ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Patrick DELORME

Formule de Plancherel pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif p-adique

Tome 63, nº 1 (2013), p. 155-217.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013__63_1_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
63, 1 (2013) 155-217

FORMULE DE PLANCHEREL POUR LES FONCTIONS DE WHITTAKER SUR UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE

par Patrick DELORME (*)

Résumé. — Nous prouvons la formule de Plancherel pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif p-adique. Les méthodes sont proches de celles de la preuve de Waldspurger, d'après Harish-Chandra, pour les fonctions lisses sur le groupe.

Au delà du résultat, ce travail met en place un cadre qui devrait s'avérer utile pour d'autres formules de Plancherel, notamment pour les espaces symétriques réductifs p-adiques. En particulier, il met en valeur le role des matrices B et de leur propriété d'adjonction.

Abstract. — We prove the Plancherel formula for Whittaker functions on a reductive p-adic group. The methods are close to those of the proof of Waldspurger, folllowing Harish-Chandra, for smooth functions on the group. We hope also that this article suggests the right framework for studying other Plancherel formulas, especially reductive p-adic symmetric spaces. It shows in particular the role played by the B-matrices and their adjunction property.

1. Introduction

Soit F un corps local non archimédien et soit G le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. Soit (P_0, P_0^-) un couple de sous-groupes paraboliques minimaux opposés de G. On note M_0 leur sous-groupe de Lévi commun. Soit U_0 le radical unipotent de P_0 et A_0 le plus grand tore déployé de M_0. Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A_0. Soit ψ un caractère unitaire lisse de U_0 non dégénéré,

Mots-clés : Groupe réductif p-adique, fonction de Whittaker, formule de Plancherel.
Classification math. : 22E50.
(*) L'auteur a bénéficié du soutien du programme ANR-BLAN08-2-326851 pendant l'élaboration de ce travail.

i.e. tel que pour toute racine P_0-simple de A_0, α, sa restriction au sous-groupe radiciel $(U_0)_\alpha$ soit non triviale.
On note $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ l'espace des fonctions de Whittaker lisses sur G, i.e. des fonctions, f, sur G, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de G et telles que :

$$f(u_0g)=\psi(u_0)f(g), g\in G, u_0\in U_0.$$

On définit un sous-espace vectoriel, $\mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$, de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$, qui est l'analogue pour notre situation de l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G)$ d'Harish-Chandra (cf. [20]) et qui est muni d'une topologie naturelle. On définit une transformation de Fourier des éléments de $\mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$, dite transformation de Fourier-Whittaker, à l'aide des représentations lisses irréductibles de carré intégrable de sous-groupes de Lévi de G. A noter que celle-ci est différente de celle introduite dans [9], qui utilise des représentations cuspidales. Le principal résultat est la caractérisation de l'image de cette transformation et une formule d'inversion. L'espace $\mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$ est un sous-espace de $L^2(U_0\backslash G,\psi)$. On étudie également comment se transforme le produit scalaire L^2 par la transformation de Fourier-Whittaker. Nous avons appris de Ramakrishnan, par l'intermédiaire de Laurent Clozel, que ce travail (la formule de Plancherel pour les fonctions de Whittaker) était du à Harish-Chandra, malheureusement non publié. Noter que pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif réel, la formule de Plancherel a été établie (Harish-Chandra, non publié, Wallach [21], Chapitre 15). Enfin Sakellaridis et Venkatesh [18], donnent dans le cas où G est réductif p-adique quasi-déployé une preuve très rapide de la formule de Plancherel pour les fonctions de Whittaker, qui se déduit de la formule de Plancherel d'Harish-Chandra pour $L^2(G)$ (cf. [18]).
Notez que dans notre travail, G n'est pas quasi déployé ce qui peut induire des mulitiplicités dans la formule de Plancherel. En outre, nous déterminons ici la transformation de Fourier de l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$.
Au delà du résultat, ce travail met en place un cadre qui devrait s'avérer utile pour d'autres formules de Plancherel, notamment pour les espaces symétriques réductifs p-adiques. En particulier, il met en valeur le rôle des matrices B et de leur propriété d'adjonction. Notre travail est une suite naturelle à [9]. Il est largement inspiré par la rédaction de Waldspurger de la formule de Plancherel d'Harish-Chandra pour $L^2(G)$ (cf. [20]).
Détaillons le contenu de cet article.
Si (π,V) est une représentation lisse de G, on note $Wh(\pi,U_0)$ ou $Wh(\pi)$ l'espace des formes linéaires, ξ, sur V telles que :

$$\langle\xi,\pi(u_0)v\rangle=\psi(u_0)\langle\xi,v\rangle, v\in V, u_0\in U_0.$$

Si π est de longueur finie, $Wh(\pi)$ est de dimension finie (cf. [5], Théorème 4.2) et [12] pour une autre démonstration). Notez que si le groupe G n'est pas quasi-déployé, cette dimension n'est pas toujours inférieure ou égale à 1.
Si $v \in V$, on note $c_{\xi,v}$ le coefficient généralisé défini par :

$$c_{\xi,v}(g) := \langle \xi, \pi(g)v \rangle,\ g \in G.$$

C'est un élément de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$.
Dans la suite la phrase « Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G » voudra dire que P contient M_0, que M est son sous-groupe de Lévi contenant M_0 et que U est son radical unipotent. On dira aussi que P est standard(resp., anti-standard) si P contient P_0 (resp. P_0^-). On note $X(M)$ le groupe des caractères non ramifiés unitaires de M. C'est un tore compact. On note δ_P la fonction module de P. Soit (σ, E) une représentation lisse de M. On note $(i_P^G\sigma, i_P^G E)$ l'induite parabolique de (σ, E). On suppose σ unitaire irréductible et on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations $\sigma_\chi := \sigma \otimes \chi$, $\chi \in X(M)$, qui est un tore compact contenu dans un tore complexe $\mathcal{O}_\mathbb{C}$. On appelle $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire de σ, qui est munie d'une mesure non nulle et $X(M)$-invariante, convenablement normalisée. On utilise dans la suite la notion de fonction sur $\mathcal{O}$, qui dépendent des objets concrets σ_χ, avec des règles de transformation pour tenir compte des équivalences unitaires de représentations. On note que $Wh(\sigma_\chi) := Wh(\sigma_\chi, U_0 \cap M)$ est indépendant de $\chi \in X(M)$, car χ est trivial sur $U_0 \cap M$. Par restriction des fonctions à K, les représentations $i_P^G\sigma_\chi$ admettent une réalisation dans un espace indépendant de χ, la réalisation compacte.
Supposons P antistandard. Il existe une bijection naturelle, $\eta \mapsto \xi(P, \sigma, \eta)$, entre $Wh(\sigma)$ et $Wh(i_P^G\sigma)$. (cf. Rodier [17], *Casselman-Shalika* [7], *Shahidi* [19], *Proposition 3.1)*
On appelle fonctionnelle de Jacquet les éléments de $Wh(i_P^G\sigma)$. On définit les fonctionnelles de Jacquet pour un sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU$, par transport de structure.

