ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nicolas BERGERON & Laurent CLOZEL

Exponents in Archimedean Arthur packets

Tome 63, nº 1 (2013), p. 113-154.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013__63_1_113_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
63, 1 (2013) 113-154

EXPONENTS IN ARCHIMEDEAN ARTHUR PACKETS

by Nicolas BERGERON & Laurent CLOZEL (*)

Abstract. — Generalizing the proof – by Hecht and Schmid – of Osborne's conjecture we prove an Archimedean (and weaker) version of a theorem of Colette Moeglin. The result we obtain is a precise Archimedean version of the general principle – stated by the second author – according to which *a local Arthur packet contains the corresponding local L-packet and representations which are more tempered.*

Résumé. — En généralisant la démonstration de Hecht et Schmid de la conjecture d'Osborne, nous démontrons une version archimédienne – et plus faible – d'un théorème de Colette Moeglin. Cela donne un sens archimédien précis au principe énoncé par le second auteur selon lequel *on trouve dans un paquet d'Arthur des représentations qui appartiennent au paquet de Langlands associé et des représentations plus tempérées.*

1. Introduction

Dans cet article, nous formulons et démontrons l'analogue de la formule d'Osborne [11, Thm. 3.6] dans le cas des groupes tordus. Cela permet de réexprimer les identités de caractères considérées par Arthur dans [1, Thm. 30.1] en termes d'identités de traces sur la $\mathfrak{n}$-homologie. En guise d'application, nous comparons les exposants des représentations des groupes intervenant dans un même paquet d'Arthur sur $\mathbf{C}$.

Considérons en effet un paramètre d'Arthur

$$\psi = \chi_1 \otimes R_{a_1} \oplus \ldots \oplus \chi_m \otimes R_{a_m}$$

Keywords: Représentations unitaires, exposants, conjecture d'Osborne, paquets d'Arthur.
Math. classification: 22E45, 22E46.
(*) N.B. & L.C sont membres de l'Institut Universitaire de France. Pendant la rédaction de cet article L.C était partiellement financé par la Florence Gould Foundation, l'Ellentuck Fund et le James D. Wolfensohn Fund.

d'image contenue dans $\widehat{G} \subset \mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$, où chaque χ_j est un caractère unitaire de $\mathbf{C}^*$ que l'on écrit $z \mapsto z^{p_j} \bar{z}^{q_j}$ avec $\mathrm{Re}(p_j + q_j) = 0$, chaque R_{a_j} est une représentation de dimension a_i de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ et $\widehat{G} = \mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{Sp}(N, \mathbf{C})$. On associe au paramètre ψ la représentation de $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$:

$$\Pi = \Pi_\psi = \mathrm{ind}(\chi_1 \circ \det \otimes \ldots \otimes \chi_m \circ \det) \tag{1.1}$$

(induction unitaire à partir du parabolique de type $(a_1, \ldots, a_m)$). Rappelons qu'Arthur associe à ψ un paquet fini $\prod(\psi)$ de représentations du groupe complexe G de groupe dual $\widehat{G}$, voir [1, Thm. 30.1].

Comme nous le rappelons au § 2, il correspond naturellement au groupe $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ *tordu* (par un automorphisme involutif θ) un système de racines réduit de groupe associé $\mathrm{SO}(2\ell + 1, \mathbf{C})$ où $\ell = [N/2]$. Le tore diagonal de G est naturellement isomorphe au tore diagonal de $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$; notons $A \cong \mathbf{R}^\ell$ sa partie déployée et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie réelle. Un *exposant* de G est un élément de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^\ell$. On note e_ψ l'exposant $(m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_\ell) \in \mathbf{C}^\ell$ où les $m_j \in \mathbf{N}$ sont les éléments des segments $\sigma_i = (a_i - 1, a_i - 2, \ldots)$, rangés par ordre croissant.

Il correspond au groupe $\mathrm{SO}(2\ell + 1, \mathbf{C})$ un ordre sur les exposants donné par les racines de $\mathrm{SO}(2\ell + 1, \mathbf{C})$:

$$e \leqslant_\theta e' \Leftrightarrow e' = e + \sum_\alpha n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \geqslant 0)$$

où α décrit les racines simples de $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$. Noter que les racines de G définissent aussi un ordre sur $\mathbf{C}^\ell$; si e est inférieur à e' pour l'ordre défini par les racines de G alors $e \leqslant_\theta e'$, la réciproque n'est pas vraie en général. Cela étant, on a le résultat suivant qui est une version archimédienne, et plus faible, d'un théorème de Colette Moeglin [19].

Theorem 1.1. — *Soit π une représentation arbitraire de $\prod(\psi)$ et e un exposant minimal de π. Alors :*

$$\mathrm{Re}(e) \geqslant_\theta e_\psi.$$

Nous avons adopté, sur les caractères réels de tores déployés, l'ordre usuel dans ces questions, voir [11]. Le théorème dit donc que les coefficients de π *décroissent plus vite* que le caractère associé à e_ψ, selon le principe général énoncé dans [7].

Nous remercions le rapporteur, dont la lecture nous a permis de corriger une erreur caractérisée dans la version originale.

2. Rappels sur les groupes tordus

2.1. Groupes tordus

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif et connexe sur $\mathbf{R}$ et θ un automorphisme de $\mathbf{G}$ d'ordre fini égal à d et défini sur $\mathbf{R}$. On identifie $\mathbf{G}$ au groupe de ses points complexes et on note $\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$ le revêtement simplement connexe de son groupe dérivé. On a une application naturelle

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}).$$

Considérons l'espace algébrique tordu (voir [17]) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{G} \rtimes \theta \subset \mathbf{G} \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbf{G}).$$

Étant donné un élément δ dans $\mathbf{L}$ on note $\mathbf{G}^{\delta}$ le groupe des points fixes de l'automorphisme $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\delta)$. C'est le centralisateur de δ. Nous adoptons la notation d'Arthur $\mathbf{G}_{\delta}$ pour désigner la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathbf{G}^{\delta}$.

Example 2.1. — Pour les applications que nous considèrerons, on peut prendre pour $\mathbf{G}$ le groupe des automorphismes linéaires de F^N avec $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et pour θ l'automorphisme involutif opérant par $g \mapsto g^{\theta} = J^t g^{-1} J^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^N & & & \end{pmatrix}.$$

Il correspond à J une forme bilinéaire non dégénérée sur F^N. Le groupe $\mathbf{G}$ agit naturellement à gauche et à droite sur l'ensemble des formes bilinéaires non dégénérées sur F^N. En particulier : pour g et g' dans $\mathbf{G}$ on a $(g, g') \cdot J = gJ^t(g')^{-1}$. On peut alors identifier $\mathbf{L}$ à l'espace algébrique des formes bilinéaires non dégénérées sur F^N par l'application $(g, \theta) \mapsto gJ$.

Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ un tore maximal. Suivant la terminologie de Kottwitz et Shelstad [16] on appelle la donnée $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une *paire* dans $\mathbf{G}$. Rappelons qu'un élément δ est *semisimple* si $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\delta)$ est semisimple. Un élément semisimple *régulier* est un élément δ dans $\mathbf{L}$ dont le centralisateur connexe $\mathbf{G}_{\delta}$ est un tore.

LEMMA 2.2. — [17, Lem. II.1.1] *Soit $\delta \in \mathbf{L}$ semisimple et soit $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ une paire δ-stable. Alors $\mathbf{T}_{\delta} = \mathbf{T} \cap \mathbf{G}_{\delta}$ et $\mathbf{B}_{\delta} = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_{\delta}$ définissent une paire dans $\mathbf{G}_{\delta}$. Réciproquement, si $(\mathbf{B}_{\delta}, \mathbf{T}_{\delta})$ est une paire dans $\mathbf{G}_{\delta}$, le centralisateur $\mathbf{T} = \mathrm{Cent}(\mathbf{T}_{\delta}, \mathbf{G})$ est le tore maximal d'une paire $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ dans $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{B} \cap \mathbf{G}_{\delta} = \mathbf{B}_{\delta}$.*

Un *épinglage* de $\mathbf{G}$ est un triplet $(\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X\})$, où $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ est une paire dans $\mathbf{G}$ et $\{X\}$ un ensemble de vecteurs propres, un pour chaque racine simple de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{B}$. Nous supposerons dorénavant que l'automorphisme θ préserve un épinglage $(\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X\})$. Notons[(1)] $\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}_\theta$ et $\mathbf{G}^1 = \mathbf{G}_\theta$.

Lemma 2.3. — [17, Lem. II.1.2] *Le tore* $\mathbf{T}^1$ *est maximal dans* $\mathbf{G}^1$, $\mathbf{T}^1 = \mathbf{G}^1 \cap \mathbf{T}^\theta$ *et* $\mathbf{T} = \mathrm{Cent}(\mathbf{T}^1, \mathbf{G})$. *Enfin, il existe des isomorphismes canoniques entre les groupes de Weyl :*

$$W(\mathbf{G}^1, \mathbf{T}^1) \xrightarrow{\sim} W(\mathbf{G}, \mathbf{T})^\theta.$$

Un élément $w \in W(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ *appartient à* $W(\mathbf{G}, \mathbf{T})^\theta$ *si et seulement s'il laisse stable* $\mathbf{T}^\theta$.

Dans la suite, nous notons W le groupe $W(\mathbf{G}, \mathbf{T})^\theta$; c'est naturellement un sous-groupe de $W(\mathbf{G}, \mathbf{T})$, il est isomorphe au groupe de Weyl $W(\mathbf{G}^\theta, \mathbf{T}^\theta)$ (pour des groupes non connexes, voir Kottwitz-Shelstad [16] pour les définitions).

Soit $R(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ l'ensemble des racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{B}$. Alors $R(\mathbf{B}^1, \mathbf{T}^1)$ est contenu dans

$$R_{\mathrm{res}} = \{\alpha_{\mathrm{res}} = \alpha_{|\mathbf{T}^1} \ : \ \alpha \in R(\mathbf{B}, \mathbf{T})\}.$$

De plus, α_{res} appartient à $R(\mathbf{B}^1, \mathbf{T}^1)$ si et seulement si θ fixe un vecteur de l'espace engendré par les espaces de racines $\beta \in R(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ telles que $\beta_{\mathrm{res}} = \alpha_{\mathrm{res}}$. Kottwitz et Shelstad distinguent trois types de racines restreintes α_{res} :

- Type R_1 : $2\alpha_{\mathrm{res}}, \frac{1}{2}\alpha_{\mathrm{res}} \notin R_{\mathrm{res}}$.
- Type R_2 : $2\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}$.
- Type R_3 : $\frac{1}{2}\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}$.

Example 2.4 (Voir Waldspurger [22]*).* — Si $\mathbf{G}$ est le groupe des automorphismes linéaires de F^N, on peut prendre pour $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ sa paire usuelle. Alors, l'automorphisme involutif θ opérant par $g \mapsto g^\theta = J^t g^{-1} J^{-1}$ préserve la paire $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ et son épinglage standard. Les racines de $(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ sont données par

$$\alpha_{i,j} : (z_1, \ldots, z_N) \mapsto z_i / z_j \quad (i \neq j)$$

et les racines dans $\mathbf{B}$ correspondent à la base $(x_1 - x_2, \ldots, x_{N-1} - x_N)$. L'automorphisme θ envoie $\alpha_{i,j}$ sur $\alpha_{N+1-j, N+1-i}$.

Un élément $z \in \mathbf{T}$ appartient à $\mathbf{T}^1$ si et seulement si $z_{(N+1)/2} = 1$ (quand N est impair) et $z_{N+1-i} = z_i^{-1}$ pour $i \neq (N+1)/2$. On note $\ell = [N/2]$. Rappelons que l'on a identifié J à une forme bilinéaire non

(1) Noter que vu les notations introduites en 2.1 $\mathbf{T}_\theta$ désigne (essentiellement) les invariants, et non les coinvariants, de θ.

dégénérée sur F^N ; c'est une forme symplectique si N est pair, quadratique si N est impair. Le groupe $\mathbf{G}^1$ est alors la composante neutre de son groupe d'automorphismes ; c'est un groupe quasi-déployé dont $\mathbf{T}^1$ est un sous-tore maximal. Le groupe de Weyl W est en particulier identifié à $\mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^\ell$.

Enfin, si $\alpha = \alpha_{i,j} \in R(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ on a $\alpha_{\text{res}} \in R(\mathbf{B}^1, \mathbf{T}^1)$ si $i \neq N+1-j$ et $\frac{1}{2}\alpha_{\text{res}} \in R(\mathbf{B}^1, \mathbf{T}^1)$ sinon. Et α_{res} est de type R_1 si $i \neq N+1-j$ et i et j sont tous les deux différents de $(N+1)/2$, de type R_2 si i ou j est égal à $(N+1)/2$ et de type R_3 si $i = N+1-j$.

2.2. Application norme

Posons
$$(1-\theta)\mathbf{T} := \{t\theta(t^{-1}) \ : \ t \in \mathbf{T}\}.$$
Kottwitz et Shelstad définissent une application norme sur $\mathbf{T}$ comme l'application quotient
$$\mathrm{N} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}/(1-\theta)\mathbf{T}.$$
Posons
$$\mathbf{T}^\perp = \{t \in \mathbf{T} \ : \ t\theta(t)\dots\theta^{d-1}(t) = 1\}.$$
Il est clair que la composante neutre de $\mathbf{T}^\perp$ est égale à
$$(1-\theta)\mathbf{T} := \{t\theta(t^{-1}) \ : \ t \in \mathbf{T}\}$$
et que l'application
$$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^\perp \to \mathbf{T}, \quad \Psi(t,h) = th^{-1}\theta(h)$$
est surjective et a un noyau fini.

Étant donné une racine $\alpha \in R(\mathbf{B}, \mathbf{T})$, notons $\mathrm{N}\alpha$ la somme des racines dans la θ-orbite de α :
$$\mathrm{N}\alpha = \sum_{i=0}^{d_\alpha - 1} \theta^i(\alpha)$$
le nombre de racines dans l'orbite étant d_α. Le caractère $\mathrm{N}\alpha$ de $\mathbf{T}$ se factorise en un caractère de $\mathbf{T}/(1-\theta)\mathbf{T}$. Et les applications
$$\mathbf{T}^1 \to \mathbf{T} \to \mathbf{T}/(1-\theta)\mathbf{T}$$
permettent de réaliser α_{res} et $\mathrm{N}\alpha$ comme des caractères d'un même tore $\mathbf{T}^1$; on a alors :
$$\mathrm{N}\alpha = d_\alpha \alpha_{\text{res}}.$$
L'ensemble des caractères $\mathrm{N}\alpha$ forme un système de racines *réduit* $\mathrm{N}R$ pour $\mathbf{T}^1$.

L'automorphisme θ induit un automorphisme $\widehat{\theta}$ sur le dual $\widehat{G}$, voir [16, § 1.2]. Fixons un épinglage $(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}\})$ de $\widehat{G}$ préservé par $\widehat{\theta}$. Alors l'ensemble des racines restreintes $R_{\mathrm{res}}(\widehat{G}, \mathcal{T})$ s'identifie à

$$R^{\vee}_{\mathrm{res}} = \{(\alpha^{\vee})_{\mathrm{res}} = \alpha^{\vee}|_{\widehat{T}_{\widehat{\theta}}} \ :\ \alpha^{\vee} \in R^{\vee}(G,T)\}.$$

Et $(\alpha^{\vee})_{\mathrm{res}} \in X^*(\widehat{T}^{\widehat{\theta}}) = X^*(\widehat{T})_{\widehat{\theta}}$ a pour coracine un élément de $X^*(T)^{\theta}$. Si α_{res} est de type R_1 ou R_3 alors la coracine de $(\alpha^{\vee})_{\mathrm{res}}$ est $\mathrm{N}\alpha$ sinon (type R_2) c'est $2\mathrm{N}\alpha$, voir [16, (1.3.9)]. L'ensemble de ces caractères forme encore un système de racines réduit pour T^1. Notons E le groupe déployé correspondant.

Notons qu'au niveau des algèbres de Lie, il correspond à N une application norme

$$\mathrm{N} : \mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}} \tag{2.1}$$

égale à la projection sur $\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}$ suivant la décomposition $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}} \oplus (1-\theta)\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$.

Considérons maintenant un élément semisimple $\delta = \theta g \in \mathbf{L}$. Notons qu'il revient au même de considérer la classe de conjugaison de δ par des éléments de $\mathbf{G}$ ou la classe de θ-conjugaison de l'élément θ-semisimple g. Il découle alors par exemple de [16, Lem. 3.2.A] que la classe de θ-conjugaison de g est représentée par un élément $t \in \mathbf{T}$ uniquement défini modulo W. À l'aide de l'application norme Kottwitz et Shelstad construisent ainsi une correspondance naturelle des classes de conjugaison semisimples dans E vers les classes de θ-conjugaison θ-semisimples dans $\mathbf{G}$. On la note $\mathcal{A}$ comme Kottwitz et Shelstad, voir [16, Thm. 3.3.A]. On notera $\mathcal{N}$ sa réciproque.

Example 2.5. — Soit $\mathbf{G}$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbf{C}^N$ et θ l'automorphisme involutif opérant par $g \mapsto g^{\theta} = J^t g^{-1} J^{-1}$. Le tore $\mathbf{T} \cong (\mathbf{C}^*)^N$ est diagonal et si $t = (t_1, \ldots, t_N) \in T$ on a :

$$t\theta(t^{-1}) = (t_1 t_N, \ldots, t_N t_1).$$

Par conséquent,

$$(1-\theta)\mathbf{T} = \begin{cases} \{(u_1, \ldots, u_\ell, u_\ell, \ldots, u_1) : u_i \in \mathbf{C}^*\} \cong (\mathbf{C}^*)^{\ell} \text{ si } N = 2\ell \\ \{(u_1, \ldots, u_\ell, u_{\ell+1}, u_\ell, \ldots, u_1) : u_i \in \mathbf{C}^*\} \cong (\mathbf{C}^*)^{\ell+1} \text{ si } N = 2\ell+1 \end{cases}$$

et $\mathbf{T}/(1-\theta)\mathbf{T} \cong (\mathbf{C}^*)^{\ell}$. De sorte que l'application norme

$$\mathrm{N} : \mathbf{T} \to (\mathbf{C}^*)^{\ell} \cong \mathbf{T}^1$$

associe à $t = (t_1, \ldots, t_N)$ l'élément $(t_1/t_N, \ldots, t_\ell/t_{N-\ell+1})$.

Les racines $\mathrm{N}\alpha$ du système de racines $\mathrm{N}R$ sont celles du groupe $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$. Le groupe E est quant à lui égal à $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$ si $N = 2\ell$ est pair et à $\mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C})$ si $N = 2\ell+1$ est impair. On note T_E le tore diagonal (pour les formes classiques déployées) de E ; de sorte que les éléments de T_E s'écrivent :

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) &&\text{si } N \text{ est impair,}\\ &\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,1,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) &&\text{si } N \text{ est pair.}\end{aligned}$$

Via ces coordonnées T_E et T^1 sont canoniquement isomorphes.

Remarquons que E est un sous-groupe endoscopique maximal du groupe $\mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$ (*cf.* [1]) ; son groupe dual est $\widehat{E} = \mathrm{Sp}(N,\mathbf{C})$, resp. $\mathrm{SO}(N,\mathbf{C})$, naturellement plongé dans $\widehat{G} = \mathrm{GL}_N(\mathbf{C})$.

L'application $\mathcal{A}$ est explicitement décrite par Waldspurger dans [21, § III.2].[(2)] Les classes de θ-conjugaison θ-semisimples de $\mathbf{G}$ sont représentées par les éléments

$$t = \mathrm{diag}(s,1) \in T \ (s \in (\mathbf{C}^*)^\ell) \tag{2.2}$$

modulo $W = \mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^\ell$. Les classes de conjugaison semisimples de E sont quant à elles représentées par

$$\begin{aligned}&t' = \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) \in T_E &&\text{si } N \text{ est impair,}\\ &t' = \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,1,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) \in T_E &&\text{si } N \text{ est pair}\end{aligned} \tag{2.3}$$

modulo $W = \mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^\ell$ – le groupe de Weyl de E. On a alors $t = \mathcal{A}(t')$ si $s = (x_1,\dots,x_\ell)$. L'application $\mathcal{A}$ est bijective et $\mathcal{N}$ est l'application réciproque. En particulier en restriction à T^1, l'application $\mathcal{N}$ s'écrit :

(2.4)

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) \in T^1\\ &\qquad\mapsto \mathrm{diag}(x_1^2,\dots,x_\ell^2,1,x_\ell^{-2},\dots,x_1^{-2}) \in T_E \quad \text{si } N \text{ est pair,}\\ &\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_\ell,1,x_\ell^{-1},\dots,x_1^{-1}) \in T^1\\ &\qquad\mapsto \mathrm{diag}(x_1^2,\dots,x_\ell^2,x_\ell^{-2},\dots,x_1^{-2}) \in T_E \quad \text{si } N \text{ est impair.}\end{aligned}$$

2.3. Dénominateur de Weyl tordu

Soit G (resp. T, *etc...*) l'ensemble des points réels de $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{T}$, *etc...*) et soit $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{t}$, *etc...*) son algèbre de Lie (réelle). On note $\widetilde{T}^1$ le revêtement universel de T^1.

L'ensemble des racines restreintes non nulles α_{res}, pour α racine de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, forme un système de racine (non réduit) et R_{res} est un choix de

(2) La différence de signe ici est due au fait que notre θ préserve un épinglage.

racines positives. Si α_{res} est une racine dans R_{res} on note $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}}$ l'espace radiciel correspondant. On pose

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}} (\dim \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}}) \alpha_{\mathrm{res}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{u}^+ = \sum_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}}.$$

Alors $\mathfrak{u}^+$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Comme θ laisse stable $\mathfrak{u}^+$ et fixe T^1, il lui correspond un *dénominateur de Weyl tordu*

$$\Delta_\theta = \Delta_{G,\theta} : \widetilde{T}^1 \to \mathbf{C},$$

égal – par définition – au déterminant

$$D_{\mathfrak{u}^+}^\theta(t) = \det\big((1 - \mathrm{Ad}(\theta t))_{|\mathfrak{u}^+}\big)$$

multiplié par $-\rho$:

$$\Delta_\theta(t) = e^{-\rho}(t) D_{\mathfrak{u}^+}^\theta(t).$$

Formellement Δ_θ est égal au produit $\prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}} \prod_{j=1}^{n_{\alpha_{\mathrm{res}}}} (e^{-\alpha_{\mathrm{res}}/2} - \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}},j}\, e^{\alpha_{\mathrm{res}}/2})$, où $\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}},1}, \dots, \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}},n_{\alpha_{\mathrm{res}}}}$ sont les valeurs propres de θ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}}$, comptées avec multiplicités.

Si V est l'espace d'une représentation de $\widetilde{T}^1$ on note $\det[1 - V]$ la représentation virtuelle (c'est-à-dire un élément du K_0 dans la catégorie des représentations de $\widetilde{T}^1$) définie par la somme alternée $\sum_i (-1)^i [\wedge^i V]$ des puissances extérieures. C'est multiplicatif dans le sens naturel suivant :

$$\det[1 - V \oplus W] = \det[1 - V] \otimes \det[1 - W]. \tag{2.5}$$

Puisque $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{u}^-$, l'identité (2.5) implique que le caractère de $\det[1 - \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}]$ est égal à $\prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}} (1 - e^{\alpha_{\mathrm{res}}}) \cdot \prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}} (1 - e^{-\alpha_{\mathrm{res}}})$. Comme θ fixe T^1, on obtient facilement :

$$\Delta_\theta^2(t) = \frac{(-1)^{\dim \mathfrak{u}^+}}{\det(1 - \theta)_{|\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^1}} \det(1 - \mathrm{Ad}(\theta t))_{|\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^1}. \tag{2.6}$$

Example 2.6 (Voir Chenevier-Clozel [6]*).* — Soit $\mathbf{G}$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbf{C}^N$ et θ l'automorphisme involutif opérant par $g \mapsto g^\theta = J^t g^{-1} J^{-1}$. On prend $\mathfrak{u}^+$ égale au radical unipotent de l'algèbre de Borel standard de $\mathrm{M}_N(\mathbf{C})$ et

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & & & & \\ & t_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t_2^{-1} & \\ & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

On calcule les valeurs propres sur $\mathfrak{u}^+$ de l'endomorphisme

$$X \mapsto -J\mathrm{Ad}(t^{-1})^t X J^{-1}.$$

Un calcul simple donne alors
(2.7)

$$D^\theta_{\mathfrak{u}^+}(t) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{\ell}(1-t_i^2) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell}(1-t_i^2/t_j^2)(1-t_i^2t_j^2) \text{ si } N = 2\ell \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{\ell}(1-t_i^4) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell}(1-t_i^2/t_j^2)(1-t_i^2t_j^2) \text{ si } N = 2\ell+1 \end{cases}$$

qui n'est autre que le dénominateur de Weyl $\prod(1-e^\alpha)$ – le produit portant sur les racines positives du groupe E égal à $\mathrm{SO}(2\ell+1,\mathbf{C})$ si $N=2\ell$ est pair et à $\mathrm{Sp}(2\ell,\mathbf{C})$ si $N=2\ell+1$ est impair – évalué en (t_i^2). Le terme $e^{-\rho}(t)$ le transforme en $D_E := \prod(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})$ évalué en $\mathcal{N}(t)$.

2.4. Représentations de dimension finie

Soit $X^*(\mathbf{T})$ le groupe des caractères de $\mathbf{T}$. Il contient le réseau des poids de $\mathbf{G}$ que nous notons X^*_{p}. On note $X^*_{\mathrm{p}+}$ le sous-ensemble des éléments de X^*_{p} qui sont dominants relativement à l'ordre défini par la paire $(\mathbf{B},\mathbf{T})$. Les éléments de $X^*_{\mathrm{p}+}$ paramètrent les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathbf{G}$: soit $\Lambda \in X^*_{\mathrm{p}+}$, alors Λ est le plus haut poids (relativement à la paire $(\mathbf{B},\mathbf{T})$) d'une représentation de dimension finie τ_Λ de $\mathbf{G}$.

L'application norme identifie $X^*(\mathbf{T}^1)$ à un sous-groupe de $X^*(\mathbf{T})$. Avec cette identification $X^*(\mathbf{T}^1)$ coïncide avec le sous-groupe des caractères invariants par θ. La représentation τ_Λ est θ-invariante ($\tau_\Lambda \cong \tau_\Lambda^\theta$ où $\tau_\Lambda^\theta = \tau\circ\theta$) si et seulement si $\Lambda \in X^*(\mathbf{T}^1)$.

Soit $X^{\mathrm{res}}_{\mathrm{p}}(\mathbf{T}^1) = X^*_{\mathrm{p}} \cap X^*(\mathbf{T}^1)$ et soit $\Lambda \in X^{\mathrm{res}}_{\mathrm{p}}(\mathbf{T}^1) \cap X^*_{\mathrm{p}+}$. Le choix d'un opérateur A_θ ($A_\theta^d = 1$) dans l'espace V_Λ de τ_Λ entrelaçant τ_Λ et $\tau_\Lambda\circ\theta$ permet d'étendre τ_Λ en une représentation irréductible τ^+ de $\mathbf{G}\rtimes\langle\theta\rangle$; on obtient par ce procédé toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathbf{G}\rtimes\langle\theta\rangle$ dont la restriction à $\mathbf{G}$ est irréductible, voir [15] pour plus de détails sur les représentations de dimension finie de groupes non-connexes.

Notons $\Theta_{\tau_\Lambda,\theta}$ le caractère de τ^+ sur L. Alors

$$\Theta_{\tau_\Lambda,\theta}(t) = \sum_{\mu\in X^{\mathrm{res}}_{\mathrm{p}}(\mathbf{T}^1)} m_\mu e^\mu(t) \quad (t\in T^1), \tag{2.8}$$

où m_μ est la trace de θ sur l'espace propre de la valeur propre μ. Noter que les caractères qui ne sont pas θ-invariants ne contribuent pas à la trace tordue.

3. Caractères tordus de G

Dans cette section, nous expliquons brièvement, en suivant Bouaziz [4], comment étendre le travail de Harish-Chandra [10] à L – l'ensemble des points réels de $\mathbf{L}$. Soit G^+ le groupe obtenu en formant le produit semi-direct de $\langle\theta\rangle \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ par G. On verra L comme la composante connexe – égale à θG – de θ dans G^+.

On a

$$(1,g)(\theta,x)(1,g^{-1}) = (\theta, gx\theta(g^{-1})) = (\theta, gx(g^\theta)^{-1}).$$

Étudier l'action de G sur L revient donc à étudier l'action tordue de G sur lui-même. Par transport de structure, on définit les éléments "θ-semisimples" et "θ-réguliers" dans G.

On identifie l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ avec l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur L. On note $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ le centre de $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$; on le considère donc comme une algèbre d'opérateurs différentiels G-bi-invariants sur L.

Soit Θ une distribution G-invariante sur L, distribution propre pour $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$. D'après Bouaziz [4, Thm. 2.1.1] Θ est une fonction analytique sur L_{reg} – l'ensemble des éléments réguliers de L.

3.1. Voisinage régulier

Soit $\delta \in L$ semisimple. Quitte à conjuguer δ par un élément de $\mathbf{G}$, on peut supposer que δ fixe la paire $(\mathbf{B},\mathbf{T})$. Alors $\mathrm{Ad}_\mathbf{L}(\delta)$ et θ diffèrent par un automorphisme intérieur qui fixe la paire $(\mathbf{B},\mathbf{T})$. Autrement dit :

$$\mathrm{Ad}_\mathbf{L}(\delta) = \mathrm{Ad}_\mathbf{G}(t)\circ\theta$$

pour un certain $t \in T$ et donc $T^\delta = T^\theta$.

Dans la suite, nous supposerons donc que $T^\delta = T^\theta$. Nous supposerons de plus que δ est *régulier*.

Pour $t \in T^1$ suffisamment petit, l'élément δt est encore régulier dans L. L'extension recherchée du théorème d'Harish-Chandra est la détermination de $t \mapsto \Theta(\delta t)$ sur un petit voisinage de l'identité dans T^1.

3.2. Application d'Harish-Chandra

Comme l'algèbre $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ est abélienne, on peut identifier $U(\mathfrak{t}_\mathbf{C}) = Z(\mathfrak{t}_\mathbf{C})$ avec l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{t}_\mathbf{C})$. De même on identifie $Z(\mathfrak{t}^1_\mathbf{C})$ avec $S(\mathfrak{t}^1_\mathbf{C})$.

L'application (2.1) s'étend naturellement en une application norme

$$\mathrm{N} : Z(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}) \to Z(\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}). \tag{3.1}$$

On a par ailleurs des homomorphismes d'Harish-Chandra

$$Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to Z(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}) \quad \text{et} \quad Z(\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}}) \to Z(\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}})$$

que nous noterons tous les deux φ. Rappelons que φ est un isomorphisme sur son image $S(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})^{W(\mathbf{G},\mathbf{T})}$ (resp. $S(\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}})^W$) constituée des polynômes invariants par l'action du groupe de Weyl.

Par dualité tout caractère de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est de la forme

$$\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to \mathbb{C}, \quad \text{avec } \chi_\lambda(Z) = \varphi(Z)(\lambda), \tag{3.2}$$

pour un certain $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$, et deux de ces caractères coïncident précisément quand leur paramètres appartiennent à la même $W(\mathbf{G},\mathbf{T})$-orbite. L'automorphisme θ opère naturellement sur l'ensemble des caractères de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et sur $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$. Ces actions sont compatibles avec (3.2). Noter que l'application norme N induit une injection de $\mathfrak{t}^{1*}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$; son image est constitué des éléments θ-stables dans $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$.

Remarquons finalement que l'application (3.1) s'étend de manière unique en une application norme $\mathrm{N} : Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to Z(\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}})$ de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\varphi} & Z(\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}}) \\ \uparrow\mathrm{N} & & \uparrow\mathrm{N} \\ Z(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\varphi} & Z(\mathfrak{g}^1_{\mathbf{C}}) \end{array}$$

soit commutatif. Un caractère χ_λ est alors θ-stable si et seulement s'il existe $\lambda^1 \in \mathfrak{t}^{1*}_{\mathbf{C}}$ tel que $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^1} \circ N$; la W-orbite de λ^1 est alors uniquement définie.

3.3. Partie radiale

Pour $t \in T^1$, posons :

$$\nu_\delta(t) = \det\left(1 - \mathrm{Ad}(\delta t)\right)_{|\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}}.$$

C'est une fonction analytique sur T^1. On pose

$$\Omega^1 = \{t \in T^1 \ : \ \nu_\delta(t) \neq 0\}.$$

C'est un ouvert dense dans T^1. Alors la sous-variété $\delta\Omega^1$ est localement fermée dans L, constituée d'éléments réguliers et l'application

$$\psi : L \times \delta\Omega^1 \to L \ ; \ (x, y) \mapsto xyx^{-1}$$

est submersive. On dispose en outre d'une mesure naturelle sur les fibres (lisses) de l'application ψ. L'intégration le long des fibres nous donne une application de $C_c^\infty(L \times \delta\Omega^1)$ dans C_c^∞. Notons ψ^* l'application duale sur les distributions. Harish-Chandra [10] montre que $\psi^*(\Theta) = 1 \otimes \Theta_{|\delta\Omega^1}$ – la restriction étant prise comme fonction analytique.

En fait, si D est un opérateur différentiel bi-G-invariant dans L, Harish-Chandra [10] montre de plus qu'il existe un opérateur $\Delta(D)$ sur $\delta\Omega^1$ satisfaisant

$$(Df)_{|\delta\Omega^1} = \Delta(D)(f_{|\delta\Omega^1}), \tag{3.3}$$

pour toute fonction f C^∞, G-invariante dans un voisinage de $\delta\Omega^1$. L'opérateur $\Delta(D)$ est appelé *partie radiale* de l'opérateur D.

Le théorème suivant est démontré par Bouaziz [4, Thm. 2.4.1]. On choisit un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}^1$ tel que $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V})$ soit ouvert et inclus dans Ω^1. On suppose de plus que pour tout $t \in \mathcal{W}$, l'élément δt est régulier et que l'application $\exp H \mapsto e^{\rho(H)}$ est bien définie dans $\mathcal{W}$.

Theorem 3.1. — *Soit $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. L'opérateur $\Delta(z)$ est uniquement défini sur $\delta\mathcal{W}$, et :*

$$\Delta(z) = |\nu_\delta|^{-1/2}(\varphi \circ N)(z) \circ |\nu_\delta|^{1/2}.$$

Supposons maintenant que $Z(\mathfrak{g})$ agisse sur Θ par χ_λ pour un certain $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Le caractère χ_λ est nécessairement θ-stable égal à $\chi_{\lambda^1} \circ N$. Notons

$$F(t) = |\nu_\delta(t)|^{1/2}\Theta(\delta t) \quad (t \in \mathcal{W}).$$

Il découle du Théorème 3.1 – voir [4, Cor. 2.4.11] – que pour tout $z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, $(\varphi \circ N)(z)F = \chi_\lambda(z)F$. La fonction F vérifie donc les équations différentielles :

$$zF = \lambda^1(z)F \quad \left(z \in S(\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}})^W\right). \tag{3.4}$$

Ces équations sont étudiées et résolues par Harish-Chandra dans [10, pp. 130–133]. Une solution de (3.4) sur $\mathcal{W}$ est un polynôme exponentiel :

$$F(\exp H) = \sum_{w \in W} \sum_{w \in W} P_w(H) e^{\lambda^1(wH)},$$

où $H \in \mathcal{V}$ et les coefficients $P_w(H)$ sont des polynômes en H de degré strictement inférieur à l'ordre de W_{λ^1} – le stabilisateur de λ^1 dans W.

3.4. Représentations θ-stables

Considérons maintenant une représentation admissible $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G qui possède un caractère infinitésimal χ_λ ($\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$). Supposons π θ-invariante ($\pi \cong \pi^\theta$ où $\pi^\theta = \pi \circ \theta$) et notons V son module d'Harish-Chandra. Le choix d'un opérateur d'entrelacement $A_\theta : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\pi$ ($A_\theta^d = 1$) entrelaçant π et $\pi \circ \theta$ permet d'étendre π en une représentation π^+ de G^+. Le caractère de π^+ sur $L = \theta G$ est un distribution G-invariante, distribution propre pour $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Les résultats qui précèdent s'appliquent donc. Notons

$$\Theta_{\pi,\theta}(g) = \Theta_{\pi^+}(\theta g) \qquad (g \in G) \;;$$

c'est *le caractère tordu* de π.

Theorem 3.2. — *Soit $x \in T^\theta$ un élément θ-régulier dans G. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}^1$ tel que pour tout $H \in \mathcal{V}$ on a :*

$$\left[|\Delta_\theta|\Theta_{\theta,\pi}\right](x \exp H) = \sum_{w \in W} c_\lambda(x,w) e^{\lambda^1(wH)},$$

où les $c_\lambda(x,w)$ sont des constantes dans $\mathbf{C}$.

Proof. — Posons $\delta = \theta x \in L$. C'est un élément semisimple régulier. On conserve les notations introduites ci-dessus de sorte que $\mathcal{V}$ est déjà défini et que pour $H \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} F(\exp H) &:= |\nu_\delta(\exp H)|^{1/2}\Theta_{\pi^+}(\delta \exp H) \\ &= \sum_{w \in W} P_w(H) e^{\lambda^1(wH)}, \end{aligned}$$

où $H \in \mathcal{V}$ et les coefficients $P_w(H)$ sont des polynômes en H de degré strictement inférieur à l'ordre de W_{λ^1} – le stabilisateur de λ dans W.

L'identité (2.6) implique qu'il existe une constante c telle que

$$|\Delta_\theta(x \exp H)| = c|\nu_\delta(\exp H)|^{1/2}.$$

Pour conclure la démonstration du théorème il reste donc à faire voir que les coefficients $P_w(H)$ sont des constantes. Pour ce faire nous reprenons une idée de Fomin et Shapovalov [9].

Soit $\tau = \tau_\Lambda$ ($\Lambda \in X^{\mathrm{res}}_{\mathrm{p}}(\mathbf{T}^1) \cap X^*_{\mathrm{p}+}$) une représentation de dimension finie de $\mathbf{G}$ invariante par θ. Alors la représentation $\pi \otimes \tau$ est encore admissible et θ-invariante. Le choix d'un opérateur entrelaçant τ et $\tau \circ \theta$ permet en outre de parler des caractères tordus $\Theta_{\pi\otimes\tau,\theta}$ et $\Theta_{\tau,\theta}$. Et le caractère tordu $\Theta_{\pi\otimes\tau,\theta}$ est égal au produit des caractères tordus $\Theta_{\pi,\theta}$ et $\Theta_{\tau,\theta}$ de π et τ :

$$\Theta_{\pi\otimes\tau,\theta} = \Theta_{\tau,\theta}\Theta_{\pi,\theta}. \tag{3.5}$$

D'un autre côté $\pi\otimes\tau$ est de longueur finie (voir [14, Prop. 10.41]) ; notons $\pi_1,\dots,\pi_n$ la suite de Jordan-Hölder de $\pi\otimes\tau$. Puisque $\pi\otimes\tau$ est θ-invariante, l'unicité des facteurs de composition implique que quitte à réordonner les π_j on peut supposer que les représentations $\pi_1,\dots,\pi_r$, avec $r\leqslant n$, sont θ-invariantes (éléments diagonaux) et que les autres ne contribuent pas au caractère tordu. De sorte que le caractère tordu de $\pi\otimes\tau$ se décompose en une combinaison linéaire des caractères tordus des sous-quotients θ-stables $\pi_1,\dots,\pi_r$:

$$\Theta_{\pi\otimes\tau,\theta}=\Theta_{\pi_1,\theta}+\dots+\Theta_{\pi_r,\theta}. \tag{3.6}$$

Notons que nous n'avons pas regroupé les représentations équivalentes. Si on regroupe par π_i équivalentes, les “multiplicités” sont dans $\mathbf{Z}[\zeta_d]$ où d désigne toujours l'ordre de θ.

Il découle de (3.5) et de (2.8) que pour tout $H\in\mathcal{V}$, le caractère tordu de $\pi\otimes\tau$ est donné par

$$\begin{aligned}\Theta_{\pi,\theta}(x\exp H)\Theta_{\tau,\theta}(x\exp H)&=\sum_{w\in W}P_w(H)e^{\lambda^1(wH)}\cdot\sum_{\mu\in X_{\mathrm{p}}^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)}e^{\mu}(x)m_\mu e^{\mu(H)}\\&=\sum_{w\in W}\sum_{\mu\in X_{\mathrm{p}}^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)}m_\mu e^{\mu}(x)P_w(H)e^{(w^{-1}\lambda^1+\mu)(H)}\\&=\sum_{w\in W}\sum_{\mu\in X_{\mathrm{p}}^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)}m_{w^{-1}\mu}e^{w^{-1}\mu}(x)P_w(H)e^{(\lambda^1+\mu)(wH)}.\end{aligned}$$

D'un autre côté, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{r}\Theta_{\pi_i,\theta}(x\exp H)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{w\in W}P_{w,i}(H)e^{\lambda_i^1(wH)}.$$

Il découle en particulier (3.6) que pour tout $H\in\mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned}&\sum_{w\in W}\sum_{\mu\in X_{\mathrm{p}}^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)}m_{w^{-1}\mu}e^{w^{-1}\mu}(x)P_w(H)e^{(\lambda^1+\mu)(wH)}\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{w\in W}P_{w,i}(H)e^{\lambda_i^1(wH)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

On peut supposer $\mathrm{Re}(\lambda^1)$ et tous les $\mathrm{Re}(\lambda_i^1)$ $(i=1,\dots,r)$ dominants. On peut en outre choisir Λ de telle sorte que le stabilisateur $W_\Lambda\subset W$ soit trivial. Notons que dans ce cas $\lambda^1+\Lambda$ est encore dominant et que le stabilisateur $W_{\lambda^1+\Lambda}$ est encore trivial. Il découle alors de (3.7) que

$$m_{w^{-1}\mu}e^{w^{-1}\Lambda}(x)P_w(H)=\sum_i P_{w,i}(H). \tag{3.8}$$

Ici la somme porte sur les indices i pour lesquels $\lambda_i^1 = \lambda^1 + \Lambda$. Mais le stabilisateur $W_{\lambda^1+\Lambda}$ est encore trivial. Les polynômes $P_{w,i}$ sont donc des constantes et le théorème est démontré. $\square$

3.5. Prolongement analytique du caractère tordu

Soit K un sous-groupe compact maximal de G et une décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \tag{3.9}$$

de sorte que l'involution de Cartan correspondante θ_{Cartan} commute à θ (un tel K existe car θ, d'ordre fini, fixe un point de l'espace symétrique de G). Alors la décomposition de Cartan (3.9) est θ-invariante. Notons $\mathfrak{t}_c^1 = \mathfrak{t}^1 \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{t}^1 \cap \mathfrak{p}$. Soit T_c^1 et A^1 les sous-groupes analytiques de G correspondants ; on a [(3)] $T^1 = T_c^1 A^1$ avec $T_c \subset K$. Une racine restreinte α_{res} est dite réelle (resp. imaginaire) si α_{res} est nulle sur $\mathfrak{t}_c^1$ (resp. $\mathfrak{a}^1$). On note

$$\mathfrak{a}^{1-} = \{H \in \mathfrak{a}^1 : \alpha_{\mathrm{res}}(H) < 0,\ \forall \alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}} \text{ non-imaginaire}\}.$$

Noter que l'ensemble des éléments θ-réguliers dans $T_c^1 \exp \mathfrak{a}^{1-}$ n'est pas connexe. Dans ce paragraphe, on cherche à prolonger l'identité du Théorème 3.2 à tout cet ensemble.

D'après [4, Lem. 3.6.3], il existe une fonction localement constante ε sur l'ensemble des éléments θ-réguliers dans T^1 telle que

$$|\Delta_\theta(\exp H)| = \varepsilon(\exp H) e^{-\rho(H)} D^\theta_{\mathfrak{u}^+}(\exp H) \tag{3.10}$$

pour tout $H \in \mathfrak{t}^1$ tel que $\exp H$ soit θ-régulier.

Soit $\mathcal{V}$ un ouvert connexe dans $\mathfrak{t}_c^1 + \mathfrak{a}^{1,-}$. On fixe $H_0 \in \mathcal{V}$. D'après le Théorème 3.2 et (3.10) on a alors :

$$\varepsilon(\exp H_0) e^{-\rho(H)} \left[D^\theta_{\mathfrak{n}^+} \Theta_{\theta,\pi}\right](\exp H) = \sum_{\mu \in W\cdot\lambda^1} C_\mu e^{\mu(H)} \quad (H \in \mathcal{V})$$

où les C_μ sont des constantes complexes (qui dépendent du choix de H_0).

D'après [4, Lem. 3.6.23], la fonction $H \mapsto \left[D^\theta_{\mathfrak{u}^+} \Theta_{\theta,\pi}\right](\exp H)$ se prolonge analytiquement à $\mathfrak{t}_c^1 + \mathfrak{a}_1^-$. On a donc :

$$\left[D^\theta_{\mathfrak{u}^+} \Theta_{\theta,\pi}\right](\exp H) = \varepsilon(\exp H_0)^{-1} e^{\rho(H)} \sum_{\mu \in W\cdot\lambda^1} C_\mu e^{\mu(H)} \quad (H \in \mathcal{V})$$

---

(3) Rappelons que T^1 est connexe.

pour tout $H \in \mathfrak{t}_c^1 + \mathfrak{a}_1^-$. En réutilisant (3.10) on obtient :

$$[|\Delta_\theta|\Theta_{\theta,\pi}]\,(\exp H) = \frac{\varepsilon(\exp H)}{\varepsilon(\exp H_0)} \sum_{\mu \in W\cdot\lambda^1} C_\mu e^{\mu(H)} \tag{3.11}$$

pour tout $H \in \mathfrak{t}_c^1 + \mathfrak{a}_1^-$ tel que $\exp H$ soit θ-régulier.

3.6. Caractères des représentations induites

Dans ce paragraphe, nous supposons le tore T maximalement déployé sur $\mathbf{R}$ et notons A sa partie déployée. Nous supposons en outre que T est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $P = MAN$ de G qui est invariant par θ.(4) Soit (V_M, τ) une représentation irréductible θ-stable de M et μ un caractère θ-stable de A. On pose

$$I = \mathrm{ind}_{MAN}^G(V_M \otimes \mathbf{C}_\mu)$$

(induite unitaire). La représentation I est de longueur finie mais peut être réductible. Néanmoins, le choix d'un opérateur a_θ ($a_\theta^d = 1$) dans l'espace V_M entrelaçant τ et $\tau \circ \theta$ est uniquement défini à une racine de l'unité près et induit un opérateur $A_\theta : I \to I$ par la formule

$$A_\theta(f)(g) = a_\theta f(\theta^{-1}(g)) \quad (\text{où } f(gm) = \tau(m^{-1}f(g)).$$

L'opérateur A_θ définit une action de θ sur I ; dans la suite, on choisira toujours cette action (uniquement définie à une racine de l'unité près) ; notons en particulier que $A_\theta^d = 1$. On peut alors considérer le caractère tordu $\Theta_{I,\theta}$; c'est une fonction localement sommable analytique sur les éléments θ-réguliers de G. Le lemme suivant découle de [4, Lem. 7.1.3] qui généralise un théorème d'Hirai [12, Thm. 2] dans le cas non tordu.

Le groupe G opère par θ-conjugaison sur lui-même ; on note

$$\begin{aligned} N_{G,\theta}(T) &= \{g \in G : gT^1(g^\theta)^{-1} \subset T^1\} \\ &= \{g \in N_G(\mathfrak{t}^1) : g(g^\theta)^{-1} \in T^1\} \end{aligned}$$

et $Z_{G,\theta}(T) = T^\theta$. Le groupe de Weyl tordu

$$W_\theta(G,T) = N_{G,\theta}(T)/T^\theta$$

opère sur $\mathfrak{t}$ et s'identifie naturellement à un sous-groupe d'indice fini de W. On dispose de la même manière d'un groupe de Weyl tordu $W_\theta(MA, T)$.

(4) Noter qu'un tel P n'existe pas en général : penser au cas où G est un groupe complexe, vu comme groupe réel, et où θ correspond à la conjugaison complexe par rapport à une forme réelle non quasi-déployée. (Ce problème apparent disparaît dans le cadre des espaces tordus.)

Puisque P est minimal, si T et T' sont deux tores maximalement déployés dans MA alors T^1 et $(T')^1$ sont θ-conjugués dans MA. L'expression du caractère tordu de I est donc particulièrement simple dans notre cas :

Lemma 3.3. — *Pour tout élément θ-régulier $t \in T^1$, on a :*

$$[|\Delta_\theta|\Theta_{I,\theta}]\,(t) = \frac{1}{\#W_\theta(MA,T)} \sum_{v \in W_\theta(G,T)} [|\Delta_{MA,\theta}|\Theta_{MA,\theta}(V_M)]\,(vt).$$

Ici $\Theta_{MA,\theta}(V_M)$ désigne la caractère tordu de la représentation V_M du groupe réductif MA. Noter que V_M est une représentation θ-stable et de dimension finie. Supposons que $Z(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbf{C}})$ agisse sur V_M selon χ_λ avec $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$. D'après le Théorème 3.2, au voisinage d'un point $x \in T^\theta$ θ-régulier dans MA, la fonction $|\Delta_{MA,\theta}|\Theta_{MA,\theta}(V_M)$ s'exprime sous la forme :

$$\sum_{w \in W(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})^\theta} d_\lambda(x,w) e^{w^{-1}\lambda^1}, \tag{3.12}$$

où les $d_\lambda(x,w)$ sont des constantes dans $\mathbf{C}$. Dans un voisinage de x dans T^θ on a donc :

$$\begin{aligned} &[|\Delta_\theta|\Theta_{I,\theta}] \\ &\quad = \frac{1}{\#W_\theta(MA,T)} \sum_{v \in W_\theta(G,T)} \sum_{w \in W(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})^\theta} d_\lambda(vx,w) e^{v^{-1}w^{-1}\lambda^1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

4. Exposants tordus, $\mathfrak{n}$-homologie et conjecture d'Osborne

Dans ce chapitre, nous supposons, comme dans le § 3.6, que le tore T maximalement déployé sur $\mathbf{R}$ est contenu dans un parabolique minimal θ-stable P. Nous notons A sa partie déployée et $\mathfrak{n}$ la complexifiée de l'algèbre de Lie du radical unipotent de $P = MAN$. De sorte que $T = T_c A$, où $A = (\mathbf{R}_+^*)^r$ et T_c est compact ; l'entier r est le rang réel de G. L'automorphisme θ préserve A. Un caractère χ de A est dit *θ-stable* si $\chi \circ \theta = \chi$.

4.1. Exposants θ-stables

Notons $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A. Un *exposant* est un caractère de A. Par abus de notation on identifie un caractère de A à un élément de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^r$. L'algèbre $\mathfrak{n}$ détermine un système de racines positives qui sont les parties réelles des racines non-imaginaires dans $R = R(\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Pour deux exposants e, e', on écrit $e \leqslant e'$ si

$$e' = e + \sum_\alpha n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \geqslant 0)$$

où α décrit les racines simples dans $\mathfrak{n}$ et e, e' sont vus comme des formes linéaires complexes sur $\mathfrak{a} = \mathbf{R}^r$. Noter qu'un exposant

$$e = \sum_\alpha n_\alpha \alpha$$

est θ-stable si et seulement si

$$\begin{aligned} e &= \sum_\alpha \frac{1}{d} n_\alpha (\alpha + \theta(\alpha) + \ldots + \theta^{d-1}(\alpha)) \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{d_\alpha} n_\alpha \mathrm{N}\alpha \\ &= \sum_{\mathrm{N}\alpha} n_\alpha \mathrm{N}\alpha. \end{aligned}$$

Et l'ordre naturel sur les racines dans $\mathrm{N}R$ (§ 2.2) définit un ordre sur les exposants θ-stables ; dans la deuxième partie de cet article nous notons $\leqslant_\theta$ cet ordre.

Example 4.1. — Soit $\mathbf{G}$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbf{C}^N$ et θ l'automorphisme involutif opérant par $g \mapsto g^\theta = J^t g^{-1} J^{-1}$. Le groupe E égal à $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$, resp. $\mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C})$, si $N = 2\ell$ est pair, resp. si $N = 2\ell+1$ est impair.

Via l'application norme, un exposant θ-stable $e \in \mathbf{C}^N$ définit un exposant de E c'est-à-dire un vecteur dans $\mathbf{C}^\ell$. L'ordre naturel sur les racines de E definit donc un ordre $\leqslant_E$ sur les exposants θ-stables. Si $e \leqslant_E e'$ on a toujours $e \leqslant_\theta e'$ mais la réciproque n'est vraie que si N est pair. Pour deux exposants θ-stables e, e' l'ordre $\leqslant_E$ s'exprime par $e' - e = (x_i)_{i=1,\ldots,\ell}$ avec

$$(4.1) \qquad \begin{cases} x_1 + \ldots + x_i \in \mathbf{N} \quad (1 \leqslant i \leqslant \ell - 1) \\ \text{et} \\ x_1 + \ldots + x_\ell \in \mathbf{N}, \quad \text{resp. } 2\mathbf{N} \end{cases}$$

si $N = 2\ell$ est pair, resp. si $N = 2\ell + 1$ est impair. L'ordre $\leqslant_\theta$ s'exprime quant à lui par $e' - e = (x_i)_{i=1,\ldots,\ell}$ avec

$$(4.2) \qquad \begin{cases} x_1 + \ldots + x_i \in \mathbf{N} \quad (1 \leqslant i \leqslant \ell - 1) \\ \text{et} \\ x_1 + \ldots + x_\ell \in \mathbf{N} \end{cases}$$

indépendamment de la parité de N.

4.2. Exposants d'homologie

Soit $R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}} \subset R_{\mathrm{res}}$ le sous-ensemble constitué des racines (restreintes) non-imaginaires.

LEMMA 4.2. — *Soit $\alpha \in R$ une racine non imaginaire alors $\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}$.*

Proof. — Puisque α est non imaginaire et que P est minimal on a $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha} \subset \mathfrak{n}$. Il s'agit donc de montrer qu'une racine (réelle) α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ se restreint non trivialement à $\mathfrak{a}^1$. Les racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ déterminent une chambre de Weyl aiguë (ouverte) positive C. Soit $H \in C$; alors pour toute racine α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ on a $\alpha(H) > 0$. Mais puisque par ailleurs $\mathfrak{n}$ est θ-stable θ permute les racines (positives) de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$. On a donc :

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{d} \theta^i(H)\right) = \sum_{i=0}^{d} \theta^i(\alpha)(H) > 0$$

et $\sum_{i=0}^{d} \theta^i(H) \in \mathfrak{a}^1$. □

Il découle en particulier du Lemme 4.2 que

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}} \subset \mathfrak{u}^+.$$

Notons

$$\rho_P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}} (\dim \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\alpha_{\mathrm{res}}})\alpha_{\mathrm{res}}.$$

Soit V le module d'Harish-Chandra d'une représentation (admissible) irréductible θ-stable π. Un lemme de Casselman et Osborne [5] affirme que V est de type fini comme $U(\mathfrak{n})$-module. Pour tout $q \geqslant 0$, le groupe d'homologie $H_q(\mathfrak{n}, V)$ est donc de dimension finie. Si e est un exposant, on peut considérer le $(e + \rho_P)$-espace propre généralisé ; notons-le $H_q(\mathfrak{n}, V)_e$. On dit que e est un *exposant d'homologie* si

$$H_q(\mathfrak{n}, V)_e \neq 0$$

pour un certain q. La raison d'être du décalage par ρ_P deviendra claire au chapitre suivant, voir [11, p. 51].

Soit q un entier positif. Alors T et θ (*via* A_θ) opèrent sur $H_q(\mathfrak{n}, V)$. Pour $t \in T$ (en particulier $t \in T^1$) on peut considérer

$$\Theta_q^\theta(t, V) = \mathrm{trace}\,(t\theta \mid H_q(\mathfrak{n}, V))\,. \tag{4.3}$$

Notons une différence importante avec le cas non tordu. L'opérateur A_θ opère sur l'homologie avec des valeurs propres (qui sont des racines de l'unité). L'expression (4.3) est donc (même pour q fixé) une somme à coefficients dans les racines de l'unité de caractères θ-stables de $t \in T$. Cette somme peut s'annuler sur A sans être nulle sur T.

Étant donné un exposant e on notera $f \in \mathfrak{a}^{1*} \otimes \mathbf{C}$ le caractère obtenu par restriction. De la même manière que les racines dans R définissent un ordre sur les exposants, les racines restreintes dans R_{res} définissent un ordre naturel sur les caractères $f \in \mathfrak{a}^{1*} \otimes \mathbf{C}$; nous notons $\leqslant_{\mathrm{res}}$ cet ordre.

Un caractère $f \in \mathfrak{a}^{1*} \otimes \mathbf{C}$ est un *exposant d'homologie restreint* s'il apparaît dans $H_q(\mathfrak{n}, V)$ pour quelque q. C'est un *exposant restreint minimal* si c'est un exposant d'homologie restreint et s'il est minimal pour $\leqslant_{\mathrm{res}}$. Rappelons un résultat fondamental de Hecht-Schmid dans le cas non tordu : [11, Prop. 2.32].

Proposition 4.3. — *Si e est un exposant d'homologie minimal (pour $\leqslant$) alors e n'apparaît que dans $H_0(\mathfrak{n}, V)$.*

Nous utiliserons cette proposition sous la forme suivante :

Proposition 4.4. — *Soit f un exposant restreint minimal. Alors f n'apparaît que dans $H_0(\mathfrak{n}, V)$.*

Proof. — Supposons en effet que $f = e_{|\mathfrak{a}^1}$ où e apparaît dans H_q, $q > 0$. Alors $e = e_0 + \sum n_\alpha \alpha$ (notation de 4.1) où $(n_\alpha)_\alpha \neq 0$ d'après la Proposition 4.3 et e_0 apparaît dans H_0. On en déduit que

$$f = (e_0)_{|\mathfrak{a}^1} + \sum_\alpha n_\alpha \alpha_{\mathrm{res}}.$$

Ce qui, d'après le Lemme 4.2, contredit la minimalité de f. □

Nous avons en vue le théorème suivant – version tordue de la "conjecture d'Osborne" démontrée par Hecht et Schmid [11]. Suivant la démonstration de [11] nous commencerons par le réduire à un cas apparemment très particulier *via* un procédé de "continuation cohérente".

On définit :

$$D^\theta_{\mathfrak{n}}(t) = \det\big((1-\theta t)_{|\mathfrak{n}}\big) = \sum_q (-1)^q \mathrm{trace}(t\theta \mid \Lambda^q \mathfrak{n}). \tag{4.4}$$

On dit que $t \in T^1$ est *contractant* si les valeurs propres (complexes) de $t\theta$ dans $\mathfrak{n}$ sont de valeur absolue < 1. Noter qu'alors $D^\theta_{\mathfrak{n}}(t) \neq 0$.(5)

(5) Nous considérons un ensemble un peu plus petit que celui de Hecht-Schmid dans le cas non tordu [11, § 3].

Theorem 4.5. — *Pour tout élément θ-régulier contractant $t \in T^1$, on a :*

$$\Theta_{\pi,\theta}(t) = \frac{\sum_q (-1)^q \Theta_q^\theta(t,V)}{D_{\mathfrak{n}}^\theta(t)}.$$

4.3. Un fait

On a le fait évident suivant :

Si $t \in T^1$ est contractant et $a \in A^1 = A_\theta$ vérifie $a^{\alpha_{\mathrm{res}}} < 1$ ($\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}$) alors ta est contractant.

5. Continuation cohérente

Soit (V,π) une représentation admissible de G munie d'une extension à G^+. On considère le caractère tordu

$$\Theta_\theta(V) = \Theta_{\pi,\theta}.$$

Il dépend évidemment du choix de l'opérateur d'entrelacement A_θ.

De même, chaque $H_q(\mathfrak{n},V)$ est un MA-module θ-invariant. Et le caractère tordu $\Theta_{MA,\theta}(H_q(\mathfrak{n},V))$ est égal à $\Theta_q^\theta(t,V)$. Dans la suite, nous notons :

$$\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V) = \frac{\sum_q (-1)^q \Theta_{MA,\theta}(H_q(\mathfrak{n},V))}{D_{\mathfrak{n}}^\theta(t)}.$$

Noter que V est toujours de longueur finie ; soit

$$[V] = m_1[V_1] + \ldots + m_n[V_n]$$

l'expression de $V_{|G}$ dans le groupe de Grothendieck des $(\mathfrak{g},K)$-modules, avec V_i irréductible, pour $i = 1,\ldots,n$, alors :

$$\Theta_\theta(V) = m_1'\Theta_\theta(V_1) + \ldots + m_n'\Theta_\theta(V_n) \quad (m_i' \in \mathbf{Z}[\zeta_d]) \tag{5.1}$$

où, par convention, on pose $\Theta_\theta(V_i) = 0$ si V_i n'est pas θ-stable et où on choisit, si V_i est θ-stable, une extension à G^+.

De même, chaque $H_q(\mathfrak{n},V_i)$ est un MA-module θ-invariant. Et le caractère tordu $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)$ se décompose en :

$$\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V) = m_1'\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V_1) + \ldots + m_n'\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V_n), \tag{5.2}$$

avec les mêmes coefficients m_i'. Il suffit en effet de traiter le cas d'une suite exacte courte

$$0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$$

où V_1 est irréductible en tant que G^+-module. L'action de θ – par A_θ – sur V induit une action sur V_1 et V_2 et ces actions commutent à la suite exacte longue d'homologie. Le calcul de la caractéristique d'Euler de cette suite exacte longue implique alors l'additivité des caractères tordus. Par ailleurs si la restriction du G^+-module V_1 à G n'est pas irréductible $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V_1) = 0$.

Il découle de (5.1) et (5.2) que pour démontrer que pour tout élément θ-régulier $t \in T^1$, on a :

$$\Theta_\theta(V) = \Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V), \tag{5.3}$$

il suffit de le vérifier pour les V irréductibles.

5.1. Familles cohérentes

Notons $\mathcal{C}^\theta$ le $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-module libre engendré par les caractères tordus de modules d'Harish-Chandra θ-stables admissibles et irréductibles (étendus à G^+). Le module $\mathcal{C}^\theta$ se décompose en une somme directe :

$$\mathcal{C}^\theta = \bigoplus_{\lambda^1 \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^{1*}/W} \mathcal{C}^\theta_{\lambda^1},$$
$$\text{avec } \mathcal{C}^\theta_{\lambda^1} = \{\Theta \in \mathcal{C}^\theta : Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \text{ opère sur } \Theta \text{ par } \chi_\lambda = \chi_{\lambda^1} \circ \mathrm{N}\}.$$

L'anneau $\mathcal{F}^\theta$ des représentations virtuelles de dimension finie de $\mathbf{G}$ invariante par θ opère par tensorisation sur $\mathcal{C}^\theta$ et le munit d'une structure naturelle de $\mathcal{F}^\theta$-module (*cf.* démonstration du Théorème 3.2). Rappelons – voir (2.8) – qu'une représentation $\varphi \in \mathcal{F}^\theta$ a un caractère tordu dont la restriction à T^1 est de la forme :

$$\varphi = \sum_{\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)} m_\mu e^\mu,$$

où m_μ est la trace de θ sur l'espace propre de la valeur propre μ.

À tout $\lambda^1 \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^{1*}$ il correspond $\lambda = \mathrm{N}(\lambda^1) \in \mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$ qui est θ-stable et tel que $\lambda_{|\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}} = \lambda^1$. On a alors $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^1} \circ \mathrm{N}$. Dans la suite, on identifie ainsi $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^{1*}$ à un sous-espace de $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$. Rappelons en particulier que l'on identifie ainsi les élements $\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)$ à des éléments θ-stables de $X_p(\mathbf{T})$.

Fixons alors $\lambda_0 = \lambda_0^1 \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^{1*}$. On dit qu'une famille

$$\{\Theta_\lambda \ : \ \lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0\} \subset \mathcal{C}^\theta,$$

indexée par les translatés de $\lambda_0 \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ par le réseau $X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) \subset X_p(\mathbf{T})$, dépend de façon *cohérente* du paramètre λ si

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a) } \Theta_\lambda \in \mathcal{C}^\theta_{\lambda^1} \quad \text{et} \\ &\text{(b) } \varphi\Theta_\lambda = \sum_{\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)} m_\mu \Theta_{\lambda+\mu}, \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0$ et tout $\varphi \in \mathcal{F}^\theta$. Remarquons que si $\lambda = \mu + \lambda_0$ avec $\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)$, alors λ est θ-stable de sorte que $\lambda^1 = \lambda_{|\mathfrak{t}^1_{\mathbf{C}}}$ ou encore $\chi_{\mu+\lambda_0} \circ \mathrm{N} = \chi_\lambda$.

Le choix du tore maximal T n'est pas important dans la définition ci-dessus. Noter que d'après § 3.1 si $\delta \in L$ est un élément semisimple qui stabilise une paire $(\mathbf{B}', \mathbf{T}')$ les tores $\mathbf{T}^1$ et $\mathbf{T}'^1$ ne diffèrent que d'un automorphisme intérieur de $\mathbf{G}$. On peut utiliser cet automorphisme pour transférer la paramétrisation d'une famille cohérente à une paramétrisation par des éléments de $\mathfrak{t}'^{1*}_{\mathbf{C}}$. Ainsi reparamétrée, la famille est cohérente si et seulement la famille avant reparamétrage l'était.

5.2. Continuation cohérente

Fixons $\lambda_0 \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^{1*}$. D'après le Théorème 3.2, on peut écrire :

$$[|\Delta_\theta|\Theta_0]\,(x \exp H) = \sum_{w \in W} c_0(x,w) e^{\lambda_0(wH)}$$

au voisinage d'un élément θ-régulier $x \in T^\theta$. Ici les constantes $c_0(x,w)$ ne sont généralement pas uniquement déterminées par Θ_0 mais, si l'on note W_0 le stabilisateur de λ_0 dans W, la somme

$$c_{\lambda_0}(x,w) := \sum_{v \in W_0} c_0(x, wv)$$

est bien uniquement déterminée par Θ_0. Notons $\Theta_{\lambda_0} = N_0\Theta_0$, avec N_0 égal au cardinal de W_0. On a alors :

$$\text{(5.5)} \qquad [|\Delta_\theta|\Theta_{\lambda_0}]\,(x \exp H) = \sum_{w \in W} c_{\lambda_0}(x,w) e^{\lambda_0(wH)}.$$

Lemma 5.1. — *Il existe une famille de caractères tordus*

$$\{\Theta_\lambda \ : \ \lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0\}$$

qui dépende de façon cohérente de λ et telle que

(1) $\Theta_{\lambda_0} = N_0\Theta_0$,
(2) $\Theta_{w\lambda} = \Theta_\lambda$ *($\lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0$, $w \in W_0$).*

Cette famille vérifie en outre les identités

$$c_{\lambda+\mu}(x,w) = e^{w^{-1}\mu}(x)c_\lambda(x,w) \tag{5.6}$$

pour tous $\lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0$, $\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)$ *et* x θ*-régulier dans* T^θ.

Proof. — La démonstration est identique à celles de [11, Lem. 3.39 & 3.44]. Il suffit de considérer un poids $\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)$ suffisamment dominant pour que $\lambda := \lambda_0 + \mu$ ne soit W-conjugué à un $\lambda_0 + v\mu$ $(v \in W)$ que si $v \in W_0$. La somme

$$\psi := \sum_{v\in W} e^{v\mu}$$

définit un caractère tordu virtuel dans $\mathcal{F}^\theta$. Et la conclusion du lemme nous force à prendre Θ_λ égal à la projection de $\psi\Theta_0 \in \mathcal{C}^\theta$ dans $\mathcal{C}^\theta_\lambda$. On vérifie facilement l'identité sur les constantes (5.6) dans ce cas. On se ramène à un λ quelconque en inversant le procédé. □

5.3. Réduction du Théorème 4.5

Rappelons que nous abrégeons le membre de droite de (5.3) en posant :

$$\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V) = \frac{\sum_q (-1)^q \Theta_{MA,\theta}(H_q(\mathfrak{n},V))}{D^\theta_{\mathfrak{n}}(t)}. \tag{5.7}$$

Maintenant, soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$ tel que χ_λ soit égal au caractère infinitésimal de π. Alors χ_λ est θ-stable et il existe $\lambda^1 \in \mathfrak{t}^{1*}_{\mathbf{C}}$ tel que $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^1} \circ N$. De même, un caractère qui intervient de façon non triviale dans la combinaison linéaire (4.3) est nécessairement θ-stable et il découle de [11, Cor. 3.32] qu'il est égal à $w\lambda^1 + \rho_P$ pour un certain $w \in W$. D'après le Théorème 3.2 la fonction $|\Delta_{MA,\theta}|\Theta_{MA,\theta}(H_q(\mathfrak{n},V))$ est localement une combinaison linéaire d'exponentielles de la forme $e^{w\lambda^1+\rho_P}$. Mais on a :

$$\Delta_\theta = e^{-\rho_P} D^\theta_{\mathfrak{n}} \Delta_{MA,\theta}.$$

On en déduit donc que si $x \in T^1$ est θ-régulier, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}^1$ tel que pour tout $H \in \mathcal{V}$ on a :

$$\left[|\Delta_\theta|\Theta_{\mathfrak{n},\theta}\right](x \exp H) = \sum_{w\in W} \tilde{c}_\lambda(x,w) e^{\lambda^1(wH)}, \tag{5.8}$$

où les $\tilde{c}_\lambda(x,w)$ sont des constantes dans $\mathbf{C}$. Il découle alors de [11, Lem. 3.59] que la continuation cohérente s'applique aussi bien à $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}$ qu'à Θ_θ. On peut donc insérer $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}$ dans une famille cohérente de sorte que

$$\tilde{c}_{\lambda+\mu}(x,w) = e^{w^{-1}\mu}(x)\tilde{c}_\lambda(x,w), \tag{5.9}$$

pour tous $\lambda \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1) + \lambda_0$, $\mu \in X_p^{\mathrm{res}}(\mathbf{T}^1)$ et x θ-régulier dans T^θ.

Démontrer (5.3) revient à vérifier les identités :

$$c_\lambda(x, w) = \tilde{c}_\lambda(x, w), \quad \text{pour } x \in T^1 \ \theta\text{-régulier.} \tag{5.10}$$

Les relations (5.9) et leurs homologues du Lemme 5.1 impliquent que si C est une constante strictement positive quelconque, il suffit de vérifier (5.10) lorsque

$$\mathrm{Re}\langle w^{-1}\lambda, \alpha\rangle < -C \quad \text{pour tout } \alpha \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}. \tag{5.11}$$

(Rappelons qu'ici $\lambda = \mathrm{N}(\lambda^1) \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ est θ-stable.)

6. Démonstration du Théorème 4.5

Soit donc V le module d'Harish-Chandra d'une représentation (admissible) irréductible θ-stable π (étendue à G^+) de caractère infinitésimal χ_λ avec $\lambda = \mathrm{N}(\lambda^1) \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$. Nous voulons vérifer l'identité (5.3).

6.1. Première réduction

D'après le chapitre précédent (par continuation cohérente) on est ramené à démontrer (5.3) sous l'hypothèse (5.11).

Seule la W-orbite de λ est bien définie, on peut donc supposer $\mathrm{Re}\langle\lambda, \alpha\rangle \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}$. De sorte que (5.11) force $\mathrm{Re}\langle\lambda, \alpha\rangle < -C$ et w trivial. Il suffit donc de vérifier les identités (5.10) lorsque :

$$\begin{aligned} &\text{(a) } \mathrm{Re}\langle\lambda, \alpha\rangle < -C \quad \text{pour tout } \alpha \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}, \text{ et} \\ &\text{(b) } w \text{ est trivial.} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ici C est une constante positive à fixer ultérieurement.

Puisque $\lambda = \mathrm{N}(\lambda^1) \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ on a $\lambda^1 = \lambda_{|\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^1}$. Posons $e = \lambda_{|\mathfrak{a}}$ et $f = \lambda_{|\mathfrak{a}^1}$.

On définit la f-composante de $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)$, au voisinage d'un élément θ-régulier $x \in T^1$, par :

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)_f &= \frac{\sum_w \tilde{c}_\lambda(x, w) e^{\lambda(wH)}}{|\Delta_{MA,\theta}|} e^{\rho_P(H)} \\ &= \sum_q (-1)^q \Theta_{MA,\theta}(H_q(\mathfrak{n}, V)_f), \end{aligned} \tag{6.2}$$

où dans la première somme w parcourt l'ensemble

$$\{w \in W \ : \ \lambda(w\cdot)_{|\mathfrak{a}} = e\} = \{w \in W \ : \ \lambda(w\cdot)_{|\mathfrak{a}^1} = f\}.$$

De la même manière on définit

$$\Theta_\theta(V)_f = \frac{\sum_w c_\lambda(x,w)e^{\lambda(wH)}}{|\Delta_{MA,\theta}|} e^{\rho_P(H)}. \tag{6.3}$$

D'après (6.1), le Théorème 4.5 découlera de la vérification que :

$$\Theta_\theta(V)_f = \Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)_f. \tag{6.4}$$

Lemma 6.1. — *Supposons que λ vérifie (6.1) avec $C = 0$. Alors sur les éléments θ-réguliers de T^1, on a :*

$$\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)_f = \Theta_{MA,\theta}(H_0(\mathfrak{n}, V)_f).$$

Proof. — Tous les θ-exposants d'homologie apparaissant dans le membre de droite de (5.8) sont de la forme $w\lambda_{|\mathfrak{a}^1}$. Mais pour tout $w \in W$, le caractère $w\lambda$ est égal à $w\lambda_0 + w\mu$ et il découle donc de (6.1) (en prenant $C = 0$), que l'on peut écrire :

$$w\lambda = \lambda + \sum_{\alpha \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}} x_\alpha \alpha \quad (x_\alpha \geqslant 0).$$

En particulier $\lambda_{|\mathfrak{a}^1}$ ne peut s'écrire $\lambda_{|\mathfrak{a}^1} = w\lambda_{|\mathfrak{a}^1} + \sum m_\alpha \alpha_{\mathrm{res}}$, comme on le voit par restriction de l'égalité ci-dessus à $\mathfrak{a}^1$. L'exposant restreint f est donc minimal et n'apparaît que dans H_0, d'après la Proposition 4.4. □

Remarquons que puisque $f = e_{|\mathfrak{a}^1}$ avec e θ-stable, on a :

$$\Theta_{MA,\theta}(H_0(\mathfrak{n}, V)_f) = \Theta_{MA,\theta}(H_0(\mathfrak{n}, V)_e). \tag{6.5}$$

Ainsi bien qu'en général $H_0(\mathfrak{n}, V)_e = 0$ n'implique pas $H_0(\mathfrak{n}, V)_f = 0$, cela implique néanmoins que $\Theta_{MA,\theta}(H_0(\mathfrak{n}, V)_f) = 0$. La proposition suivante montre que l'énoncé correspondant est également vrai pour $\Theta_\theta(V)_f$.

Proposition 6.2. — *Supposons que λ vérifie (6.1) avec $C = 0$ et que $H_0(\mathfrak{n}, V)_e = 0$. Alors $\Theta_\theta(V)_f$ est nul sur tout élément θ-régulier contractant de T^1.*

La démonstration de cette proposition occupe la fin de ce chapitre. Commençons par montrer comment en déduire (6.4). C'est immédiat si $H_0(\mathfrak{n}, V)_e = 0$: à la fois $\Theta_\theta(V)_f$ et $\Theta_{\mathfrak{n},\theta}(V)_f$ sont nuls sur les éléments θ-réguliers contractants de T^1. Supposons donc $H_0(\mathfrak{n}, V)_e \neq 0$.

Lemma 6.3. — *Supposons C assez grand. Alors e est en position de Langlands.*

Proof. — Puisque $e = \lambda_{|\mathfrak{a}}$ est θ-stable, cela découle de (6.1). □

On déduit alors de Hecht-Schmid [11, Lem. 6.10] que (pour C assez grand), le M-module $W = H_0(\mathfrak{n}, V)_e$ est irréductible.

Soit alors

$$I = \mathrm{ind}_P^G(W \otimes \mathbf{C}_e)$$

(induction unitaire depuis MAN): c'est un G^+-module de façon naturelle, et on a un morphisme naturel $V \hookrightarrow I$. Le sous-quotient V de I est le seul qui vérifie $H_0(\mathfrak{n}, V)_e \neq 0$ (*cf.* Hecht-Schmid, démonstration du Lemme 6.10). Donc

$$\Theta_\theta(V)_f = \Theta_\theta(I)_f$$

à l'aide, de nouveau, de la Proposition 6.2, sur les éléments θ-réguliers contractants de T^1. De plus (avec la définition, contenant la translation par ρ_P, de $H_0(\mathfrak{n}, V)_e$), on a

$$H_0(\mathfrak{n}, V)_e \cong W \otimes \mathbf{C}_{e+\rho_P}$$

comme MA-module. L'identité (6.4) découle donc du Lemme 6.1, de l'équation (6.5) et du calcul suivant relatif à la représentation induite:

Lemma 6.4.

$$\Theta_\theta(I)_f = \Theta_{MA,\theta}(W \otimes \mathbf{C}_{e+\rho_P}).$$

Proof. — Noter que $Z(\mathfrak{m}_\mathbf{C} \oplus \mathfrak{a}_\mathbf{C})$ opère sur $W \otimes \mathbf{C}_e$ selon le caractère χ_λ. Partons donc de l'expression locale du caractère tordu $\Theta_\theta(I)$ donnée par (3.13) :

$$[|\Delta_\theta|\Theta_{I,\theta}] = \frac{1}{\#W_\theta(MA,T)} \sum_{v\in W_\theta(G,T)} \sum_{w\in W(\mathfrak{m}_\mathbf{C}\oplus\mathfrak{a}_\mathbf{C},\mathfrak{t}_\mathbf{C})^\theta} d_\lambda(vx,w)e^{v^{-1}w^{-1}\lambda}.$$

Un terme de la double somme contribue à $\Theta_\theta(I)_e$ si et seulement si $(v^{-1} w^{-1}\lambda)_{|\mathfrak{a}^1} = f$ (avec $v \in W_\theta(G,T)$ et $w \in W(\mathfrak{m}_\mathbf{C} \oplus \mathfrak{a}_\mathbf{C}, \mathfrak{t}_\mathbf{C})^\theta$). Mais, en prenant $C = 0$ dans (6.1), l'égalité

$$(v^{-1}w^{-1}\lambda)_{|\mathfrak{a}^1} = f = \lambda_{|\mathfrak{a}^1}$$

force v à appartenir au groupe $W_\theta(MA,T)$. Donc, seuls les termes avec $v \in W_\theta(MA,T)$ dans la double somme contribuent à $\Theta_\theta(I)_f$.

Maintenant, le groupe $W_\theta(MA,T)$ opère trivialement sur le caractère tordu de $W \otimes \mathbf{C}_e$. On a donc :

$$d_\lambda(vx,w)e^{v^{-1}w^{-1}\lambda} = d_\lambda(x,w)e^{w^{-1}\lambda}$$

pour tout $v \in W_\theta(MA,T)$. On obtient donc que l'expression locale de $|\Delta_{MA,\theta}|\Theta_\theta(I)_f$ est égale à

$$\sum_{w\in W(\mathfrak{m}_\mathbf{C}\oplus\mathfrak{a}_\mathbf{C},\mathfrak{t}_\mathbf{C})^\theta} d_\lambda(x,w)e^{w^{-1}\lambda+\rho_P}$$

qui est aussi l'expression locale de $|\Delta_{MA,\theta}|\Theta_{MA,\theta}(W \otimes \mathbf{C}_{e+\rho_P})$. $\square$

Dans les paragraphes qui suivent on met progressivement en place les ingrédients nécessaires à la démonstration de la Proposition 6.2. On suppose dorénavant que $H_0(\mathfrak{n}, V)_e = 0$. Nous suivons la démonstration de [11, Prop. 6.15].

6.2. Exposants dominants

D'après [11, (4.24)], tout exposant dominant e' du module de Harish-Chandra V est de la forme $e' = (w \cdot \lambda)_{|\mathfrak{a}}$ pour un certain $w \in W(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ et intervient dans $H_0(\mathfrak{n}, V)$. Puisque l'on suppose $H_0(\mathfrak{n}, V)_e$ égal à $\{0\}$, e n'est pas un exposant dominant, l'exposant e' est donc différent de e. Soit il est θ-stable et $e'_{|\mathfrak{a}^1} \neq f$ soit il n'est pas θ-stable et on écrit $e' = we = e + \sum_{\alpha \in R^{\mathrm{n.i.}}} x_\alpha \alpha$ où les x_α sont positifs (car, d'après (6.1), e est très négatif) et non tous nuls. Soit N la projection sur $\mathfrak{a}_1$: puisque $\mathrm{N}e = e$, on a $\mathrm{N}e' = e + \sum_\alpha x_\alpha \mathrm{N}\alpha$. Si $\mathrm{N}e'$ est différent de e, il existe donc un $x_\alpha > 0$ tel que $\mathrm{N}\alpha \neq 0$. Dans tous les cas, la condition (6.1) (pour C assez grand) implique qu'il existe une racine $\alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}$ et une constante δ strictement positive telles que pour tout $\beta \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}}$ on a :

$$\mathrm{Re}\langle e'_{|\mathfrak{a}^1}, \beta\rangle \geqslant \mathrm{Re}\langle f, \beta\rangle + \delta\langle \alpha_{\mathrm{res}}, \beta\rangle \quad \text{et} \quad \alpha_{\mathrm{res}|\mathfrak{a}^1} \neq 0. \tag{6.6}$$

Soit $A^{1-} = \exp \mathfrak{a}^{1-}$. Quitte à diminuer δ, il découle de (6.6) et de [14, Thm. 8.47] (voir également [11, Lem. 6.46]) [6] que tout coefficient matriciel K-fini de π est majoré sur $\overline{A^{1-}}$ par un multiple de $e^{(\mathrm{Re} f + \delta\alpha_{\mathrm{res}} + \rho_P)}(a)$.

6.3. Coefficients matriciels

Les résultats du paragraphe précédent se traduisent en une borne sur $\Theta_{\pi,\theta}$.

Pour tout $\tau \in \widehat{K}$ on note d_τ le degré de τ. Soit E_τ la projection orthogonale de V sur V_τ la composante τ-isotypique de V. En choisissant une base orthonormale de V compatible avec la décomposition de V en K-types, on voit que

$$\Theta_{\pi,\theta}(g) = \sum_{\tau \in \widehat{K}} \mathrm{trace}(E_\tau \pi(g) A_\theta E_\tau) \tag{6.7}$$

[6] On prendra garde au fait que les notions d'exposants diffèrent d'une translation par ρ_P dans ces deux références ainsi qu'au fait que dans l'une l'asymptotique est dans A^+ dans l'autre dans A^-. Nous suivons les conventions de [11].

au sens des distributions. Noter que le sous-groupe compact K est θ-stable et donc que A_θ préserve la décomposition de V en K-types.

Maintenant, trace$(E_\tau \pi(g) A_\theta E_\tau)$ est une somme de coefficients matriciels associés à des vecteurs de V_τ. Un procédé bien connu permet de se ramener à des coefficients matriciels K-finis, voir par exemple [11, Lem. 6.23] ou [4, Lem. 3.4.1 & Lem. 3.5.1] (pour les groupes non-connexes). Il découle alors du paragraphe précédent que pour tout $a \in A^{1-}$ on a :

$$|\mathrm{trace}(E_\tau \pi(a) A_\theta E_\tau)| = O\left(d_\tau^3 e^{(\mathrm{Re} f + \delta\alpha_{\mathrm{res}} + \rho_P)}(a)\right). \tag{6.8}$$

6.4. Une distribution

Étant donné un réel strictement positif ε on pose

$$T_\varepsilon^1 = \left\{ t \in T^1 : |\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}},j} e^{\alpha_{\mathrm{res}}}(t) - 1| > \varepsilon,\ \forall \alpha_{\mathrm{res}} \in R_{\mathrm{res}}^{\mathrm{n.i.}},\ j = 1, \dots, n_{\alpha_{\mathrm{res}}} \right\}.$$

(Les notations sont celles du § 2.3.) Noter que T_ε^1 est ouvert dans T^1, et que la réunion $\cup_{\varepsilon>0} T_\varepsilon^1$ coïncide avec l'ensemble des éléments θ-réguliers contractants de T^1. En utilisant les résultats du paragraphe précédent, la démonstration de [11, Lem. 6.39] (voir également [4, Lem. 3.5.1] dans le cas non-connexe) implique que la distribution qui à une fonction g à support compact dans l'ensemble des éléments θ-réguliers associe l'intégrale

$$\int_{T^1} |\Delta_\theta| \Theta_{\theta,\pi} g dt$$

s'exprime comme une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^m X_j h_j$ où les X_j sont des opérateurs différentiels invariants sur T^1 et les h_j des fonctions continues sur les éléments θ-réguliers contractants de T^1 telles que

$$\begin{aligned} |h_j(ta)| &= O_\varepsilon\left(|\Delta_\theta(ta)| e^{(\mathrm{Re} f + \delta\alpha_{\mathrm{res}} + \rho_P)}(a) \right) \\ &= O_\varepsilon\left(e^{(\mathrm{Re} f + \delta\alpha_{\mathrm{res}})}(a) \right), \quad (ta \in T_\varepsilon^1,\ a \in A^{1-}). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Ici les X_j et les h_j peuvent être choisis indépendamment de ε.

6.5. Démonstration de la Proposition 6.2

Supposons par l'absurde que $\Theta_\theta(V)_f$ soit non nul au voisinage d'un élément θ-régulier contractant $t \in T^1$. Il existe alors un élément $w \in W$ tel que

$$c_\lambda(t, w^{-1}) \neq 0 \quad \text{et} \quad (w \cdot \lambda^1)_{|\mathfrak{a}^1} = f. \tag{6.10}$$

On fixe un voisinage compact U de l'identité dans $K \cap T^1$, suffisamment petit pour que l'on ait :

$$tUA^{1-} \subset T^1_\varepsilon.$$

On numérote $\mu_1 = f, \dots, \mu_n \in \mathfrak{a}^{1*} \otimes \mathbf{C}$ les éléments de $\{\mu_{|\mathfrak{a}^1} : \mu \in W \cdot \lambda^1\}$ sans répétition. L'hypothèse (6.1) entraîne que

$$|e^{\mu_i - \mu}(a)| < 1, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n,\ a \in A^{1-}.$$

D'après (3.11) il existe des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, de classe C^∞ sur un voisinage de U dans T^1_c, telles que

$$\text{(6.11)} \qquad [|\Delta_\theta|\Theta_{\theta,\pi}]\,(tma) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(m) e^{\mu_i}(a) \quad (m \in U,\ a \in A^{1-}).$$

L'hypothèse (6.10) implique en outre que φ_1 n'est pas constante égale à 0 sur U. Il existe donc une fonction ψ de classe C^∞ sur T^1_c, et de support dans U, telle que

$$\int_{T^1_c} \varphi_1 \psi dm = 1.$$

Pour $a \in A^{1-}$, on pose

$$\Psi(a) = e^{-\mu}(a) \int_{m \in T^1_c} [|\Delta_\theta|\Theta_{\theta,\pi}]\,(tma)\psi(m) dm.$$

D'après (6.11), on peut écrire Ψ comme une somme d'exponentielles :

$$\text{(6.12)} \qquad \Psi = 1 + \sum_{i=2}^{n} c_i e^{\mu_i - \mu}.$$

D'un autre côté, il découle du § 6.4 qu'il existe des opérateurs différentiels invariants $X_1, \dots, X_m$ sur A^1, des fonctions continues $h_1, \dots, h_m$ sur A^{1-}, une forme linéaire $\tau \in \mathfrak{a}^{1*}$ et des constantes $C_1, \dots, C_m$ tels que

(6.13)

$$\Psi = \sum_{j=1}^{m} X_j h_j, \text{ au sens des distributions, } |h_j| \leqslant C_j e^\tau \ (i = 1, \dots, m),$$

$$\text{et} \quad e^\tau(a) < 1 \text{ pour } a \in A^{1-}.$$

Soit g une fonction C^∞ à support compact dans A^{1-} telle que $\int_{A^1} g da = 1$ et soient $g_1, g_2, \dots$ les translatés de g par une suite de points $a_1, a_2, \dots$ dont les inverses tendent vers l'infini dans A^{1-}. Puisque les exponentielles $e^{\mu_i - \mu}$ $(i = 2, \dots, n)$ décroissent le long de A^{1-}, il découle de (6.12) que

$\int_{A^1} g_k \Psi da$ tend vers $\int_{A^1} f da = 1$ lorsque k tend vers l'infini. De même (6.13) implique :

$$\int_{A^1} g_k \Psi da = \sum_{j=1}^{m} \int_{A^1} (X_j^* g_k) h_j da \to 0.$$

Ce qui fournit la contradiction recherchée.

7. Paquets d'Arthur pour les groupes complexes

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Considérons un groupe H égal à $\mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$ si $N = 2\ell$ est pair et égal à $\mathrm{Sp}(2\ell)$ si $N = 2\ell + 1$ est impair. Rappelons que H est un sous-groupe endoscopique de G^+ où $G = \mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ et θ est l'automorphisme involutif $g \mapsto J^t g^{-1} J^{-1}$. Le groupe dual $\widehat{H}$ est égal à $\mathrm{Sp}(N, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$, naturellement plongé dans $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$.

Soit

$$\psi : \mathbf{C}^* \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \to \widehat{H}$$

un paramètre d'Arthur pour H. On suppose de plus que $\psi_{|\mathbf{C}^*}$ est *tempérée*, *i.e.* unitaire. D'après la conjecture de Ramanujan, cela devrait être toujours le cas. Il n'est, en outre, pas difficile d'étendre nos résultats aux paramètres "généralisés" où $\psi_{|\mathbf{C}^*}$ n'est plus nécessairement unitaire mais contrôlé par l'approximation de la conjecture de Ramanujan démontrée par Luo, Rudnick et Sarnak.

7.1. Paquets d'Arthur

Rappelons la définition du paquet $\prod(\psi)$. Il y a une notion naturelle de fonctions associées (φ, f), $\varphi \in C_c^\infty(G)$, $f \in C_c^\infty(H)$. [7] Lorsque N est pair et $H = \mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$ il faut en outre supposer f invariante par un automorphisme extérieur α de H ; on suppose $\alpha^2 = 1$.

On écrit le paramètre ψ sous la forme :

$$\psi = \chi_1 \otimes R_{a_1} \oplus \ldots \oplus \chi_m \otimes R_{a_m} \subset \mathrm{GL}(N, \mathbf{C}),$$

où chaque χ_j est un caractère unitaire de $\mathbf{C}^*$ que l'on écrit $z \mapsto z^{p_j} \bar{z}^{q_j}$ avec $\mathrm{Re}(p_j + q_j) = 0$. Noter que puisque l'image de ψ est contenue dans $\widehat{H}$, le paramètre ψ est θ-stable. On en déduit que soit χ_j est quadratique, soit

[7] On peut en fait considérer seulement des fonctions *K-finies* des deux côtés.

il existe k telle que $a_k = a_j$ et $\chi_k = \chi_j^{-1}$. On associe au paramètre ψ la représentation de $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$:

$$\Pi = \Pi_\psi = \mathrm{ind}(\chi_1 \circ \det \otimes \ldots \otimes \chi_m \circ \det) \tag{7.1}$$

(induction unitaire à partir du parabolique $(a_1, \ldots, a_m)$). Elle est irréductible d'après Vogan [20] ou Bernstein [3] et Baruch [2]. Elle est par ailleurs θ-stable ; fixons $A_\theta : \Pi \to \Pi$ un entrelacement tel que $A_\theta^2 = 1$.

(Lorsque N est pair et $H = \mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$ on identifie deux représentations irréductibles de G conjuguées par α. On désigne simplement par π la classe d'équivalence. Alors trace $\pi(f)$ est bien définie pour f restreinte comme expliqué ci-dessus.)

Le résultat suivant est alors le Théorème 30.1 d'Arthur [1, § 30].

Theorem 7.1 (Arthur). — *Il existe une famille finie $\prod(\psi)$ de représentations de H, et des multiplicités $m(\pi) > 0$ ($\pi \in \prod(\psi)$) telles que, pour φ et f associées :*

$$\mathrm{trace}\,(\Pi(\varphi)A_\theta) = \sum_{\pi\in\prod(\psi)} \varepsilon(\pi) m(\pi) \mathrm{trace}\,\pi(f), \tag{7.2}$$

où chaque $\varepsilon(\pi)$ est un signe $\in \{\pm 1\}$.

On pourrait aussi – comme Arthur le fait – définir $\prod(\psi)$ comme un ensemble de représentations-avec-multiplicités. L'égalité (7.2) détermine uniquement cet ensemble ainsi que les signes $\varepsilon(\pi)$. Arthur détermine d'ailleurs ces signes pour un choix convenable de A_θ (normalisation par le modèle de Whittaker). Il montre en particulier que $\varepsilon(\pi)$ est constant sur le paquet $\prod(\psi)$ dès que l'élément

$$s_\psi = \psi\left(1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

est central dans $\widehat{G}$, voir [1, p. 246, p. 242]. Noter que ceci se produit en particulier si pour tout $j = 1, \ldots, m$, les entiers a_j sont de même parité. En général on associe à $s_\psi \in \widehat{H}$ le groupe (complexe) E de groupe dual $\widehat{E}$ égal au centralisateur de s_ψ dans $\widehat{H}$. Le groupe E appartient à $\mathcal{E}_\ell(H)$ – l'ensemble des sous-groupes endoscopiques elliptiques de H.

Si $N = 2\ell$ et $H = \mathrm{SO}(2\ell + 1, \mathbf{C})$, l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(H)$ est paramétré par les couples d'entiers pairs (N', N'') avec $N'' \geqslant N' \geqslant 0$ et $N = N' + N''$. Le groupe endoscopique correspondant est le groupe

$$H' \times H'' = \mathrm{SO}(N' + 1, \mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(N'' + 1, \mathbf{C}).$$

Notons alors que $\widehat{H}' \times \widehat{H}'' = \mathrm{Sp}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{Sp}(N'', \mathbf{C})$. Dans ce cas, on pose

$$G' \times G'' = \mathrm{GL}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(N'', \mathbf{C}).$$

Si $N = 2\ell$ et $H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$, l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(H)$ est paramétré par les couples d'entiers pairs (N', N'') avec $N'' \geqslant N' \geqslant 0$ et $N = N' + N''$. Le groupe endoscopique correspondant est le groupe

$$H' \times H'' = \mathrm{SO}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(N'', \mathbf{C}).$$

Notons alors que $\widehat{H}' = \mathrm{SO}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(N'', \mathbf{C})$. Dans ce cas, on pose encore

$$G' \times G'' = \mathrm{GL}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(N'', \mathbf{C}).$$

Si $N = 2\ell + 1$ et $H = \mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C})$, l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(H)$ est paramétré par les couples d'entiers pairs (N', N'') avec $N'', N' \geqslant 0$ et $N = N' + (N'' + 1)$. Le groupe endoscopique correspondant est le groupe

$$H' \times H'' = \mathrm{SO}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{Sp}(N'', \mathbf{C}).$$

Notons alors que $\widehat{H}' \times \widehat{H}'' = \mathrm{SO}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(N'' + 1, \mathbf{C})$. Dans ce cas, on pose

$$G' \times G'' = \mathrm{GL}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(N'' + 1, \mathbf{C}).$$

Dans tous les cas, le paramètre ψ se factorise à travers $\widehat{H}' \times \widehat{H}''$ et on note

$$(\psi', \psi'') : \mathbf{C}^* \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \to \widehat{H}' \times \widehat{H}''$$

le paramètre correspondant.

Il y a encore une notion naturelle de fonctions associées :

$$\begin{array}{ccc} \varphi \in C_c^\infty(G) & \longleftrightarrow & f \in C_c^\infty(H) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (\varphi', \varphi'') \in C_c^\infty(G' \times G'') & \longleftrightarrow & (f', f'') \in C_c^\infty(H' \times H''). \end{array}$$

Soit $\Pi' \otimes \Pi'' = \Pi_{\psi'} \otimes \Pi_{\psi''}$ la représentation de $G' \times G''$ associée au paramètre (ψ', ψ''). Le Théorème 30.1 d'Arthur [1, § 30] implique :

$$\mathrm{trace}\left((\Pi'(\varphi') \otimes \Pi''(\varphi''))A_\theta\right) = \varepsilon \sum_{\pi \in \prod(\psi)} m(\pi) \mathrm{trace}\, \pi(f), \tag{7.3}$$

où ε est un signe qu'Arthur détermine explicitement pour un choix convenable de A_θ.

7.2. Ordre sur les exposants

Soit $T_H = (\mathbf{C}^*)^\ell$ le tore maximal diagonal dans H. On a $T_H = T_{H,c}A_H$, où $A_H = (\mathbf{R}_+^*)^\ell$ est déployé sur $\mathbf{R}$ et $T_{H,c}$ est compact. Un *exposant* de H est un caractère de A_H, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^\ell, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^\ell$.

La paire usuelle $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{G}$ détermine un système de racines positives de (T_H, H). On écrit, pour deux exposants e, e' de H, $e \leqslant_H e'$ si

$$e' = e + \sum_\alpha n_\alpha \alpha \quad (n_\alpha \geqslant 0)$$

où α décrit les racines simples et e et e' sont vus comme des formes linéaires complexes sur $\mathbf{R}^\ell$. Lorsque $H = \mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C})$ les ordres ainsi obtenus sont décrits dans l'Exemple 4.1. Lorsque $H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$ un calcul simple donne que pour deux exposants e, e' l'ordre $\leqslant_H$ s'exprime par $e' - e = (x_i)_{i=1,\dots,\ell}$ avec

$$(7.4)\qquad \begin{cases} x_1 + \ldots + x_i \in \mathbf{N} \quad (1 \leqslant i \leqslant \ell - 2) \\ x_1 + \ldots + x_\ell \in 2\mathbf{N}, \\ x_1 + \ldots + x_{\ell-1} - x_\ell \in 2\mathbf{N}. \end{cases}$$

7.3. Comparaison des exposants

Lorsque $H = \mathrm{SO}(N+1, \mathbf{C})$, si N est pair, et $H = \mathrm{Sp}(N-1, \mathbf{C})$, si N est impair, on a introduit une application naturelle bijective $\mathcal{A}_{H/G}$ – notée $\mathcal{A}$ dans l'Exemple 2.2 – des classes de conjugaison dans H vers les classes de θ-conjugaison dans G.

Lorsque $H = \mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$, avec N pair, les classes de conjugaison semi-simples de H sont représentées par

$$(7.5)\qquad t = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_\ell, x_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \in T_H$$

modulo le groupe de Weyl de $W_H = \mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^{\ell-1}$, où $\{-1\}^{\ell-1}$ est le sous-groupe de $\{-1\}^\ell$ défini par $\prod s_i = 1$. Les classes de θ-conjugaison semi-simples de G sont quant à elles représentées par les éléments

$$(7.6)\qquad \tilde{t} = \mathrm{diag}(s, 1) \in T \ (s \in (\mathbf{C}^*)^\ell)$$

modulo W. On a alors $\tilde{t} = \mathcal{A}_{H/G}(t)$ si $s = (x_1, \dots, x_\ell)$. En sens inverse, on écrira $t = \mathcal{N}_{H/G}(\tilde{t})$. Noter que dans ce cas (où $H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$) un élément θ-régulier $\tilde{t}$ de G a deux antécédents par $\mathcal{A}_{H/G}$.

Par définition, un θ-exposant de G est un caractère du tore maximal déployé A. Il définit un caractère de A_H par composition avec l'application norme.

On vérifie alors aussitôt à l'aide de (4.2), (4.1) et (7.4) que si e et e' sont deux θ-exposants de G tels que $e' \leqslant_H e$ alors $e' \leqslant_\theta e$.

Dans cette section, nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 7.2. — *Soit π une représentation arbitraire de $\prod(\psi)$ et e un exposant minimal de π. Alors, il existe un θ-exposant d'homologie e' (resp. e'') de Π' (resp. Π'') tel que*

$$e' + e'' \leqslant_H e.$$

On a identifié le tore A_H au produit $A_{H'} \times A_{H''}$.

Étant donné une représentation π de H, de longueur finie, on note V son module d'Harish-Chandra. Notons par ailleurs $\mathfrak{n}_H$ l'algèbre de Lie (complexifiée) du sous-groupe unipotent maximal de H donné par T_H et notre choix de racines, et notons ρ_H la demi-somme des racines usuelles.

Soit Θ_π le caractère d'Harish-Chandra de π. La "conjecture d'Osborne non-tordue", démontrée par Hecht et Schmid, relie $\Theta_\pi(t)$ aux traces $\Theta_q(t,V)$ de $t \in T_H$ (régulier) dans $H_q(\mathfrak{n}_H, V)$ et au dénominateur

$$D_{\mathfrak{n}_H}(t) = \det(1 - t_{|\mathfrak{n}_H}).$$

Pour exploiter ce résultat et sa version "tordue", il nous faut une relation entre Θ_π – ou plutôt $\Theta_{\prod(\psi)} = \sum_{\pi \in \prod(\psi)} m(\pi)\Theta_\pi$ – et le caractère tordu de $\Pi' \otimes \Pi''$ (pour A_θ).

7.4. Correspondance de classes de conjugaison entre H et $H' \times H''$

Les classes de conjugaison semi-simples de H sont représentées par

(7.7)
$$t = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_\ell, x_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \in T_H \quad \text{si } H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C}) \text{ ou } \mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C}),$$
$$t = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_\ell, 1, x_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \in T_H \quad \text{si } H = \mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$$

modulo le groupe de Weyl de H. Remarquons que le groupe de Weyl de H est égal à $W = \mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^\ell$ si $H = \mathrm{SO}(2\ell+1, \mathbf{C})$ ou $\mathrm{Sp}(2\ell, \mathbf{C})$ et est égal à $\mathfrak{S}_\ell \rtimes \{\pm 1\}^{\ell-1}$ si $H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$, où $\{-1\}^{\ell-1}$ est le sous-groupe de $\{-1\}^\ell$ défini par $\prod s_i = 1$.

On représente de même les classes de conjugaison semi-simple de $H' \times H''$ par des couples (t', t'') où t' (resp. t'') est associé à $(y'_1, \dots, y'_{\ell'})$ (resp. $(y''_1, \dots, y''_{\ell''})$ comme dans (7.7). On note alors $\mathcal{A}_{(H' \times H'')/H}$ l'application qui à la classe de conjugaison semi-simple $(t', t")\in H' \times H''$ associe la classe de conjugaison de $t \in H$ définie comme dans (7.7) avec $\{x_1, \ldots, x_\ell\} = \{y'_1, \ldots, y'_{\ell'}, y''_1, \ldots, y''_{\ell''}\}$.

On pose

(7.8)

$$\Delta_{H'\times H'',H}((t',t''),t) = \frac{|\det(\mathrm{Ad}(t)-1)|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{t}_H}}{|\det(\mathrm{Ad}(t')-1)|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{t}_{H'}}|\det(\mathrm{Ad}(t'')-1)|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{h}''/\mathfrak{t}_{H''}}},$$

où $t = \mathcal{A}_{(H'\times H'')/H}(t',t'')$. C'est le facteur de transfert que définissent Langlands et Shelstad [18] ; seul le facteur Δ_{IV} est non trivial, la cohomologie galoisienne étant triviale dans le cas complexe.

7.5. Identités de caractères

On dispose également des applications naturelles $\mathcal{A}_{H/G}$ (resp. $\mathcal{A}_{H'/G'}$, $\mathcal{A}_{H''/G''}$) des classes de conjugaison dans H (resp. H', H'') vers les classes de θ-conjugaison dans G (resp. G', G''). Et si $\tilde{t} = \mathcal{A}_{H/G}(t)$, on pose :

$$\Delta_{H,G}(t,\tilde{t}) = \frac{|\det(\mathrm{Ad}(\tilde{t})\circ\theta-1)|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}}{|\det(\mathrm{Ad}(t)-1)|^{\frac{1}{2}}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{t}_H}}. \tag{7.9}$$

(C'est le facteur Δ_{IV} de Kottwitz-Shelstad [16, p. 46]). Noter que d'après l'Exemple 2.3, $\Delta_{H,G}(t,\tilde{t}) = 1$ lorsque $H = \mathrm{SO}(2\ell+1,\mathbf{C})$ ou $\mathrm{Sp}(2\ell,\mathbf{C})$.

Cela dit, la relation (7.3) est équivalente à la relation suivante entre le caractère tordu de $\Pi'\otimes\Pi''$ et les caractères Θ_π ($\pi \in \prod(\psi)$).

Lemma 7.3. — *Pour $(\tilde{t}',\tilde{t}'')$ et t associés – soit $t = \mathcal{A}_{(H'\times H'')/H}(t',t'')$ avec $t' = \mathcal{N}_{H'/G'}(\tilde{t}')$ et $t'' = \mathcal{N}_{H''/G''}(\tilde{t}'')$ – on a :*

$$\Theta_{\Pi'\otimes\Pi'',\theta}(\tilde{t}',\tilde{t}'') = \varepsilon\frac{\Delta_{H'\times H'',H}((t',t''),t)}{\Delta_{H',G'}(t',\tilde{t}')\Delta_{H'',G''}(t'',\tilde{t}'')}\Theta_{\prod(\psi)}(t).$$

Nous pouvons maintenant comparer les expressions données par les versions tordues et non tordues de la “conjecture d'Osborne”.

Rappelons que $H_0(\mathfrak{n}_H,V)$ est lié par la réciprocité de Frobenius aux homomorphismes de V vers les induites [11, § 4]. On a

$$\mathrm{Hom}_H\left(H_0(\mathfrak{n}_H,V),\mathbf{C}_\chi\right) = \mathrm{Hom}_H\left(V,J_\chi\right)$$

pour χ un caractère de T_H, J_χ étant l'induite non normalisée. On en déduit

$$\mathrm{Hom}_H\left(H_0(\mathfrak{n}_H,V)e^{-\rho_H},\mathbf{C}_\chi\right) = \mathrm{Hom}_H\left(V,I_\chi\right)$$

où I_χ est l'induite *unitaire*. Comme on l'a vu, les calculs d'exposants s'expriment plus naturellement dans ce cadre, *cf.* [11, p. 51]. Le caractère de $H_q(\mathfrak{n}_H, V)e^{-\rho_H}$ est évidemment $\Theta_q(\cdot, V)e^{-\rho_H}$. Les mêmes considérations s'appliquent à G.

Les deux lemmes suivants sont laissés au lecteur (pour des calculs analogues, *cf.* Exemple 2.3) :

Lemma 7.4. — *Pour $\tilde{t}$ et t réguliers et associés, on a :*

$$\Delta_{H,G}(t, \tilde{t}) = \frac{e^{-\rho}(\tilde{t})D^{\theta}_{\mathfrak{n}}(\tilde{t})}{e^{-\rho_H}(t)D_{\mathfrak{n}_H}(t)}.$$

Lemma 7.5. — *Pour t et (t', t'') réguliers et associés, on a :*

$$\Delta_{H'\times H'',H}((t', t''), t) = \frac{e^{-\rho_H}(t)D_{\mathfrak{n}_H}(t)}{e^{-\rho_{H'}}(t')D_{\mathfrak{n}_{H'}}(t')e^{-\rho_{H''}}(t'')D_{\mathfrak{n}_{H''}}(t'')}.$$

Soit W' (resp. W'') le module d'Harish-Chandra de Π' (resp. Π''). On déduit alors des Lemmes 7.3, 7.4 et 7.5 et du Théorème 4.5 l'égalité

$$\begin{aligned} (7.10)\quad & \sum_{q',q''}(-1)^{q'+q''}\Theta^{\theta}_{q'}(\tilde{t}', W')e^{-\rho'}(\tilde{t}')\Theta^{\theta}_{q''}(\tilde{t}'', W'')e^{-\rho''}(\tilde{t}'') \\ & \qquad = \varepsilon \sum_{\pi\in\prod(\psi)} m(\pi)\left\{\sum_q(-1)^q\Theta_q(t, V)e^{-\rho_H}(t)\right\}. \end{aligned}$$

Lorsque $H = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbf{C})$ une représentation $\pi \in \prod(\psi)$ est considérée "modulo α", elle détermine alors une paire $\{\pi, \pi'\}$ de vraies représentations de G. Dans ce cas, il faut remplacer le membre de droite de (7.10) par :

$$\varepsilon \sum_{\pi\in\prod(\psi)} m(\pi)\left\{\sum_q(-1)^q\left[\Theta_q(t, V) + \Theta_q(t, V')\right]e^{-\rho_H}(t)\right\},$$

où l'on a noté V et V' les modules d'Harish-Chandra associées à π et π'.

7.6. Démonstration de la Proposition 7.2

Soit $(\pi, V) \in \prod(\psi)$. Considérons le terme du membre de droite de (7.10) associé à $H_0(\mathfrak{n}_H, V)$. Il intervient avec un signe ε qui ne dépend pas de π. Il découle donc de [11, Prop. 3.2] – c'est-à-dire de la Proposition 4.3 – que tout exposant minimal, pour l'ordre $\leqslant_H$, doit apparaître dans le membre de gauche de (7.10) sauf s'il est annulé par un exposant d'une autre représentation (π_1, V_1) (dont l'homologie apparaît en degré impair).

Si e est un exposant minimal et intervient dans $H_0(\mathfrak{n}_H, V)$, on voit donc que e subsiste dans le membre de gauche, ou bien que $e = e''$ où e'' apparaît, en degré impair, dans $H_q(\mathfrak{n}_H, V_1)$. Alors $e \geqslant_H e'$ où e' est un exposant minimal de V_1. (De plus $e \neq_H e'$). Par récurrence on voit que $e \geqslant_H e'$ où (en changeant de notation) e' est minimal et subsiste dans le membre de gauche de (7.10).

On s'est donc ramené au cas où e subsiste dans le membre de gauche de (7.10). En d'autres termes il existe des θ-exposants d'homologie e' et e'' de Π' et Π'' tels que $e = e' + e''$.

8. Θ-exposants des groupes linéaires

On note toujours $G = \mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ $(N \geqslant 1)$ et θ l'automorphisme involutif $g \mapsto J^t\, g^{-1} J^{-1}$.

Soit Π la représentation (7.1) de G et W son module d'Harish-Chandra. On note e_ψ l'exposant $(m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_\ell) \in \mathbf{C}^\ell$ où les $m_j \in \mathbf{N}$ sont les éléments des segments $\sigma_i = (a_i - 1, a_i - 2, \ldots)$, rangés par ordre croissant. On note[8] E_ψ l'exposant total θ-stable $(m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_N)$. Noter que E_ψ, composé avec la norme $\mathcal{N}_{H/G}$, est égal à e_ψ quand H est un sous-groupe endoscopique avec un seul facteur.

8.1. Exposants d'homologie

On note encore $\leqslant_\theta$ l'ordre induit par $\leqslant_\theta$ sur les exposants de H. En d'autres termes, $\leqslant_\theta$ correspond toujours à l'ordre donné par le groupe $\mathrm{SO}(2\ell + 1)$; celui-ci ne coïncide avec un sous-groupe endoscopique H que lorsque $N = 2\ell$ est pair et $H = \mathrm{SO}(2\ell + 1)$.

Noter que l'on dispose de la même manière d'ordres $\leqslant'_\theta$ et $\leqslant''_\theta$ sur les exposants θ-stables de G' et G''. L'identification de A au produit $A' \times A''$ permet alors de définir un ordre partiel $(\leqslant'_\theta \times \leqslant''_\theta)$ sur les exposants θ-stables de G. En d'autres termes, $(\leqslant'_\theta \times \leqslant''_\theta)$ est l'ordre donné par les sommes de racines $N\alpha$ des facteurs G' et G'' dans G. *Via* les applications normes l'ordre partiel $(\leqslant'_\theta \times \leqslant''_\theta)$ induit un ordre sur les exposants de H. On a immédiatement :

$$e(\leqslant'_\theta \times \leqslant''_\theta)e' \Rightarrow e \leqslant_\theta e'. \tag{8.1}$$

Le Théorème 1.1 découle immédiatement de la Proposition 7.2, de (8.1) et de la proposition suivante dont la démonstration fait l'objet de ce chapitre.

---

[8] Les groupes E des paragraphes précédents n'interviennent pas dans cet argument ; on espère que la notation ne prête pas à confusion.

Proposition 8.1. — *Pour tout θ-exposant d'homologie E de* Π, *on a* $\mathrm{Re}(E) \geqslant_\theta E_\psi$.

Pour la démonstration, nous oublions pour l'instant la présence de θ. D'après la classification de Langlands (et l'absence de L-indiscernabilité pour les groupes linéaires ou complexes), on peut réaliser Π comme l'unique sous-module irréductible de l'induite normalisée

$$\mathrm{ind}_B^G(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_N) \tag{8.2}$$

où B est le sous-groupe de Borel et $\eta_1, \ldots, \eta_N$ sont obtenus ainsi : On écrit $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_m$. Alors

$$\eta_1 = |\cdot|^{\frac{1-a_1}{2}}\chi_1,\ \eta_2 = |\cdot|^{\frac{1-a_1}{2}}\chi_2 \text{ (si } a_2 = a_1)$$
$$\ldots\ \eta_k = |\cdot|^{\frac{1-a_1}{2}}\chi_k \text{ (si } a_k = a_1).$$

On range ensuite les caractères de valeur absolue supérieure, *etc.* Noter que la formulation la plus répandue de la classification de Langlands conduit à réaliser Π comme quotient ; la réalisation ci-dessus s'en déduit par dualité. Puisque Π est θ-stable, on peut en outre arranger les η_i de sorte que le caractère η obtenu soit θ-invariant. L'unicité de la classification de Langlands implique alors que si (a_i, χ_i') est une autre donnée, on a $(a_i, \chi_i') = (a_i, \chi_i)$ à permutation près.

Noter que l'exposant θ-stable dans $H_0(\mathfrak{n}, W)$ associé à la réalisation (8.2) de Π a pour partie réelle E_ψ.

8.2. Dévissage

Considérons un exposant d'homologie E de Π. D'après [11, Prop. 3.2] (ou Proposition 4.3), l'exposant E est supérieur – pour l'ordre de G – à un exposant d'homologie E_0 intervenant dans $H_0(\mathfrak{n}, W)$. Et d'après le théorème de réciprocité de Frobenius, il correspond(9) à l'exposant E_0 dans $H_0(\mathfrak{n}, W)$ un homomorphisme non-nul $W \to I$ vers une induite

$$I = \mathrm{ind}_B^G(\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_N)$$

avec $\lambda_j = z^{p_j}\overline{z}^{q_j} = (z/\overline{z})^{\mu_j}(z\overline{z})^{\nu_j}$ et $E_0 = (p_1 + q_1, \ldots, p_N + q_N)$.(10)

Si l'image de W est le sous-module de Langlands $L \subset I$, il découle de l'unicité de la classification de Langlands que $E_0 = E_\psi$. Sinon le paramètre

(9) Comme au paragraphe 6.3.
(10) On a $\nu_j = \frac{1}{2}(p_j + q_j)$, $\mu_j = \frac{1}{2}(p_j - q_j)$. En particulier μ_j est un demi-entier.

de I n'est pas anti-dominant, donc on peut trouver i tel que $\nu_i > \nu_{i+1}$. Dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ on a un opérateur d'entrelacement non-nul

$$\mathrm{ind}(\lambda_i \otimes \lambda_{i+1}) \to \mathrm{ind}(\lambda_{i+1} \otimes \lambda_i) \tag{8.3}$$

où le caractère λ_i est de paramètres (μ_i, ν_i). Considérant l'induite totale à G on en déduit un opérateur d'entrelacement

$$I \to I'. \tag{8.4}$$

Il y a deux possibilités : si c'est un isomorphisme, on a évidemment un morphisme non-nul $W \to I'$ et on peut remplacer (ν_i, ν_{i+1}) par :

$$(\nu'_i, \nu'_{i+1}) = (\nu_{i+1}, \nu_i) = (\nu_i, \nu_{i+1}) - (\nu_i - \nu_{i+1})(1, -1). \tag{8.5}$$

Le cas où (8.4) n'est pas un isomorphisme n'apparaît que si $\lambda_i \lambda_{i+1}^{-1}(z) = z^p \overline{z}^q$, avec p et q entiers $\geqslant 1$, voir par exemple [13, Thm. 6.2] ou [8] pour des résultats plus complets sur les opérateurs d'entrelacement pour les groupes complexes. Dans ce cas, le noyau de (8.3) est une induite $\mathrm{ind}(\lambda'_i \otimes \lambda'_{i+1})$ avec

$$\lambda'_i \lambda'_{i+1} = \lambda_i \lambda_{i+1} \text{ et } \lambda'_i (\lambda'_{i+1})^{-1} = z^p \overline{z}^{-q}.$$

En particulier, les ν'_i et ν'_{i+1} associés aux caractères λ'_i et λ'_{i+1} vérifient :

$$(\nu'_i, \nu'_{i+1}) = (\nu_i, \nu_{i+1}) - q\Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big). \tag{8.6}$$

On a alors une suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$:

$$0 \to \mathrm{ind}(\lambda'_i \otimes \lambda'_{i+1}) \to \mathrm{ind}(\lambda_i \otimes \lambda_{i+1}) \to F \to 0,$$

F étant d'ailleurs de dimension finie d'où par induction

$$0 \to J \to I \to \mathrm{ind}\ F \to 0$$

(représentations de G). Si l'image de W dans I s'envoie non trivialement dans $\mathrm{ind}\ F \subset I'$, on est réduit au cas précédent. Sinon on obtient $W \to J$, application non-nulle, et on peut remplacer (ν_i, ν_{i+1}) par (ν'_i, ν'_{i+1}) donné par (8.6).

Notons que l'ordre sur les exposants de G est défini par les racines réelles sur $A \cong (\mathbf{R}^\times)^N$ (*cf.* [11] ainsi que le § 4). En particulier les racines simples sont données, pour $x = (x_i) \in A$, par $\mathrm{diag}(x_i) \mapsto x_i x_{i+1}^{-1}$. D'après (8.5) et (8.6) on a donc pour le nouvel exposant E'

$$E' = E - 2(\nu_i - \nu_{i+1})\alpha_i$$

ou bien

$$E' = E - q\alpha_i.$$

Dans le premier cas, $\nu_i - \nu_{i+1} = \frac{p+q}{2}$ est un demi-entier > 0. On voit donc que dans le cas de réductibilité

$$E' \leqslant E.$$

Après un nombre fini de telle opérations on obtient

$$0 \to W \to I^{(k)}$$

où l'induite $I^{(k)}$ est en position de Langlands, et donc l'exposant associé est de partie réelle égale à E_ψ. On a donc pour tout exposant d'homologie

$$\mathrm{Re}(E) \geqslant E_\psi.$$

8.3. Démonstration de la Proposition 8.1

Supposons maintenant que E est θ-stable. Alors

$$\mathrm{Re}(E) = E_\psi + \sum_\alpha m_\alpha \alpha,$$

où α parcourt les racines simples de G. Puisque E et E_ψ sont tous les deux θ-stables on a alors :

$$\mathrm{Re}(E) = E_\psi + \sum_{\mathrm{N}\alpha} m_\alpha \mathrm{N}\alpha.$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Re}(E) \geqslant_\theta E_\psi.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] J. Arthur, "An introduction to the trace formula", in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 1-263.

[2] E. M. Baruch, "A proof of Kirillov's conjecture", *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 1, p. 207-252.

[3] J. N. Bernstein, "P-invariant distributions on $\mathrm{GL}(N)$ and the classification of unitary representations of $\mathrm{GL}(N)$ (non-Archimedean case)", in *Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983)*, Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 50-102.

[4] A. Bouaziz, "Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes", *J. Funct. Anal.* **70** (1987), no. 1, p. 1-79.

[5] W. Casselman & M. S. Osborne, "The $\mathfrak{n}$-cohomology of representations with an infinitesimal character", *Compositio Math.* **31** (1975), no. 2, p. 219-227.

[6] G. Chenevier & L. Clozel, "Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales", *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), no. 2, p. 467-519.

[7] L. Clozel, "The ABS principle: consequences for $L^2(G/H)$", in *On certain L-functions*, Clay Math. Proc., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, p. 99-115.

[8] M. Duflo, "Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes", in *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75)*, Springer, Berlin, 1975, p. 26-88. Lecture Notes in Math., Vol. 497.

[9] A. I. Fomin & N. N. Šapovalov, "A certain property of the characters of irreducible representations of real semisimple Lie groups", *Funkcional. Anal. i Priložen.* **8** (1974), no. 3, p. 87-88.

[10] Harish-Chandra, "Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group", *Trans. Amer. Math. Soc.* **119** (1965), p. 457-508.

[11] H. Hecht & W. Schmid, "Characters, asymptotics and $\mathfrak{n}$-homology of Harish-Chandra modules", *Acta Math.* (1983), no. 1-2, p. 49-151.

[12] T. Hirai, "The characters of some induced representations of semi-simple Lie groups", *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), p. 313-363.

[13] H. Jacquet & R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1970, vii+548 pages.

[14] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[15] A. W. Knapp & D. A. Vogan, Jr., *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995, xx+948 pages.

[16] R. E. Kottwitz & D. Shelstad, "Foundations of twisted endoscopy", *Astérisque* (1999), no. 255, p. vi+190.

[17] J.-P. Labesse, "Stable twisted trace formula: elliptic terms", *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (2004), no. 4, p. 473-530.

[18] R. P. Langlands & D. Shelstad, "On the definition of transfer factors", *Math. Ann.* **278** (1987), no. 1-4, p. 219-271.

[19] C. Mœglin, "Comparaison des paramètres de Langlands et des exposants à l'intérieur d'un paquet d'Arthur", *J. Lie Theory* **19** (2009), no. 4, p. 797-840.

[20] D. A. Vogan, Jr., "The unitary dual of GL(n) over an Archimedean field", *Invent. Math.* **83** (1986), no. 3, p. 449-505.

[21] J.-L. Waldspurger, "Le groupe $\mathbf{GL}_N$ tordu, sur un corps p-adique. I", *Duke Math. J.* **137** (2007), no. 2, p. 185-234.

[22] ———, "Les facteurs de transfert pour les groupes classiques: un formulaire", *Manuscripta Math.* **133** (2010), no. 1-2, p. 41-82.

Manuscrit reçu le 14 janvier 2011,
révisé le 13 octobre 2011,
accepté le 19 octobre 2011.

Nicolas BERGERON
Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu
Unité Mixte de Recherche 7586 du CNRS
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France)
bergeron@math.jussieu.fr

Laurent CLOZEL
Université Paris Sud
Unité Mixte de Recherche 8628 du CNRS
Laboratoire de Mathématiques
Bâtiment 425 91405 Orsay cedex (France)
Laurent.Clozel@math.u-psud.fr