Annales de l'institut Fourier

Marcel Brelot

Recherches sur la topologie fine et ses applications : théorie du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 395-423

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_395_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 395-423.

RECHERCHES SUR LA TOPOLOGIE FINE ET SES APPLICATIONS (*)

(Théorie du potentiel)

par Marcel BRELOT

---

1. On trouvera ici divers compléments, en théorie axiomatique des fonctions harmoniques avec plus ou moins d'axiomes, sur l'effilement interne ou minimal, c'est-à-dire aussi sur les notions correspondantes de limite et topologie fines : prolongement « à la frontière » de la topologie fine, démonstration de résultats en partie annoncés sur l'interprétation de l'effilement minimal comme effilement « interne » [5], notions d'ensemble W-polaire, de potentiel semi-borné pour interpréter ou perfectionner des résultats antérieurs, en particulier sur les limites des réduites [7, 9, 10]. Comme introduction, voir surtout ma conférence du Colloque de Paris-Orsay [5] ou celle de Loutraki [9].

I. — Notations, rappels et compléments.

2. Rappelons un théorème de topologie générale, extrait de Myskis [15, 12] : Soit un espace topologique Ω, des bases de filtres $\mathcal{B}_i (i \in \mathrm{I})$ formées d'ensembles ouverts. On considère les topologies $\mathcal{T}$ sur $\Omega \cup \mathrm{I}$, laissant Ω ouvert ([1]), induisant sur Ω la topologie donnée et pour lesquelles les voisinages de $i \in \mathrm{I}$ coupent Ω selon les ensembles d'un filtre de base $\mathcal{B}_i$. Il est immédiat qu'il existe parmi elles une topologie la plus fine $\mathcal{T}_\mathrm{M}$

(*) Work partly supported by the Air Force Office of Scientific Research (Contract on Harmonic Analysis, Princeton 1967).

([1]) Condition sous-entendue dans mes publications antérieures et dans [12]. On peut la supprimer sans changer $\mathcal{T}_\mathrm{M}$ mais elle est nécessaire plus loin.

qui est d'ailleurs déterminée par sa propriété d'induire sur I la topologie discrète. Il existe aussi une topologie $\mathcal{T}_m$ qui est la moins fine répondant à ces conditions; elle est déterminée par les voisinages de i définis comme suit. On choisit $\alpha \in \mathcal{B}_i$ et on considère les $\beta \in$ I tels que α contienne un ensemble de $\mathcal{B}_\beta$. Si J_α est leur ensemble, $\alpha \cup J_\alpha$ décrit une base de filtre (quand α varie dans $\mathcal{B}_i$). Ce filtre est le filtre des voisinages de i dans $\Omega \cup I$ pour $\mathcal{T}_m$.

D'après cela $\mathcal{T}_M$ et $\mathcal{T}_m$ coïncident (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une topologie $\mathcal{T}$) si et seulement si, quel que soit i, il existe $\alpha \in \mathcal{B}_i$, qui ne contient aucun ensemble de $\mathcal{B}_j$, $\forall j \neq i$.

3. Dans l'axiomatique des fonctions harmoniques de Brelot [2, 3, 8], on donne sur l'espace fondamental Ω (connexe, localement connexe, localement compact non compact) un faisceau de fonctions « harmoniques » satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3. On supposera de plus l'existence d'un « potentiel » > 0. On sait alors définir l'effilement (interne) en $x \in \Omega$ et la topologie fine sur Ω. On note Δ_1 l'ensemble des fonctions harmoniques > 0 minimales situées dans une base du cône S^+ des fonctions surharmoniques > 0 (éléments extrémaux harmoniques de cette base). On sait que l'effilement (minimal) de e Ω en $X \in \Delta_1$ se traduit par : R_X^e (réduite de la fonction harmonique X) différente de la fonction X dans Ω, ce qui équivaut à : $\hat{R}_X^e$ est un potentiel. Les complémentaires des effilés en X forment un filtre $\mathcal{F}_X$ admettant une base $\mathcal{B}_X$ formée des ouverts fins de complémentaires effilés en X (car l'adhérence fine de e donne la même réduite). Les limites selon $\mathcal{F}_X$ sont dites fines (minimales).

On notera A_1 l'axiomatique précédente augmentée de l'hypothèse d'une base dénombrable d'ouverts de Ω; on rappelle que M^me Hervé [14] a dans ce cas défini sur l'espace des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ une topologie T rendant compacte métrisable une base B convenable et désormais fixée du cône S^+. Toute fonction surharmonique $v \geqslant 0$ se représente par $v(y) = \int u(y)\, d\mu(u)$, où μ est une mesure $\geqslant 0$ de Radon sur B, ne changeant que Δ_1 (de type G_δ) et alors unique, notée μ_v (mesure associée à v).

On notera A_1^p, A_1 augmentée de l'hypothèse de proportionalité des potentiels de support ponctuel x (pôle), $\forall x$. On sait qu'alors, sur B pourvu de T, ces potentiels forment un ensemble homéomorphe à Ω [12] et dont l'adhérence selon T donne un ensemble noté $\hat{\Omega}$ (espace de Martin), dont $\hat{\Omega} - \Omega = \Delta$ (frontière de Martin) contient Δ_1. Alors μ_v peut être considéré sur $\hat{\Omega}$.

D'autre part la théorie des fonctions harmoniques adjointes de M^me^ Hervé [14] demande l'introduction d'une base de domaines « complètement déterminants ». On notera A_2 la somme des hypothèses « A_1^p, et cette base »;

4. Avec A_1, Gowrisankaran [13] étendant le cas classique de Doob, a montré que, pour deux fonctions surharmoniques > 0 u et v, u/v admet selon $\mathcal{F}_X$ une limite finie, $d\mu_v$-presque partout sur Δ_1. Cela montre l'intérêt d'étudier sur Δ_1, les ensembles de mesure-$d\mu_v$ nulle.

D'autre part, il est évident avec A_1 que u/v admet dans Ω une limite fine en tout point où v est finie.

Avec A_2, on montre, par le même raisonnement que Doob dans le cas classique, que en tout y de l'ensemble polaire E où $v = +\infty$, u/v admet ($x \neq y$, $x \to y$) une limite fine *adjointe* finie $d\mu_v$-presque partout (d'où l'intérêt des ensembles polaires de $d\mu_v$-mesure nulle). On se ramène à prendre un compact $K \subset E$; les fonctions harmoniques minimales dans $\Omega - K$ sont celles de Ω, plus à un facteur près les potentiels p_y (de pôle y) situés dans B. L'effilement minimal relatif à p_y est identique [14] à l'effilement adjoint en y dans Ω d'où le résultat.

Plus généralement, avec A_1, si x est polaire, les fonctions harmoniques minimales de Ω-$\{x\}$ sont, outre celles de Ω, les potentiels (à un facteur près) extrémaux z de Ω situés dans B et de pôle en x; les complémentaires sur Ω-$\{x\}$ des ensembles ($\not\ni x$) effilés relativement à z forment une base de filtre $\mathcal{F}_z$. Si z varie, de pôle sur E, Mokobodski remarque que u/v admet selon $\mathcal{F}_z$, une limite finie pour tout z sauf ceux d'un ensemble de mesure-$d\mu_v$ nulle. Même raisonnement et énoncé commun avec celui de Gowrisankaran.

II. — Prolongement de la topologie fine sur $\Omega \cup \Delta_1$.

5. Lemme 1 (Hyp. A_1). — *Soit $\varphi(p)$ le pôle sur Ω du potentiel extrémal $p \in$ B. On sait que $p \to \varphi(p)$ est continue. Si v surhar-*

monique > 0 *est harmonique dans un ouvert, la mesure associée* μ_v *sur* B *ne charge pas* $\varphi^{-1}(\omega)$.

Sinon soit p_0 un point du support fermé de μ, situé dans $\varphi^{-1}(\omega)$ et ω_0 un ouvert de $\omega(\overline{\omega}_0 \subset \omega)$ contenant $\varphi(p_0)$, avec mesure harmonique $d\rho^{\omega_0}_{\varphi(p_0)}$. Alors $\int p(y)\, d\rho^{\omega_0}_{\varphi(p_0)} \leqslant p(\varphi(p_0))$, mais inégalité stricte si $\varphi(p) \in \omega_0$ donc pour p assez voisin de p_0.

D'où

$$\int \Big(\int p(y)\, d\mu(p)\Big)\, d\rho^{\omega_0}_{\varphi(p_0)}(y) < \int p(\varphi(p_0)\, d\mu(p)$$

de sorte que $v(y)$ égal à $\int (p(y)\, d\mu(p)$ n'est pas harmonique dans ω.

Lemme 2 (Hyp. A_1). — *Soit* $E \subset B$, *dont les fonctions* v *sont harmoniques dans* ω *ouvert. Alors les fonctions de* $\overline{E}$ *sont aussi harmoniques dans* ω *et pour* y *fixé* $\in \omega$, $v(y)$ *est finie continue de* v *sur* $\overline{E}$ (d'après M^me^ Hervé [14] prop. 21,2 cor. 2).

Lemme 3 (Hypothèse A_1). — *Considérons un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $X \in \Delta_1$ *sur la base* B *et l'ensemble* $\mathcal{V}_0 \subset \Omega$ *des pôles des potentiels extrémaux de* B *situés dans* $\mathcal{V}$. *Alors* $C_\Omega \mathcal{V}_0$ *est effilé en* X *(et par suite* $\mathcal{V}_0$ *est non effilé en* X*).*

On peut supposer $\mathcal{V}$ ouvert dans B et alors $\mathcal{V}_0$ est borélien dans Ω. Comme $R^K_X(y_0)$ est une capacité forte de Choquet, comme fonction du compact $K \subset \Omega$ et que la capacité extérieure est égale à $R^{e}_X(y_0)$ [2 ou 3], on a

$$R_X^{C\mathcal{V}_0}(y_0) = \sup_{K \subset C\mathcal{V}_0} R^K_X(y_0)$$

Donc on peut former K_n croissant $\subset C_\Omega \mathcal{V}_0$ tel que

$$R^{K_n}_X(y_0) \geqslant R^{C_\Omega \mathcal{V}_0}_X(y_0) - 1/n$$

d'où

$$R^{\cup K_n}_X(y_0) = R^{C_\Omega \mathcal{V}_0}_X(y_0).$$

Si alors $C_\Omega \mathcal{V}_0$ était non effilé en X, on trouverait $\alpha \subset C_\Omega \mathcal{V}_0$, fermé, non effilé en X et nous allons obtenir une contradiction dans cette hypothèse qui s'écrit $R^\alpha_X = X$. On introduit β_n compact croissant dans Ω, tel que $\cup \beta_n = \Omega$. Alors $\hat{R}^{\alpha \cap \beta_n}_X$ est un potentiel $V_n(y) = \int p(y)\, d\mu_n(p)$ où p décrit B et $\mu_n \geqslant 0$ ne charge que l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments extrémaux de B. Mais comme ce potentiel est harmonique dans $C_\Omega\alpha$, μ_n ne charge pas l'ensemble des fonctions harmoniques de B ni $\varphi^{-1}(C\alpha)$ donc ne charge pas $\mathcal{V}$. Or en y fixé, $V_n(y) \leqslant X(y)$ et $\inf_{p \in B} p(y) > 0$ d'où $\|\mu_n\|$ borné. On peut donc extraire μ_{n_q} convergeant vers μ (sur B) supporté par (de support fermé dans) $\overline{\varphi^{-1}(\alpha)}$ (adhérence dans B) et $C_B\mathcal{V}$. Alors $R_X^{\alpha \cap \beta_n}$ tend (pour $q \to \infty$) vers R_X^α en tout point (propriété de capacité comme plus haut) donc $\hat{R}_X^{\alpha \cap \beta_{n_q}} \to \hat{R}_X^\alpha$ en tout $y \in C_\Omega\alpha$; d'autre part, si $p \in \varphi^{-1}(\alpha)$, p est harmonique dans $C_\Omega\alpha$ et si $\nu \in \overline{\varphi^{-1}(\alpha)}$, $\nu(y)$ pour $y \in C_\Omega\alpha$ est finie continue de ν. D'où, pour $y \in C_\Omega\alpha$

$$\int p(y)\, d\mu_{n_q}(p) \underset{q \infty}{\longrightarrow} \int p(y)\, d\mu(p) = \hat{R}_X^\alpha(y) = X(y)$$

On peut remplacer α par $\alpha \cap C\Omega_n$ où Ω_n est ouvert relativement compact de Ω, croissant, avec $\bigcup \Omega_n = \Omega$. Alors

$$X(y) = \int p(y)\, d\nu_n(p)$$

avec ν_n supporté par $C_B\mathcal{V} \cap \overline{\varphi^{-1}(\alpha \cap C\Omega_n)}$.

D'où par extraction de suite

$$X(y) = \int p(y)\, d\nu(p) \quad \forall y \in \Omega$$

où ν est supporté par $C_B\mathcal{V}$. Comme le centre de gravité de ν doit être dans B, $\|\nu\| = 1$; comme X est ce centre et extrémal, ν doit être la mesure-unité en X alors que $\mathcal{V}$ est de ν-mesure nulle, contradiction cherchée.

Remarque 1. — Avec A_1^p, le lemme signifie que si δ est un voisinage dans $\hat{\Omega}$ de $X \in \Delta_1$, $C_\Omega\delta$ est effilé et $\delta \cap \Omega$ non effilé.

6. Lemme 4. — *En supposant* A_1^p, *ou seulement* $A'(A_1 +$ *effilement en tout* $X \in \Delta_1$ *de l'ensemble* $\mathcal{L}$ *des points de non proportionalité*), *il existe, pour tout* $X_0 \in \Delta_1$, *un ensemble* E *effilé en* X_0 *et non effilé en tout* $Y \in \Delta_1$, $Y \neq X_0$.

Couvrons $B - \{X_0\}$ par une réunion dénombrable d'ouverts α_n auxquels X_0 n'est pas adhérent et soit π_n l'ensemble des pôles des potentiels extrémaux de α_n; π_n est non effilé en tout point de $\Delta_1 \cap \alpha_n$; de plus si ω est l'ensemble des potentiels extrémaux d'un voisinage de X_0 ne coupant pas α_n,

$$\pi_n \cap \varphi(\omega) \subset \mathcal{L}; \qquad \pi_n \cap C_\Omega\varphi(\omega)$$

étant effilé en X_0, de même π_n.

Comme $\hat{R}_{X_0}^{\pi_n}$ est un potentiel, l'intersection π'_n de π_n avec le complémentaire d'un compact convenable K_n de Ω ($\mathring{K}_n \ni y_0$ fixé) donne

$$\hat{R}_{X_0}^{\pi'_n}(y_0) = R_{X_0}^{\pi'_n}(y_0) < \varepsilon . 2^{-n}$$

D'où

$$R_{X_0}^{\cup\pi'_n}(y_0) < \varepsilon$$

L'ensemble $\cup\pi'_n$ répond à la question.

Remarque 2. — Avec A_1^p l'ensemble formé est effilé en X_0 et, pour tout $X \in \Delta(X \neq X_0)$ est l'intersection avec Ω d'un voisinage de X dans $\hat{\Omega}$.

THÉORÈME 1. — *En supposant* A_1, *il existe sur* $\Omega \cap \Delta_1$ *des topologies dites fines, induisant sur* Ω *la topologie fine et pour chacune desquelles les voisinages de tout* $X \subset \Delta_1$ *coupent* Ω *selon les ensembles de* $\mathcal{F}_X$. *Ces topologies rendent* Ω *ouvert; il en existe une, la plus fine (qui d'ailleurs induit sur* Δ_1 *la topologie discrète) et une, la moins fine* (²). *En supposant* A_1^P *ou seulement* A' *elles sont identiques (dite topologie fine prolongée).*

On remarque que tout voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x dans Ω relativement compact est effilé en tout $X \in \Delta_1$, (vu l'existence d'un potentiel majorant la fonction X sur $\mathcal{V}$) et $C_\Omega\mathcal{V}$ est donc non effilé. De sorte que $\mathcal{V}$ est aussi voisinage de X dans toute topologie fine supposé existente. D'où la propriété que Ω est ouvert pour ces topologies.

Les points X de Δ_1 étant pris pour les i du n° 2 et $\mathcal{B}_i$ étant l'ensemble des ouverts fins de Ω de complémentaires effilés en X ou i, il suffit alors d'appliquer le n° 2 et le lemme 4.

Remarque 3. Ainsi est justifié le nom de limite fine pour limite selon $\mathcal{F}_X$.

Remarque 4. — Rappelons qu'avec A_1^p, $\mathcal{F}_X$ est plus fin que la trace sur Ω du filtre des voisinages de $X \in \Delta_1$ dans $\hat{\Omega}$[12]; donc sur $\Omega \cup \Delta_1$, la topologie fine prolongée est plus fine que la topologie induite par $\hat{\Omega}$.

(²) Jusqu'ici il est inutile de supposer une base dénombrable de Ω.

III. — Interprétation de l'effilement minimal comme « interne ».

7. On se placera plus loin dans A_2 et on choisira un domaine complètement déterminant ω_0 et la base compacte B définie par la condition $\int \varphi \, d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$ ($y_0 \in \omega_0$; $d\rho_{y_0}^{\omega_0}$ mesure harmonique). L'espace de Martin $\hat{\Omega}$ est homéomorphe à l'adhérence dans B de l'ensemble des potentiels p_x extrémaux de B. On note aussi $p_X(y)$ la fonction harmonique minimale qui est l'élément extrémal X de B. Dans A_2 on note $p_y^*(x) = p_x(y) (x, \ y \in \Omega)$. C'est un potentiel adjoint particulier.

Lemme 5 (Hypothèse A_1). — *Si* $E \subset \Omega$ *est effilé en* $X \in \Delta_1$, *il existe* ω *ouvert de* Ω *le contenant et effilé en* X.

Car $R_X^e(y_0)$ est, comme on l'a rappelé, une capacité extérieure de Choquet, donc vaut $\inf\limits_{\omega} R_X^{\omega}(y_0)$ (ω ouvert $\supset e$). De sorte que $\hat{R}_X^e$ étant un potentiel, $\int \hat{R}_X^E \, d\rho_{y_0}^{\omega_1}$ est arbitrairement petit pour ω_1 ouvert convenable contenant y_0 ; donc de même $\hat{R}_X^{E \cap CK}(y_0)$ ou $R_X^{E \cap CK}(y_0)$ pour un compact K convenable; par suite aussi $R_X^{\omega_2}(y_0)$ pour un ouvert ω_2 convenable contenant $E \cap CK$. D'où l'effilement de ω_2 puis de $\omega_2 \cup \omega'$ où ω' est un voisinage ouvert de K, relativement compact, car ω' est effilé.

Lemme 6 (Hypothèse A_1). — *Toute inégalité*

$$\int \varphi \, d\mu_1(y) \leqslant \int \varphi \, d\mu_2(y)$$

(μ_1, μ_2 mesures $\geqslant 0$ *sur* Ω) *valable pour les potentiels extrémaux d'une base quelconque s'étend à toutes les fonctions surharmoniques* $\varphi \geqslant 0$.

Car si α_n est un compact croissant, tel que $\bigcup \alpha_n = \Omega$, $\hat{R}_\varphi^{\alpha_n}(y)$ est un potentiel qui s'écrit $\int p(y) \, d\nu_n(p)$ (ν_n ne chargeant que l'ensemble des potentiels extrémaux) d'où

$$\int \hat{R}_\varphi^{\alpha_n}(y) \, d\mu_1(y) = \int \Big(\int p(y) \, d\mu_1(y) \Big) d\nu_n(p)$$

et de même avec μ_2.

L'hypothèse entraîne donc :

$$\int \hat{R}_v^{\alpha_n}(y)\, d\mu_1(y) \leqslant \int \hat{R}_v^{\alpha_n}(y)\, d\mu_2(y)$$

et à la limite $\int v\, d\mu_1(y) \leqslant \int v\, d\mu_2(y)$

Théorème 2 [3] (Hypothèse A_2). — *L'effilement (minimal) de* $E \subset \Omega$ *en* $X \subset \Delta_1$ *équivaut à l'existence d'une mesure* $\mu \geqslant 0$ *sur* Ω *telle que, en topologie Martin* T :

$$(1) \qquad \int p_X(y)\, d\mu(y) < \liminf_{x \in E,\, x \to X} {}_T \int p_x(y)\, d\mu(y)$$

Noter que si X est non T-adhérent, il y a effilement (Lemme 3) et que la condition précédente est satisfaite, car le 2e membre vaut par définition :

$$\sup_{\delta} \inf_{x \in E \cap \delta} \int \quad (\delta,\ \text{T-voisinage})$$

et vaut alors $+\infty$, en particulier si $\mu = 0$ (le inf d'une fonction réelle sur un ensemble vide est $+\infty$).

Soit E effilé, on se ramène au cas de E ouvert d'après le lemme 4. Il existe alors $z \subset \Omega$ tel que

$$p_X(z) > \hat{R}_{p_X}^{E}(z) = \int p_X(y)\, d\varepsilon'_z(y)$$

où ε'_z est la mesure balayée relativement à E de la mesure de Dirac ε_z [14, th. 10, 1]. Voyons que cette mesure répond à la question.

Étudions

$$V(x) = \int p_x(y)\, d\varepsilon'_z(y) = \hat{R}_{p_x}^{E}(z) = \hat{R}_{p_z^*}^{*E}(x)$$

(x, y, z dans Ω) d'après la théorie des fonctions harmoniques adjointes [14], avec $p_x^*(y) = p_y(x)$ et R^* définie en théorie adjointe.

La dernière balayée vaut sur E (ouvert) p_z^*, c'est-à-dire la fonction $x \to p_x(z)$. Selon le filtre des voisinages de X sur B, p_x tend vers X, donc en z, $p_x(z)$ tend vers $p_X(z)$ lorsque $x \to X$ dans $\hat{\Omega}$, en restant dans Ω et en particulier sur E (si X est T-adhérent à E). Donc $V(x) \to p_X(z)$ ($x \in E$, $x \to X \in \overline{E}$ en

[3] Extension d'un résultat de Naïm [16] donné dans le cas classique.

topologie T), c'est-à-dire en ce sens

$$\int p_x(y)\, d\varepsilon'_z(y) \to p_{\mathrm{X}}(z) > \int p_{\mathrm{X}}(y)\, d\varepsilon'_z(y)$$

ce qui est plus précis que (1).

Réciproquement si X est T-adhérent à E quelconque et (1) satisfaite avec μ, on introduit un nombre γ strictement compris entre les termes de (1) et un voisinage δ de X dans $\hat{\Omega}$ tel que $\int p_x(y)\, d\mu(y) \geqslant \gamma$ sur $\delta \cap \mathrm{E}$.

Comme $\int p_x(y)\, d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$, $p_x(y_0)$ ou $p^*_{y_0}(x)$ vaut 1 pour $x \notin \overline{\omega}_0$. D'où si δ a été choisi hors $\overline{\omega}_0$,

$$\int p_x(y)\, d\mu(y) \geqslant \gamma p^*_{y_0}(x) \quad x \in \mathrm{E} \cap \delta$$

puis $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned}\int p_x(y)\, d\mu(y) &\geqslant \gamma \hat{\mathrm{R}}^{*\mathrm{E}\cap\delta}_{p^*_{y_0}}(x)\\ &\geqslant \gamma \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}\cap\delta}_{p_x}(y_0) = \gamma \int p_x\, d\varepsilon''_{y_0} \quad \text{(balayée pour E} \cap \delta).\end{aligned}$$

L'inégalité

$$\int p_x\, d\varepsilon''_{y_0} \leqslant \frac{1}{\gamma} \int p_x(y)\, d\mu\,(y)$$

s'étend donc selon

$$\int p_{\mathrm{X}}\, d\varepsilon''_{y_0} \leqslant \frac{1}{\gamma} \int p_{\mathrm{X}}(y)\, d\mu\,(y)$$

d'où

$$\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{E}\cap\delta}_{p_{\mathrm{X}}}(y_0) \leqslant \frac{1}{\gamma} \int p_{\mathrm{X}}(y)\, d\mu\,(y) < 1 = p_{\mathrm{X}}(y_0)$$

ce qui montre l'effilement de $\mathrm{E} \cap \delta$ donc de E.

Corollaire. — *Pour toute mesure* $\mu \geqslant 0$ *sur* Ω *et* $\mathrm{X} \in \Delta_1$

$$\liminf_{x \in \Omega,\, x \to \mathrm{X}}{}_{\mathrm{T}} \int p_x(y)\, d\mu\,(y) = \int p_{\mathrm{X}}(y)\, d\mu\,(y)$$

puisque Ω *n'est pas effilé en* X.

8. Théorème 3 (Avec A_2). — *Toute fonction surharmonique adjointe* $\geqslant 0$ *admet en* $\mathrm{X} \in \Delta_1$, *sur* Ω, *une lim. selon* $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$ *égale à la lim. inf*$_{\mathrm{T}}$.

Supposons ce dernier nombre Λ fini et montrons que l'ensemble E_ε où $v > \Lambda + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ est effilé en X :

$$v \geqslant (\Lambda + \varepsilon)\hat{R}^{*E_\varepsilon \cap \delta}_{p^*_{y_0}} \quad (\delta \text{ voisinage de X assez petit})$$
$$v(x) \geqslant (\Lambda + \varepsilon)\hat{R}^{E_\varepsilon \cap \delta}_{p_x}(y_0) = (\Lambda + \varepsilon)\int p_x \, d\varepsilon'_{y_0}$$

(ε'_{y_0} balayée de ε_{y_0} pour $E_\varepsilon \cap \delta$).

Donc

$$\int p_X \, d\varepsilon'_{y_0} = \liminf_{x \in \Omega,\, x \to X} {}_T \int p_x(y)\, d\varepsilon'_{y_0} \leqslant \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \liminf_{x \to X} v < 1$$

c'est-à-dire $\hat{R}^{E_\varepsilon \cap \delta}_{p_X}(y_0) < 1 = p_X(y_0)$, ce qui montre l'effilement cherché.

Théorème 4 (Hypothèse A_2). — *Considérons sur* $\Omega \cup \Delta_1$, *pourvu de la topologie* T, *la famille* Φ_1 *des fonctions surharmoniques adjointes* $\geqslant 0$ *prolongées sur* Δ_1 *par s.c.i selon* T *(et augmentée de la fonction* $+\infty$*), la sous-famille* Φ_2 *obtenue de même à partir des potentiels adjoints et la sous-famille* Φ_3 *de* Φ_2 *obtenue à partir des potentiels de type* $\int p_x(y)\, d\mu(y)$. *Soient* T_1, T_2, T_3 *les topologies* [4] *sur* $\Omega \cup \Delta_1$ *associées à* Φ_1, Φ_2 *ou* Φ_3 *(c'est-à-dire parmi celles plus fines que* T, *les moins fines rendant continues les fonctions de* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *resp.).* T_1 *et* T_2 *sont identiques à l'unique topologie, induisant sur* Ω *(laissé d'ailleurs ouvert) la topologie afine djointe et donnant pour les voisinages de tout* $X \subset \Delta_1$ *des ensembles coupant* Ω *selon les complémentaires des effilés en* X. *De même pour* T_3 *en remplaçant la topologie fine adjointe par celle qui est sur* Ω, *parmi les plus fines que celles de* Ω, *la moins fine rendant continus les potentiels* $\int p_x(y)\, d\mu\,(y)$. *Ces topologies* T_1, T_2, T_3 *induisent sur* Δ_1, *la topologie discrète. L'effilement interne en* X, *relatif à* $\Omega \cup \Delta_1$, *(avec topologie* T *de* $\hat{\Omega}$*) et à* Φ_1, Φ_2 *ou* Φ_3 *est pour* $E \subset \Omega$ *exactement l'effilement minimal).*

Cet effilement minimal s'interprète comme effilement interne relatif à Φ_3 grâce au théorème 2 et son corollaire, et comme effilement interne relatif à Φ_1 et Φ_2, grâce en outre au théorème 3. *On voit donc que l'effilement minimal se conserve*

[4] Ces topologies induisent sur Ω les topologies définies de la même manière à partir de Φ_1, Φ_2, Φ_3 sur Ω pourvu de sa topologie initiale.

par fermeture dans Ω *selon* T_1, T_2 *ou* T_3, *en particulier en topologie fine adjointe.*

Si l'on part de l'existence pour tout $X \in \Delta_1$ d'un ensemble de Ω effilé en X et non effilé ailleurs sur Δ_1, on peut raisonner comme au théorème 1 pour obtenir les propriétés d'unicité de prolongement des topologies considérées sur Ω.

Remarque 5. — Lorsque la topologie fine adjointe est identique à la topologie fine, celle-ci prolongée comme au théorème 1 s'interprète donc comme la topologie associée à la famille des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ (ou seulement les potentiels) *adjointes* prolongées par s.c.i. selon T.

9. *Effilement fort, ineffilement fort.*

Rappelons [4] que pour un cône convexe Φ de fonction $\geqslant 0$ s.c.i. (contenant $+\infty$) sur un espace Ω, l'effilement de e en $x_0 \notin e$ (lié à la topologie fine associée) se traduit par $\inf_\sigma R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage de x_0 et réduite R bien connue) et est dit *fort* si le premier membre est nul (il est $\leqslant 1$ s'il existe $u \in \Phi$ fini > 0 en x_0). L'ineffilement fort se définit par $\inf_\sigma (\sup_\delta R_1^{e \cap \sigma \cap \complement \delta}(x_0) \geqslant 1$ (5) (δ voisinage) et est satisfait si, $\forall A \not\ni x_0$,

$$\sup_\delta R_1^{A \setminus \delta}(x_0) = R_1^A(x_0)$$

Ces propriétés entraînent [4] d'importants résultats sur les limites fines (c'est-à-dire selon la topologie fine) et il faut donc les examiner dans le cadre de l'axiomatique des fonctions harmoniques.

Théorème 5. — *Avec* A_1, *même sans base dénombrable, ou dans les conditions de Bauer* [0] *on considère sur* Ω *la topologie fine relative au cône des fonctions hyperharmoniques* $\geqslant 0$. *En tout* x_0 *polaire, l'effilement de* $e \not\ni x_0$ *est fort; en* x_0 *non polaire, il en est de même si les potentiels de pôle* x_0, *localement bornés, sont continus en* x_0 (6) *(H. Bauer). Avec* A_1 *l'ineffilement est toujours fort.*

On utilise pour l'effilement de e en x_0, selon Bauer, la pro-

(5) S'il existe dans Φ une fonction finie et > 0 en x_0, cette condition équivaut à l'égalité avec 1.

(6) Ce qui a lieu, comme on sait, si D est satisfait. Voir [4], [14, n° 14].

priété de Mme Hervé, [14] (th. 14, 1), sous les conditions indiquées, qu'il existe une fonction surharmonique $\geqslant 0$ finie en x_0, tendant vers $+\infty$ en x_0 sur e.

Quant à l'ineffilement de e en $x_0 \notin e$, il suffit de rappeler que, dans des conditions d'ailleurs plus générales $R_1^{e\setminus\delta_n} \to R_1^e$ (δ_n suite décroissante de voisinages de x_0, $\cap \delta_n = \{x_0\}$) (voir [1]).

Lemme 7. — *Le théorème 2 avec* A_2 *se complète par l'existence pour tout* $E \subset \Omega$ *effilé en* $X_0 \in \Delta_1$, *d'une mesure* $\mu_0 > 0$ *sur* Ω *telle que* $\int p_{X_0}(y)\, d\mu_0(y) < \infty$ *et* $\int p_x(y)\, d\mu_0(y) \to +\infty$ *quand* $x \in E$, $x \to X_0$ *en topologie* T.

On raisonne comme pour l'effilement classique interne; on part d'une mesure μ satisfaisant à (1) (théorème 2); on rappelle que $\int p_x(y)\, d\nu$ pour ν à support compact dans Ω tend vers $\int p_{X_0}(y)\, d\nu$ pour $x \underset{T}{\to} X_0$; on considère des voisinages décroissants σ_n de X_0 dans $\hat{\Omega}$ tels que, si μ_n est la restriction de μ à σ_n, $\Sigma \int p_{X_0}(y)\, d\nu_n(y) < \infty$. Alors la mesure $\Sigma\mu_n$ répond à la question. Car si ε est la différence des termes de (1) pour μ, de même pour les μ_n et, N étant fixé, $\int p_x\, d\sum_i^N \mu_n$ majore $N\dfrac{\varepsilon}{2}$ sur E dans un T-voisinage convenable de X. Donc aussi $\int p_x\, d\Sigma\mu_n$.

Lemme 8. — *On complète le lemme précédent (avec* A_2*) en remarquant que pour tout* $X_0 \in \Delta_1$, *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *sur* Ω *telle que :*

$$\int p_{X_0}(y)\, d\mu(y) < \infty, \quad \int p_X(y)\, d\mu(y) \underset{T}{\to} +\infty (X \in \Delta_1,\ X \neq X_0).$$

Il suffit d'utiliser un ensemble $E \subset \Omega$ effilé en X_0 et qui est pour tout $X \in \Delta_1$ $X \neq X_0$ la trace sur Ω d'un T-voisinage de X. La mesure μ_0 du lemme précédent répond à la question car en tout $X \in \Delta_1$

$$\int p_X(y)\, d\mu\,(y) = \liminf_{x \in \Omega,\ x \to X} {}_T \int p_x(y)\, d\mu\,(y)$$

Théorème 6. — *Avec* A_2, *l'effilement en* $X \subset \Delta_1$ *associé aux familles* Φ_1, Φ_2 *ou* Φ_3 *du théorème 4 sur* $\Omega \cup \Delta_1$, *est toujours fort. De même pour l'ineffilement.*

Pour l'effilement, on remarque que $\Delta_1 - \{X_0\}$ est effilé et même fortement effilé relativement à Φ_3 (lemme 8) donc aussi à Φ_1, Φ_2. Si alors $E \subset \Omega \subset \Omega \cup \Delta_1 (E \not\ni X_0)$ est effilé en X_0 pour $\Phi_i (i = 1, 2$ ou $3)$, $E \cap \Delta_1$ est fortement effilé, $E \cap \Omega$ est effilé (au sens minimal) d'après le théorème 4 et fortement effilé pour Φ_3 donc Φ_i d'après le lemme 7.

Pour l'ineffilement, il suffit d'examiner le cas de E non effilé $\subset \Omega$ et de Φ_1, ce qui entraîne le cas général. On peut supposer $\overline{E} \cap \overline{\omega}_0 = \emptyset$ (voir ω_0 défini n° 7). Toute fonction φ de Φ_1 majorant 1 sur $E \cap \delta$ (δ voisinage-T de X) majore dans Ω $\hat{R}^{*E \setminus \delta}_{p^*_{y_0}}(x)$ ou $\hat{R}^{E \setminus \delta}_{p_x}(y_0)$ qui vaut, au moins pour x intérieur à $\delta \cap \Omega$ (δ voisinage-T de X) : $\int p_x \, d\varepsilon^{\delta}_{y_0}$ ($\varepsilon^{\delta}_{y_0}$ balayée de ε_{y_0} pour $E \setminus \delta$). Alors $\varphi(x)$ majore la lim $\inf_T$ ($x \in \Omega$, $x \to X$) de cette expression, soit $\int p_X \, d\varepsilon^{\delta}_{y_0}$ (th. 2, corollaire).

Il suffit donc de voir que $\sup\limits_{\delta} \int p_X \, d\varepsilon^{\delta}_{y_0} = 1$ c'est-à-dire $\hat{R}^{E \setminus \delta}_{p_X}(y_0) \to \hat{R}^{E}_{p_X}(y_0)$ pour une suite décroissante δ_n ($\cap \delta_n = \{X\}$) ce qui est connu parmi les propriétés des réduites [1].

10. *Compléments avec* A_1^p. *Critères de minimalité* (extension du cas classique Naïm).

Lemme 9 (hypothèse A_1^p: usage de T, $\hat{\Omega}$ et $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$). — *Pour que u harmonique* > 0 *soit minimale, il faut et suffit qu'il existe* $X_0 \in \Delta$ *tel que,* $\forall \delta$ (T-*voisinage de* X_0 *dans* $\hat{\Omega}$), $R_u^{\delta \cap \Omega} = u$ *et alors u est proportionnelle à la fonction* X_0 *notée aussi* p_{X_0}.

On sait que la condition est nécessaire (lemme 3, remarque 1). Supposons-la. Si Ω_n est croissant, relativement compact avec $\cup \Omega_n = \Omega$, $\hat{R}_u^{\delta \cap \Omega} = \lim \hat{R}_u^{\delta \cap \Omega_n}$ [1]. Si μ_n est la mesure associée au potentiel $u_n = \hat{R}_u^{\delta \cap \Omega_n}(y)$, $u_n = \int p_x(y) \, d\mu_n(x)$ (où $p_x(y)$ désigne le potentiel (dans B) de pôle x ou la fonction harmonique correspondant à $x \in \Delta$). On en déduit que $\|\mu_n\|$ est bornée; on peut extraire une suite μ_{n_q} convergeant vaguement vers μ qui est portée par $\overline{\delta}$ comme μ_n. Comme $x \to p_x(y)$ pour y fixé $\in C\overline{\delta} \cap \Omega$ est continue de $x \in \overline{\delta}$ (voir [14]), le passage à la limite sur l'expression de u_{n_q} donne

$$u(y) = \int p_x(y) \, d\mu \, (x) \quad \forall y \in C\overline{\delta} \cap \Omega.$$

En imaginant δ_n décroissant, $\cap \delta_n = \{X_0\}$, il vient de même :

$u(y)$ proportionnel à $p_{X_0}(y)$ avec coefficient indépendant de y dans $C\delta$ puis même dans Ω.

Puis si $u = u_1 + u_2$ (fonctions harm. > 0), on voit à cause de l'additivité des réduites que $\hat{R}_{u_1}^{\delta \cap \Omega} = u_1$, donc u_1 et de même u_2 sont proportionnels à p_{X_0}; u et X_0 sont minimaux.

Théorème 7. — *Critère* 1 (*avec l'hypothèse* A_1^p *du lemme* 9). *Pour que* $X \in \Delta$ *soit minimal il faut et suffit que* $\hat{R}_{p_X}^{\delta \cap \Omega} = p_X$ $\forall \delta$, T-*voisinage de* X *dans* $\hat{\Omega}$) (*conséquence du lemme* 9).

Critère 2 (Hyp. A_2). *Pour que* $X \in \Delta$ *soit minimal, il faut et suffit que* $\forall \mu$ *mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω,

$$\int p_X \, d\mu\,(y) = \liminf_{x \in \Omega,\ x \to X} {}_{T} \int p_x(y)\, d\mu\,(y)$$

Si $X \in \Delta_1$, la propriété précédente est le corollaire du th. 2.

Si $X \in \Delta - \Delta_1$ il existe un T-voisinage δ ouvert de X tel que $\hat{R}_{p_X}^{\delta \cap \Omega} \neq p_X$ et la première partie de la démonstration du théorème 2 est valable et montre l'existence d'une mesure $\geqslant 0$ sur Ω telle que

$$\int p_x(y)\, d\mu\,(y) \xrightarrow[\substack{x \in \Omega \\ x \to X}]{} \text{limite}_T > \int p_X(y)\, d\mu(y)$$

Remarque 6. — Avec A_1^p, $\forall \mu$, on a toujours :

$$\int p_X \, d\mu \leqslant \liminf_{x \in \Omega,\ x \to X} {}_{T} \int p_x \, d\mu \quad (\text{car } p_x(y) \xrightarrow[x \in \Omega]{x \to X} p_X(y),\ y \text{ fixé})$$

et avec A_2 les points non minimaux de Δ sont caractérisés par l'existence d'un μ donnant l'inégalité stricte.

11. *Remarques sur les prolongements de topologie sur l'ensemble* $\hat{\Omega}$.

Remarque 7 (avec A_1^p). — Toute topologie θ plus fine que T sur $\Omega \cup \Delta_1$ se prolonge sur $\hat{\Omega}$ selon une topologie θ' définie comme suit :

Le filtre des voisinages de tout $X \in \Omega \cup \Delta_1$ admet comme base le filtre des voisinages selon θ sur $\Omega \cup \Delta_1$.

Les voisinages de tout $X \in \Delta - \Delta_1$ sont les T-voisinages dans $\hat{\Omega}$.

Cela s'applique donc au prolongement de topologie fine du théorème 1, et, avec A_2, aux topologies T_1 et T_3 sur $\Omega \cup \Delta_1$.

On peut vérifier que les axiomes des voisinages sont satisfaits. On peut aussi utiliser les théorèmes du n° 2, ce qui montre que θ' est la moins fine des topologies sur $\hat{\Omega}$, faisant Ω ouvert et y induisant θ, et dont les traces des voisinages de tout $X \in \Delta - \Delta_1$ admettent comme base $\sigma \cap (\Omega \cup \Delta_1)$ (σ décrivant les T-voisinages ouverts de X dans $\hat{\Omega}$).

Remarque 8. — Avec A_2, le cône des fonctions $\int p_x(y)\, d\mu(y)$ ($\mu \geqslant 0$ sur Ω) définit sur $\hat{\Omega}$ une topologie fine associée $\mathcal{T}$, induisant T_3 sur $\Omega \cup \Delta_1$ et pour laquelle $\Delta - \Delta_1$ est ouvert et toute partie de Δ_1 fermée.

Si $X \in \Delta - \Delta_1$, et $u(x) (x \in \hat{\Omega})$ tel que $u(X) < \liminf_{T,\ x \in \Omega,\ x \to X} u(x)$ on sait que $u(Y) = \liminf_{T,\ x \in \Omega,\ x \to Y} u(x)$, $y \in \Delta_1$ (corollaire, théorème 2) d'où $u(X) < \liminf_{T,\ x \in \Omega \cup \Delta_1,\ x \to X} (x)$; c'est-à-dire que $\Omega \cup \Delta_1$ est effilé en X selon $\mathcal{T}$ dans $\hat{\Omega}$. Ainsi $\Delta - \Delta_1$ est $\mathcal{T}$-voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire $\mathcal{T}$-ouvert; Δ_1 est donc $\mathcal{T}$-fermé et toute partie est T_3-fermée sur Δ_1 (théorème 4), donc $\mathcal{T}$-fermée sur Δ_1 donc $\mathcal{T}$-fermée sur $\hat{\Omega}$.

IV. — Ensembles W-polaires et potentiels semi-bornés

12. Nous allons extraire de deux articles [6, 7], quelques notions et propriétés utiles pour les améliorer et les approfondir. On suppose d'abord A_1.

On a déjà désigné par $\varphi(p)$ le pôle dans Ω du potentiel extrémal $p \in B$ (base compacte) et μ_W *la mesure associée* sur B (ou avec A_1^p sur $\hat{\Omega}$) *à la fonction surharmonique* $W \geqslant 0$ sur Ω. On rappelle que la partition de M^{me} Hervé [14] relative à un ouvert $\omega \subset \Omega$ donne la décomposition $W = W_\omega + W'$ en deux fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ où W' est harmonique dans ω et la plus grande au sens spécifique (et aussi naturel) sous ces hypothèses. De plus $W_\omega(y) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} p(y)\, d\mu_W(p)$.

Car toute décomposition $W + W_1'$ où W_1' est harmonique dans ω exige que ${}^{\mu}W_1'(\varphi^{-1}(\omega)) = 0$ et la plus grande spécifiquement possible W_1' correspond à la restriction de μ_W à $C_B\varphi^{-1}(\omega)$ (voir aussi [14, lemme 22, 1].

On rappelle que la mesure $\nu_{W}^{\omega_0, x_0}$ de M^me^ Hervé sur Ω (associée à W, $x_0 \in \omega_0$, ω_0 ouvert relativement compact $\subset \Omega$) donne comme charge de ω, $\int W_\omega \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$.

Lemme 10 (avec A_1) (7). — *Si un potentiel v est harmonique dans* CK (K compact) *et fini continu aux points de* ∂K, $R_v^K = v$ *dans* CK.

Car si u est surharmonique $\geqslant 0$ majorant v sur K, $u - v$ considéré dans CK admet une lim.inf $\geqslant 0$ aux points frontière de CK dans Ω; comme $u - v \geqslant -v$ avec v potentiel, $u - v \geqslant 0$ dans CK [3, part IV, chap. IV, prop. 9] donc $R_v^K = v$ sur CK.

Corollaire. — *Si le potentiel v est harmonique hors d'un point x et ω un voisinage ouvert quelconque de x, $R_v^\omega = v$ partout.*

Car si K est un voisinage compact de x dans ω, $R_v^K = v$ sur CK, $R_v^\omega \geqslant R_v^K$ donc $R_v^\omega = v$ sur $C\omega$ donc partout.

Lemme 11 (avec A,)(7). — *On rappelle les propriétés équivalentes suivantes* [6] *exprimant la propriété dite de ψ-évanescence d'une famille d'ensembles $e_i \subset \Omega$, pour ψ réelle $\geqslant 0$ dans Ω.*

α) $\widehat{\inf_i \hat{R}_\psi^{e_i}} = 0$ *(en un point ou partout parce que le* 1^er^ *membre est hyperharmonique).*

α') $\widehat{\inf_i R_\psi^{e_i}} = 0$ *(en un point ou partout, de même).*

β) $\int \underline{\inf_i} \hat{R}_\psi^{e_i} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ *($d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ mesure harmonique).*

β') $\int \underline{\inf_i} R_\psi^{e_i} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$.

γ) $\inf \int \hat{R}_\psi^{e_i} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$

γ') $\inf \overline{\int} R_\psi^{e_i} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$.

Les implications $\alpha' \Rightarrow \alpha$, $\beta' \Rightarrow \beta$, $\gamma' \Rightarrow \gamma$, $\gamma \Rightarrow \beta$, $\gamma' \Rightarrow \beta'$ sont évidentes.

Supposons α. Dans tout ouvert δ, il y a x_1 tel que

$$\inf_i \hat{R}_\psi^{e_i}(x_1) < \varepsilon$$

(7) Valable en fait dans des hypothèses plus générales. Signalons qu'avec D, on obtient dans le lemme 11 des conditions équivalentes à β, β', γ, γ' en y remplaçant $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ par toute mesure $m \geqslant 0$, à support compact, $\neq 0$ et ne chargeant pas les ensembles polaires.

et il existe j tel que $\hat{R}_{\psi}^{e_j}(x_1) < 2\varepsilon$ puis $x_2 \in \delta$ tel que $R_{\psi}^{e_j}(x_2) < 3\varepsilon$ d'où $\widehat{\inf_i R_{\psi}^{e_i}} < 3\varepsilon$ d'où (α'). Puis $R_{\psi}^{e_i}(x) \geqslant \overline{\int} R_{\psi}^{e_i}\, d\rho_x^{\omega_0} (\forall x \in \omega_0)$ d'après la définition de $R_{\psi}^{e_i}$ comme enveloppe inférieure des fonctions hyperharmoniques. Comme l'intégrale est dans chaque domaine composant de ω_0, $+\infty$ ou harmonique, on déduit aisément β, β', γ, γ'.

Il n'y a plus qu'à voir que $\beta \Longrightarrow \alpha$. Or β implique

$$\overline{\int} \widehat{\inf_i \hat{R}_{\psi}^{e_i}}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0.$$

donc la nullité de la fonction hyperharmonique qui est sous $\int$, c.à.d. α.

Théorème 8 (avec A_1). — *Les propriétés suivantes de $e \subset \Omega$ sont équivalentes et seront traduites par la dénomination que e est* W-*polaire* (W *surharmonique* > 0).

a) *e est polaire et $\varphi^{-1}(e)$ de μ_W-mesure* (*ext.*) *nulle.*

b) *e est polaire et de $\nu_W^{\omega_0, x_0}$-mesure* (*ext.*) *nulle.*

c) *La famille des voisinages de e dans Ω (ou seulement des voisinages ouverts) est* W-*évanescente.*

d) *Il existe u surharmonique > 0 telle que u/W* (*pris $+\infty$ lorsque indéterminé, convention permanente*) *tende vers $+\infty$ aux points de e* (*topologie de Ω*).

L'implication $a \Longrightarrow b$ vient des remarques suivantes :

i) Si φ' est le prolongement de φ aux fonctions harmoniques de B en donnant comme image commune le point d'Alexandroff de Ω (ainsi compactifié selon $\overline{\Omega}$), φ' est continue [14] et si pour toute mesure $\alpha \geqslant 0$ sur B ne chargeant que $\varphi^{-1}(\overline{\Omega})$, la mesure $\beta \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}$ (projection) est définie par

$$\int F\, d\beta = \int F(\varphi'(x)\, d\alpha(x)$$

(F finie continue sur $\overline{\Omega}$) et donne donc pour ω ouvert $\subset \Omega$ $\beta(\omega) = \alpha(\varphi^{-1}(\omega)$, on a la propriété :

Si $e \subset \Omega$, « $\varphi^{-1}(e)$ de α-mesure (ext.) nulle » $\Longrightarrow$ « e de β-mesure nulle ». Car si θ est s.c.i. $\geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}$, $\geqslant 1$ sur e,

$$\int \theta\, d\beta = \int \theta(\varphi'(x)\, d\alpha(x)$$

Prenons pour $\theta(y)$ la fonction $\inf\limits_{x\in\varphi'^{-1}(y)}\Theta(x)$ où $\Theta \geqslant 0$ est s.c.i. sur B) qui est s.c.i. Alors $\int \theta \, d\beta \leqslant \int \Theta(x)\, d\alpha(x)$ qui est arbitrairement petit pour Θ convenable majorant 1 sur $\varphi^{-1}(e)$.

ii) Si l'on prend pour α la mesure μ_W, e satisfaisant à (a) sera de mesure (ext) nulle pour la mesure β correspondante, c.à.d. que pour un voisinage ouvert convenable ω de $e \subset \Omega$, $\beta(\omega)$ ou $\alpha(\varphi^{-1}(\omega))$ seront arbitrairement petits. Ainsi

$$\nu_W^{\omega_0, x_0}(\omega) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} \left[\int p(y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}\right] d\mu_W(p) \quad (p \text{ potentiel extrémal } \in \mathrm{B})$$

où le crochet est borné ([14] conséquence du lemme 21, 3), sera arbitrairement petit pour ω convenable.

La réciproque $b \Longrightarrow a$ vient de l'expression précédente de $\nu_W^{\omega_0, x_0}(\omega)$ où le crochet est borné inférieurement par un nombre > 0; ce dernier point résulte de ce que, sinon, on trouverait p_n, T-convergeant vers $u \in S^+$ sur B, avec $\int p_n(y)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \to 0$, ce qui entraînerait par s.c.i. de $\int v\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ [14, prop. 23, I] comme fonction de v, que $\int u\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ donc $u = 0$.

Voyons que $b \Longrightarrow c$. On choisit ω_1 ouvert de Ω contenant e tel que $\int W_{\omega_1} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$. On utilise la partition $W = W_{\omega_1} + W'$ d'où pour tout ouvert $\supset e$, $R_W^{\omega} = R_{W_{\omega_1}}^{\omega} + R_{W'}^{\omega}$, puis

$$\int R_W^{\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int W_{\omega_1}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} + \int R_{W'}^{\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}.$$

On sait que si $V_0 \in S^+$ est fini continu et si ω décrit les ouverts contenant e polaire, $\inf\limits_{\omega} \int R_{V_0}^{\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ [14, n° 26].

Considérons ω_1 comme réunion dénombrable d'ouverts $\omega^p (\overline{\omega}^p \subset \omega_1)$ où $W' \leqslant \lambda_p V_0$, et dans ω^p un ouvert ω'^p contenant $\omega^p \cap e$ et tel que $\lambda_p \int R_{V_0}^{\omega^p}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < 2^{-p}.\varepsilon$.

Alors

$$\int R_{W'}^{\bigcup\omega'^p}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon.$$

Donc en prenant $\omega = \bigcup \omega'^p \supset e$, $\int R_W^{\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant 2\varepsilon$ d'où la nullité du inf du 1er membre c.à.d. (a) d'après la forme (γ') du lemme 11.

Enfin voyons que $c \Longrightarrow b$. Comme $\hat{R}_W^e \leqslant R_W^{\omega}$ pour tout voisinage ω de e, on conclut $\hat{R}_W^e = 0$ donc e est polaire

[3 part IV n° 33]. Puis on a pour un ouvert ω convenable $\supset e$, $\int R_W^\omega \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$ donc $\int R_{W_\omega}^\omega \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$ et il suffit de voir que $R_{W_\omega}^\omega = W_\omega$ car cela entraîne (b).

Or

$$R_{W_\omega}^\omega(x) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} R_p^\omega(x) \, d\mu_W(p) \quad [14, \text{ théor. } 22, \ 3]$$

et l'on sait par le corollaire du lemme 10 que $R_p^\omega = p$, $\forall p \in \varphi^{-1}(\omega)$.

Voyons enfin $c \Longleftrightarrow d$. Partant de c (γ ou γ' du lemme 11), on forme ω_n ouvert décroissant contenant e, tel que $\int R_W^{\omega_n} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < 2^{-n}$. Alors $\Sigma R_W^{\omega_n}$ est surharmonique (parce que $\int R_W^{\omega_n} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \infty$) et majore NW sur ω_N. On peut donc la prendre comme fonction u de l'énoncé (d).

Inversement partons de (d) et fixons $\lambda > 0$. A chaque point i de e attachons un voisinage ouvert ω_i tel que $u \geqslant \lambda W$ sur ω_i. Alors

$$R_W^{\cup \omega_i} \leqslant \frac{1}{\lambda} \cdot u \qquad \text{d'où} \qquad \int R_W^{\cup \omega_i} \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leqslant \frac{1}{\lambda} \int u \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$$

arbitrairement petit pour λ assez grand, ce qui donne (c).

Remarque 9. — Les propriétés ont le caractère local.

Remarque 10. — e polaire $\Longleftrightarrow$ e W-polaire pour un ou pour tout $W > 0$ surharmonique localement borné (d'après d).

Remarque 11. — Si $W = \text{pot } V + h$ harm. $\geqslant 0$ et $e \subset \Omega$, alors : e W-polaire $\Longleftrightarrow$ e V-polaire.

Remarque 12. — Noter que $\int R_W^e \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ et $\int \hat{R}_W^e \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ sont des poids fins, dénombrablement sous-additifs [11]. Les poids extérieurs correspondants (inf. des poids des ouverts contenant e) sont identiques.

i) La nullité de ces poids (pour un $W > 0$) équivaut à ce que e soit polaire.

ii) La nullité des poids extérieurs équivaut à ce que e soit W-polaire, car si e est polaire et u surharmonique > 0, $+\infty$ sur e, $\lambda u \geqslant R_W^e$, $\forall \lambda > 0$, donc $\int R_W^e \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ et $\int \hat{R}_W^e \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ majorés par $\lambda \int u \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ sont nuls.

Réciproquement la nullité d'un de ces termes entraîne $\hat{R}^e_W = 0$ d'où e polaire. Quant à *ii* c'est l'une des formes de *c*.

12. Théorème 9 (avec A_1). — *La condition que* $e \subset \Omega$ *est W-polaire* ($W > 0$) *équivaut à chacune des conditions suivantes :*

c') *Les ensembles* ω *contenant* e *et pour chaque* $z \in B$, $z \in \varphi^{-1}(e)$, *un ensemble de* $\mathcal{F}_z$ *forment une famille* W-*évanescente.*

d') e *est polaire et il existe* u *surharmonique* > 0 *telle que* u/W (*pris* $+\infty$ *lorsqu'indéterminé*) *tende vers* $+\infty$ *selon tout* $\mathcal{F}_z$, $z \in B$, $z \in \varphi^{-1}(e)$.

Comme tout ouvert contenant e contient un ensemble de tout $\mathcal{F}_z$, ces conditions c', d', sont plus faibles que c et d.

D'après le résultat de Doob-Mokobodski (fin n° 4), (d') entraîne que $\varphi^{-1}(e)$ est de mesure-μ_W nulle et signifie donc que e est W-polaire.

Enfin $c' \Longrightarrow d'$. D'abord $\hat{R}^e_W = 0$ donc e est polaire. Comme d' est « additive » en e, on se ramène à supposer que e ne coupe pas un voisinage δ de x_1 ; on introduit δ_1, ouvert d'adhérence $\subset \delta$, $\delta_1 \ni x_1$ et $\omega' = \omega \cap \complement\bar{\delta}$; on remarque que $\widehat{\inf_\omega R^\omega_W} = \widehat{\inf_\omega R^{\omega'}_W}$. On part alors de $\widehat{\inf_{\omega'} R^{\omega'}_W} = 0$; on note que $R^{\omega'}_W$ est harmonique dans δ_1 et de même $\inf_{\omega'} R^{\omega'}_W$ qui y vaut $\widehat{\inf_{\omega'} R^{\omega'}_W}$. On choisit parmi ces ω', ω'_n tel que $R^{\omega'_n}_W(x_1) < 2^{-n}$ d'où l'existence de u_n surharmonique > 0 majorant W sur ω'_n et majoré en x_1 par 2.2^{-n}. Alors Σu_n est surharmonique et $\Sigma u_n/W$ majore N sur ω'_n dès que $n \geqslant N$, d'où (d').

Corollaire. — *Avec* A_2, *les critères* c', d', *se traduisent au moyen de la topologie fine adjointe; les* ω *seront les voisinages de e dans cette topologie; d' s'écrit en exprimant que* u/W (*pris* ∞ *quand indéterminé*) *tend vers* $+\infty$ *en tout point de e* (*ce point exclu*) *selon la topologie fine adjointe.*

Car en un point polaire x_1, l'effilement adjoint d'un ensemble $e \not\ni x_1$ se traduit par $R^e_{p_{x_1}}$ ou sa régularisée, $\neq p_{x_1}$ [14 th. 32, 5].

13. *Les ensembles* W-*polaires et* W-*négligeables sur* Δ_1.

Théorème 10. — (Avec A_1). *Les conditions suivantes sont équivalentes et se traduisent en disant que* $e \subset \Delta_1$ *est* W-*négligeable* (W surharmonique > 0).

a) $\inf\limits_{v} v = 0$ *pour les fonctions surharmoniques* $v > 0$ *dans* Ω, *telles que la lim. inf. fine de* v/W *en tout point de e est* ≥ 1.

b) *Il existe u surharmonique* > 0 *telle que* u/W *tende finement vers* $+\infty$ *aux points de e.*

c) *Les ensembles de* Ω *appartenant chacun à tous les* $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$ ($\forall \mathrm{X} \in e$) *forment une famille* W-*évanescente.*

Il est immédiat que $b \Rightarrow a$; de plus, partant de a, on forme v_n tel que $v_n(x_0) < 2^{-n}$ et $v_n/\mathrm{W} > 1 - \varepsilon$ sur un ensemble qui fait partie de tout $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$ ($\mathrm{X} \in e$). Alors $\Sigma u_n/\mathrm{W}$ tend finement vers $+\infty$ aux points de e. On a donc (b).

Puis on voit que $b \Rightarrow c$, comme, dans le th. 8, d impliquait c, et $c \Rightarrow b$ par la fin du raisonnement qui montrait $c' \Rightarrow d'$ dans le théor. 9.

Remarque 12. — Si W est un potentiel, tout $e \subset \Delta_1$ est W-négligeable.

Si $\mathrm{W} = $ pot V + fet harm. $h > 0$,

$$\text{W-négligeable} \Longleftrightarrow h \text{ négligeable.}$$

Cela résulte de la forme (c), de ce que

$$\inf_{\omega} \hat{\mathrm{R}}^{\omega}_{\mathrm{W}} \leqslant \inf_{\omega} \hat{\mathrm{R}}^{\omega \cap \mathrm{CK}}_{\mathrm{V}} \leqslant \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{CK}}_{\mathrm{V}}$$

dont l'intégrale en $d\rho^{\omega_0}_{x_0}$ est arbitrairement petite pour K compact convenable, et de la (sous) additivité des réduites par rapport à la fonction.

Remarque 14. — Dans l'hypothèse A^p_1 les ensembles ω considérés sont les traces sur Ω des voisinages *fins de e dans* $\Omega \subset \Delta_1$ (théor. 1).

Définition. — *Un ensemble* $e \subset \Delta_1$ *sera dit* W-*polaire si sa mesure* (ext.) μ_{W} ou μ_h *est nulle.*

D'après Gowrisankaran [13, lemme 4], cette propriété dans A_1, équivaut à une condition plus faible que celle que e soit h-négligeable.

Donc (*avec* A_1) W-*négligeable* $\Rightarrow$ W-*polaire.*

Sur $\Omega \cap \Delta_1$, *e sera dit* W-*polaire si* $e \cap \Omega$ *et* $e \cap \Delta_1$ *sont* W-*polaires selon les définitions qui précèdent.*

THÉORÈME 11 (avec A_1^p). — *Soit* W *surharmonique* > 0 *et* $e \subset \Delta_1$.

Les 5 *propriétés suivantes sont équivalentes :*

α) *e est* W-*négligeable*

β) *e est* W-*polaire.*

a) $\inf v = 0$ *pour les* v *surharmoniques* > 0 *satisfaisant à* $\liminf_T v/W \geqslant 1$ en tout $X \in e$ (*T*, *topologie Martin de* $\hat{\Omega}$).

b) *Il existe u surharmonique* > 0 *telle que* $u/W \to \infty$ *aux points de e selon* T.

c) *Les* T-*voisinages de e dans* $\hat{\Omega}$ *coupent* Ω *selon une famille* W-*évanescente.*

Si W *est un potentiel toutes les conditions sont satisfaites.*

Si W = pot V + *h harm.* ($h > 0$), *il y a équivalence avec les mêmes propriétés pour h.*

Les équivalences de *a*, *b*, *c* se voient comme au théorème précédent dont les conditions sont moins fortes.

La condition (*c*) est encore évidente pour un potentiel et la même pour *h*.

On voit donc déjà que toutes les conditions sont satisfaites pour un potentiel, et équivalentes aux mêmes conditions avec $h > 0$. On est donc ramené au cas d'une fonction harmonique $h > 0$. On sait que $\alpha \Longrightarrow \beta$ et que les conditions *a*, *b* ou *c* entraînent α d'après le théorème précédent. On achève donc grâce à la propriété de Gowrisankaran ([12] th. IV, 5 corollaire) ([8]) que $\beta \Longleftrightarrow a$ pour *h*.

COROLLAIRE. — *Avec* A_1^p *les ensembles* W-*polaires sont caractérisés par :*

α_0) *polaires dans* Ω *et de* μ_W-*mesure nulle dans* $\hat{\Omega}$

ou β_0) *les* T-*voisinages ou encore les voisinages fins, coupent* Ω *selon une famille* W-*évanescente,*

ou γ_0) *Il existe u surharmonique* > 0 *infinie sur* $e \cap \Omega$ *telle que* $u(y)/W(y) \to \infty (y \to x,\ y \in \Omega \cap Ce)$ $\forall x \in e$, *soit en topologie* T, *soit de façon équivalente, en topologie fine.*

([8]) L'axiome D est inutile dans le chapitre IV de [12], basé sur un lemme (II, 1) concernant un ensemble E pour lequel il suffit du cas où il est ouvert, cas établi sans D dans [13] (lemme 1). Cela a été signalé par Gowrisankaran (Sem. théorie du potentiel, 1967).

14. *Fonctions surharmoniques semi-bornées.*

On remarque que, avec A_1, si $e \subset \Omega$ est effilé en $X \in \Delta_1$, les ensembles $e \cap \complement K$ (K décrivant les compacts de Ω) forment une famille p_X-évanescente.

Car $\hat{R}_{p_X}^{e \cap \complement K}$ est un potentiel, donc comme le $\inf_K$ est harmonique, cet $\inf_K$ est nul.

D'où avec A_1^p le même résultat en considérant au lieu de $\complement K$ les T-voisinages de X dans $\hat{\Omega}$ et la famille des $e \cap \omega$.

Il semble utile d'introduire, avec A_1, une propriété analogue dans Ω à savoir *l'hypothèse* H_E : $\forall p$ potentiel extrémal et e effilé au pôle de p (et ne le contenant pas), la famille des $e \cap \omega$ (ω voisinage de ce pôle) est p-évanescente.

Remarquer que si le pôle de p est polaire, la p-évanescence des $e \cap \omega$ (e quelconque $\not\ni x$, ω voisinage de x) signifie que e est effilé au sens minimal relativement à la fonction harmonique minimale p dans $\Omega - \{x\}$.

Théorème 12. — H_E *est satisfaite sous les conditions suivantes :* A_2, *effilement* $\Longrightarrow$ *effilement adjoint, et l'hypothèse qu'en tout x non polaire, le potentiel de pôle x (défini à un facteur près fixé) est continu (ces conditions sont satisfaites dans un domaine greenien de* R^n *par les solutions d'équations elliptiques du* 2^e^ *ordre à coefficients assez réguliers; de même que l'axiome* D*).*

En effet, soit e effilé en $x \notin e$; on utilise le p_y d'une base du cône S^+ et $\hat{R}_{p_x}^{e \cap \omega}(y) = \hat{R}_{p_y^*}^{*e \cap \omega}(x)$, $y \neq x$ [14, th. 31, 1]. Comme p_y^* est bornée au voisinage de x, la dernière réduite régularisée, qui vaut d'ailleurs $R_{p_y^*}^{*e \cap \omega}(x)$([1] p. 57) admet un $\inf_\omega$ nul parce que l'effilement est fort (th. 5). Donc $\inf_\omega \hat{R}_{p_x}^{e \cap \omega}(y) = 0$ ce qui implique la proposition cherchée.

Définition. — *Une fonction surharmonique* $W \geq 0$ *sera dite semi-bornée si, en posant* $e_\lambda^W = \{x, W > \lambda\}$, *la famille* $\{e_\lambda^W\}$ *d'indice* $\lambda > 0$ *est* W*-évanescente; et localement semi-bornée si pour un voisinage* ω *de chaque point,* $e_\lambda \cap \omega$ *est* W*-évanescente.*

Remarques. — 1) W (loc.) semi-bornée $\Longrightarrow W_1$ (loc.) semi-bornée $\forall W_1 \leq W$.

2) $(W_1 + W_2)$ (loc.) semi-bornée $\Longleftrightarrow W_1$ et W_2 (loc.) semi-bornés. Car $e_{2\lambda}^{W_1+W_2} \subset e_\lambda^{W_1} \cup e_\lambda^{W_2}$ d'où $R_{W_1+W_2}^{e_{2\lambda}^{W_1+W_2}} \leq 3(R_{W_1}^{e_\lambda^{W_1}} + R_{W_2}^{e_\lambda^{W_2}})$

en remarquant que

$$\mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_1+\mathrm{W}_2}} \leqslant \mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_1}} + \mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_2}}$$

et

$$\mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_2}} \leqslant \mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_2}\cap e_\lambda^{\mathrm{W}_1}} + \mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_2}\setminus e_\lambda^{\mathrm{W}_1}}$$

où les termes du 2e membre sont majorés par $\mathrm{R}_{\mathrm{W}_1}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_1}}$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{W}_2}^{e_\lambda^{\mathrm{W}_2}}$.

Théorème 13. — *Avec* A_1, *soit* $\mathrm{W} = pot\ \mathrm{V} + h\ harm. \geqslant 0$.

a) Si W *est localement semi-bornée,* $\{x,\ \mathrm{W} = \infty\}$ *est* W-*polaire.*

b) Si W *est semi-bornée, l'ensemble de* Δ_1 *ou* W *tend finement vers* $+\infty$ *est* W-*négligeable.*

c) Réciproquement, supposons $\mathrm{A}_1 + \mathrm{H}_\mathrm{E} + \mathrm{D}$ (9).

Pour un potentiel V, *si* $\mathrm{E}_0 = \{x,\ \mathrm{V} = \infty\}$ *est* V-*polaire,* V *est semi-bornée.*

Pour W, *si* $\{x,\ \mathrm{W} = \infty\}$ *est* W-*polaire* et $\{\mathrm{X} \in \Delta_1$, lim. *fine en* X *de* W *est* $\infty\}$ *est de* μ_W-*mesure nulle, si de plus (ce qui a lieu* (10) *quand les constantes sont harmoniques et* $d\mu_h$ *absolument continue par rapport à* $d\mu_1$) *h admet une limite fine aux points de* Δ_1, p.p $d\mu_h$, *alors* W *est semi-bornée.*

a) résulte du théorème 8 et (*b*) du théorème 10 (partie *c*) car e_λ^{W} appartient à $\mathcal{F}_\mathrm{X}$ pour tout $\mathrm{X} \in \Delta_1$ où $\mathrm{W} \xrightarrow[\mathcal{F}_\mathrm{X}]{} \infty$.

La réciproque pour V s'inspire de [6]; elle repose sur $\mathrm{V}(x) = \int p(x)\, d\mu(p)$ (p potentiel extrémal d'une base de S^+) et sur $\hat{\mathrm{R}}_\mathrm{V}^{e_\lambda}(y) = \int \hat{\mathrm{R}}_\mathrm{V}^{e_\lambda}(y)\, d\mu(p)$ [14 th 22,3)] (e_λ brièvt. pour e_λ^V) d'où $\int \hat{\mathrm{R}}_\mathrm{V}^{e_\lambda}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int \left[\int \hat{\mathrm{R}}_p^{e_\lambda}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}\right] d\mu(p)$.

L'intégrale de droite étendue à $\varphi^{-1}(\mathrm{E}_0)$ étant nulle, il suffit de voir que pour tout $p \notin \varphi^{-1}(\mathrm{E}_0)$, le crochet qui est majoré par $\int p(x)\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ d'intégrale-$d\mu$ égale à $\int \mathrm{V}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ finie, tend vers 0; pour $\lambda\infty$. Or, pour λ assez grand, e_λ est effilé en $\varphi(p) \notin e_\lambda$ et d'après H_E, $\int \hat{\mathrm{R}}_p^{e_\lambda^\mathrm{V}\cap\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ est arbitrairement petit pour un voisinage convenable de $\varphi(p)$. Reste à voir que $\int \hat{\mathrm{R}}_p^{e_\lambda^\mathrm{V}\setminus\omega}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \xrightarrow[\lambda\infty]{} 0$; si $\mathrm{U}(x)$ est un potentiel > 0 fini continu égal à $p(x)$ hors ω,

(9) D équivaut avec A_1 à la propriété de Choquet pour le poids $\int \hat{\mathrm{R}}_\mathrm{U}^{e}\, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ considéré plus loin — propriété qui paraît indispensable pour le passage à la limite, fin de la démonstration (cas de V) (voir [11]).

(10) D'après [13].

$\int \hat{R}_U^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ majore la quantité précédente mais tend vers 0 pour $\lambda\infty$. En effet d'après [7 théor. 9], $\int \hat{R}_U^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \xrightarrow[\lambda\infty]{} \int \hat{R}_U^{\bigcap \tilde{e}_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ où $\tilde{e}_\lambda$ est l'adhérence fine de e_λ. Comme $\bigcap \tilde{e}_\lambda = E_0$ polaire, cette limite est 0.

Dans le cas général de W, il restera à montrer que h est semi-bornée. On voit comme plus haut :

$$\int \hat{R}_h^{e_\lambda^h} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int \left[\int \hat{R}_X^{e_\lambda^h} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \right] d\mu_h(X)$$

et il reste à voir que le crochet tend vers $0 (\lambda\infty)$ pour tout $X \in \Delta_1$, où h a une limite fine $\neq 0$. Or en un tel X, e_λ^h est effilé pour λ assez grand et il suffit d'utiliser la remarque initiale du n° 14, puis la propriété évidente que $e_\lambda^h \cap K$ (K compact fixé) est vide pour λ assez grand.

V. — Limites de réduites

15. — On a déjà établi avec $(A_1 + D)$ que, pour un ordonné filtrant décroissant φ_i de fonctions finement semi-continues supérieurement sur Ω, majorées par un potentiel V fini continu, $\widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} = \hat{R}_{\inf \varphi_i}$ (voir [7]).

Si on suppose le potentiel V seulement semi-borné, on a indiqué [10] que le résultat s'étendait. La démonstration s'adapte à partir du lemme suivant :

LEMME 12. — (hyp. $A_1 + D$). Si $\{e_i\}$ *est un ordonné filtrant d'ensembles finement fermés et* V *un potentiel semi-borné, infini sur* $\bigcap e_i$; *alors* $\{e_i\}$ *est* V-*évanescente.*

Soit un compact $K \subset E$ tel que $\int \hat{R}_V^{\complement K} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$. Il suffira de voir que $\{e_i \cap K\}$ est V-évanescente. Soit $\alpha_\lambda = \{x;\ V(x) > \lambda\}$ et V_0 un potentiel fini continu majorant λ sur K. Alors

$$\hat{R}_V^{e_i \cap K} \leqslant \hat{R}_V^{\alpha_\lambda} + \hat{R}_{V_0}^{e_i \cap \complement\alpha_\lambda \cap K}.$$

Le 1[er] terme à droite admet une intégrale en $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ arbitrairement petite pour λ convenable puisque V est semi-borné. Quant au second, comme les $e_i \cap \complement\alpha_\lambda \cap K$ sont finement fermés et d'intersection vide, ils forment ue famille V_0-évanescente [7] d'où la conclusion.

THÉORÈME 14. — (*Hyp.* $A_1 + D$). *Si* $\{\varphi_i\}$ *est un ordonné filtrant décroissant de fonctions finement s.c.s. sur* Ω, *majorées par un potentiel semi-borné* $V > 0$,

$$\widehat{\inf R_{\varphi_i}} = \widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} = \hat{R}_{\inf \varphi_i} \tag{2}$$

Car si ψ est surharmonique $\geqslant 0$ et majore $\inf \varphi_i$, soit $e_i = \{x, \varphi_i \geqslant \psi + \varepsilon V\}(\varepsilon > 0)$ finement fermé. En tout point $x \in \cap e_i$, $\inf \varphi_i \geqslant \psi + \varepsilon V$ ce qui implique $\inf \varphi_i(x) = \infty$ donc $V(x) = + \infty$.

Alors

$$\varphi_i \leqslant \psi + \varepsilon V + R_V^{e_i} \qquad \text{d'où} \qquad R_{\varphi_i} \leqslant \psi + \varepsilon V + R_V^{e_i}$$

donc $\widehat{\inf R_{\varphi_i}} \leqslant \psi + \varepsilon V + \widehat{\inf R_V^{e_i}}$ où le dernier terme à droite est nul d'après le lemme. On conclut :

$$\begin{aligned} \widehat{\inf R_{\varphi_i}} &\leqslant \psi \\ &\leqslant R_{\inf \varphi_i} \end{aligned}$$

Le premier membre étant hyperharmonique, est majoré par $\hat{R}_{\inf \varphi_i}$, et d'autre part le majore évidemment, d'où l'égalité des termes extrêmes de l'énoncé. Le terme du milieu est à priori au plus égal mais comme $\hat{R}_{\varphi_i} \geqslant \hat{R}_{\inf \varphi_i}$, on trouve $\inf \hat{R}_{\varphi_i} \geqslant \hat{R}_{\inf \varphi_i}$ puis $\widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} \geqslant \hat{R}_{\inf \varphi_i}$, ce qui achève la démonstration.

16. — Si l'on remplace V par une fonction surharmonique, on fait intervenir la frontière minimale et, avec A_1^p (voir th. 1) la topologie fine prolongée alors discrète sur Δ_1. Cela empêche le passage des suites aux filtres, utilisé implicitement plus haut dans Ω (voir [7] (d'ailleurs selon une indication générale de Doob, basée sur un lemme topologique de Choquet en espace à base dénombrable).

Aussi pour l'extension en vue, faut-il se limiter à des suites (des contre-exemples en montreraient de façon précise la nécessité).

LEMME 13. — (Hyp. $A_1 + D$) *Soit* H *harmonique* > 0 *dans* Ω, e_n *une suite décroissante d'ensembles finement fermés sur* $\Omega \cup \Delta_1$ (*dans une topologie fine définie au th.* 1) *avec* $\cap e_n \cap \Omega$

polaire et $\complement e_n \cap \Delta_1$ *de mesure-*μ_H *nulle. Alors* $e_n \cap \Omega$ *est* H-*évanescente.*

Cela résulte aussitôt de [7] théor. 10 (extension axiomatique du th. 7). Car l'ensemble de Δ_1, où $e_n \cap \Omega$ est non effilé est dans $e_n \cap \Delta_1$, la μ_H-mesure de $\complement e_n \cap \Delta_1$ est nulle et comme $\complement e_n \cap \Omega$ est polaire, $\hat{R}_H^{\complement e_n \cap \Omega} = 0$.

Théorème 15. — *On suppose* $A_1 + D$, *les constantes harmoniques et* $\Omega \cap \Delta_1$ *pourvu d'une topologie fine* (*V. théor.* 1).

Si φ *est une fonction réelle sur* Ω, *on notera* $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ *ses prolongements par semi-continuité supérieure ou inférieure fine sur* Δ_1; *si* $\theta \geqslant 0$ *sur* $\Omega \cap \Delta_1$, *on notera* R_θ^* *l'enveloppe inférieure des fonctions hyperharmoniques* $v \geqslant 0$ *sur* Ω *dont le prolongement* v *majore* θ, *sauf sur un ensemble* 1-*polaire de* Δ_1 (*c.-à.-d. de* μ_1-*mesure nulle*).

Soit φ_n *une suite décroissante de fonctions* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *finement semi-continues supérieurement, majorées quasi-partout par une fonction surharmonique* W *du type*: V (*potentiel semi-borné*) + H (*harmonique* $\geqslant 0$), μ_H *associée étant absolument continue par rapport à* μ_1.

Alors

$$\widehat{\inf R_{\varphi_n}} = \widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_n}} = \hat{R}^*_{\inf \overline{\varphi}_n}. \tag{3}$$

Reprenons l'idée de la démonstration du th. 14.

Soit ψ surharmonique $\geqslant 0$, dont le prolongement $\underline{\psi}$ majore $\inf \overline{\varphi}_n$ sur $\Omega \cap \Delta_1$ sauf sur un ensemble 1-polaire de Δ_1. Soit $e_n = \{x \in \Omega \cap \Delta_1, \overline{\varphi}_n \geqslant \underline{\psi} + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, e_n est finement fermé; sur $\complement e_n$, $\inf \overline{\varphi}_n \geqslant \underline{\psi} + \varepsilon$ tandis que, dans $\Omega \cup \Delta_1$, $\underline{\psi} \geqslant \inf \overline{\varphi}_n$ sauf sur un ensemble α, 1-polaire. Cela implique que la partie de $\complement e_n$ où ψ est finie soit dans α; comme $\{x;\ \underline{\psi}(x) = +\infty\}$ est 1-polaire (car il est polaire dans Ω et 1-négligeable sur Δ_1), on conclut que $\complement e_n$ est 1-polaire, donc de μ_H-mesure nulle sur Δ_1.

Alors de $\varphi_n < \psi + \varepsilon$ sur $\complement e_n \cap \Omega$, on déduit:

$$R_{\varphi n} \leqslant \psi + \varepsilon + R_{\varphi_1}^{e_n} \quad \text{sur } \Omega.$$

Noter que $\hat{R}_{\varphi_1}^{e_n} \leqslant \hat{R}_W^{e_n}$. Comme $\Omega \cap e_n$ est V-évanescente et H-évanescente (lemmes 12 et 13), elle est W-évanescente, donc φ_1-évanescente.

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{\inf R_{\varphi_n}} &\leqslant \psi + \varepsilon \\ &\leqslant \psi \\ &\leqslant R^*_{\inf \overline{\varphi}_n} \qquad \text{puis} \qquad \widehat{\inf R_{\varphi_n}} \leqslant \hat{R}^*_{\inf \overline{\varphi}}\end{aligned}$$

D'autre part $R_{\varphi_n} \geqslant R^*_{\inf \overline{\varphi}_n}$; car si v surharmonique $\geqslant 0$ majore φ_n, elle admet [13] une limite fine *p.p-d*μ_1 sur Δ_1; et celle-ci majore $\overline{\varphi}_n$, *p.p.-d*μ_1 sur Δ_1, donc majore de même $\inf \overline{\varphi}_n$.

D'où

$$v \geqslant R^*_{\inf \overline{\varphi}_n} \qquad \text{puis} \qquad \inf R_{\varphi_n} \geqslant \inf \hat{R}_{\varphi_n} \geqslant \hat{R}^*_{\inf \overline{\varphi}_n}$$

ce qui permet d'achever la démonstration.

Remarque. — On peut donner bien des variantes, dissocier l'égalité (3) en inégalités n'exigeant pas les mêmes hypothèses, étudier $R^*_{\varphi_n}$ pour φ_n finement s.c.s. sur $\Omega \cap \Delta_1$. Signalons seulement que, plus haut, on obtient le même résultat en supposant, séparément ou non, pour R_φ et R^*_θ, qu'il s'agit d'enveloppes de fonctions ne majorant φ et θ *dans* Ω que quasi-partout (dans le second cas, $\underline{v}$ majore θ sur $\Omega \cap \Delta_1$, sauf sur un ensemble 1-polaire).

BIBLIOGRAPHIE

[0] H. Bauer, Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15, fasc., 1 (1965), 137-154.

[1] N. Boboc, C. Constantinescu and A. Cornea, Axiomatic theory of harmonic functions, Balayage, *Ann. Inst. Fourier*, 15, fasc., 2, (1965), 37-70.

[2] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Sém. Théorie du potentiel*, *Paris*, t. 2, (1958).

[3] M. Brelot, Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay, (1960), (2e édition à l'impression).

[4] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Matematica* 57, (1962), p. 77.

[5] M. Brelot, Étude comparée des deux types d'effilement, *Ann. Inst. Fourier*, 15, 1, (1965), 155-168 ou volume spécial du Colloque de théorie du potentiel Paris-Orsay (1964), CNRS no 146.

[6] M. Brelot, Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement, *Anaïs de Ac. Bras. de Ciencias* 27, (1965).

[7] M. BRELOT, Capacity and balayage for decreasing sets, *Symposium on probability and statistics*, Berkeley, (1965 paru en 1967).
[8] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, *Sém. de math. Sup, Montréal*, (été 1965, paru en 1966).
[9] M. BRELOT, La topologie fine en théorie du potentiel, *Colloque de Loutraki*, mai-juin 1966. Lecture notes, Springer 1967.
[10] M. BRELOT, Einige neuere Fortschritte in der axiomatischen Theorie der harmonischen Funktionen, *Colloque de Karl Marx Stadt*, (juin 66).
[11] M. BRELOT, Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet. concernant l'effilement, *Nagoya Journal*, 30 (1967) 39-46.
[12] K. GOWRISANKARAN, Extreme harmonic fonctions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 2, (1963), 307-356.
[13] K. GOWRISANKARAN, Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, 16, 2 (1966), 55-467.
[14] Mme R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12, (1962), 415-571.
[15] MYSKIS, On the concept of a boundary, *Mat. Sbornik* NS 25 (67), 387-414 (1949) et *Ann. math. Soc.*, translations series 1 vol. 8, p. 11.
[16] Mlle L. NAÏM, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 7, (1957), 183-285.

Manuscrit reçu le 3 Novembre 1967.

Marcel BRELOT,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e.