Plus précisément, soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A_0. On note $\overline{W}^G$ (resp. $\overline{W}^M$) le groupe de Weyl de G (resp. M) relativement à M_0. On fixe un ensemble W^G de représentants dans K de $\overline{W}^G$. Pour un bon choix de $w \in W^G$ tel que $Q := wPw^{-1}$ est anti-standard, on définit

$$\xi(P, \sigma, \eta) := \xi(Q, w\sigma, \eta) \circ \lambda(w), \eta \in Wh(P, \sigma) := Wh(w\sigma),$$

où $\lambda(w)$ est la translation à gauche par w, qui entrelace $i_P^G\sigma$ et $i_Q^G w\sigma$.

Soit P, Q des sous-groupes paraboliques semi-standard de G, possédant le même sous-groupe de Lévi, M, contenant M_0.

On suppose σ de longueur finie. On introduit les intégrales d'entrelacement, $A(Q,P,\sigma)$, qui, lorsqu'elles sont définies, entrelacent $i_P^G\sigma$ et $i_Q^G\sigma$.
Les intégrales d'entrelacement transforment les fonctionnelles de Jacquet en des fonctionnelles de Jacquet, ce qui permet d'introduire les matrices B (cf.[9]) :
Il existe une unique fonction rationnelle sur $X(M)$ à valeurs dans $End(Wh(Q,\sigma), Wh(P,\sigma))$, $\chi \mapsto B(P,Q,\sigma_\chi)$, telle que :

$$\xi(Q,\sigma_\chi,\eta) \circ A(Q,P,\sigma_\chi) = \xi(P,\sigma_\chi, B(P,Q,\sigma_\chi)\eta).$$

On définit les intégrales de Jacquet pour $\phi \in Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$ par :

$$E_P^G(\phi) = c_{\xi,v} \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi),$$

si $\phi = \eta \otimes v$, avec $\eta \in Wh(\sigma)$, $v \in i_P^G E$ et $\xi = \xi(P,\sigma,\eta)$.
Soit (π, V) une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de G. On note A_G le plus grand tore déployé du centre de G. Alors pour tout $\xi \in Wh(\pi)$ et $v \in V$, $|c_{\xi,v}|$ est de carré intégrable sur $A_G U_0\backslash G$. Grâce au Lemme de Schur, on voit qu'il existe un unique produit scalaire sur $Wh(\pi)$ tel que :

$$\int_{A_G U_0\backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi',v'}(g)}dg = (\xi,\xi')(v,v'),\ \xi,\xi' \in Wh(\pi), v, v' \in V.$$

On définit maintenant la transformée de Fourier-Whittaker de $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$, $\mathcal{F}f$, comme suit. Pour tout sous-groupe parabolique anti-standard de G, $P = MU$, et toute représentation lisse irréductible de carré intégrable de M, (σ, E), le Théorème de représentation de Riesz montre qu'il existe un unique élément de $Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$, $\mathcal{F}f(P,\sigma)$, tel que :

$$(\mathcal{F}f(P,\sigma), \eta \otimes v) = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{E_P^G(\sigma,\eta,v)(g)}dg, \eta \in Wh(P,\sigma), v \in i_P^G E,$$

l'intégrale étant convergente d'après les propriétés des intégrales de Jacquet et d'après l'hypothèse $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$.
Alors $\mathcal{F}f$ vérifie les propriétés suivantes :

1) a) L'application $\chi \mapsto (\mathcal{F}f)(P,\sigma_\chi)$, est une fonction C^∞. En particulier, dans la réalisation compacte, cette application est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
b) Si (σ, E) et (σ_1, E_1) sont unitairement équivalentes, $(\mathcal{F}f)(P,\sigma)$ et $(\mathcal{F}f)(P,\sigma_1)$ vérifient une relation de transport de structure.

c) On peut définir pour $g \in G$, $\rho_\bullet(g)(\mathcal{F}f)$, en posant $(\rho_\bullet(g)\mathcal{F}f)(P,\sigma) = (Id \otimes i_P^G\sigma(g))(\mathcal{F}f(P,\sigma))$. Alors, si f est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de G, H, on a $\rho_\bullet(h)\mathcal{F}f = \mathcal{F}f$ pour tout $h \in H$.
On résume les propriétés a), b), c) en disant que pour toute orbite inertielle unitaire, $\mathcal{O}$, d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M, (σ, E), $\mathcal{F}(P,.)$ définit un élément de $C^\infty(\mathcal{O}_u, Wh(P,) \otimes i_P^G)$, cet espace étant muni d'une topologie naturelle. Alors $\rho_\bullet$ définit une représentation lisse de G sur cet espace.
On note Θ l'ensemble des couples $(P, \mathcal{O})$ où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ est l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M. Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ et P^- le sous-groupe parabolique opposé à P relativement à M.
D'après [20], Lemme V.2.1 et IV.3 (6), on a :
Il existe une fonction μ, rationnelle, non identiquement nulle, et C^∞ sur $\mathcal{O}$, telle que l'on ait l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

$$A(P, P^-, \sigma)A(P^-, P, \sigma) = \mu(\sigma)^{-1} Id.$$

Soit $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}_u, Wh(P,) \otimes i_P^G)$. On définit le paquet d'ondes f_ϕ par :

$$f_\phi(g) := \int_{\mathcal{O}} \mu(\sigma) E(P, \sigma, \phi(\sigma))(g) d\sigma, g \in G,$$

On démontre que $f_\phi \in \mathcal{C}(U_0 \backslash G, \psi)$ en utilisant un résultat semblable de [20] et le fait suivant, utilisé de manière récurrente :
Si (π, V) est une représentation lisse de G, $v \in V, \xi \in Wh(\pi)$. Alors la restriction de $c_{\xi,v}$ à A_0^- est égale à la restriction à A_0^- d'un coefficent lisse, que l'on peut préciser.
On définit :

$$\mathcal{S} = \oplus_{(P,\mathcal{O}) \in \Theta} C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G).$$

Soit $P = MU$ et $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G. On note note $\overline{W}(M'|G|M)$ l'ensemble quotient, par l'action à gauche de $\overline{W}^{M'}$, de $\{s \in \overline{W}^G | s.M \subset M'\}$. On note $W(M'|G|M)$ un ensemble de représentants dans W^G de ce quotient, dont nous ne détaillerons pas le choix dans cette introduction. Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ et $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, $s \in W(M'|G|M)$ tels que M et M' soient conjugués. On définit une fonction rationnelle sur $\mathcal{O}$ par :

$$C^0(s, P', P, \sigma) := B(s.P, P', s\sigma)^{-1} \otimes A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s),$$

On introduit l'assertion suivante, dite Assertion A :
Si $(P = MU, \mathcal{O}) \in \Theta$ *et* Q *est un sous-groupe parabolique de sous-groupe de Lévi* M*, on a l'égalité de fonctions rationnelles sur* $\mathcal{O}$ *:*

$$B(Q, P, \sigma)^* = B(P, Q, \sigma),$$

où * *désigne l'adjoint.*
Cette assertion implique facilement que $C^0(s,P',P,\sigma)$ est unitaire et s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de $\mathcal{O}$. La preuve de l'Assertion A nécessite quelques détours comme son analogue dans [9].
Mentionnons que la preuve de l'analogue de cette assertion pour les espaces symétriques réductifs réels a été l'une des clefs de la preuve de formule de Plancherel pour ces espaces (cf. e.g., [11]).
On note $\mathcal{S}^{inv}$ l'ensemble des éléments $(\phi_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta}$ de $\mathcal{S}$ tels que pour tout $(P, \mathcal{O}), P', s, \sigma$ comme ci dessus :

$$\phi_{P',s\mathcal{O}}(s\sigma) = C^0(s, P', P, \sigma)\phi_{P,\mathcal{O}}(\sigma).$$

