$, on peut supposer $\|\varphi\|_{H^{s'}} < \delta < \frac{1}{10}$. Écrivons $\|\varphi\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n|^2 |n|^{2s'}\right)^{1/2}$. Alors

$$f = 1 + i\varphi + h,\ \|h\| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{6}\|\varphi\|^3 + \cdots \leqslant \delta\|\varphi\|$$
$$Pf = 1 + i\,P\varphi + Ph,\ \|Ph\| \leqslant \|h\| \leqslant \delta\|\varphi\|$$

et comme φ est réelle, $\|P\varphi\|^2 = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2$. Donc

$$\|f\| \leqslant \|\varphi\|(1+\delta),$$
$$\|Pf\| \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi\| - \delta\|\varphi\|,$$
$$\|f\| \leqslant \|Pf\| \frac{1+\delta}{\frac{1}{2}-\delta} \leqslant 3\|Pf\|. \tag{71}$$

Sous la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2s'} |a_n|^2 \leqslant 3 \sum_0^{\infty} n^{2s'} |a_n|^2,$$

il est clair que (71) s'étend à toutes les valeurs de s' pour lesquelles le second membre est fini. Comme c'est le cas pour $s' = s$ par hypothèse, on a bien $f \in H^s(S^1, S^1)$ et, comme cela est conservé par multiplication par une fonction appartenant à $C^\infty(S^1, S^1)$, le théorème est établi. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bourgain, H. Brézis & P. Mironescu, « Lifting in Sobolev spaces », *J. Anal. Math.* **80** (2000), p. 37-86.

[2] H. Brézis & L. Nirenberg, « Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries », *Selecta Math. (N.S.)* **1** (1995), n° 2, p. 197-263.

[3] H. Brézis, 2008, Communication orale au colloque NODE, Bruxelles.

Manuscrit reçu le 26 mars 2009,
accepté le 24 avril 2009.

Jean BOURGAIN
Institute of Advanced Study
Princeton, NJ, (USA)
bourgain@math.ias.edu

Jean-Pierre KAHANE
Université Paris–Sud
Laboratoire de Mathématiques
91405 Orsay Cedex (France)
jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr