ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Michel GROS & Masaharu KANEDA

Contraction par Frobenius de G-modules

Tome 61, nº 6 (2011), p. 2507-2542.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2011__61_6_2507_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
61, 6 (2011) 2507-2542

CONTRACTION PAR FROBENIUS DE G-MODULES

par Michel GROS & Masaharu KANEDA (*)

À Henning Haahr Andersen, pour ses 60 ans, en témoignage de respect et d'admiration

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe défini sur un corps algébriquement clos $\Bbbk$ de caractéristique positive. Nous donnons une nouvelle preuve de l'existence d'un scindage de Frobenius de la variété des drapeaux de G ainsi que de la nature G-équivariante de celui-ci. L'outil principal est un scindage de l'endomorphisme de Frobenius défini sur toute l'algèbre des distributions de G qui permet de "détordre" la structure des G-modules.

ABSTRACT. — Let G be a simply connected semisimple algebraic group over an algebraically closed field $\Bbbk$ of positive characteristic. We will give a new proof of the Frobenius splitting of the flag variety of G and of its G-equivariant nature. The key tool is a newly found splitting of the Frobenius endomorphism on the algebra of distributions of G allowing us to "untwist" the structure of G-modules.

Introduction

Soient $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, $B_\Bbbk$ un sous-groupe de Borel d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe $G_\Bbbk$ et $G_\Bbbk/B_\Bbbk$ la variété des drapeaux. Par des méthodes géométriques, Mehta et Ramanathan ont établi dans [21] l'existence d'un scindage de Frobenius de cette variété et en ont dégagé plusieurs corollaires importants. Ultérieurement, Kumar et Littelmann ont proposé [13, 14] une autre approche de ce résultat et de ses raffinements, plus algébrique, utilisant des techniques provenant de la théorie des représentations. Un outil clef intervenant dans leur construction est l'utilisation de groupes quantiques spécialisés en une racine de l'unité, du morphisme de Frobenius attaché à

Mots-clés : scindage de Frobenius, variété des drapeaux, variété de Schubert, algèbre des distributions.
Classification math. : 14M15, 13A35, 17B10, 20G05, 20G10.
(*) supported in part by JSPS Grant in Aid for Scientific Research.

ce contexte [17], et d'un inverse "partiel" (étendant celui déjà considéré par Lusztig sur la partie nilpotente [18]) qu'ils définissent. Nous nous proposons dans cet article de simplifier leurs arguments en éliminant le recours aux groupes quantiques et en travaillant directement sur l'algèbre des distributions $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$ de $G_\Bbbk$.

Notre approche repose sur la considération d'une certaine contraction par Frobenius que nous allons brièvement esquisser. Soit M un $G_\Bbbk$-module ; l'action de $G_\Bbbk$ via le Frobenius fournit sur M une nouvelle structure de $G_\Bbbk$-module que nous noterons $M^{[1]}$. Si, de plus, le noyau de Frobenius de $G_\Bbbk$ agit trivialement sur M, M admet alors une autre structure de $G_\Bbbk$-module notée $M^{[-1]}$ telle que si on lui applique le twist de Frobenius précédent $(M^{[-1]})^{[1]}$, on retrouve M. En utilisant une généralisation du scindage de Frobenius sur $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$ décrit dans [5], on peut "détwister" l'action de Frobenius de n'importe quel $G_\Bbbk$-module. Plus précisément, il existe une mesure invariante idempotente μ_0 dans l'algèbre des distributions du noyau de Frobenius d'un tore maximal $T_\Bbbk$ de $G_\Bbbk$ et un homomorphisme d'algèbres ϕ de $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$ vers une "sous-algèbre" de $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$ dont l'unité est μ_0 qui scinde l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$. Si Λ désigne le groupe des poids de T et M_λ, $\lambda \in \Lambda$, le sous-espace de poids λ de M, alors $\mu_0 M = \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_{p\lambda}$, et cela munit donc ce dernier d'une $G_\Bbbk$-action via ϕ, que nous noterons M^ϕ, telle que l'on ait $(M^{[1]})^\phi \simeq M$. Ainsi M^ϕ est la contraction de M que définissait Littelmann [15] (seulement pour des M d'un certain type) en utilisant le scindage partiel construit par Lusztig du morphisme de Frobenius quantique [18].

Le scindage ϕ sur $\mathrm{Dist}(G_\Bbbk)$ considéré permet finalement de reformuler [14] de manière G-équivariante et par suite de rendre plus naturelle la propriété de $B_\Bbbk$-semi-invariance (nous adoptons ici la terminologie suggérée dans [2, 4.1.5], plutôt que la terminologie "canonique") du scindage de Frobenius de $G_\Bbbk/B_\Bbbk$. Le scindage obtenu est également $B_\Bbbk^+$-semi-invariant (mais ne peut être rendu $G_\Bbbk$-équivariant). Nos arguments sont une variante modulaire, souvent plus simple, de ceux de [14] et certaines preuves formellement analogues à celles de loc. cit. seront souvent omises. L'existence d'un scindage de Frobenius sur un schéma ayant des corollaires importants (déjà largement dégagés par Mehta, Ramanathan, Ramanan, Mathieu,...), nous espérons que cette reformulation méritait d'être faite.

Dans le premier paragraphe, nous définissons le scindage de Frobenius ϕ sous des hypothèses très générales (le cas des "petites" caractéristiques nécessitant un peu de travail), puis dans les deux suivants, comment ce dernier permet de réinterpréter sans restriction sur la caractéristique les constructions de [15] et de [14]. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous expliquons comment faisceautiser ces constructions et comment elles permettent également de vérifier que les sous-schémas de Schubert sont scindés de manière compatible.

Le présent travail s'est développé pendant la visite du second auteur à l'IRMAR au printemps 2009. Il remercie cet institut pour son hospitalité et son support financier. Nous remercions le/la referee pour sa lecture très attentive et ses commentaires qui nous ont permis de corriger et d'améliorer le texte.

1. Scindage de Frobenius sur $\mathrm{Dist}(G)$

Pour simplifier les notations, nous travaillerons, sauf mention du contraire, sur le corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments. Soit donc G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur $\mathbb{F}_p$, B un sous-groupe de Borel de G, et T un tore maximal de B tous deux scindés sur $\mathbb{F}_p$. Soit $\mathrm{Dist}(G)$ (resp. $\mathrm{Dist}(B)$, $\mathrm{Dist}(T)$) l'algèbre des distributions de G (resp. B, T). Soit Λ le groupe des poids de B, $R \subset \Lambda$ l'ensemble des racines de G relativement à T et R^+ un système positif tel que les racines de B soient négatives ;

$$R^s = \{\alpha_i \mid i \in [1, \ell]\}$$

l'ensemble des racines simples. Pour $\alpha \in R$, nous noterons $\alpha^\vee$ la co-racine de α. Si M est un T-module et si $\lambda \in \Lambda$, M_λ dénotera le sous-espace de poids λ de M.

Soit $Fr : G \to G$ l'endomorphisme de Frobenius de G. Le comorphisme correspondant $Fr^\sharp : \mathbb{F}_p[G] \to \mathbb{F}_p[G]$, donné par $a \mapsto a^p$, induit un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $\mathrm{Dist}(Fr) : \mathrm{Dist}(G) \to \mathrm{Dist}(G)$ via $\mu \mapsto \mu \circ Fr^\sharp$.

Nous allons étendre au cas général la construction du scindage de Frobenius sur $\mathrm{Dist}(G)$ considérée dans [5] pour $G = \mathrm{SL}_2$.

1.1. Rappelons tout d'abord quelques résultats sur les algèbres de distributions. Soit $G_\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$-forme de Chevalley de G. Soit E_i (resp. F_i), $i \in [1, \ell]$, l'élément d'une base de Chevalley de $\mathrm{Lie}(G_\mathbb{Z})$ correspondant à la racine simple α_i (resp. $-\alpha_i$). Posons $H_i = [E_i, F_i]$. Soit aussi $U_\mathbb{Z}$ (resp. $U_\mathbb{Z}^+$) la $\mathbb{Z}$-forme de $U = \mathrm{Ru}(B)$ (resp. son opposée U^+). On a alors ([8, Satz I.7])

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dist}(U_\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[F_i^{(k)} \mid i \in I, k \in \mathbb{N}], \\ (1.1)\qquad &\mathrm{Dist}(U_\mathbb{Z}^+) = \mathbb{Z}[E_i^{(k)} \mid i \in I, k \in \mathbb{N}], \\ &\mathrm{Dist}(G_\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[E_i^{(n)}, F_i^{(n)} \mid i \in [1, \ell], k \in \mathbb{N}]. \end{aligned}$$

Pour vérifier ces égalités, signalons qu'on peut aussi utiliser l'action du groupe de Weyl sur $\mathrm{Dist}(G_{\mathbb{Z}})$. Si $s_i = x_{\alpha_i}(1)x_{-\alpha_i}(-1)x_{\alpha_i}(1)$ (notations comme dans [10, II.1.2]), alors via la représentation adjointe

$$s_iE_j = \begin{cases} E_j & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0, \\ -F_i & \text{si } j = i \\ & \text{(et alors } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 2), \\ E_iE_j - E_jE_i & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -1, \\ E_i^{(2)}E_j - E_iE_jE_i + E_jE_i^{(2)} & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -2, \\ E_i^{(3)}E_j - E_i^{(2)}E_jE_i + E_iE_jE_i^{(2)} - E_jE_i^{(3)} & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -3, \end{cases}$$

et donc aussi, en utilisant l'anti-automorphisme Ω de $\mathrm{Dist}(G_{\mathbb{Z}})$ introduit dans [17, 1.1 (d1)],

$$s_iF_j = \begin{cases} F_j & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0, \\ -E_i & \text{si } j = i \\ & \text{(et alors } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 2), \\ F_jF_i - F_iF_j & \text{si} \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -1, \\ F_jF_i^{(2)} - F_iF_jF_i + F_i^{(2)}F_j & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -2, \\ F_jF_i^{(3)} + F_i^{(2)}F_jF_i - F_iF_jF_i^{(2)} - F_i^{(3)}F_j & \text{si } \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -3. \end{cases}$$

On en déduit alors comme dans [18, 41.1.3] [17, 5.7] que $\mathrm{Dist}(U_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}[F_i^{(k)} \mid i \in I, k \in \mathbb{N}]$ et $\mathrm{Dist}(U_{\mathbb{Z}}^+) = \mathbb{Z}[E_i^{(k)} \mid i \in I, k \in \mathbb{N}]$. Posons $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ (algèbre des polynômes de Laurent à coefficients entiers en une indéterminée v) et soit maintenant $\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{A}$-algèbre enveloppante quantique de G à puissances divisées introduite par Lusztig [17]. La spécialisation $v \mapsto 1$ fournit un isomorphisme d'anneaux

$$\{\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}/(K_i - 1 \mid i \in [1, \ell])\} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Dist}(G_{\mathbb{Z}}) \tag{1.2}$$

tel que l'action $T''_{i,1}$ du groupe de tresses considérée par Lusztig [18, 39.4.4] sur $\mathfrak{U}_{\mathcal{A}}$ (et égale à celle, T_{α_i}, considérée par Jantzen [9, Chap. 8], mais différant par un signe de celle, T_i, considérée par Lusztig [18, 39.4.4] [17, Thm. 3.1], par un signe [12, 2.1]) induise s_i pour tout $i \in [1, \ell]$.

On notera que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Dist}(Fr) : E_i^{(n)} \mapsto \begin{cases} E_i^{(\frac{n}{p})} & \text{si } p|n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$F_i^{(n)} \mapsto \begin{cases} F_i^{(\frac{n}{p})} & \text{si } p|n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\binom{H_i}{n} \mapsto \begin{cases} \binom{H_i}{\frac{n}{p}} & \text{si } p|n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2. Nous allons maintenant définir des scindages de Frobenius sur Dist ($U^{\pm}$). Ils sont induits pour p “assez grand” par ceux introduits par Lusztig [18, 35.1.8, 35.5.2] mais requièrent un travail supplémentaire pour $p = 2$ lorsque G est de type $\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4$ et pour $p = 3$ lorsque G est de type G_2, auxquels cas ils nécessitent d'utiliser les résultats de Lusztig deux fois.

Proposition 1.1. — *Il existe des endomorphismes de $\mathbb{F}_p$-algèbres $'Fr^{\pm}$ de* $\mathrm{Dist}(U^{\pm})$ *tels que $E_i^{(n)} \mapsto E_i^{(np)}$ et $F_i^{(n)} \mapsto F_i^{(np)}$, pour tout $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Si G est simplement connexe, ces endomorphismes sont obtenus à partir de ceux considérés par Lusztig comme indiqué précédemment. Considérons maintenant par exemple le cas $p = 2$ et G est de type B_ℓ avec comme racines simples $1 \Leftarrow 2 - 3 - \cdots - \ell$. Notons comme ci-dessus $U_{\mathcal{A}}^+$ l'algèbre enveloppante quantique sur $\mathcal{A}$ de type B_ℓ. Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/(v^2+1)$ et posons $U_{\mathcal{A}'}^+ = U_{\mathcal{A}}^+ \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$. Posons $d_1 = 1$ et $d_i = 2$, on a alors $d_s\langle \alpha_t, \alpha_s^\vee\rangle = d_t\langle \alpha_s, \alpha_t^\vee\rangle$ pour tous $s,t \in [1,\ell]$). On dispose donc, par suite (cf. [18, Thm. 35.1.8]), d'un homomorphisme de $\mathcal{A}'$-algèbres $U_{\mathcal{A}'}^{*+} \to U_{\mathcal{A}}^+$ tel que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$E_i^{*(n)} \mapsto \begin{cases} E_1^{(n)} & \text{si } i = 1 \\ E_i^{(2n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $U_{\mathcal{A}'}^*$ l'algèbre enveloppante quantique duale sur $\mathcal{A}'$ de type C_ℓ et $U_{\mathcal{A}'}^{*+}$ sa partie positive de générateurs $E_i^{*(n)}$. Il existe également un homomorphisme de $\mathcal{A}'$-algèbres $U_{\mathcal{A}'}^{**+} \to U_{\mathcal{A}}^{*+}$ tel que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$E_i^{**(n)} \mapsto \begin{cases} E_1^{*(2n)} & \text{si } i = 1 \\ E_i^{*(n)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le composé de ces deux homomorphismes est donc un homomorphisme de $\mathcal{A}'$-algèbres $U_{\mathcal{A}'}^{**+} \to U_{\mathcal{A}}^+$ tel que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$, $E_i^{**(n)} \mapsto E_i^{(2n)}$, ce qui donne par changement de base $\mathcal{A}' \to \mathbb{F}_2$ (avec v spécialisé en 1) un homomorphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbres $\mathrm{Dist}(U^+) \to \mathrm{Dist}(U^+)$ tel que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$, $E_i^{(n)} \mapsto E_i^{(2n)}$. De même pour G de type C_ℓ ou F_4 en caractéristique 2, et pour G de type G_2 en caractéristique 3. Finalement, sur $\mathrm{Dist}(U)$ on peut transporter ϕ^+ par l'anti-automorphisme Ω de $\mathrm{Dist}(G)$ ([17, 1.1]). □