On définit une application linéaire $\mathcal{W}$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ qui associe, pour $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, à $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ le paquet d'ondes f_ϕ mulitiplié par une constante $c(P)^{-1}$.
Le résultat principal s'énonce alors :
La transformation de Fourier-Whittaker, $\mathcal{F}$*, est une bijection entre* $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ *et* $\mathcal{S}^{inv}$*. L'inverse de cette bijection est la restriction de* $\mathcal{W}$ *à* $\mathcal{S}^{inv}$*. Pour une topologie naturelle sur* $\mathcal{S}$*,* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{W}$ *sont continues.*
En particulier :

$$f = \sum_{(P=MU,\mathcal{O})\in\Theta} c(P)^{-1} \int_{\mathcal{O}} \mu(\sigma) E_P^G((\mathcal{F}f)(P, \sigma))d\sigma, f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi).$$

On étudie aussi la transformation du produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ par $\mathcal{F}$.
Donnons une idée de notre preuve.
L'injectivité de $\mathcal{F}$ résulte d'un résultat de Joseph Bernstein (cf. [2] et la Proposition 7.4).
Puis on commence par introduire le terme constant faible pour les fonctions dites tempérées de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$. Le terme constant faible se déduit naturellement du terme constant introduit dans [9]. Les intégrales de Jacquet sont tempérées et on calcule leur terme constant faible en procédant comme dans [9]. On a besoin d'estimées qui se réduisent souvent à des résultats de [20] grâce au lien entre les coefficients généralisés et les coefficients lisses mentionné ci-dessus. On poursuit comme dans [20], section VI, en introduisant la transformée unipotente de $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ relative à $P = MU$,

sous-groupe parabolique anti-standard de G, f^P défini par :

$$f^P(m) := \delta_P^{1/2}(m) \int_U f(mu)du, m \in M,$$

l'intégrale étant convergente car $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$. Nous n'avons pas été capable de montrer directement que $f^P \in \mathcal{C}(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$. Cela résulte néanmoins du résultat principal.

Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$. On introduit la notion d'élément $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ très régulière. Nous ne donnerons pas ici la définition précise. Disons seulement que si ϕ est très régulière, elle est polynomiale et, notamment, les fonctions sur $\mathcal{O}$, $C^0(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma)$ sont holomorphes au voisinage de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Si l'Assertion A est vraie, tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ polynomiale est très régulière.

Pour ϕ très régulière (ou pour $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ si l'assertion A est vraie), f_ϕ^P est un élément de $\mathcal{C}(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$ que l'on calcule. La preuve est inspirée d'un résultat analogue de [20]. Pour ϕ très régulière, on peut utiliser des déplacements de contour d'intégrales qui rendent le calcul légérement plus simple, à nos yeux, que le le calcul analogue dans [20]. Cela reste une partie difficile de ce travail. Ensuite on raisonne par continuité et densité. On en déduit, sous les mêmes hypothèses, le calcul de la transformation de Fourier-Whittaker de f_ϕ. On en déduit aussi une formule pour le produit scalaire L^2 de deux paquets d'ondes f_ϕ et $f_{\phi'}$:

$$(f_\phi, f_{\phi'})_G := \int_{U_0\backslash G} f_\phi(g)\overline{f_{\phi'}(g)}dg.$$

En échangeant le rôle de ϕ et ϕ', on obtient une autre expression de ce produit scalaire. En faisant varier ϕ et ϕ' parmi les fonctions très régulières, dans l'égalité de ces deux expressions de $(f_\phi, f_{\phi'})_G$, on en déduit l'assertion A. Les conséquences de cette Assertion sur les fonctions C^0 sont alors acquises.

On montre alors facilement que l'image de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{S}^{inv}$. Il est alors aisé de montrer que la restriction de $\mathcal{FW}$ à $\mathcal{S}^{inv}$ est égale à l'identité, grâce au calcul mentionné ci-dessus du calcul de la transformée de Fourier-Whittaker des paquets d'ondes. Joint à l'injectivité de $\mathcal{F}$, ceci achève essentiellement la preuve du résultat principal.

Remerciements

Je remercie vivement le referee pour une lecture très attentive de l'article et pour ses remarques toujours pertinentes.

2. Notations, Rappels

2.1.

On reprend essentiellement les notations de [9]. Soit F un corps local non archimédien. On considère divers groupes algébriques définis sur F et on utilisera des abus de terminologie du type suivant : « soit A un tore déployé » signifiera « soit A le groupe des points sur F d'un tore défini et déployé sur F ». Avec ces conventions, soit G un groupe algébrique linéaire réductif et connexe. On fixe un tore déployé maximal, A_0, de G et on note M_0 son centralisateur dans G. On fixe P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G qui admet M_0 comme sous-groupe de Lévi. On notera U_0 le radical unipotent de P_0.

Si P est un sous-groupe parabolique de G, on dit que P est semi-standard (resp. standard) si $M_0 \subset P$ (resp. $P_0 \subset P$). Si P est semi-standard, il possède un unique sous-groupe de Lévi, M, contenant M_0. On dit que M est un sous-groupe de Lévi semi-standard.

L'expression « $P = MU$ est sous-groupe parabolique semi-standard de G » signifiera que P est un tel sous-groupe, que M est son sous-groupe de Lévi semi-standard et que U est son radical unipotent. On notera $P^- = MU^-$ le sous-groupe parabolique opposé à P de sous-groupe de Lévi M. Un sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, sera dit anti-standard si P^- est standard.

Si H est un groupe algébrique, on note $Rat(H)$ le groupe des caractères algébriques de H définis sur F.
On fait le choix d'une uniformisante de F. Ce choix permet de relever le quotient de tout tore déployé A par son sous-groupe compact maximal, A^0, dans un réseau de A, $\Lambda(A)$: c'est l'image du réseau des sous-groupes à un paramètre de A par l'évaluation en l'uniformisante.
Si V est un espace vectoriel, on note V' son dual et, s'il est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié.
On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G. On note $\mathfrak{a}_G = Hom_{\mathbb{Z}}(Rat(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères algébriques de G à A_G induit un isomorphisme :

$$Rat(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq Rat(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

On dispose de l'application canonique :

$$H_G : G \to \mathfrak{a}_G, \tag{2.2}$$

définie par :

$$e^{\langle H_G(x),\chi\rangle} = |\chi(x)|_F,\ x \in G, \chi \in Rat(G). \tag{2.3}$$

où $|.|_F$ est la valuation normalisée de F. Le noyau de H_G, qui est noté G^1, est l'intersection des noyaux des caractères de G de la forme $|\chi|_F$, $\chi \in Rat(G)$. On notera $X(G)_{\mathbb{C}} = Hom(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. C'est le groupe des caractères non ramifiés de G.

On a des notations similaires pour les sous-groupes de Lévi semi-standard. Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard de G, on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$, $H_P = H_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$.
On note $\mathfrak{a}_{G,F}$, resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}$, l'image de G, resp. A_G, par H_G. Alors G/G^1 est un réseau isomorphe à $\mathfrak{a}_{G,F}$. Soit M un sous-groupe de Lévi semi-standard. Les inclusions $A_G \subset A_M \subset M \subset G$ déterminent un morphisme surjectif $\mathfrak{a}_{M,F} \to \mathfrak{a}_{G,F}$, resp. un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} \to \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$, qui se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$, resp. injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$. La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie ;

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G. \tag{2.4}$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard. On note $\Sigma(A_M)$ (resp. $\Sigma(P)$) l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G (resp. P) qui s'identifie à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}'_M$. On note $\Delta(P)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$. Si $\alpha \in \Sigma(A_M)$, on note U_α le sous-groupe radiciel de U correspondant à α. On peut associer à tout $\alpha \in \Sigma(A_M)$ une coracine $\check{\alpha} \in \mathfrak{a}_M$ (cf. [1], section 3).
On note ${}^{--}(\mathfrak{a}_P^G)'$ (resp. ${}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$) l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}'_M$ de la forme

$$\lambda = \sum_{\alpha\ \in \Delta(P)} x_\alpha \alpha$$

avec $x_\alpha < 0$ (resp. $x_\alpha \leqslant 0$).

(2.5) Soit $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ l'application $(\mathfrak{a}'_G)_{\mathbb{C}} \to X(G)_{\mathbb{C}} \to 1$ qui, en utilisant la définition de $\mathfrak{a}_G$, associe à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|_F^s$.

Le noyau est un réseau et cela définit sur $X(G)_{\mathbb{C}}$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{*d}$, où $d = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_G$. Pour $\chi \in X(G)_{\mathbb{C}}$, soit $\lambda \in \mathfrak{a}'_{G,\mathbb{C}}$ un élément se projetant sur χ par l'application (2.5). La partie réelle $Re\,\lambda \in \mathfrak{a}'_G$ est indépendante du choix de λ. Nous la noterons $Re\,\chi$. Si $\chi \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$. De même, si $\chi \in Hom(A_G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, que l'on note encore $|\chi|$ et on pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$.

Soit $X(G) := \{\chi \in X(G) | Re\,\chi = 0\}$ l'ensemble des éléments unitaires de $X(G)$.
Les notations ainsi définies s'appliquent à tous les sous-groupes de Lévi semi-standard de G.
On choisit K un sous-groupe compact maximal de G, dont on suppose qu'il est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G. Pour le résultat suivant, cf. [6], Prop. 1.4.4 :

(2.6) Il existe une suite décroissante de sous-groupes compacts ouverts de G, H_n, $n \in \mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H = H_n$ est normal dans $K = H_0$ et pour tout sous-groupe parabolique standard de G, P, on a:

1) $H = H_{U^-} H_M H_U$ où $H_{U^-} = H \cap U^-$, $H_M = H \cap M$, $H_U = H \cap U$.

2) Pour tout $a \in A_M^- := \{a \in A_M || \alpha(a)|_F \leqslant 1, \alpha \in \Sigma(P)\}$, $aH_U a^{-1} \subset H_U$, $a^{-1} H_{U^-} a \subset H_{U^-}$.

3) Le groupe H_M vérifie 1) et 2) relativement aux sous-groupes paraboliques de M contenant $P_0 \cap M$.

4) La suite H_n forme une base de voisinages de l'identité de l'élément neutre de G.

Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. On dit que H possède une factorisation d' Iwahori par rapport à (P, P^-) si 1) et 2) sont satisfaits.

2.2. Choix des mesures

On munit G (resp. K) d'une mesure de Haar, dg, (resp. dk) telle que le volume de K soit égal à 1. Si H est un sous-groupe compact ouvert de G, on note $vol(H)$ son volume pour la mesure de Haar sur G. On note e_H le multiple de la fonction indicatrice de H dont l'intégrale sur G est égale à 1.
Pour tout sous-groupe fermé, H, de G, on note dh une mesure de Haar à gauche sur H, dont le choix sera éventuellement spécifié et on note δ_H la fonction module de H.

Pour tout espace totalement discontinu Z, on note $C_c^\infty(Z)$ (resp. $C(Z)$, resp. $C_c(Z)$) l'espace des fonctions localement constantes, à support compact (resp. continues, resp. continues à support compact) sur Z à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Alors $G = PK$ et le groupe $M \cap K$ vérifie relativement à M les mêmes propriétés que K relativement à G. Pour $g \in G$, on choisit $u_P(g) \in U$, $m_P(g) \in M$, $k_P(g) \in K$, de sorte que $g = u_P(g)m_P(g)k_P(g)$. On note du^- la mesure de Haar sur U^- telle que :

$$\int_{U^-} \delta_P(m_P(u^-))du^- = 1 \tag{2.7}$$

et de même pour U. Il esiste une unique mesure de Haar sur M, dm, telle que pour tout $f \in C_c(G)$ on a (cf. [20], I (1.2)) :

$$\begin{aligned} \int_G f(g)dg &= \int_{U\times M\times K} f(umk)\delta_P(m)^{-1}dkdmdu. \\ \int_G f(g)dg &= \int_{U\times M\times U^-} f(umu^-)\delta_P(m)^{-1}dudmdu^-. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit f une fonction continue sur K et invariante à gauche par $K \cap P$. Alors (cf. par exemple [15], ch. V, section 6, conséquence 7, pour la version réelle) :

$$\int_K f(k)dk = \int_{U^-} f(k_P(u^-))\delta_P(m_P(u^-))du^-, \tag{2.9}$$

où l'intégrale du membre de droite est absolument convergente. En particulier si f est une fonction continue sur G telle que $f(umg) = \delta_P(m)f(g)$ pour $u \in U, m \in M, g \in G$, on a :

$$\int_K f(k)dk = \int_{U^-} f(u^-)du^-. \tag{2.10}$$

où l'intégrale du membre de droite est absolument convergente.

On fixe la mesure de Haar de masse totale 1 sur $A_G \cap K$ et sur $X(A_G)$, qui s'identifie au dual unitaire de $A_G/A_G \cap K$. On fixe sur $A_G/A_G \cap K$ la mesure de comptage. Des mesures ainsi choisies, on déduit une mesure sur A_G, notée da_G. L'homomorphisme de restriction détermine un morphisme surjectif de $X(G)$ sur $X(A_G)$. On fixe sur $X(G)$ une mesure de Haar telle que ce morphisme préserve localement les mesures de Haar choisies.

On choisit un ensemble de représentants dans K, W^G, du quotient du normalisateur de M_0 dans G par son centralisateur, $\overline{W}^G$, qui existe parce que K est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0. On le choisit de telle sorte qu'il contienne l'élément neutre de G, qu'on notera 1_G ou seulement 1 s'il n'y a pas de confusion. On munit $\mathfrak{a}_0$ d'une norme euclidienne invariante par l'action naturelle de $\overline{W}^G$ sur $\mathfrak{a}_0$.

Si $x \in G$ et Y est une partie de G, on notera $x.Y := \{xyx^{-1} | y \in Y\}$. De même si H est un sous-groupe de G et (σ, E) est une représentation de H, on notera $x\sigma$ la représentation de $x.H$ dans $xE := E$ définie par $x\sigma(xhx^{-1}) = \sigma(h), h \in H$.

(2.11) Si T est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, on note T^t sa transposée. Si (σ, E) est une représentation de H, on note σ' la représentation de H dans E' définie par $\sigma'(h) = \sigma(h^{-1})^t$, $h \in H$.

On notera aussi, pour toute application définie sur H, f, on définit:

$$(\lambda(h)f)(h') = f(h^{-1}h'),\ (\rho(h)f)(h') = f(h'h),\ h, h' \in H.$$

2.3. Représentations induites

Les représentations lisses de G et de ses sous-groupes fermés seront toujours à coefficients complexes.

Si (π, V) est une représentation lisse de G, on note π' (resp. $\check{\pi}$) la représentation contragrédiente de G dans le dual algébrique, V', (resp. lisse, $\check{V}$) de V.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Si (σ, E) est une représentation lisse de M, on l'étend en une représentation de P triviale sur U. Soit $\chi \in X(M)_{\mathbb{C}}$. On note E_χ l'espace de la représentation $\sigma \otimes \chi$, qu'on notera σ_χ, et on note $i_P^G E_\chi$ l'espace des fonctions v de G dans E, invariantes à droite par au moins un sous-groupe compact ouvert de G et telles que $v(mug) = \delta_P(m)^{1/2}\sigma_\chi(m)f(g)$ pour tout $m \in M$, $u \in U$, $g \in G$. On note $i_P^G \sigma_\chi$ la représentation de G dand $i_P^G E_\chi$ par translations à droite. On note $i_{P\cap K}^K E$ l'espace des fonctions v de K dans E, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de K et telles que $f(pk) = \sigma(p)f(k)$ pour tout $k \in K$ et $p \in P \cap K$. La restriction des fonctions à K détermine un isomorphisme de $i_P^G E_\chi$ sur $i_{P\cap K}^K E$. On notera $\bar{i}_P^G \sigma_\chi$ la représentation de G dans $i_{P\cap K}^K E$ déduite de $i_P^G \sigma_\chi$ par transport de structure. Cette représentation sera appelée la réalisation compacte de $i_P^G \sigma_\chi$ dans cet espace indépendant de χ. Si $v \in i_{P\cap K}^K E$, on note v_χ l'élément de $i_P^G E_\chi$ dont la restriction à K est égale à v.

Si σ est unitaire, on munit $i_{P\cap K}^K E$ du produit scalaire défini par :

$$(v, v') = \int_K (v(k), v'(k))dk,\ v, v' \in i_{P\cap K}^K E. \tag{2.12}$$

Alors, muni de ce produit scalaire, la représentation $\bar{i}_P^G \sigma_\chi$ est unitaire pour χ unitaire et par conséquent, par transport de structure, $i_P^G \sigma_\chi$ également. On a alors, grâce à (2.10) :

$$(v_\chi, v'_\chi) = \int_{U^-} (v_\chi(u^-), v'_\chi(u^-)) du^-. \tag{2.13}$$

3. Fonctionnelles de Whittaker tempérées, terme constant faible

3.1. Fonctions et fonctionnelles de Whittaker

Soit U_0 le radical unipotent de P_0. Soit ψ un caractère unitaire lisse de U_0 non dégénéré, i.e. tel que pour toute racine P_0-simple de A_0, α, sa restriction au sous-groupe radiciel $(U_0)_\alpha$ soit non triviale.
On note $C^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ l'espace des fonctions de Whittaker lisses sur G, i.e. des fonctions, f, sur G, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de G et telles que :

$$f(u_0 g) = \psi(u_0) f(g), g \in G, u_0 \in U_0.$$

On note $C_c^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ l'espace des éléments de $C^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ qui sont à support compact modulo U_0.
Si (π, V) est une représentation lisse de G, on note $Wh(\pi, U_0)$ ou $Wh(\pi)$ l'espace des formes linéaires, ξ, sur V telles que :

$$\langle \xi, \pi(u_0) v \rangle = \psi(u_0) \langle \xi, v \rangle, v \in V, u_0 \in U_0.$$

Si π est de longueur finie, $Wh(\pi)$ est de dimension finie (cf. [5], Théorème 4.2) et [12] pour une autre démonstration). Notez que si le groupe n'est pas quasi-déployé, cette dimension n'est pas toujours inférieure ou égale à 1, comme expliqué dans l'introduction de [5].
Si $v \in V$, on note $c_{\xi,v}$ le coefficient généralisé défini par :

$$c_{\xi,v}(g) := \langle \xi, \pi(g) v \rangle, \; g \in G. \tag{3.1}$$

C'est un élément de $C^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$.

3.2. Rappel sur le terme constant des fonctions de Whittaker

On note, pour $\varepsilon > 0$,

$$A_0^-(\varepsilon) := \{a \in A_0 || \alpha(a)|_F \leqslant \varepsilon, \alpha \in \Delta(P_0)\} \; et \; A_0^- = A_0^-(1).$$

$$M_0^-(\varepsilon) := \{m \in M_0 | \langle \alpha, H_0(m)\rangle \leqslant log\, \varepsilon, \alpha \in \Delta(P_0)\} \ et \ M_0^- = M_0^-(1).$$

Comme dans [12], Lemme 3.1, on voit que :

(3.2) Pour tout sous-groupe compact ouvert H de G, il existe un sous-groupe compact ouvert de G, H', contenu dans H, tel que pour toute représentation lisse de G, (π, V), tout $\xi \in Wh(\pi)$ et tout $v \in V^H$ on ait:

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle e_{H'}\xi, \pi(a)v\rangle, a \in A_0^-$$

où $e_{H'}\xi$ est l'élément de $\check{V}$ défini par

$$\langle e_{H'}\xi, v\rangle := \langle \xi, \pi(e_{H'})v\rangle, \ v \in V,$$

ce qui se réécrit:

$$c_{\xi,v}(a) = c_{e_{H'}\xi,v}(a), a \in A_0^-.$$

On rappelle (cf. [12], Lemme 5.4) :

(3.3) Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, invariante à droite par H, $f(a) = 0$ si $|a^\alpha|_F > C$ pour au moins un élément α de $\Delta(P_0)$, i.e. pour a élément du complémentaire de $A_0^-(C)$.

Ceci implique

(3.4) Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. Il existe $a_0 \in A_0$ tel que pour tout $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ invariante à droite par H, la restriction de $\rho(a_0)f$ à A_0 est à support dans A_0^-.

Soit I un sous-ensemble fini de K tel que $K \subset IH$ et soit F_0 un sous-ensemble fini de M_0 tel que $M_0 = A_0F_0(M_0 \cap K)$ de sorte que $G = U_0A_0F_0K$. Appliquant (3.3) aux translatées à droite de f par les éléments de F_0I, on en déduit :

(3.5) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ invariante à droite par H, f est à support dans $U_0M_0^-(C)K$

Rappelons la caractérisation du terme constant des éléments de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et des fonctionnelles de Whittaker. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Avec les notations ci-dessus, on note (π_P, V_P) le produit tensoriel entre, d'une part la représentation de M dans le quotient de V par le M-sous-module engendré par les $\pi(u)v - v$, $u \in U, v \in V$, et d'autre part la représentation de M sur $\mathbb{C}$ donnée par $\delta_P^{-1/2}$. On note, pour $v \in V$, $j_P(v)$ ou v_P sa projection naturelle dans V_P. Soit Θ_P l'ensemble des éléments de $\Delta(P_0)$ qui sont racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de M. On note, pour $\varepsilon > 0$:

$$A_0^-(P, < \varepsilon) := \{a \in A_0^- || \alpha(a)|_F < \varepsilon, \alpha \in \Delta(P_0) \setminus \Theta_P\}.$$

D'après [12] Théorème 3.4, Remarque 3.5 et Proposition 3.6, on dispose d'une unique application linéaire $Wh(\pi) \mapsto Wh(\pi_P)$, $\xi \to j_{P^-}(\xi)$, notée aussi $\xi \mapsto \xi_P$ pour plus de commodité, qui vérifie :

(3.6) Pour tout sous-groupe compact ouvert H de G, il existe $\varepsilon_H > 0$, indépendant de P, avec les propriétés suivantes:
Pour toute représentation lisse (π, V) et $\xi \in Wh(\pi)$, on a:
$\delta_P^{1/2}(a)\langle \xi_P, \pi_P(a)v_P\rangle_P = \langle \xi, \pi(a)v\rangle$, $a \in A_0^-(P, < \varepsilon_H)$, $v \in V^H$.

Le terme constant le long de P d'un élément f de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ a été défini dans [12], Définition 3. C'est un élément f_P de $C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$. Si f est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert, H, de G, f_P vérifie :

$$\delta_P^{1/2}(a) f_P(a) = f(a),\ a \in A_0^-(P, < \varepsilon_H). \tag{3.7}$$

(3.8) L'application $f \mapsto f_P$ est un morphisme de P-modules entre $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et $C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$, où P agit par représentation régulière droite sur le premier espace et M (resp. U) agit par représentation régulière droite tensorisée par $\delta_P^{1/2}$(resp. trivialement) sur le second.

Soit (π, V) une représentation lisse de G et $\xi \in Wh(\pi)$. On a (cf. [12], Proposition 3.13) :

$$(c_{\xi,v})_P = c_{\xi_P, v_P},\ v \in V. \tag{3.9}$$

3.3. Fonctions et fonctionnelles de Whittaker tempérées ou de carré intégrable

Suivant [20], section I.1, on fixe un plongement algébrique τ de G dans $GL_n(F)$ tel que $\tau(K) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F. Si $(a_{i,j})$ (resp. $b_{i,j}$) sont les coefficients de la matrice $\tau(g)$ (resp. $\tau(g)^{-1}$) on note $\|g\| = sup_{i,j} sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F)$. On pose

$$\underline{\sigma}(g) = log\|g\|, \tag{3.10}$$

où l'on a souligné σ pour éviter la confusion avec les représentations.
On introduit la fonction Ξ d'Harish-Chandra (cf. [20] section II.1) et l'espace de Schwartz-Harish-Chandra $\mathcal{C}(G)$ (cf. [20], section III.6).
Pour $g \in G$, on note $\delta_0(g)$ (resp. $m_0(g)$, etc..) au lieu de $\delta_{P_0}(g)$ (resp. $m_{P_0}(g)$, etc..).

On note $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ l'espace des éléments f de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ tels que pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$$(3.11) \qquad \nu_d(f) := sup_{g\in G}\delta_0^{-1/2}(m_0(g))(1 + |H_0(m_0(g))|)^d|f(g)| < \infty.$$

Pour tout sous-groupe compact, H, de G, on note $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)^H$, l'espace des $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ invariantes à droite par H, que l'on munit de la topologie définie par les ν_d. Montrons :

$$(3.12) \qquad C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)^H \text{ est dense dans } \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)^H.$$

En effet soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$. D'apès (3.5), il existe $C > 0$ tel que f a son support contenu dans $U_0M_0^-(C)K$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble compact $M_{0,n} := \{m \in M_0 | -logn \leqslant \langle\alpha, H_0(m)\rangle \leqslant log\, C, \alpha \in \Delta(P_0)\}$ et u_n l'indicatrice du sous ensemble de G, $U_0M_{0,n}K$. Il existe une constante C' tellle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|H_0(m)\| > C' log\, n, m \in M_0^-(C) \setminus U_n.$$

On en déduit :

$$\nu_d(f - u_nf) \leqslant (1 + C' log\, n)^{-1}\nu_{d+1}(f).$$

Donc (u_nf) est une suite d'éléments de $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ qui converge vers f dans $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)^H$.
On munit $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ de la topologie limite inductive des $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)^H$.

(3.13) On dit que $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ est tempérée si il existe $d \in \mathbb{N}$ telle que:

$$sup_{g\in G}\delta_0(m_0(g))^{-1/2}(1 + \|H_0(m_0(g))\|)^{-d}|f(g)| < \infty.$$

On note $C^w(U_0\backslash G, \psi)$ l'espace vectoriel des fonctions lisses tempérées. Muni de l'action régulière droite c'est un G-module lisse.
D'après la première formule de (2.8), il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$(3.14) \qquad \int_{U_0\backslash G} \delta_0(m_0(g))(1 + \|H_0(m_0(g))\|)^{-d} dg < \infty.$$

Donc :

(3.15) Si $f_0 \in C^w(U_0\backslash G, \psi)$ et $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, $f\overline{f_0}$ est élément de $L^1(U_0\backslash G)$ et l'application $f \mapsto \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{f_0(g)}dg$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$.

Soit (π, V) une représentation admissible de G et $\xi \in Wh(\pi)$. On dit que ξ est tempérée si l'espace $\mathcal{A}(\xi)$ formé des $c_{\xi,v}, v \in V$ est contenu dans $C^w(U_0\backslash G, \psi)$. On note $\mathcal{A}^w(U_0\backslash G, \psi)$ la réunion des $\mathcal{A}(\xi)$, lorsque π décrit les représentations lisses admissibles de G et ξ décrit les fonctionnelles de Whittaker tempérées de π. Montrons que :

(3.16) Un élément f de $C^w(U_0\backslash G,\psi)$ appartient à $\mathcal{A}^w(U_0\backslash G,\psi)$ si et seulement si f est $ZB(G)$-finie, où $ZB(G)$ le centre de Bernstein de G.

En effet, comme tout vecteur d'un module admissible est $ZB(G)$-fini, la partie seulement si est claire. Supposons maintenant que $f\in C^w(U_0\backslash G,\psi)$ est $ZB(G)$-finie. Alors le G-module, (π,V), engendré par f sous la représentation régulière droite est un module de longueur finie (cf. [9], Lemme 2), donc admissible. La mesure de Dirac en l'élément neutre fournit un élément ξ de $Wh(\pi)$ et $c_{\xi,f}=f$. Donc $f\in\mathcal{A}^w(U_0\backslash G,\psi)$ Ceci achève de prouver la partie si de notre affirmation.
Soit (π,V) une représentation admissible de G. Pour $\chi\in Hom(A_G,\mathbb{C}^*)$ on pose :

$$V_\chi=\{v\in V|\mathit{Il\ existe}\ d\in\mathbb{N}\ \mathit{tel\ que}\ (\pi(a)-\ \chi(a))^d v=0, a\in A_G\}.$$

Si $\xi\in Wh(\pi)$, on note ξ_χ la restriction de ξ à V_χ. On appelle exposant de π (resp. ξ) un caractère χ tel que V_χ (resp. ξ_χ) soit non nul. On note $\mathcal{E}xp(\pi)$ (resp. $\mathcal{E}xp(\xi)$) l'ensemble des exposants de π (resp. ξ).
Une fonctions mesurable, f, sur G telle que $f(ug)=\chi(u)f(g)$ pour $u\in U_0$ et $g\in G$, et telle que :

$$\|f\|^2:=\int_{U_0\ \backslash G}|f(g)|^2dg$$

sera dite fonction de Whittaker de carré intégrable. L'espace des classes modulo l'équivalence presque partout de fonctions de Whittaker de carré intégrable définit un espace de Hilbert, $L^2(U_0\backslash G,\psi)$, sur lequel G agit unitairement et continûment par la représentation régulière droite ρ.
Soit (π,V) une représentation lisse admissible de G admettant un caractère central unitaire et $\xi\in Wh(\pi)$. On dit que ξ (resp. π) est de carré intégrable si pour tout $v\in V$, $c_{\xi,v}$ est de carré intégrable modulo $A_GU_0\backslash G$ (resp. pour tout $v\in V$ et $\check{v}$ élément du dual lisse $\check{V}$ de V, le coefficient lisse $c_{\check{v},v}$ est de carré intégrable sur $A_G\backslash G$).

3.4. Critère pour les fonctionnelles de Whittaker tempérées ou de carré intégrable

Proposition 3.1. — *Soit (π,V) une représentation lisse admissible de G et $\xi\in Wh(\pi)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) ξ est de carré intégrable (resp. tempérée)
(ii) pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G et tout $\chi \in \mathcal{E}xp(\xi_P)$, on a $\chi \in {}^{--}(\mathfrak{a}_P^G)'$ (resp. $\chi \in {}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$).
(iii) pour tout sous-groupe parabolique standard maximal $P = MU$ de G et tout $\chi \in \mathcal{E}xp(\xi_P)$, on a $\chi \in {}^{--}(\mathfrak{a}_P^G)'$ (resp. $\chi \in {}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$)

Démonstration. — Le cas de carré intégrable a été traité dans [9], Proposition 13. Pour la tempérance, on procède comme dans la démonstration du critère analogue pour les groupes (cf. [20], Proposition III.2.2). □

Proposition 3.2. — *Soit (π, V) une représentation lisse admissible de carré intégrable (resp. tempérée) de G et $\xi \in Wh(\pi)$, alors ξ est de carré intégrable (resp. tempérée).*

Démonstration. — En effet pour tout sous-groupe parabolique standard, les exposants de ξ_P sont des exposants de π_P. Alors le corollaire résulte de la Proposition précédente jointe au Théorème 4.4.6 de [6] (resp. à la Proposition III.3.2 de [20]). □

Le résultat suivant suivant a été conjecturé par Lapid et Mao et prouvé dans [9], Thèorème 8. Indépendamment Sakerallidis et Venkatesh ([18]) en ont donné une preuve pour les groupes quasidéployés et Matringe ([16]) en a donné une preuve pour certains groupes.

(3.17) Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G admettant un caractère central unitaire.
S'il existe $\xi \in Wh(\pi)$ de carré intégrable non nulle, alors π est de carré intégrable.

3.5. Terme constant faible

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G et $\xi \in Wh(\pi)$ tempérée. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. On décompose le module de Jacquet (π_P, V_P) en une somme directe :

$$(\pi_P, V_P) = (\pi_P^w, V_P^w) \oplus (\pi_P^-, V_P^-) \oplus (\pi_P^r, V_P^r)$$

où

$$V_P^w = \oplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_P), Re\chi = 0} V_{P,\chi}, \quad V_P^- = \oplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_P), Re\chi \neq 0, Re\chi \in {}^-(\mathfrak{a}_P^G)'},$$
$$V_{P,\chi}, V_P^r = \oplus_{\chi \in \mathcal{E}xp(\pi_P) Re\chi \notin {}^-(\mathfrak{a}_P^G)'} V_{P,\chi}.$$

La Proposition 3.1 montre que la restriction de ξ_P à V_P^r est nulle.
On appelle terme constant faible de ξ la restriction de ξ_P à V_P^w. On le note ξ_P^w. Grâce à la décomposition ci-dessus on pourra aussi regarder ξ_P^w

comme une forme linéaire sur V_P. De l'hérédité du terme constant (cf. [12], Proposition 3.16), on déduit que ξ_P^w est tempérée.
Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Pour toute fonction $f : A_M \to \mathbb{C}$, on écrit

$$lim_{a \xrightarrow{P} -\infty} f(a) = 0$$

si et seulement si pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $a \in A_M$ vérifiant les conditions :
(i) $\langle \alpha, H_M(a) \rangle < -R$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$.
(ii) $\langle \alpha, H_M(a) \rangle < \eta \langle \beta, H_M(a) \rangle$ pour tout $\alpha, \beta \in \Sigma(P)$, on ait $|f(a)| < \varepsilon$.

Proposition 3.3. — *(i) Soit $f \in \mathcal{A}^w(U_0 \backslash G, \psi)$. Il existe un unique élément $f_P^w \in \mathcal{A}^w(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$ tel que, pour tout $m \in M$, on ait :*

$$lim_{a \xrightarrow{P} -\infty} \delta_P^{1/2} f(ma) - f_P^w(ma) = 0.$$

On appelle f_P^w le terme constant faible de f le long de P.
(ii) Soit π une représentation lisse admissible de V, soit ξ un élément tempéré de $Wh(\pi)$ et $v \in V$. Soit $f = c_{\xi,v}$. Alors f_P^w est égal à $c_{\xi_P^w, v_P}$.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du Lemme III.5.1 de [20]. □

Pour $f \in \mathcal{A}^w(U_0 \backslash G, \psi)$, on définit une application $f_P^{w,ind} : G \to \mathcal{A}^w(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$ par $f_P^{w,ind}(g) = (\rho(g) f)_P^w$. L'application $f \mapsto f_P^{w,ind}$ est un entrelacement entre la représentation régulière droite de G dans $\mathcal{A}^w(U_0 \backslash G, \psi)$ et la représentation induite $i_P^G \mathcal{A}^w(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$, d'après (3.8).