Si maintenant, on note $B^+ := U^+T$ le sous-groupe de Borel de G opposé de B, on a :

Corollaire 1.2. — *Les homomorphismes de $\mathbb{F}_p$-algèbres ${}'\!Fr^{\pm}$ s'étendent canoniquement en des homomorphismes de $\mathbb{F}_p$-algèbres*

$$'\!Fr^{\geqslant 0} : \mathrm{Dist}(B^+) \to \mathrm{Dist}(B^+) \qquad \textit{et} \qquad '\!Fr^{\leqslant 0} : \mathrm{Dist}(B) \to \mathrm{Dist}(B),$$

tels que pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{H_i}{n} \mapsto \binom{H_i}{np}.$$

Démonstration. — Il suffit de le vérifier sur $\mathrm{Dist}(B^+)$ (et d'utiliser Ω une nouvelle fois pour conclure). On définit tout d'abord un homomorphisme $\mathbb{F}_p$-linéaire ${}'\!Fr^0 : \mathrm{Dist}(T) \to \mathrm{Dist}(T)$ par $\binom{H_i}{n} \mapsto \binom{H_i}{np}$ pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$. D'après [10, I.7.8.3], on a

$$\begin{aligned}\binom{H_i}{n}\binom{H_i}{m} &= \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \frac{(n+m-k)!}{(n-k)!(m-k)!k!}\binom{H_i}{n+m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \binom{n+m-k}{m}\binom{m}{k}\binom{H_i}{n+m-k}.\end{aligned}$$

Supposons $n \geqslant m$. On a alors

$$\begin{aligned}\binom{H_i}{np}\binom{H_i}{mp} &= \sum_{k=0}^{mp} \binom{np+mp-k}{mp}\binom{mp}{k}\binom{H_i}{np+mp-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{np+mp-kp}{mp}\binom{mp}{kp}\binom{H_i}{np+mp-kp} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m-k}{m}\binom{m}{k}\binom{H_i}{(n+m-k)p},\end{aligned}$$

et donc

$$'\!Fr^0\left(\binom{H_i}{n}\binom{H_i}{m}\right) = {}'\!Fr^0\left(\binom{H_i}{n}\right) {}'\!Fr^0\left(\binom{H_i}{m}\right).$$

Comme $\mathrm{Dist}(T)$ est abélien et admet pour base sur $\mathbb{F}_p$ les $\prod_{i\in[1,\ell]}\binom{H_i}{n_i}$, $n_i\in\mathbb{N}$, il en résulte que $'\!Fr^0$ est bien un endomorphisme de la $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathrm{Dist}(T)$.

On remarque ensuite que la multiplication

$$\mathrm{Dist}(U^+)\otimes\mathrm{Dist}(T)\to\mathrm{Dist}(B^+)$$

est un isomorphisme $\mathbb{F}_p$-linéaire et l'on est donc simplement ramené à vérifier, grâce à (1.1), que la formule de commutation entre les $E_i^{(n)}$ et les $\binom{H_j}{m}$ est préservée par $\phi^+\otimes\phi^0$. Rappelons ([7, Lemma 26.3D] et [16, 4.1(d)]) alors que

$$E_i^{(n)}\binom{H_j}{m}=\binom{H_j-n\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle}{m}E_i^{(n)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{-n\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle}{k}\binom{H_j}{m-k}E_i^{(n)}.$$

et donc

$$\begin{aligned}E_i^{(np)}\binom{H_j}{mp}&=\sum_{k=0}^{mp}\binom{-np\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle}{k}\binom{H_j}{mp-k}E_i^{(np)}\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{-n\langle\alpha_i,\alpha_j^\vee\rangle}{k}\binom{H_j}{(m-k)p}E_i^{(np)},\end{aligned}$$

comme voulu. □

1.3. On va maintenant "recoller" $'\!Fr^{\geqslant 0}$ et $'\!Fr^{\leqslant 0}$ pour définir un endomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres sur tout $\mathrm{Dist}(G)$ (on remarquera que $'\!Fr^+\otimes{}'\!Fr^0\otimes{}'\!Fr^-$ ne convient pas). On introduit pour se faire une mesure invariante sur $\mathrm{Dist}(T_1)$ (avec T_1 le noyau de Frobenius de T) en posant

$$\mu_0=\prod_i\Big(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\binom{H_i}{j}\Big)=\prod_i\binom{H_i-1}{p-1}=\prod_i(1-H_i^{p-1})$$

C'est un idempotent de $\otimes_{i\in[1,\ell]}\{(\mathrm{Dist}(T_{\alpha_i,1})^{T_{\alpha_i,1}}\}=\mathrm{Dist}(T_1)^{T_1}$ qui commute avec tous les $E_i^{(np)}$ et $F_i^{(np)}$, $i\in[1,\ell]$, $n\in\mathbb{N}$ et l'on pose

$$\begin{aligned}\phi^{\leqslant 0}&={}'\!Fr^{\leqslant 0}(?)\mu_0:\mathrm{Dist}(B)\to\mathrm{Dist}(G),\\ \phi^{\geqslant 0}&={}'\!Fr^{\geqslant 0}(?)\mu_0:\mathrm{Dist}(B^+)\to\mathrm{Dist}(G),\\ \phi^-&={}'\!Fr^{\leqslant 0}|_{\mathrm{Dist}(U)}(?)\mu_0:\mathrm{Dist}(U)\to\mathrm{Dist}(G),\\ \phi^+&={}'\!Fr^{\geqslant 0}|_{\mathrm{Dist}(U^+)}(?)\mu_0:\mathrm{Dist}(U^+)\to\mathrm{Dist}(G),\\ \phi^0&={}'\!Fr^{\leqslant 0}|_{\mathrm{Dist}(T)}(?)\mu_0={}'\!Fr^{\geqslant 0}|_{\mathrm{Dist}(T)}(?)\mu_0:\mathrm{Dist}(T)\to\mathrm{Dist}(G).\end{aligned}$$

Comme $'Fr^{\leqslant 0}$ et $'Fr^{\geqslant 0}$ sont toutes deux des applications multiplicatives, les applications $\phi^{\leqq 0}_{\geqq}$, $\phi^{\pm}$ et ϕ^0 le sont aussi. On va voir que l'on peut définir une application $\mathbb{F}_p$-linéaire $\phi : \mathrm{Dist}(G) \to \mathrm{Dist}(G)$ par $FHE \mapsto \phi^-(F)\phi^0(H)\phi^+(E)$ pour tous $F \in \mathrm{Dist}(U), H \in \mathrm{Dist}(T), E \in \mathrm{Dist}(U^+)$.

Théorème 1.3. — *L'application ϕ est multiplicative et induit donc un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $\phi : \mathrm{Dist}(G) \to \mathrm{im}\,\phi$ (avec μ_0 comme unité de $\mathrm{im}\phi$). On a, de plus, $\mathrm{Dist}(Fr) \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Dist}(G)}$.*

Démonstration. — Montrons que pour tous $F' \in \mathrm{Dist}(U)$, $H' \in \mathrm{Dist}(T)$, $E' \in \mathrm{Dist}(U^+)$, on a

$$\phi(FHEF'H'E') = \phi(FHE)\phi(F'H'E').$$

Posons $E_i = X_{\alpha_i}$ et $F_i = X_{-\alpha_i}$ pour tout $\alpha_i \in R^s$. On peut supposer par 1.1 que E (resp. F') est un produit de $E_i^{(n_i)}$, $n_i \in \mathbb{N}$ (resp. de $F_i^{(m_i)}$, $m_i \in \mathbb{N}$). On écrit alors

$$E = \prod_s E_{i_s}^{(n_{i_s})}, i_s \in [1, \ell], n_{i_s} \in \mathbb{N},$$

et $F' = \prod_t F_{i_t}^{(m_{i_t})}$, $i_t \in [1, \ell]$, $m_{i_t} \in \mathbb{N}$ et l'on va raisonner par récurrence sur $\sum_s n_{i_s} + \sum_t m_{i_t}$.

Si $\sum_s n_{i_s} = 0$,

$$\phi(FHF'H'E') = \phi^{\leqslant 0}(FHF'H')\phi^+(E')$$

par définition car

$$FHF'H' \in \mathrm{Dist}(B) = \phi^-(F)\phi^0(H)\phi^-(F')\phi^0(H')\phi^+(E')$$

car $\phi^{\leqslant 0}$ est multiplicative $= \phi(FH)\phi(F'H'E')$. De même, si $\sum_t m_{i_t} = 0$,

$$\phi(FHEH'E') = \phi^-(F)\phi^{\geqslant 0}(HEH'E')$$

par définition car $= \phi^-(F)\phi^0(H)\phi^+(E)\phi^0(H')\phi^+(E')$ car $\phi^{\geqslant 0}$ est multiplicative $= \phi(FHE)\phi(H'E')$.

Supposons maintenant que $E = E_i^{(n_i)}$ avec $n_i > 0$ et $F' = F_1' F_i^{(m_i)} F_2'$ avec F_1' ne contenant pas de facteurs contenant des puissances divisées des F_i. Si $m_i > 0$,

$$\begin{aligned}
\phi(FHE_i^{(n_i)}F'H'E') &= \phi(FHE_i^{(n_i)}F_1'F_i^{(m_i)}F_2'H'E') \\
&= \phi(FHF_1'E_i^{(n_i)}F_i^{(m_i)}F_2'H'E') \\
&= \phi\left(FHF_1'\sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{(m_i-k)}\binom{H_i-n_i-m_i+2k}{k}E_i^{(n_i-k)}F_2'H'E'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} \phi\left(FHF_1'F_i^{(m_i-k)}\binom{H_i-n_i-m_i+2k}{k}E_i^{(n_i-k)}\right)\phi(F_2'H'E')
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence car le nombre de facteurs dans F_2' est moindre que celui dans F'

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} \phi^{\leqslant 0}(FHF_1')\phi^-(F_i^{(m_i-k)})\phi^0\left(\binom{H_i-n_i-m_i+2k}{k}\right) \\
&\qquad \phi^+(E_i^{(n_i-k)})\phi(F_2'H'E') \\
&= \phi^{\leqslant 0}(FHF_1')\phi(E_i^{(n_i)}F_i^{(m_i)})\phi(F_2'H'E') \text{ par définition} \\
&= \phi^{\leqslant 0}(FHF_1')\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F_i^{(m_i)})\phi(F_2'H'E') \text{ par [5].}
\end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
&\phi(E_i^{(n_i)}F_i^{(m_i)}) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{((m_i-k)p)}\phi^0\left(\binom{H_i-n_i-m_i+2k}{k}\right)E_i^{((n_i-k)p)} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{((m_i-k)p)}\phi^0\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{2k-n_i-m_i}{j}\binom{H_i}{k-j}\right)E_i^{((n_i-k)p)} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{((m_i-k)p)}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k-n_i-m_i}{j}\binom{H_i}{(k-j)p}\mu_0 E_i^{((n_i-k)p)} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{((m_i-k)p)}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k-n_i-m_i}{j}\binom{H_i}{(k-j)p}(1-H_i^{p-1}) \\
&\qquad\qquad E_i^{((n_i-k)p)}\prod_{r\neq i}(1-H_r^{p-1}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F_i^{(m_i)}) &= E_i^{(n_ip)}\mu_0 F_i^{(m_ip)}\mu_0 = E_i^{(n_ip)}F_i^{(m_ip)}\mu_0\\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n_ip,m_ip\}} F_i^{(m_ip-k)}\binom{H_i-n_ip-m_ip+2k}{k}E_i^{(n_ip-k)}\mu_0\\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n_ip,m_ip\}} F_i^{(m_ip-k)}\binom{H_i-n_ip-m_ip+2k}{k}\\ &\qquad \{1-(H_i-\langle(n_ip-k)\alpha_i,\alpha_i^\vee\rangle)^{p-1}\}E_i^{(n_ip-k)}\prod_{r\neq i}(1-H_r^{p-1}).\end{aligned}$$

D'après la preuve de [5, Prop.2.2.1], on a

$$\binom{H_i-n_ip-m_ip+2k}{k}\{1-(H_i-\langle(n_ip-k)\alpha_i,\alpha_i^\vee\rangle)^{p-1}\} = \begin{cases}\sum_{j=0}^{\frac{k}{p}}\binom{2\frac{k}{p}-n_i-m_i}{j}\binom{H_i}{(\frac{k}{p}-j)p}(1-H_i^{p-1}) & \text{si } p|k\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F_i^{(m_i)}) &= \sum_{k=0}^{\min\{n_i,m_i\}} F_i^{((m_i-k)p)}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k-n_i-m_i}{j}\\ &\binom{H_i}{(k-j)p}(1-H_i^{p-1})E_i^{((n_i-k)p)}\prod_{r\neq i}(1-H_r^{p-1}) = \phi(E_i^{(n_i)}F_i^{(m_i)}),\end{aligned}$$

comme voulu. Il en résulte alors que

$$\begin{aligned}&\phi(FHE_i^{(n_i)}F'H'E')\\ &\quad= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^-(F'_1)\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F_i^{(m_i)})\phi^-(F'_2)\phi^{\geqslant 0}(H'E')\\ &\quad= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F'_1)\phi^-(F_i^{(m_i)})\phi^-(F'_2)\phi^{\geqslant 0}(H'E')\\ &\quad= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^+(E_i^{(n_i)})\phi^-(F')\phi^{\geqslant 0}(H'E')\\ &\quad= \phi(FHE_i^{(n_i)})\phi(F'H'E') \text{ par définition.}\end{aligned}$$

Si aucun facteur avec des puissances divisées de F_i n'apparait dans F',

$$\begin{aligned}\phi(FHE_i^{(n_i)}F'H'E') &= \phi(FHF'E_i^{(n_i)}H'E')\\ &= \phi^{\leqslant 0}(FHF')\phi^{\geqslant 0}(E_i^{(n_i)}H'E') \text{ par définition}\\ &= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^{-}(F')\phi^{+}(E_i^{(n_i)})\phi^{\geqslant 0}(H'E')\\ &= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^{+}(E_i^{(n_i)})\phi^{-}(F')\phi^{\geqslant 0}(H'E')\\ &= \phi(FHE_i^{(n_i)})\phi(F'H'E') \text{ par définition de nouveau.}\end{aligned}$$

Finalement, si $E = E''E_i^{(n_i)}$ avec $n_i > 0$,

$$\begin{aligned}&\phi(FHE''E_i^{(n_i)}F'H'E')\\ &\quad= \phi(FHE'')\phi(E_i^{(n_i)}F'H'E') \text{ par récurrence car le nombre de facteurs}\\ &\qquad\quad \text{dans } E'' \text{ est moindre que celui dans } E\\ &\quad= \phi(FHE'')\phi(E_i^{(n_i)})\phi(F'H'E') \text{ grâce au cas } E = E_i^{(n_i)} \text{ plus haut}\\ &\quad= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^{+}(E'')\phi^{+}(E_i^{(n_i)})\phi(F'H'E') \text{ par définition}\\ &\quad= \phi^{\leqslant 0}(FH)\phi^{+}(E''E_i^{(n_i)})\phi(F'H'E')\\ &\quad= \phi(FHE''E_i^{(n_i)})\phi(F'H'E') \text{ par définition de nouveau,}\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Remarque 1.4. — Nous remercions T. Tanisaki de nous avoir signalé que lorsque l'on s'intéresse seulement à l'algèbre quantique “modifiée”, alors l'existence d'un scindage de Frobenius (qui est simplement le recollement de celui défini sur les parties nilpotentes et torique) est déjà connu ([20, Prop. 3.4]).

2. Contractions

2.1. Si M est un G-module, $M^{[1]}$ désignera le G-module twisté par Frobenius, ou de manière équivalente le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel M muni de l'action de $\mathrm{Dist}(G)$ via $\mathrm{Dist}(Fr)$. Soit χ_λ l'homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres de $\mathrm{Dist}(T)$ vers $\mathbb{F}_p$ défini par

$$\chi_\lambda\left(\binom{H_i}{n}\right) = \binom{\langle\lambda, \alpha_i^\vee\rangle}{n}$$

pour tous $i \in [1,\ell]$, $n \in \mathbb{N}$. On a $\chi_\lambda \circ \mathrm{Dist}(Fr)|_{\mathrm{Dist}(T)} = \chi_{p\lambda}$.

La mesure μ_0 étant un idempotent, tout $M \in \mathcal{C}_G$ admet une décomposition $M = \mu_0 M \oplus (1-\mu_0)M$. Comme on a muni $\mathrm{im}\,\phi$ de μ_0 comme unité, on peut définir une structure de G-module sur $\mu_0 M$ via ϕ, annulant $(1-\mu_0)M$. Nous noterons cette nouvelle structure sur $\mu_0 M$ par M^ϕ, et écrirons $x \bullet m = \phi(x)m$ avec $x \in \mathrm{Dist}(G)$ et $m \in \mu_0 M$. Nous noterons l'action correspondante de G induite par ϕ par la même lettre. De même pour $M \in \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_T$. On appellera M^ϕ la contraction par Frobenius de M.

Soit $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda \mid \forall i \in [1,\ell]\ , \langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle \in [0,p[\}$. Pour $\lambda \in \Lambda$ nous écrirons $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1$ avec $\lambda^0 \in \Lambda_1$ et $\lambda^1 \in \Lambda$.

Lemme 2.1. — *Pour tout $\lambda \in \Lambda$,*

$$\chi_\lambda \circ \phi|_{\mathrm{Dist}(T)} = \begin{cases} \chi_{\lambda^1} & \textit{si } \lambda \in p\Lambda, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, pour tout $M \in \mathcal{C}_T$,

$$M^\phi = \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_{p\lambda}.$$

Démonstration. — On a

$$\chi_\lambda(\mu_0) = \chi_\lambda\Big(\prod_{i=1}^{\ell}(1 - H_i^{p-1})\Big) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 - \chi_\lambda(H_i)^{p-1}) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 - \langle \lambda, \alpha_i\rangle^{p-1})$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } p | \langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle \text{ pour tout } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il en découle alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\chi_\lambda \circ \phi \binom{H_i}{m} = \chi_\lambda \binom{H_i}{mp} \chi_\lambda(\mu_0) =$$
$$\begin{cases} \binom{\langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle}{mp} = \binom{p\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee\rangle}{mp} = \binom{\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee\rangle}{m} & \text{si } \lambda \in p\Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme l'on a $\chi_{\lambda^1}\binom{H_i}{m} = \binom{\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee\rangle}{m}$, le lemme en résulte. □

2.2. Soient W le groupe de Weyl de G et $M \in \mathcal{C}_G$. Si $w \in W$, un représentant de w dans $\mathrm{N}_G(T)$ permute les espaces de poids de M.

Lemme 2.2. — *Si $m \in M_{p\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, alors $w \bullet m = \phi(w)m \in M_{pw\lambda}$.*

Démonstration. — Pour tout $h \in \mathrm{Dist}(T)$, $h \bullet (w \bullet m) = w \bullet \mathrm{Ad}(w^{-1})(h) \bullet m = \chi_{w\lambda}(h) w \bullet m$. L'assertion résulte alors de 2.1. □

Exemple 2.3. — Soit $M \in \mathcal{C}_G$.

(i) Le G-module $(M^{[1]})^\phi$ s'identifie à M.

(ii) Soient $M \in \mathcal{C}_G$ et $m \in M$. Si $\Delta_M : M \to M \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[t]$ est le comorphisme pour la U_{α_i}-structure sur M, on a $\Delta_M(m) = \sum_{r\in\mathbb{N}} E_i^{(r)} m \otimes t^r$ par [10, I.7.2]. Alors $\Delta_{M^\phi}(m) = \sum_{s\in\mathbb{N}} E_i^{(ps)} m \otimes t^s$. On en déduit, pour A une $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative, que

$$\phi(x_{\alpha_i}(a))m = \sum_{s\in\mathbb{N}} a^s E_i^{(ps)} m$$

pour tout $a \in A$.

(iii) Soit $G = \mathrm{SL}_2$ et identifions Λ avec $\mathbb{Z}$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\nabla(n)$ le G-module standard induit à partir du B-module de de dimension 1 de poids n et $L(n)$ son socle simple.

Sur $\mathbb{F}_2$ on a $\nabla(2)^\phi \simeq L(1) \oplus L(0) \simeq \Delta(2)^\phi$, $(\nabla(2)^\phi)^{[1]} \simeq L(2) \oplus L(0) \simeq (\Delta(2)^\phi)^{[1]}$, $(\mathrm{St} \otimes M^{[1]})^\phi = 0$.

Sur $\mathbb{F}_3$ on a $\nabla(3)^\phi = L(1) = \Delta(3)^\phi$, $(\nabla(3)^\phi)^{[1]} = L(3) = (\Delta(3)^\phi)^{[1]}$, et donc $\nabla(3)^\phi \simeq \nabla(3)/L(3)$, $(\nabla(3)^\phi)^{[1]} < \nabla(3)$ alors que $\Delta(3)^\phi < \Delta(3)$, $(\Delta(3)^\phi)^{[1]} \simeq \Delta(3)/L(1)$.

Maintenant, sur $\mathbb{F}_p$ avec $p \geqslant 5$, $\nabla(p)^\phi = L(1) = \Delta(p)^\phi$ n'est ni un facteur de Jordan-Hölder de $\nabla(p)$ ni de $\Delta(p)$ alors que $(\nabla(p)^\phi)^{[1]} = L(p) = (\Delta(p)^\phi)^{[1]}$ est à la fois le socle de $\nabla(p)$ et le module de tête de $\Delta(p)$.

Sur $\mathbb{F}_p$ avec p impair, $(\nabla(p-1) \otimes M^{[1]})^\phi \simeq M$.

3. La théorie de Kumar-Littelmann

Son principe est le suivant : si X est une variété projective, on peut, par définition écrire $X = \mathrm{Proj}(A)$ avec A un anneau gradué, et étudier la géométrie de X à partir des propriétés de A. En particulier, soient $\lambda \in \Lambda$ un poids dominant, $I = \{\alpha \in R^s \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0\}$, et $P = P_I$ le sous-groupe parabolique de G standard associé à I. Si $\nabla(\lambda)$ désigne le G-module induit à partir du P-module de dimension un de poids λ et si v_- est un vecteur de plus bas poids de $\nabla(\lambda)^*$, il existe une immersion fermée $G/P \to \mathbb{P}(\nabla(\lambda)^*)$ via $g \mapsto [gv_-]$. On a alors $G/P \simeq \mathrm{Proj}(A)$ avec $A = \coprod_{n\in\mathbb{N}} \nabla(n\lambda)$ vu comme anneau gradué via le “cup-produit”. Notre contraction par Frobenius est adaptée à la construction d'un scindage $G_{\Bbbk}$-“semi-invariant” du comorphisme de Frobenius $\mathcal{O}_{G_{\Bbbk}/P_{\Bbbk}} \to F_*\mathcal{O}_{G_{\Bbbk}/P_{\Bbbk}}$, comme décrit dans [14] avec la contraction de Littelmann [15]. Comme les détails sont essentiellement les mêmes que dans [14], seulement rendus plus simples ici et là par l'absence de techniques quantiques, nous ne ferons qu'esquisser la construction.

3.1. Rappelons néanmmoins tout d'abord le formalisme des foncteurs d'induction tel que formulé par Zuckermann dans le cas classique [4] et par Andersen, Polo et Wen dans le cas quantique [1]. Soit $G\mathbf{Mod}$ la catégorie des G-modules rationnels. Elle est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}_G$ des $\mathrm{Dist}(G)$-modules intégrables, *i.e.* des $\mathrm{Dist}(G)$-modules localement finis M qui admettent une décomposition en espace de poids relativement à l'action de T [10, II.1.20]/[3]. Rappelons aussi [10, I.7.16] que pour tous M, $M' \in \mathcal{C}_G$, on a $G\mathbf{Mod}(M, M') = \mathrm{Dist}(G)\mathbf{Mod}(M, M')$. De même avec tout sous-groupe parabolique standard P de G contenant B et aussi pour T : $P\mathbf{Mod} \simeq \mathcal{C}_P, T\mathbf{Mod} \simeq \mathcal{C}_T$, ainsi que pour les morphismes.

Soit $\mathrm{ind}_P^G = \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(G, ?)^P$ le foncteur d'induction de $P\mathbf{Mod}$ à $G\mathbf{Mod}$ avec comme morphisme d'évaluation ev, l'évaluation en l'élément neutre e de G. Via l'équivalence de catégories rappelée ci-dessus, ce foncteur est équivalent à l'adjoint à droite $\mathcal{F}_P^G$ du foncteur de restriction de $\mathcal{C}_G$ vers $\mathcal{C}_P$. Plus précisément, si $M \in \mathcal{C}_P$, on a

$$\mathcal{F}_P^G M = \{f \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Dist}(P)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(G), M)_\lambda \mid E_i^{(n)} f = 0 = F_i^{(n)} f \\ \text{pour tous } i \in [1, \ell]\,,\, n >> 0\},$$

avec la $\mathrm{Dist}(G)$-action sur $\mathrm{Dist}(P)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(G), M)$ donnée par $(xf)(y) = f(yx)$, $x, y \in \mathrm{Dist}(G)$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Dist}(P)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(G), M)_\lambda := \{f \in \mathrm{Dist}(P)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(G), M) \mid \\ \binom{H_i}{n} f = \binom{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle}{n} f \text{ pour tous } i \in [1, \ell]\,, n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{F}_P^G M$ est muni d'une action P-linéaire, *i.e.*, d'une application $\mathrm{Dist}(P)$-linéaire $\mathrm{ev}_M : \mathcal{F}_P^G M \to M$ via $f \mapsto f(1)$. Donc, pour tout $Q \in \mathcal{C}_G$, $\mathcal{C}_P(Q, M) \simeq \mathcal{C}_G(Q, \mathcal{F}_P^G M)$ via $\psi \mapsto$ "$q \mapsto \psi(?q)$" pour tout $q \in Q$ d'inverse $\eta \mapsto \mathrm{ev}_M \circ \eta$. En particulier, on a un isomorphisme $\mathrm{ind}_P^G M \simeq \mathcal{F}_P^G M$ via $h \mapsto (?h)(e)$ d'inverse $(?^{-1} f)(1) \leftarrow f$.

3.2. Soient $\mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_P^G$ les foncteurs dérivés droits de $\mathcal{F}_P^G$. On a donc

$$\mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_P^G(M) \simeq \mathrm{H}^\bullet(G/P, \mathcal{L}(M))$$

avec $\mathcal{L}(M)$ le $\mathcal{O}_{G/P}$-module associé au P-module M. Soit Λ_P le groupe des caractères de P. Si R_P^s désigne l'ensemble des racines simples du sous-groupe de Levi standard de P, on a

$$\Lambda_P = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0 \text{ pour tout } \alpha \in R_P^s\}$$

et l'on pose $\Lambda_P^+ = \Lambda_P \cap \Lambda^+$. Posons aussi $I_P = \{i \in [1,\ell] \mid \alpha_i \in R_P^s\}$, et soit U_P^+ le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé, *i.e.*, le sous-groupe engendré par les sous-groupes radiciels de G associés aux racines $\alpha \in R^+ \setminus \sum_{i\in I_P} \mathbb{N}\alpha_i$. Si $\lambda \in \Lambda_P^+$, le G-module $\mathrm{ind}_P^G(\lambda) \simeq \mathcal{F}_P^G\lambda$ est isomorphe à $\mathrm{ind}_B^G(\lambda) \simeq \mathcal{F}_B^G\lambda$, que nous noterons $\nabla(\lambda)$.

Proposition 3.1 ([14, Lem. 2.2, Th. 2.3]). — *Pour tout $M \in \mathcal{C}_B$, il existe un morphisme G-linéaire (ie.* $\mathrm{Dist}(G)$*-linéaire)*

$$\Phi_M : (\mathcal{F}_P^G M)^{[1]} \to \mathcal{F}_P^G(M^{[1]})$$

tel que

$$(\Phi_M f)(x) = f(\mathrm{Dist}(Fr)(x))$$

pour tous $f \in \mathcal{F}_B^G M$, $x \in$ $\mathrm{Dist}(G)$*. Ce morphisme est fonctoriel en M et induit des applications G-linéaires $\mathbf{R}^\bullet\Phi_M : (\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M)^{[1]} \to \mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(M^{[1]})$. En particulier, lorsque $M = \lambda$, l'application $\lambda \in \Lambda$,*

$$\Phi_\lambda : (\mathcal{F}_B^G\lambda)^{[1]} \to \mathcal{F}_B^G(p\lambda)$$

n'est autre que l'application d'élévation à la puissance p, via le cup-produit.

3.3. Soit $\mathcal{F}_T^B$ l'adjoint à droite du foncteur de restriction de $\mathcal{C}_B$ vers $\mathcal{C}_T$. Autrement dit

$$\mathcal{F}_T^B(M) = \{f \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Dist}(T)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(B), M)_\lambda \mid F_i^{(n)} f = 0 \\ \text{pour tous } i \in [1,\ell]\,,\, n >> 0\} \text{ pour } M \in \mathcal{C}_T.$$

Proposition 3.2 ([14, Lem. 3.2]). — *Pour tout $M \in \mathcal{C}_T$, il existe un morphisme B-linéaire (i.e.* $\mathrm{Dist}(B)$*-linéaire), fonctoriel en M, $\Phi_{B,M}$: $(\mathcal{F}_T^B M)^\phi \to \mathcal{F}_T^B(M^\phi)$ tel que $(\Phi_{B,M} f)(x) = f(\phi(x))$ pour tous $f \in \mathcal{F}_T^B M$, $x \in$* $\mathrm{Dist}(B)$.

Proposition 3.3 ([14, Prop. 3.3, Th. 3.4]). — *Pour tout $M \in \mathcal{C}_B$, il existe un morphisme G-linéaire (i.e.* $\mathrm{Dist}(G)$*-linéaire) fonctoriel en M Ψ_M : $(\mathcal{F}_B^G M)^\phi \to \mathcal{F}_B^G(M^\phi)$ tel que $(\Psi_M f)(x) = f(\phi(x))$ pour tous $f \in \mathcal{F}_B^G M$, $x \in$* $\mathrm{Dist}(G)$*, induisant des applications G-linéaires naturelles $\mathbf{R}^\bullet\Psi_M$: $(\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M)^\phi \to \mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(M^\phi)$.*

Remarque 3.4. —

(i) Si $\lambda \in \Lambda \setminus p\Lambda$, alors $\lambda^\phi = 0$ par définition, et donc

$$\mathbf{R}^\bullet\Psi_\lambda : (\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G\lambda)^\phi \to \mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(\lambda^\phi)$$

est l'application nulle.

(ii) (*cf.* [14, Lem. 4.13]) Pour tous $\lambda \in \Lambda \setminus p\Lambda$, $f \in \mathcal{F}_B^G(M^{[1]})_\lambda$, on a $f \circ \phi = 0$.

Démonstration. — Comme $\Psi_M f \in \mathrm{Dist}(B)\mathbf{Mod}(\mathrm{Dist}(G), M)$, il suffit de vérifier que $\Psi_M f$ annule $\mathrm{Dist}(U^+)$. Soit $y \in \mathrm{Dist}(U^+)$. On peut supposer que $y = E_{i_1}^{(m_{i_1})} \dots E_{i_s}^{(m_{i_s})}$ avec $i_k \in [1, \ell]$, $m_{i_k} \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe $j \in [1, \ell]$ tel que $\langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle = \lambda_j^0 + p\lambda_j^1$ avec $\lambda_j^0 \in]0, p[$. On a alors

$$f(\phi(y)\binom{H_j}{\lambda_j^0})) = (\binom{H_j}{\lambda_j^0})f)(\phi(y)) = \binom{\lambda_j^0 + p\lambda_j^1}{\lambda_j^0} f(\phi(y)) = f(\phi(y)) = (\Psi_M f)(y).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& f\left(\phi(y)\binom{H_j}{\lambda_j^0}\right) \\
&= f(E_{i_1}^{(m_{i_1})} \dots E_{i_s}^{(m_{i_s})} \mu_0 \binom{H_j}{\lambda_j^0})) \\
&= f(\binom{H_j - \sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{\lambda_j^0} E_{i_1}^{(m_{i_1})} \dots E_{i_s}^{(m_{i_s})} \mu_0) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par [7, Lem.26.3D]} \\
&= \binom{H_j - \sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{\lambda_j^0} \bullet f(\phi(y)) \\
&= \sum_{r=0}^{\lambda_j^0} \binom{-\sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{r} \binom{H_j}{\lambda_j^0 - r} \bullet f(\phi(y)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par [5, Prop. 2.1.1]} \\
&= \sum_{r=0}^{\lambda_j^0 - 1} \binom{-\sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{r} \binom{H_j}{\lambda_j^0 - r} \bullet f(\phi(y)) \\
&\qquad \text{car } \binom{-\sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{\lambda_j^0} = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par [5, preuve de Prop. 2.1.1]} \\
&= \sum_{r=0}^{\lambda_j^0 - 1} \binom{-\sum_k pm_{i_k}\langle \alpha_{i_k}, \alpha_j^\vee \rangle}{r} (\mathrm{Dist}(Fr)\binom{H_j}{\lambda_j^0 - r})f(\phi(y)) = 0.
\end{aligned}$$

Il en découle que $(\Psi_M f)(y) = 0$. □

Théorème 3.5 ([14, Cor. 3.9]). — *Pour tout $M \in \mathcal{C}_B$, il existe un diagramme commutatif de G-modules*

$$\begin{tikzcd}
((\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M)^{[1]})^\phi \arrow[r, "(\mathbf{R}^\bullet\Phi_M)^\phi"] & (\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(M^{[1]}))^\phi \arrow[d, "\mathbf{R}^\bullet\Psi_{M^{[1]}}"] \\
\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M \arrow[u, "\sim"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M}"'] & \mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G((M^{[1]})^\phi) \arrow[d, "\sim"] \\
 & \mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M.
\end{tikzcd}$$

3.4. Posons $\rho = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha\in R^+}\alpha$ et $E^+ = \prod_{\alpha\in R^+} E_\alpha^{(p-1)} \in \mathrm{Dist}(G)$. Comme

$$\dim \mathrm{Dist}(U_1^+)_{2(p-1)\rho} = 1,$$

E^+ est, à une constante près, dans $\Bbbk^\times$ indépendant du choix de l'ordre dans les racines positives figurant dans le produit.

Lemme 3.6. — *Soit $i \in [1,\ell]$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe $z_s \in \mathrm{Dist}(T_1)$ (avec $s \in [0, r[$), tel que $\chi_{2(p-1)\rho}(z_s) = 0$ et*

$$E^+F_i^{(rp)} \in F_i^{(rp)}E^+ + \sum_{\substack{s\in]0,rp[\\ p\not| s}} F_i^{(s)}\mathrm{Dist}(G) + \sum_{s=0}^{r-1} F_i^{(sp)} z_s \mathrm{Dist}(G).$$

Démonstration. — Nous procéderons par récurrence sur r. Montrons donc tout d'abord le cas $r = 1$. Comme $G_1 \lhd G$, l'action adjointe de $F_i^{(p)}$ sur $\mathrm{Dist}(G)$ laisse $\mathrm{Dist}(G_1)$-invariant [22, 3.4.13]. Comme $\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes 1$, on a $\Delta(F_i^{(p)}) = \sum_{k=0}^p F_i^{(k)} \otimes F_i^{(p-k)}$, et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}(G_1) \ni \mathrm{ad}(F_i^{(p)})(E^+) &= \sum_{k=0}^{p} F_i^{(k)}E^+(-1)^{p-k}F_i^{(p-k)} \\ &= -E^+F_i^{(p)} + F_i^{(p)}E^+ + \sum_{k=1}^{p-1} F_i^{(k)}E^+(-1)^{p-k}F_i^{(p-k)}.\end{aligned}$$

Comme $-\alpha_i$ est l'unique racine négative impliquée dans l'expression de $\mathrm{ad}(F_i^{(p)})(E^+)$ dans $\mathrm{Dist}(G_1) = \mathrm{Dist}(U_1)\mathrm{Dist}(T_1)\mathrm{Dist}(U_1^+)$ [7, Lem.26.3C], on peut écrire

$$E^+F_i^{(p)} = F_i^{(p)}E^+ + \sum_{j=1}^{p-1} F_i^{(j)}x_j + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} z_\nu E^{(\nu)} \qquad \text{avec} \quad E^{(\nu)} = \prod_{\alpha\in R^+} E^{(\nu_\alpha)} \tag{3.1}$$

avec $x_j \in \mathrm{Dist}(B_1^+)$ $z_\nu \in \mathrm{Dist}(T_1)$. Montrons que $\chi_{2(p-1)\rho}(z_\nu) = 0$ pour tout ν suivant en cela [14, Lem. 4.5]. Rappelons [17, 1.1 (d2)] qu'il existe un anti-automorphisme τ de $\mathrm{Dist}(G)$ fixant les E_j et les F_j et tel que $\binom{H_j}{m} \mapsto \binom{-H_j}{m}$ pour tous $m \in \mathbb{N}$, $j \in [1,\ell]$. Appliquant τ à (3.1), on obtient

$$F_i^{(p)}\tau(E^+) = \tau(E^+)F_i^{(p)} + \sum_{j=1}^{p-1} \tau(x_j)\tau(F_i^{(j)}) + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \tau(E^{(\nu)})\tau(z_\nu).$$

Si $v_- \in \Delta(2(p-1)\rho)_{-2(p-1)\rho} \setminus 0$, alors $F_i^{(p)}\tau(E^+)v_- = \tau(E^{(\nu)})\tau(z_\nu)v_-$. Montrons maintenant que

$$F_i^{(p)}\tau(E^+)v_- = 0. \tag{3.2}$$

Il suffit pour cela de montrer que $F_i^{(p)}E^+v_- = 0$. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, comme le poids de $F_i^{(p)}E^+v_-$ est $-p\alpha_i$, par la théorie SL_2, on doit avoir

$$\begin{aligned} 0 &\neq E_i^{(p)}E^+v_- \\ &= E^+E_i^{(p)}v_- \quad \text{par [23, 6.1(v)] [7, Lem.26.C]} \\ &= (\prod_{\alpha\in R^+\setminus\alpha_i} E_\alpha^{(p-1)})E_i^{(p-1)}E_i^{(p)}v_- = (\prod_{\alpha\in R^+\setminus\alpha_i} E_\alpha^{(p-1)})E_i^{(2p-1)}v_-, \end{aligned}$$

et donc $E_i^{(2p-1)}v_- \in \Delta(2(p-1)\rho)_{-2(p-1)\rho+(2p-1)\alpha_i} \setminus 0$. Mais alors

$$\begin{aligned} &s_i(-2(p-1)\rho + (2p-1)\alpha_i) = \\ &\qquad -2(p-1)\rho + 2(p-1)\alpha_i - (2p-1)\alpha_i = -2(p-1)\rho - \alpha_i \end{aligned}$$

devrait aussi être un poids de $\Delta(2(p-1)\rho)$, ce qui est absurde.

Il s'ensuit que $\tau(E^{(\nu)})\tau(z_\nu)v_- = 0$. Via le cup-produit

$$\mathrm{St} \otimes \mathrm{St} \to \nabla(2(p-1)\rho),$$

on a $v_+ \otimes v_+ \mapsto v_{++}$ avec v_+ (resp. v_{++}) un vecteur de plus haut poids de St (resp. $\nabla(2(p-1)\rho)$). En dualisant, on obtient une application G-linéaire $\Delta(2(p-1)\rho) \to \mathrm{St} \otimes \mathrm{St}$ envoyant v_- vers $v'_- \otimes v'_-$ avec v'_- un vecteur de plus bas poids de St. Alors E^+v_- est envoyé sur un élément de

$E^+v_- \otimes v'_- + \mathrm{St} \otimes (\mathrm{St}_{>-(p-1)\rho})$ et est donc non nul. Il en découle que tous les $\tau(E^{(\nu)})v_-$ sont non nuls, et qu'on doit donc avoir $\tau(z_\nu)v_- = 0$. D'où $0 = \chi_{-2(p-1)\rho}(\tau(z_\nu)) = \chi_{2(p-1)\rho}(z_\nu)$, comme voulu.

Supposons maintenant que

$$E^+F_i^{(rp)} = F_i^{(rp)}E^+ + \sum_{\substack{s\in]0,rp[\\ p\nmid s}} F_i^{(s)}x_s + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{r-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s} \tag{3.3}$$

pour certains $x_s, y_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(G)$ et $z_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(T_1)$ avec $\chi_{2(p-1)\rho}(z_{\nu s}) = 0$. Pour montrer qu'une formule similaire existe avec r remplacé par $r+1$, il y a deux cas. L'un d'entre eux est quand $n, m \leqslant r$ avec $n+m = r+1$ tels que $p \nmid \binom{(r+1)p}{np}$. Dans ce cas, des formules similaires à (3.3) existent avec r remplacé par n et m. Alors

$$\begin{aligned}
&\binom{(r+1)p}{np} E^+F_i^{((r+1)p)} \\
&= E^+F_i^{(np)}F_i^{(mp)} \\
&= F_i^{(np)}E^+F_i^{(mp)} + \Big(\sum_{\substack{s\in]0,np[\\ p\nmid s}} F_i^{(s)}x_s + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{n-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s}\Big)F_i^{(mp)} \\
&= F_i^{(np)}\Big(F_i^{(mp)}E^+ + \sum_{\substack{s\in]0,mp[\\ p\nmid s}} F_i^{(s)}x'_s + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{m-1} F_i^{(sp)} z'_{\nu s} y'_{\nu s}\Big) + \\
&\qquad \Big(\sum_{\substack{s\in]0,np[\\ p\nmid s}} F_i^{(s)}x_s + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{n-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s}\Big)F_i^{(mp)} \\
&= \binom{(r+1)p}{np} F_i^{((r+1)p)}E^+ + \sum_{\substack{s\in]0,(r+1)p[\\ p\nmid s}} F_i^{(s)}x''_s + \sum_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{r} F_i^{(sp)} z''_{\nu s} y''_{\nu s}
\end{aligned}$$

pour certains $x''_s, y''_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(G)$ et $z''_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(T_1)$ avec $\chi_{2(p-1)\rho}(z''_{\nu s}) = 0$, et (3.3) est vérifié avec r remplacé par $r+1$. Le second cas est quand il n'existe pas de tels n et m. Dans ce cas $r+1$ est impair si p est impair, et nous allons raisonner comme dans le premier cas lorsque $r = 1$. Posons $a = r+1$.

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}(G_1) \ni \sum_{k=0}^{ap} F_i^{(k)} E^+ (-1)^{ap-k} F_i^{(ap-k)} =& \\ - E^+ F_i^{(ap)} + F_i^{(ap)} E^+ + \sum_{k=1}^{ap-1} F_i^{(k)} E^+ (-1)^{ap-k} F_i^{(ap-k)}.&\end{aligned}$$

Si $p|k$, soit $k = bp$, on peut écrire par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}F_i^{(bp)} E^+ F_i^{(ap-bp)} = F_i^{(bp)} (F_i^{((a-b)p)} E^+ +& \\ \sum_{\substack{s \in]0,(a-b)p[\\ p \nmid s}} F_i^{(s)} x_s + \sum_{\nu \in [0,p[^{R^+}} \sum_{s=0}^{a-b-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s})&\end{aligned}$$

pour certains $x_s, y_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(G)$ et $z_{\nu s} \in \mathrm{Dist}(T_1)$ avec $\chi_{2(p-1)\rho}(z_{\nu s}) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}(G_1) \ni -E^+ F_i^{(ap)} + F_i^{(ap)} E^+ +& \\ \sum_{\substack{s \in]0,ap[\\ p \nmid s}} F_i^{(s)} x_s + \sum_{\nu \in [0,p[^{R^+}} \sum_{s=1}^{a-b-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s},&\end{aligned}$$

et donc l'on peut écrire comme dans (3.1)

$$\begin{aligned}E^+ F_i^{(ap)} = F_i^{(ap)} E^+ + \sum_{\substack{s \in]0,ap[\\ p \nmid s}} F_i^{(s)} x_s +& \\ \sum_{\nu \in [0,p[^{R^+}} \sum_{s=1}^{a-b-1} F_i^{(sp)} z_{\nu s} y_{\nu s} + \sum_{j=1}^{p-1} F^{(j)} x'_j + \sum_{\nu \in [0,p[^{R^+}} z_\nu E^{(\nu)}&\end{aligned}$$

pour un certain $z_\nu \in \mathrm{Dist}(T_1)$. Le même argument que pour (3.1) montre alors que $\chi_{2(p-1)\rho}(z_\nu) = 0$ pour tout ν ; si $F_i^{(ap)} \tau(E^+) v_- \neq 0$, $E_i^{(ap-1)} v_- \in \Delta(2(p-1)\rho)_{-2(p-1)\rho + (ap-1)\alpha_i} \setminus 0$. Alors

$$\begin{aligned}& s_i(-2(p-1)\rho + (ap-1)\alpha_i) = \\ & -2(p-1)\rho + 2(p-1)\alpha_i - (ap-1)\alpha_i = -2(p-1)\rho - ((a-2)p+1)\alpha_i\end{aligned}$$

serait aussi un poids de $\Delta(2(p-1)\rho)$, ce qui est absurde. Cela termine la vérification de l'induction. $\square$

Proposition 3.7 ([14, Prop. 4.6, Th. 4.7]). — *Pour tout $M \in \mathcal{C}_B$, définissons $\Psi_{2(p-1)\rho,M}$:*

$$\{\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho \otimes M^{[1]})\}^{\phi} \to \mathcal{F}_B^G M$$

par

$$(\Psi_{2(p-1)\rho,M} f)(x) = f(E^+ \phi(x)) \otimes 1$$

pour tous

$$f \in \{\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho \otimes M^{[1]})\}^{\phi}, x \in \mathrm{Dist}(G),$$

où 1 dans le membre de droite est un élément de base de $-2(p-1)\rho$. L'application est $\Psi_{2(p-1)\rho,M}$ est G-linéaire, i.e., $\mathrm{Dist}(G)$*-linéaire, fonctorielle en M, et induit des applications G-linéaires naturelles $\mathbf{R}^\bullet \Psi_{2(p-1)\rho,M}$: $\{\mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho \otimes M^{[1]})\}^{\phi} \to \mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_B^G M$.*

Démonstration. — Cela résulte de 3.4 comme dans [14]. Le lemme 3.6 permet d'établir la $\mathrm{Dist}(B)$-linéarité de $f(E^+\phi(?)) \otimes 1$. On remarquera que les détails de la démonstration s'écartent donc ici de ceux de loc. cit. car la récurrence utilisée en caractéristique 0 ne se transpose pas telle quelle dans notre cadre. Pour l'existence des applications $\mathbf{R}^\bullet \Psi_{2(p-1)\rho,M}$, rappelons aussi que chaque $2(p-1)\rho \otimes (Q^i)^{[1]}$ (avec $M \to Q^\bullet$ la résolution standard de M) est $\mathcal{F}_B^G$-acyclique [1, 5.3]. □

3.5. Pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_P$, l'application G-linéaire de cup-produit $\smile$:

$$(\mathcal{F}_P^G M_1) \otimes (\mathcal{F}_P^G M_2) \to \mathcal{F}_P^G(M_1 \otimes M_2)$$

est définie par $h_1 \otimes h_2 \mapsto (h_1 \otimes h_2) \circ \Delta$ avec Δ le coproduit sur $\mathrm{Dist}(G)$ et s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_P^G M_1) \otimes (\mathcal{F}_P^G M_2) \arrow[r, dashed, "\smile"] \arrow[d, dash, "\text{"identité"}"', "\sim"] & \mathcal{F}_P^G(M_1 \otimes M_2). \\
\mathcal{F}_P^G((\mathcal{F}_P^G M_1) \otimes M_2) \arrow[ur, "\mathcal{F}_P^G(\mathrm{ev}_{M_1} \otimes Id_{M_2})"'] \arrow[u, phantom, shift left=10ex, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.8 ([14, Lem. 4.9]). — *Pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_P$, le cup-produit induit des applications G-linéaires naturelles $\smile$: $(\mathcal{F}_P^G M_1) \otimes (\mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_P^G M_2) \to \mathbf{R}^\bullet \mathcal{F}_P^G(M_1 \otimes M_2)$.*

3.6. Soient $v_- \in \Delta(2(p-1)\rho)_{-2(p-1)\rho} \setminus 0$ un vecteur de plus bas poids, et $f_0 \in \nabla(2(p-1)\rho)_0$ avec $f_0(E^+ v_-) \neq 0$ via la dualité $\nabla(2(p-1)\rho) \simeq \Delta(2(p-1)\rho)^*$.

Théorème 3.9 ([14, Prop. 4.11]). — *Considérons f_0 comme un élément de $\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho)$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{C}_B$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
((\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M)^{[1]})^\phi \arrow[r, "(\mathbf{R}^\bullet\Phi_M)^\phi"] \arrow[dd, equal] & (\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(M^{[1]}))^\phi \arrow[d, "(f_0\smile ?)^\phi"] \\
 & (\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho\otimes M^{[1]}))^\phi \arrow[d, no head, "\sim"] \\
\mathbf{R}^\bullet\mathcal{F}_B^G M & \mathbf{R}^\bullet\{(\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho\otimes M^{[1]}))^\phi\}, \arrow[l, "\mathbf{R}^\bullet\Psi_{2(p-1)\rho,M}"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel on a dérivé à droite le foncteur exact à gauche $\{\mathcal{F}_B^G(2(p-1)\rho\otimes(?^{[1]}))\}^\phi$ en bas à droite du diagramme et où. $f_0 \smile ?$ est T-linéaire mais non nécessairement G-linéaire en général.

4. Faisceautisation

Nous allons maintenant étendre les résultats obtenus sur $\mathbb{F}_p$ à un corps algébriquement clos $\Bbbk$, puis faisceautiser les constructions précédentes. Soient $G_\Bbbk = G \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$ et $F_\Bbbk : G_\Bbbk \to G_\Bbbk$ le morphisme de Frobenius absolu de $G_\Bbbk$. On dispose donc de deux morphismes

$$F_\Bbbk^\sharp = Fr^\sharp \otimes_{\mathbb{F}_p} ?^p : \Bbbk[G_\Bbbk] = \mathbb{F}_p[G] \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \to \mathbb{F}_p[G] \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$$

et

$$\mathrm{Dist}(F_\Bbbk) = \mathrm{Dist}(Fr) \otimes_{\mathbb{F}_p} ?^{\frac{1}{p}} : \mathrm{Dist}(G_\Bbbk) = \mathrm{Dist}(G) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \to \mathrm{Dist}(G) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$$

qui ne sont pas $\Bbbk$-linéaires. Posons $\phi_\Bbbk = \phi \otimes_{\mathbb{F}_p} ?^p : \mathrm{Dist}(G_\Bbbk) = \mathrm{Dist}(G) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \to \mathrm{Dist}(G) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$. Fixons d'autre part un sous-groupe parabolique P de G et notons $P_\Bbbk = P \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$.

4.1. Pour tout $\lambda \in \Lambda_P^+$, on pose $\nabla_\Bbbk(\lambda) = \nabla(\lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$, et l'on munit $A = \coprod_{\lambda\in\Lambda^+} \nabla_\Bbbk(\lambda)$ de la structure de $G_\Bbbk$-algèbre induite par le cup-produit.

On définit une application additive $\Psi_A \in \mathbf{Ab}(A, A)$ par

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\Psi_A"] & & A \\
(\mathcal{F}_P^G \lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \arrow[u, hook] \arrow[d] & \circlearrowleft & \\
\{\mathcal{F}_P^G((\lambda^{\phi})^{[1]})\} \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \arrow[d, "\mu_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} Id_{\Bbbk}"'] & & \\
\{(\mathcal{F}_P^G((\lambda^{\phi})^{[1]})) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk\}^{\phi_{\Bbbk}} \arrow[rr, "\Psi_\lambda \otimes_{\mathbb{F}_p} ?^{\frac{1}{p}}"'] & & \{\mathcal{F}_P^G(\lambda^{\phi})\} \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk, \arrow[uuu, hook]
\end{tikzcd}$$

avec $(\mathcal{F}_P^G \lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \to \{\mathcal{F}_P^G((\lambda^{\phi})^{[1]})\} \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk$ l'application identité (resp. nulle) si $\lambda \in p\Lambda$ (resp. sinon). L'application Ψ_A n'est pas $\Bbbk$-linéaire, mais Frobenius-linéaire au sens où pour tous $a, b \in A$, on a

$$\Psi_A(a^p b) = a\Psi_A(b),$$

et scinde l'application d'élévation à la puissance p ; on a aussi $\Psi_A(1) = 1$. Notons $\mathrm{End}_{\mathrm{Fr}}(A)$ le $\Bbbk$-espace vectoriel des endomorphismes additifs Frobenius-linéaires de A. En utilisant la structure de $G_{\Bbbk}$-algèbre sur A, on peut définir une action de $G_{\Bbbk}$ sur $\mathrm{End}_{\mathrm{Fr}}(A)$ par $g \bullet \psi = g\psi(g^{-1}?)$ pour tous $g \in G_{\Bbbk}$, $\psi \in \mathrm{End}_{\mathrm{Fr}}(A)$ [2, 4.1.1.4]. L'application Ψ_A est alors, par construction, $G_{\Bbbk}$-semi-invariante (terminologie suggérée par [2, 4.15]) c'est-à-dire $T_{\Bbbk}$-linéaire et telle que pour chaque sous-groupe radiciel $\{x_{\pm\alpha_i}(\xi) \mid \xi \in \Bbbk\}$, $i \in [1, \ell]$, de $G_{\Bbbk}$, on ait

$$x_{\alpha_i}(\xi) \bullet \Psi_A = \Psi_A\Big(\sum_{r \in [0,p[} (-\xi)^r E_i^{(r)}?\Big) \quad \text{et}$$
$$x_{-\alpha_i}(\xi) \bullet \Psi_A = \Psi_A\Big(\sum_{r \in [0,p[} (-\xi)^r F_i^{(r)}?\Big).$$

La notion de semi-invariance a été originellement introduite par Mathieu [19] (référence dans laquelle une application $B_{\Bbbk}$-semi-invariante, *i.e.* $T_{\Bbbk}$-linéaire et vérifiant la formule ci-dessus pour les sous-groupes radiciels $\{x_{-\alpha_i}(\xi) \mid \xi \in \Bbbk\}$, $i \in [1, \ell]$, de $B_{\Bbbk}$, est dite $B_{\Bbbk}$-canonique). Pour une $T_{\Bbbk}$-algèbre Q et pour $\psi \in \mathrm{End}_{\mathrm{Fr}}(Q)$, l'application ψ est $T_{\Bbbk}$-linéaire si et seulement si pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\psi(Q_\lambda) \subseteq \begin{cases} Q_{\lambda^1} & \text{si } \lambda \in p\Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors énoncer le

Théorème 4.1 ([14, Prop. 6.2]). — *L'application Ψ_A est un scindage Frobenius linéaire $G_{\Bbbk}$-semi-invariant de l'application d'élévation à la puissance p sur A.*

Démonstration. — Par construction, on a, pour tous $a \in A$ et $x \in \mathrm{Dist}(G_{\Bbbk})$,

$$\Psi_A(\phi_{\Bbbk}(x)a) = x\Psi_A(a). \tag{4.1}$$

Pour établir la $T_{\Bbbk}$-linéarité de Ψ_A, considérons $a \in (\mathcal{F}_B^G p\lambda)_{p\nu}$, $\nu \in \Lambda$, et $\xi \in \Bbbk$. Alors, pour tous $i \in [1,\ell]$, $\zeta \in \Bbbk^\times$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_i^\vee(\zeta)\Psi_A(\alpha_i^\vee(\zeta)^{-1}(a\otimes\xi)) &= \zeta^{\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle}\Psi_A(a\otimes\xi\zeta^{-p\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle}) \text{ car } \Psi_\lambda \\ &\qquad \text{est } T\text{-linéaire et } \mu_0 a \text{ de poids } \nu \text{ pour } \phi \\ &= \zeta^{\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle}\zeta^{-\langle\nu,\alpha_i^\vee\rangle}\Psi_A(a\otimes\xi) \text{ par construction} \\ &= \Psi_A(a\otimes\xi). \end{aligned}$$

Pour établir la Frobenius linéarité de Ψ_A il suffit de montrer que pour tous $a \in \mathcal{F}_B^G\lambda$, $b \in \mathcal{F}_B^G\nu$, on a

$$\Psi_A(a^p b) = a\Psi_A(b). \tag{4.2}$$

Si $\nu \notin p\Lambda$, les deux membres s'annulent. Pour tout $\lambda,\nu \in \Lambda^+$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\{\mathcal{F}_B^G(\lambda^{[1]}) \otimes \mathcal{F}_B^G(\nu^{[1]})\}^\phi \arrow[r, "\smile^\phi"] & \mathcal{F}_B^G((\lambda+\nu)^{[1]})^\phi \arrow[dddd, "\Psi_{\lambda+\nu}"] \\
\{(\mathcal{F}_B^G\lambda)^{[1]} \otimes \mathcal{F}_B^G(\nu^{[1]})\}^\phi \arrow[u, "\{\Phi_\lambda\otimes\mathcal{F}_B^G(\nu^{[1]})\}^\phi"] \arrow[d, dash, "\sim"'] & \\
(\mathcal{F}_B^G\lambda) \otimes \mathcal{F}_B^G(\nu^{[1]})^\phi \arrow[d, "(\mathcal{F}_B^G\lambda)\otimes\Psi_\nu"'] & \\
(\mathcal{F}_B^G\lambda) \otimes \mathcal{F}_B^G((\nu^{[1]})^\phi) \arrow[d, dash, "\sim"'] & \\
(\mathcal{F}_B^G\lambda) \otimes (\mathcal{F}_B^G(\nu) \arrow[r, "\smile"'] & \mathcal{F}_B^G(\lambda+\nu).
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Comme $G\mathbf{Mod}((\mathcal{F}_B^G\lambda)^{[1]}, \mathcal{F}_B^G(\lambda^{[1]})) \simeq B\mathbf{Mod}((\mathcal{F}_B^G\lambda)^{[1]}, \lambda^{[1]}) \simeq \mathbb{F}_p$, par unicité on a $\Phi_\lambda(a) = a^p$. Comme G_1 fixe a^p, $\mu_0(a^pb) = a^p(\mu_0 b)$. Dans ce cas (4.2) résulte de la commutativité du diagramme (4.3).

On a aussi, $\Psi_A(1) = \Psi_0(1) = 1 \circ \phi = \mathrm{ev}_1 \circ \phi = \mathrm{ev}_1 = 1$. Donc Ψ_A est un scindage de Frobenius de A [2, 1.1.4] [10, F.8.1].

Finalement, pour tous $i \in [1, \ell]$, $a \in (\mathcal{F}_B^G p\lambda)^\phi$, $\lambda \in \Lambda^+$, $\xi \in \Bbbk$, on a

$$\begin{aligned}
x_{\alpha_i}(\xi) \bullet \Psi_A(a) &= x_{\alpha_i}(\xi)\Psi_A(x_{\alpha_i}(-\xi)a) \\
&= x_{\alpha_i}(\xi)\Psi_A(\textstyle\sum_r \in \mathbb{N}(-\xi)^r E_i^{(r)} a) \text{ par [10, I.7.12]} \\
&= x_{\alpha_i}(\xi)\Psi_A(\sum_{\substack{r_0\in[0,p[\\ r_1\in\mathbb{N}}} (-\xi)^{r_0+pr_1} E_i^{(pr_1)} E_i^{(r_0)} a) \\
&= x_{\alpha_i}(\xi) \sum_{r_1\in\mathbb{N}} (-\xi)^{r_1} \Psi_A(\phi(E_i^{(r_1)}) \sum_{r_0\in[0,p[} (-\xi)^{r_0} E_i^{(r_0)} a) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par Frobenius linéarité} \\
&= x_{\alpha_i}(\xi) \sum_{r_1\in\mathbb{N}} (-\xi)^{r_1} E_i^{(r_1)} \Psi_A(\sum_{r_0\in[0,p[} (-\xi)^{r_0} E_i^{(r_0)} a) \text{ par construction} \\
&= x_{\alpha_i}(\xi) x_{\alpha_i}(-\xi)\Psi_A\left(\sum_{r\in[0,p[} (-\xi)^r E_i^{(r)} a\right) \text{ encore par [10, I.7.12]} \\
&= \Psi_A(\sum_{r\in[0,p[} (-\xi)^r E_i^{(r)} a),
\end{aligned}$$

On traite de la même façon l'action de $x_{-\alpha_i}(\xi)$. □

4.2. On va maintenaint faisceautiser l'application Ψ_A. Posons $\mathcal{P} = G_\Bbbk/P_\Bbbk$ et $\Lambda_P^{++} = \{\lambda \in \Lambda_P \mid \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle > 0 \text{ pour tout } \alpha \in R^s \setminus R_P^s\}$. On dispose [10, II.8.5] d'une immersion fermée $i : \mathcal{P} \to \mathbb{P}(\Delta_\Bbbk(-w_0\lambda))$ ($\Delta_\Bbbk(-w_0\lambda) = \nabla_\Bbbk(\lambda)^*$) via $g \mapsto [gv_-]$, avec v_- un vecteur de plus bas poids de $\Delta_\Bbbk(-w_0\lambda)$. Définissons une $\Bbbk$-algèbre (en utilisant le cup-produit) graduée par

$$\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, \lambda) = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P}, i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Delta_\Bbbk(-w_0\lambda))}(m)) \simeq \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L}(m\lambda)) = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \nabla_\Bbbk(m\lambda).$$

Alors $\mathcal{P} \simeq \mathrm{Proj}(\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, \lambda))$ par [6, Ex. II.5.14b+Ex. II.2.14c]. Remarquons que $\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, \lambda)$ est intègre car $\nabla_\Bbbk(m\lambda) = \mathbf{Sch}_\Bbbk(G_\Bbbk, m\lambda)^{P_\Bbbk}$. Pour tout $w \in W$, choisissons $f_w \in \nabla(\lambda)_{w\lambda} \setminus 0$, et posons $\mathcal{P}_w = \{x \in \mathcal{P} \mid f_w(x) \neq 0\}$. Alors

$\mathcal{P}_w = wU^+_{P,\Bbbk}P_\Bbbk/P_\Bbbk$ est un ouvert affine de $\mathcal{P}$ avec

$$\Bbbk[\mathcal{P}_w] \simeq \Gamma^\bullet(\mathcal{P},\lambda)_{(f_w)} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{f}{{f_w}^m} \mid f \in \nabla_\Bbbk(m\lambda) \right\}$$

dans $\mathrm{Frac}(\Gamma^\bullet(\mathcal{P},\lambda))$. En particulier, les ouverts principaux définis par les f_w, $w \in W$, forment un recouvrement de $\mathcal{P}$. Suivant [6, II.5.15], le faisceau $F_*\mathcal{O}_\mathcal{P}$ se récupère à partir du $\Gamma^\bullet(\mathcal{P},\lambda)$-module gradué

$$\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, F_*\mathcal{O}_\mathcal{P}) = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P},(F_*\mathcal{O}_\mathcal{P})(m)) \simeq \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P},\mathcal{L}(pm\lambda)).$$

On a $\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, F_*\mathcal{O}_\mathcal{P})_{(f_w)} = \cup_{m\in\mathbb{N}}\{\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mid f \in \nabla_\Bbbk(pm\lambda)\}$. Posons pour alléger $A_w(\lambda) = \Gamma^\bullet(\mathcal{P},\lambda)_{(f_w)}$ et $A'_w(\lambda) = \Gamma^\bullet(\mathcal{P}, F_*\mathcal{O}_\mathcal{P})_{(f_w)}$. Définissons maintenant $\Psi^\lambda_w : A'_w(\lambda) \to A_w(\lambda)$ par $\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mapsto \frac{\Psi_A(f)}{{f_w}^m}$, $f \in \nabla_\Bbbk(pm\lambda)$. Les Ψ^λ_w, $w \in W$, se recollent ensemble pour donner un morphisme $\Theta : F_*\mathcal{O}_\mathcal{P} \to \mathcal{O}_\mathcal{P}$, qui est en fait indépendant du choix de $\lambda \in \Lambda^{++}_P$. Par construction

Théorème 4.2 ([14, Th. 9.6]). — *L'application $\Theta : F_*\mathcal{O}_\mathcal{P} \to \mathcal{O}_\mathcal{P}$ est un scindage $G_\Bbbk$-semi-invariant du comorphisme $F^\sharp : \mathcal{O}_\mathcal{P} \to F_*\mathcal{O}_\mathcal{P}$ définissant l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\mathcal{P}$.*

4.3. On peut généraliser le théorème précédent à la situation suivante. Soient X un $\Bbbk$-schéma muni de son endomorphisme de Frobenius absolu F_X et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X et $f \in \Gamma(X,\mathcal{L}) \simeq \mathbf{Mod}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{L})$. On dira que X est Frobenius f-scindé si le composé $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^\sharp_X} F_{X*}\mathcal{O}_X \xrightarrow{F_{X*}f} F_{X*}\mathcal{L}$ admet un inverse à gauche. On suppose maintenant que $P = B$ et l'on écrira $\mathcal{B}$ à la place de $\mathcal{P}$. Utilisant cette fois 3.6 on obtient de même

Théorème 4.3 ([14, Th. 6.5]). — *Soit $f_0 \in \nabla(2(p-1)\rho)_0 \setminus 0$ vu comme morphisme de $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ vers $\mathcal{L}_\mathcal{B}(2(p-1)\rho)$. Alors le composé $F_*(f_0)\circ F^\sharp$: $\mathcal{O}_\mathcal{B} \to F_*\mathcal{L}_\mathcal{B}(2(p-1)\rho)$ admet un inverse à gauche $\mathcal{O}_\mathcal{B}$-linéaire et $G_\Bbbk$-semi-invariant.*

Démonstration. — Soit $\lambda \in \Lambda^{++}_B$ comme dans 4.2. Posons

$$A'(2(p-1)\rho,\lambda) = \Gamma^\bullet(\mathcal{B}, F_*\mathcal{L}(2(p-1)\rho)),$$

qui redonne $F_*\mathcal{L}(2(p-1)\rho)$ par faisceautisation. Definissons $\Psi^{\lambda}_{2(p-1)\rho}$: $A'(2(p-1)\rho,\lambda) \to A(\lambda)$ via le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A'(2(p-1)\rho,\lambda) \arrow[rr, dashed] & & A(\lambda) \\
\mathcal{F}^G_B(2(p-1)\rho+pm\lambda)\otimes_{\mathbb{F}_p}\Bbbk \arrow[u, hook] & \circlearrowleft & \\
\mathcal{F}^G_B(2(p-1)\rho+(m\lambda)^{[1]})^{\phi}\otimes_{\mathbb{F}_p}\Bbbk \arrow[u, equal] \arrow[rr, "\Psi_{2(p-1)\rho,m\lambda}\otimes_{\mathbb{F}_p} ?^{\frac{1}{p}}"'] & & \mathcal{F}^G_B(m\lambda)\otimes_{\mathbb{F}_p}\Bbbk \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

dans lequel l'identification $\mathcal{F}^G_B(2(p-1)\rho+pm\lambda) = \mathcal{F}^G_B(2(p-1)\rho+(m\lambda)^{[1]})^{\phi}$ est faite en tant que $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Pour tous $a \in \nabla_{\Bbbk}(n\lambda)$, $b \in \nabla_{\Bbbk}(2(p-1)\rho+pm\lambda)$, on a de nouveau

$$\Psi_{2(p-1)\rho,(n+m)\lambda}(a^p b) = a\Psi_{2(p-1)\rho,m\lambda}(b).$$

Pour tout $w \in W$, posons

$$A'_w(2(p-1)\rho,\lambda) = \Gamma^{\bullet}(\mathcal{B},F_*\mathcal{L}(2(p-1)\rho))_{(f_w)} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mid f \in \nabla_{\Bbbk}(2(p-1)\rho+pm\lambda)\},$$

et définissons $\Psi^{\lambda}_{2(p-1)\rho,w} : A'_w(2(p-1)\rho,\lambda) \to A_w(\lambda)$ via

$$\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mapsto \frac{\Psi^{\lambda}_{2(p-1)\rho}(f)}{{f_w}^{m}}$$

pour $f \in \nabla_{\Bbbk}(2(p-1)\rho+pm\lambda)$. Les $\Psi^{\lambda}_{2(p-1)\rho,w}$, $w \in W$, sont bien définis et se recollent ensemble pour former un morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-linéaire

$$F_*\mathcal{L}(2(p-1)\rho) \to \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$$

qui scinde $F_*(f_0)\circ F^{\sharp}$.

La $G_{\Bbbk}$-semi-invariance de $\Psi^{\lambda}_{2(p-1)\rho}$ résulte alors de la Frobenius-linéarité et de la G-linéarité de $\Psi_{2(p-1)\rho,m\lambda}$. $\square$

4.4. On peut également chercher à scinder des sous-schémas : pour un $\Bbbk$-sous-schéma Y d'un $\Bbbk$-schéma X défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y$ on dira que que Y est Frobenius-scindé de manière compatible si et seulement si il existe un scindage de Frobenius σ de X tel que $\sigma(F_*\mathcal{I}_Y) \subseteq \mathcal{I}_Y$ [2, 1.1.3], auquel cas on dira simplement que σ scinde de manière compatible Y.

Pour tout $w \in W$, soient $X(w) = \overline{B_{\Bbbk}wB_{\Bbbk}/P_{\Bbbk}}$ et $X^+(w) = \overline{B^+_{\Bbbk}wB_{\Bbbk}/P_{\Bbbk}}$, les sous-schémas de Schubert de $\mathcal{P}$. On va montrer que tous ceux-ci sont scindés de manière compatible par l'application Θ de 4.2.

Comme dans 4.2 prenons $\lambda \in \Lambda_P^+$ avec $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in R^s \setminus R_P^s$, et choisissons $v_- \in \Delta(-w_0 m\lambda)_{-m\lambda} \setminus 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^+$. Rappelons [10, II.14.19] qu'il existe un isomorphisme de G-modules

$$(4.4) \quad \nabla(m\lambda) \simeq \Delta(-mw_0\lambda)^* \simeq \mathcal{F}_P^G m\lambda \quad \text{via} \quad h(?v_-) \longleftarrow h \longmapsto h(S(?)v_-),$$

avec S l'antipode de $\mathrm{Dist}(G)$. Soit $\mathcal{I}(w)$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_\mathcal{P}$ définissant $X(w)$. Si $i_w : X(w) \hookrightarrow \mathcal{P}$ désigne l'immersion canonique, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}(w) \to \mathcal{O}_\mathcal{P} \to i_{w*}\mathcal{O}_{X(w)} \to 0.$$

Comme dans 4.3 on a

$$\mathcal{I}(w) = \Gamma^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w))^\sim \quad \text{et} \quad i_{w*}\mathcal{O}_{X(w)} = \Gamma^\bullet(\mathcal{P}, i_{w*}\mathcal{O}_{X(w)})^\sim$$

avec $\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w)) = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w)(m))$. Comme

$$\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, i_{w*}\mathcal{O}_{X(w)}) \simeq \coprod_{m\in\mathbb{N}} \mathbf{Sch}_\Bbbk(\overline{B_\Bbbk w P_\Bbbk}, m\lambda)^{P_\Bbbk},$$

on a une suite exacte

$$0 \to \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w)(m)) \to \nabla_\Bbbk(m\lambda) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathbf{Sch}_\Bbbk(\overline{B_\Bbbk w P_\Bbbk}, m\lambda)^{P_\Bbbk}.$$

Posons $\nabla_w(m\lambda) = \Gamma(X(w), i_w^*\mathcal{L}(m\lambda)) = \mathbf{Sch}_\Bbbk(\overline{B_\Bbbk w P_\Bbbk}, m\lambda)^{P_\Bbbk}$. D'un autre côté, si

$$v_- \in \Delta(-mw_0\lambda)_{-m\lambda} \setminus 0$$

et si

$$(\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp = \{h \in \Delta_\Bbbk(-mw_0\lambda)^* \mid h(\mathrm{Dist}(U)wv_-) = 0\},$$

on tire de [10, II.14.19.2, 3] une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp \to \nabla_\Bbbk(m\lambda) \xrightarrow{\mathrm{res}} \nabla_w(m\lambda),$$

et donc

$$(4.5) \qquad \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w)(m)) \simeq (\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp.$$

De même avec $i_w^+ : X^+(w) \hookrightarrow \mathcal{P}$, si l'on pose

$$\nabla_w^+(m\lambda) = \Gamma(X^+(w), i_w^*\mathcal{L}(m\lambda)),$$

on a une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Dist}(U^+)wv_-)^\perp \to \nabla_\Bbbk(m\lambda) \xrightarrow{\mathrm{res}} \nabla_w^+(m\lambda).$$

Théorème 4.4 ([14, Th. 6.7]). — *Soit Y un sous-$\Bbbk$-schéma de $\mathcal{P}$ obtenu à partir des $X(w)$ et des $X^+(w)$, $w \in W$, en combinant des unions ou intersections schématiques et des considérations de composantes irréductibles réduites. Alors Y est scindé de manière compatible par Θ. En particulier, Y est réduit.*

Démonstration. — On va d'abord montrer que $X(w)$ est scindé de manière compatible par Θ et ce pour tout $w \in W$. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{P}_w \cap X(w) \ni wP_\Bbbk$. Si $v_{-m\lambda} \in \Delta(-mw_0\lambda)_{-m\lambda} \setminus 0$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma^\bullet(\mathcal{P}, F_*\mathcal{I}(w)) = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P}, (F_*\mathcal{I}(w))(m)) &\simeq \coprod_{m\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{I}(w) \otimes_{O_\mathcal{P}} \mathcal{L}(pm\lambda))\\ &\simeq \coprod_{m\in\mathbb{N}} (\mathrm{Dist}(U)wv_{-pm\lambda})^\perp \quad \text{par (2)},\end{aligned}$$

et donc

$$\Gamma(\mathcal{P}_w, F_*\mathcal{I}(w)) = \Gamma^\bullet(\mathcal{P}, F_*\mathcal{I}(w))_{(f_w)} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mid \tilde{f} \in (\mathrm{Dist}(U^+)wv_{-pm\lambda})^\perp\},$$

avec $\tilde{f} \in \Delta_\Bbbk(-pmw_0\lambda)^*$ correspondant à $f \in \nabla_\Bbbk(pm\lambda)$ via 4.4. Comme le morphisme $\Gamma(\mathcal{P}_w, \Theta)$:

$$\Gamma(\mathcal{P}_w, F_*\mathcal{O}_\mathcal{P}) = \Gamma^\bullet(\mathcal{P}_w, F_*\mathcal{O}_\mathcal{P})_{(f_w)} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mid f \in \nabla_\Bbbk(pm\lambda)\right\} \to \Bbbk[\mathcal{P}_w] = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{\frac{f}{{f_w}^{m}} \mid f \in \nabla_\Bbbk(m\lambda)\right\}$$

se décrit comme $\frac{f}{{f_w}^{pm}} \mapsto \frac{\Psi_A(f)}{{f_w}^m}$, on a seulement à montrer que

$$\widetilde{\Psi_A(f)} = \Psi_{m\lambda}\widetilde{(\mu_0 f)} \in (\mathrm{Dist}(U)wv_{-m\lambda})^\perp$$

pour tout $\tilde{f} \in (\mathrm{Dist}(U)wv_{-pm\lambda})^\perp$.

Si $\tilde{f} \in (\mathrm{Dist}(U)wv_{-pm\lambda})^\perp$, alors pour tous $t \in T$, $\mu \in \mathrm{Dist}(U)$,

$$\begin{aligned}(t\tilde{f})(\mu wv_{-pm\lambda}) = \tilde{f}(t^{-1}\mu wv_{-pm\lambda}) &= \tilde{f}(\mathrm{Ad}(t^{-1})(\mu)t^{-1}wv_{-pm\lambda})\\ &= 0 \quad \text{car } \mathrm{Ad}(t^{-1})(\mu) \in \mathrm{Dist}(U).\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{Dist}(U)wv_{-pm\lambda})^\perp$ admet une décomposition suivant les poids et par suite on peut supposer que f est vecteur propre associé à un certain poids dans $p\Lambda$. On a alors $\mu_0 f = f$ et $\Psi_{m\lambda}(\mu_0 f) = \Psi_{m\lambda}(f)$. Pour tout

$\mu \in \mathrm{Dist}(U)$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi_{m\lambda}(f)}(\mu w v_{-m\lambda}) &= \widetilde{\Psi_{m\lambda}(f)}(w({}^{w^{-1}}\mu)v_{-m\lambda}) \quad \text{avec} \quad {}^{w^{-1}}\mu = \mathrm{Ad}(w^{-1})(\mu) \\
&= (w^{-1}\widetilde{\Psi_{m\lambda}(f)})(({}^{w^{-1}}\mu)v_{-m\lambda}) = (w^{-1}\Psi_{m\lambda}(f))^{\sim}(({}^{w^{-1}}\mu)v_{-m\lambda}) \\
&= (\Psi_{m\lambda}(w^{-1}\bullet f))^{\sim}(({}^{w^{-1}}\mu)v_{-m\lambda}) \\
&\qquad \text{car } \Psi_{m\lambda} \text{ est } G\text{-linéaire par la Proposition 3.2} \\
&= (\Psi_{m\lambda}(w^{-1}\bullet f))^{\sim}(SS({}^{w^{-1}}\mu)v_{-m\lambda}) \\
&= \Psi_{m\lambda}(w^{-1}\bullet f)(S({}^{w^{-1}}\mu)) \quad \text{par (4.4)} \\
&= (w^{-1}\bullet f)(\phi(S({}^{w^{-1}}\mu))) = (w^{-1}\bullet f)(S(\phi({}^{w^{-1}}\mu))) \\
&= (\phi(w^{-1})f)(S(\phi({}^{w^{-1}}\mu))) \\
&= (\phi(w^{-1})f)^{\sim}(\phi({}^{w^{-1}}\mu)v_{-pm\lambda}) = (\phi(w^{-1})\tilde{f})(\phi({}^{w^{-1}}\mu)v_{-pm\lambda}) \\
&= \tilde{f}(\phi(w)\phi({}^{w^{-1}}\mu)v_{-pm\lambda}) = \tilde{f}(\phi(w^{w^{-1}}\mu)v_{-pm\lambda}) \\
&= \tilde{f}(\phi(\mu w)v_{-pm\lambda}) = \tilde{f}(\phi(\mu)\phi(w)v_{-pm\lambda}) \\
&= \tilde{f}(\phi(\mu)wv_{-pm\lambda}) \text{ à multiplication près par un élément} \\
&\qquad \text{de } \mathbb{F}_p^{\times} \text{ par le lemme 2.2, car } \Delta(-w_0pm\lambda)_{-wpm\lambda} \text{ est de dimension 1} \\
&= 0 \quad \text{car } \phi(\mu) \in \mathrm{Dist}(U)\mu_0,
\end{aligned}$$

comme voulu.

Comme $X(w)$ est intègre [10, II.13.8], il découle de [10, F.12] que

$$\Theta(F_*\mathcal{I}(w)) \subseteq \mathcal{I}(w),$$

et donc que $X(w)$ est scindé de manière compatible par Θ. De même $X^+(w)$ est scindé de manière compatible par Θ. Ainsi toute itération d'une union ou d'une intersection schématique des $X(w)$ et des $X^+(w)$ est scindée de manière compatible par Θ, et de même pour les composantes irréductibles réduites [10, F.13]. □

4.5. Montrons finalement comment le scindage de [11, Thm. 3.4] s'interprète avec le point de vue que nous venons de développer. Supposons que $P = B$, posons $\mathcal{B} = G_{\Bbbk}/B_{\Bbbk}$ et soit $v_- \in \mathrm{St}_{-(p-1)\rho} \setminus 0$ avec $v_-^* \in (\mathrm{St}^*)_{(p-1)\rho}$ tel que $v_-^*(v_-) = 1$, et St le module de Steinberg $\nabla((p-1)\rho)$. Alors le v_--scindage de Frobenius de $\mathcal{B}$ introduit dans [11] et que nous noterons ici

$\sigma : F_*\mathcal{L}((p-1)\rho) \to \mathcal{O}_\mathcal{B}$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\mathcal{B} \arrow[rr, "F^\sharp"] \arrow[dr, "v_- \otimes_{\mathbb{F}_p} Id_{\mathcal{O}_\mathcal{B}}"] \arrow[dd, equal] & & F_*\mathcal{O}_\mathcal{B} \arrow[dd, "F_* v_-"] \\
& \mathrm{St} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_\mathcal{B} \arrow[dl, "v_-^* \otimes_{\mathbb{F}_p} Id_{\mathcal{O}_\mathcal{B}}"] \arrow[dr, dash, "\sim"] & \\
\mathcal{O}_\mathcal{B} & & F_*\mathcal{L}((p-1)\rho). \arrow[ll, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

De [11] (resp. [10, F.22]) on tire que σ (resp. $\sigma \circ F_*v_-$) scinde de manière compatible tous les schémas de Schubert $X^+(w)$ (resp. $X(w)$), $w \in W$, et donc $\sigma \circ F_*v_-$ scinde de manière compatible tous les sous-schémas Y comme dans 4.4 ; rappelons ici ([11, 0.2.2]) que σ est dit scinder de manière compatible une sous-variété fermée Z de $\mathcal{B}$ d'idéal de définition $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{B}$ si et seulement si $\sigma \circ F_*(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{L}((p-1)\rho) \subseteq \mathcal{I}$.

Donnons une vérification directe de ces résultats ; [11] (resp. [10]) montre que le sous-schéma fermé $\mathcal{B}\backslash(U_\Bbbk^+ B_\Bbbk/B_\Bbbk)$ (resp. $\mathcal{B}\backslash(U_\Bbbk w_0 B_\Bbbk/B_\Bbbk)$) est scindé de manière compatible. Prenons $\lambda \in \Lambda^+$ avec $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in R^s$ et posons $A = \coprod_{m\in\mathbb{N}} \nabla_\Bbbk(m\lambda)$, $A' = (p-1)\rho \otimes_\Bbbk \coprod_{m\in\mathbb{N}} \nabla_\Bbbk((p-1)\rho + pm\lambda)$. Définissons une application additive $\Psi^\lambda_{(p-1)\rho} : A' \to A$ par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, dashed, "\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}"] & & A \\
(p-1)\rho \otimes_\Bbbk \nabla_\Bbbk((p-1)\rho + pm\lambda) \arrow[u, hook] \arrow[d, dash, "\sim"'] & & \\
(p-1)\rho \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{St} \otimes_{\mathbb{F}_p} \nabla(m\lambda)^{[1]} \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \arrow[d, "\mu_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk"'] & & \\
\{(p-1)\rho \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{St} \otimes_{\mathbb{F}_p} \nabla(m\lambda)^{[1]}\}^\phi \otimes_{\mathbb{F}_p} \Bbbk \arrow[rr, "\{((p-1)\rho \otimes_{\mathbb{F}_p} v_-^*)^\phi \otimes_{\mathbb{F}_p} \nabla(m\lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} ?^{\frac{1}{p}}"'] & & \nabla_\Bbbk(m\lambda), \arrow[uuu, hook]
\end{tikzcd}$$

dans lequel on a fait l'identification $(\nabla(m\lambda)^{[1]})^\phi \simeq \nabla(m\lambda)$.

Comme $v_-^* : \mathrm{St} \to -(p-1)\rho$ est $B_\Bbbk^+$-linéaire, c'est aussi le cas pour $\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}$. D'autre part, si $v \in \mathrm{St}_\eta$ avec $\eta \neq -(p-1)\rho$, alors pour tous $r \in \mathbb{N}^+$, $z \in \nabla(m\lambda)^{[1]}$,

$$F_i^{(pr)}(v \otimes z) \in \ker(v_-^* \otimes \nabla(m\lambda)^{[1]}).$$

On a $F_i^{(pr)}(v \otimes z) = \sum_{k=0}^{pr}(F_i^{(pr-k)}v) \otimes (F_i^{(k)}z) = \sum_{k=0}^{r}(F_i^{(pr-pk)}v) \otimes (F_i^{(k)}z)$. Si $F_i^{(pk)}v \in \mathbb{F}_p v_- \setminus 0$ il existe $k > 0$ tel que $-(p-1)\rho + kp\alpha_i$ soit un poids de St, et donc

$$s_i(-(p-1)\rho + kp\alpha_i) = -(p-1)\rho - (kp - (p-1))\alpha_i < -(p-1)\rho,$$

ce qui est absurde. Il en découle que pour tous $v \in \mathrm{St}_\eta$, $\eta \in \Lambda$, on a

$$\begin{aligned}(v_-^* \otimes &\nabla(m\lambda)^{[1]})(F_i^{(pr)}(v \otimes z)) \\ &= \begin{cases} v_-^*(v)F_i^{(r)}z = F_i^{(r)}(v_-^* \otimes \nabla(m\lambda)^{[1]})(v \otimes z) & \text{si } \eta = -(p-1)\rho, \\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned}$$

et par suite, pour tout $\xi \in \Bbbk$,

$$\begin{aligned} x_{-\alpha_i}&(\xi) \bullet \Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(1 \otimes v \otimes z \otimes 1) \\ &= x_{-\alpha_i}(\xi)\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(x_{-\alpha_i}(-\xi)(1 \otimes v \otimes z \otimes 1)) \\ &= x_{-\alpha_i}(\xi)\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(\sum_{r\in\mathbb{N}}(-\xi)^r F_i^{(r)}(1 \otimes v \otimes z \otimes 1)) \\ &= x_{-\alpha_i}(\xi)\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(1 \otimes \sum_{r\in\mathbb{N}} F_i^{(r)}(v \otimes z) \otimes (-\xi)^r) \\ &= x_{-\alpha_i}(\xi)\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(1 \otimes \sum_{\substack{r_0\in[0,p[\\ r_1\in\mathbb{N}}} F_i^{(pr_1)}F_i^{(r_0)}(v \otimes z) \otimes (-\xi)^{r_0+pr_1}) \\ &= x_{-\alpha_i}(\xi)\sum_{r_1\in\mathbb{N}}(-\xi)^{r_1}F_i^{(r_1)}\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(1 \otimes \sum_{r_0\in[0,p[} F_i^{(r_0)}(v \otimes z) \otimes (-\xi)^{r_0}) \\ &= \Psi^\lambda_{(p-1)\rho}(1 \otimes \sum_{r_0\in[0,p[} F_i^{(r_0)}(v \otimes z) \otimes (-\xi)^{r_0}). \end{aligned}$$

Ainsi $\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}$ est $B_\Bbbk^+$-linéaire et $B_\Bbbk$-semi-invariant, et donc, en particulier, $G_\Bbbk$-semi-invariant. On remarquera, cependant, qu'aucun

$$(p-1)\rho \otimes_\Bbbk \nabla_\Bbbk((p-1)\rho + pm\lambda)$$

n'est muni d'une structure de $G_\Bbbk$-module ; on a décalé la structure de $T_\Bbbk$-module sur le $G_\Bbbk$-module $\nabla_\Bbbk((p-1)\rho + pm\lambda)$ par $(p-1)\rho$ pour rendre $T_\Bbbk$-linéaire l'application $\Psi^\lambda_{(p-1)\rho}$.

Pour tout $w \in W$, soit $f_w \in \nabla(\lambda)_{w\lambda} \setminus 0$ comme dans 4.2 et écrivons ici $\mathcal{B}_w$ pour $\mathcal{P}_w$. Si l'on définit $\Psi^\lambda_{(p-1)\rho,w}$:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{f}{{f_w}^{pm}} \mid f \in (p-1)\rho \otimes_\Bbbk \nabla_\Bbbk((p-1)\rho + pm\lambda) \right\} \to \Bbbk[\mathcal{B}_w]$$

via $\frac{f}{f_w{}^{pm}} \mapsto \frac{\Psi^{\lambda}_{(p-1)\rho}(f)}{f_w{}^{m}}$, alors les $\Psi^{\lambda}_{(p-1)\rho,w}$, $w \in W$, se recollent pour former σ.

Pour voir directement que les σ scindent de manière compatible les $X^+(w)$, $w \in W$, *i.e.*, que

$$\sigma\{F_*(\mathcal{I}^+(w) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}((p-1)\rho)\} \subseteq \mathcal{I}^+(w)$$

pour le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}^+(w)$ de $X^+(w)$, soit $v^{(p-1)\rho}_{-pm\lambda}$ (resp. $v_{-m\lambda}$) un vecteur de plus bas poids de $\Delta(-w_0((p-1)\rho + pm\lambda))$ (resp. $\Delta(-w_0 m\lambda)$). On doit voir l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\{(p-1)\rho \otimes \mathrm{St} \otimes \nabla(m\lambda)^{[1]}\}^{\phi} \arrow[rr, "\{(p-1)\rho\otimes v^*_-\}^{\phi}\otimes\nabla(m\lambda)"] & & \nabla(m\lambda) \\
(p-1)\rho \otimes \mathrm{St} \otimes \nabla(m\lambda)^{[1]} \arrow[u, "\mu_0"] & & (\mathrm{Dist}(U^+) w v_{-m\lambda})^{\perp}. \arrow[u, hook] \\
(p-1)\rho \otimes \nabla((p-1)\rho + pm\lambda) \arrow[u, dash, "\sim"] & & \\
(p-1)\rho \otimes (\mathrm{Dist}(U^+) w v^{(p-1)\rho}_{-m\lambda})^{\perp} \arrow[u, hook] \arrow[uurr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Rappelons tout d'abord l'isomorphisme G-linéaire $\nabla((p-1)\rho + pm\lambda) \simeq \mathrm{St} \otimes \nabla(m\lambda)^{[1]}$ via

$$\sum v_i \smile f_i^p \longmapsto \sum v_i \otimes f_i, \quad v_i \in \mathrm{St}, f_i \in \nabla(m\lambda).$$

Notons par $\tilde{f} \in \Delta(-w_0((p-1)\rho + pm\lambda))^*$ l'élément correspondant à $f \in \nabla((p-1)\rho + pm\lambda)$. On est ramené à vérifier que

$$\sum v^*_-(v_i)\tilde{f}_i(\mathrm{Dist}(U^+) w v_{-m\lambda}) = 0$$

si $\sum \widetilde{v_i \smile f_i^p}(\mathrm{Dist}(U^+) w v^{(p-1)\rho}_{-pm\lambda}) = 0$, *i.e.*, $\sum v^*_-(v_i) f_i(gw) = 0$ pour tout $g \in U^+$ si

$$0 = \sum (v_i \smile f_i^p)(hw) = \sum v_i(hw) f_i(hw)^p$$

pour tout $h \in U^+$.

Maintenant $\mathrm{St} = \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(G, (p-1)\rho)^B \simeq \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(G_1 B, (p-1)\rho)^B \simeq \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(U_1^+, (p-1)\rho)$ et $\nabla(m\lambda) = \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(G, m\lambda)^B \leqslant \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_p}(U^+, m\lambda)$ via les restrictions. On peut alors regarder

$$\mathrm{St} = \coprod_{\nu \in [0,p[^{R^+}} \mathbb{F}_p t^{\nu} \qquad \text{et} \qquad \{f^p \mid f \in \nabla(m\lambda)\} \subseteq \coprod_{\nu \in \mathbb{N}^{R^+}} \mathbb{F}_p t^{p\nu}$$

dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_p[t]$ en les indéterminées t_α, $\alpha \in R^+$, dans laquelle on écrit t^ν pour $\prod_{\alpha \in R^+} t_\alpha^{\nu_\alpha}$. Supposons que $\sum v_i f_i^p = 0$ sur $U^+ w$.

Comme
$$v_i(U^+w) = v_i(ww^{-1}U^+w) = (w^{-1}v_i)(\prod_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} U_\alpha)$$
et de même pour f_i, $\sum(w^{-1}v_i)(w^{-1}f_i)^p = 0$ sur $\prod\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} U_\alpha$. On peut choisir les v_i à partir d'une base de St incluant v_- et tels que tous les v_i autres que v_- soient annulés par v_-^*. Supposons maintenant que $w^{-1}v_- = 0$ sur $\prod\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} U_\alpha$. Alors, vu comme élément de
$$\coprod_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \mathbb{F}_p t^\nu, w^{-1}v_- \in (t_\alpha \mid \alpha\in R^+, w\alpha<0).$$
Mais alors $w^{-1}v_-$ aurait pour poids $(p-1)\rho - \sum\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha<0}} r_\alpha\alpha - \sum\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} r'_\alpha\alpha$ pour certains $r_\alpha, r'_\alpha \in [0,p[$ sans qu'on ait tous les $r_\alpha = 0$. Il s'ensuivrait que
$$-w^{-1}(p-1)\rho = (p-1)\rho - \sum_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha<0}} r_\alpha\alpha - \sum_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} r'_\alpha\alpha,$$
et donc
$$\sum_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha<0}} r_\alpha\alpha + \sum_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} r'_\alpha\alpha = (p-1)(\rho+w^{-1}\rho) = (p-1)\sum_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} \alpha.$$
Alors on aurait $0 > w\sum\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha<0}} r_\alpha\alpha = w\sum\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} (p-1-r'_\alpha)\alpha \geqslant 0$, ce qui est absurde. Donc, si f_- est associé à v_- dans la somme $\sum(v_i \smile f_i^p)$, on doit avoir, comme $\mathbb{F}_p[U^+]$ est intègre et comme les $w^{-1}v_i \in \coprod_{\nu\in[0,p[^{R^+}} \mathbb{F}_p t^\nu$ sont linéairement indépendants des
$$w^{-1}f_i^p \in \coprod_{\nu\in\mathbb{N}^{R^+}} \mathbb{F}_p t^{p\nu}, w^{-1}f_-^p = 0$$
sur $\prod\limits_{\substack{\alpha\in R^+\\ w\alpha>0}} U_\alpha$, et donc aussi la même chose pour $w^{-1}f_-$. Ainsi
$$\sum v_-^*(v_i)f_i(gw) = f_-(gw) = 0$$
pour tout $g\in U^+$, comme voulu. De même, on peut utiliser le scindage induit par un vecteur de plus haut poids $v_+ \in$ St pour scinder de manière compatible tous les $X(w)$ (mais, dans l'un et l'autre cas, pas les $X(w)$ et $X^+(w)$ en même temps).

Finalement, montrons directement que $\sigma \circ F_* v_-$ scinde de manière compatible tous les $X(w)$, $w \in W$. Cela revient à vérifier que si pour tout $\tilde{f} \in (\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp$ on écrit $v_- \smile f = \sum v_i \smile f_i^p$ dans $\nabla((p-1)\rho + pm\lambda)$ comme ci-dessus, alors $\tilde{f}_- \in (\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp$. Comme les v_i forment une base de St et comme $v_i \in \sum_{\nu \in [0,p[^{R^+}} \mathbb{F}_p t^\nu$, les $f_i \in \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{R^+}} \mathbb{F}_p t^\nu$ sont déterminés de manière unique. Supposons juste que $\tilde{f}_- \neq 0$ sur Uwv_-. Alors $w^{-1} f_- \notin (t_\alpha \mid \alpha \in R^+, w\alpha > 0)$. Mais alors $w^{-1} f \notin (t_\alpha \mid \alpha \in R^+, w\alpha > 0)$, contredisant le fait que $\tilde{f} \in (\mathrm{Dist}(U)wv_-)^\perp$.

Terminons par une question : il est démontré dans [11] and [10] que $\mathcal{L}(-\rho)$ est un facteur direct de $F_*\mathcal{O}_\mathcal{B}$. Néanmmoins, une analyse plus précise de $F_*\mathcal{O}_\mathcal{B}$ fait apparaitre $L((p-2)\rho) \otimes \mathcal{L}(-\rho)$ comme quotient de $F_*\mathcal{O}_\mathcal{B}$. Il est alors naturel de se demander si le formalisme développé ci-dessus permet de voir si $L((p-2)\rho) \otimes \mathcal{L}(-\rho)$ est facteur direct de $F_*\mathcal{O}_\mathcal{B}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. H. Andersen, P. Polo & K. X. Wen, « Representations of quantum algebras », *Invent. Math.* **104** (1991), n° 1, p. 1-59.

[2] M. Brion & S. Kumar, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 231, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005, x+250 pages.

[3] E. Cline, B. Parshall & L. Scott, « Cohomology, hyperalgebras, and representations », *J. Algebra* **63** (1980), n° 1, p. 98-123.

[4] T. J. Enright & N. R. Wallach, « Notes on homological algebra and representations of Lie algebras », *Duke Math. J.* **47** (1980), n° 1, p. 1-15.

[5] M. Gros, « A splitting of the Frobenius morphism on the whole algebra of distributions of SL_2 », à paraître dans Algebras and Represention theory.

[6] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, xvi+496 pages.

[7] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1972, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9, xii+169 pages.

[8] J. C. Jantzen, « Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen », *Bonn. Math. Schr.* (1973), n° 67, p. v+124.

[9] ———, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, viii+266 pages.

[10] ———, *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, xiv+576 pages.

[11] M. Kaneda, « The Frobenius morphism of Schubert schemes », *J. Algebra* **174** (1995), n° 2, p. 473-488.

[12] ———, « Cohomology of infinitesimal quantum algebras », *J. Algebra* **226** (2000), n° 1, p. 250-282.

[13] S. Kumar & P. Littelmann, « Frobenius splitting in characteristic zero and the quantum Frobenius map », *J. Pure Appl. Algebra* **152** (2000), n° 1-3, p. 201-216, Commutative algebra, homological algebra and representation theory (Catania/Genoa/Rome, 1998).

[14] ———, « Algebraization of Frobenius splitting via quantum groups », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), n° 2, p. 491-551.

[15] P. Littelmann, « Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras », *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), n° 3, p. 551-567.

[16] G. Lusztig, « Modular representations and quantum groups », in *Classical groups and related topics (Beijing, 1987)*, Contemp. Math., vol. 82, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 59-77.

[17] G. Lusztig, « Quantum groups at roots of 1 », *Geom. Dedicata* **35** (1990), n° 1-3, p. 89-113.

[18] ———, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993, xii+341 pages.

[19] O. Mathieu, « Filtrations of G-modules », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **23** (1990), n° 4, p. 625-644.

[20] K. McGerty, « Generalized q-Schur algebras and quantum Frobenius », *Adv. Math.* **214** (2007), n° 1, p. 116-131.

[21] V. B. Mehta & A. Ramanathan, « Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties », *Ann. of Math. (2)* **122** (1985), n° 1, p. 27-40.

[22] M. Takeuchi, « Tangent coalgebras and hyperalgebras. I », *Japan. J. Math.* **42** (1974), p. 1-143.

[23] N. Xi, « Irreducible modules of quantized enveloping algebras at roots of 1 », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **32** (1996), n° 2, p. 235-276.

Manuscrit reçu le 3 mai 2010,
révisé le 6 octobre 2010,
accepté le 15 octobre 2010.

Michel GROS
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex (France)
michel.gros@univ-rennes1.fr

Masaharu KANEDA
Osaka City University
Department of Mathematics
3-3-138 Sugimoto
Sumiyoshi-ku
Osaka 558-8585 (Japan)
kaneda@sci.osaka-cu.ac.jp