3.6. Lien entre le terme constant faible des fonctions de Whittaker et celui des coefficients lisses de représentations tempérées

Lemme 3.4. — *Soit (π, V) une représentation de longueur finie de G, P un sous-groupe parabolique standard de G et $\xi \in Wh(\pi)$. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G et H' comme dans (3.2). On introduit le terme constant (resp. terme constant faible) des coefficients lisses de représentations lisses admissibles sur G (resp. et tempérées) comme dans* [20], *Proposition I.6.2. Si. $\check{v} \in \check{V}$, on note $c_{\check{v},v}$ le coefficient lisse défini par $c_{\check{v},v}(g) = \langle \check{v}, \pi(g) v \rangle$.*
Soit $v \in V^H$. On a $v' := e_{H'} \xi \in \check{V}$ et :

$$(c_{\xi,v})_P(a_0 a) = (c_{v',v})_P(a_0 a), a_0 \in A_0^-, a \in A_M.$$

Si de plus (π, V) *est tempérée, on a :*

$$(c_{\xi,v})^w_P(a_0a) = (c_{v',v})^w_P(a_0a), a_0 \in A_0^-, a \in A_M.$$

Démonstration. — Prouvons la première égalité. Pour $a_0 \in A_0^-$ fixé, les deux membres sont des fonctions A_M-finies qui sont égales sur $A_M \cap A_0^-(P,\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, d'après les propriétés des deux termes constants (cf. (3.7) et [20] Proposition I.4.3) joint à l'égalité (3.2). Elles sont donc égales. Cela prouve la première égalité.

Supposons maintenant (π, V) tempérée et notons f la fonction sur A_M, $a \mapsto c_{\xi,v}(a_0a)$. Comme f est A_M finie, il existe (cf. [20] I.2) un ensemble fini, $\mathcal{X}$, de caractères lisses de A_M, un entier d tels que pour tout $\chi \in \mathcal{X}$, il existe un polynome $P_{\chi,f}$ sur $\mathfrak{a}_M$, à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à d, de sorte que

$$f(a) = \sum_{\chi\in\mathcal{X}} \chi(a)P_{\chi,f}(H_M(a)), a \in A_M.$$

On peut prendre $\mathcal{X} = \mathcal{E}xp(\pi_P)$. Comme (π, V) est tempérée, tenant compte de la première égalité du Lemme, les deux membres de la deuxième sont égaux à

$$\sum_{\chi\in\mathcal{E}xp(\pi_P), Re\chi=0} \chi(a)P_{\chi,f}(H_M(a)), a \in A_M. \qquad \square$$

4. Fonctionnelles de Jacquet et terme constant faible

4.1. Fonctionnelles de Jacquet

Soit $P = MU$ un sous-groupe parolique semi-standard de G et soit (σ, E) une représentation lisse unitaire irréductible de M. On note $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des classes d'équivalence des représentations $\sigma_\chi := \sigma \otimes \chi$, $\chi \in X(M)$ (resp. $X(M)_{\mathbb{C}}$), qui est un tore compact (resp. complexe). On appelle $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{O}$) l'orbite inertielle (resp. l'orbite inertielle unitaire) de σ. On utilise dans la suite la notion de fonction sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{O}$) à valeurs dans un foncteur, qui dépendent des objets concrets σ_χ, ou des représentations équivalentes (resp. unitaires équivalentes) à l'une de celles-ci (cf. [9], section 2.4). On appellera ces dernières objets de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{O}$). Dans cette notion de fonction, on inclut des règles de transformation pour tenir compte des équivalences (resp. équivalences unitaires) de représentations. On dispose de la notion de fonction polynomiale, rationnelle (cf. l.c.).

On note que $Wh(\sigma_\chi) := Wh(\sigma_\chi, U_0 \cap M)$ est indépendant de $\chi \in X(M)$, car χ est trivial sur $U_0 \cap M$. Par restriction des fonctions à K, les représentations $i_P^G\sigma_\chi$ admettent une réalisation dans un espace indépendant de

χ, la réalisation compacte.

(4.1) Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, $P^- = MU^-$ le sous-groupe parabolique opposé relativement à M. On note (σ, E) une représentation lisse de longueur finie de M.
Il y a un unique isomorphisme entre $Wh(\sigma) \to Wh(i_P^G\sigma)$ noté $\eta \mapsto \xi(P, \sigma, \eta)$ (cf. Rodier [17], Casselman-Shalika [7], et Shahidi ([19], Proposition 3.1) tel que, pour tout $v \in i_P^G E$ à support contenu dans PP^-:

$$\langle \xi(P, \sigma, \eta), v\rangle = \int_{U^-} \langle \eta, v(u^-)\rangle \psi(u^-)^{-1} du^-, \eta \in Wh(\sigma).$$

De plus (cf. [9], Théorème 1), pour tout v dans l'espace de la réalisation compacte et $\eta \in Wh(\sigma)$, $\langle \xi(P, \sigma_\chi, \eta), v\rangle$ est polynomiale en $\chi \in X(M)$.

On définit les fonctionnelles de Jacquet pour un sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU$, par transport de structure. Celles-ci ne seront qu'un outil pour les preuves et n'apparaitront pas dans la formule de Plancherel.

On rappelle que W^G désigne un ensemble de représentants dans K du groupe de Weyl, $\overline{W}^G$, de G par rapport à M_0. Si M est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, on note $W^M = W^G \cap M$ qui est un ensemble de représentants dans M de $\overline{W}^M$. La longueur des éléments de $\overline{W}^G$ est déterminée par le choix de P_0.
On suppose en outre ici P anti-standard. Il existe un ensemble de représentants de $\overline{W}^G/\overline{W}^M$, $\overline{W}_M$, dans $\overline{W}^G$ tel que (cf. [22], Proposition 1.1.2.13) :

(4.2) Tout élément w de $\overline{W}^G$ s'écrive sous la forme $w_M w^M$, avec $w_M \in \overline{W}_M$, $w^M \in \overline{W}^M$, et tel que la longueur de w soit égale à la somme des longueurs de w_M et w^M.

(4.3) Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. On notera w_P ou parfois seulement w, s'il n'y a pas d'ambiguité, l'élément w_P de G tel que $w_P^{-1} \in W^G$, $P' = w_P.P$ soit anti-standard et tel que w_P^{-1} représente l'élément du groupe de Weyl de longueur minimum dans $w_P^{-1}\overline{W}^{M'} = \overline{W}^M w_P^{-1}$. L'unicité de w_P résulte du fait que deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G conjugués sont égaux.

Soit (σ, E) une représentation lisse de M. On dispose de l'isomorphisme $\lambda(w) : i_P^G E \mapsto i_{w.P}^G wE$ entre les représentations $i_P^G\sigma$ et $i_{w.P}^G w\sigma$ qui à v associe v_w, où $v_w(g) = v(w^{-1}g)$ pour $g \in G$. Notons, que comme $w \in K$, pour $v \in i_{P\cap K}^K E$ et tout $\chi \in X(M)$, la restriction de $\lambda(w)v_\chi$ à K est égale à $\lambda(w)v$. On voit aussi que si σ est unitaire, $\lambda(w)$ est unitaire.

(4.4) On définit:

$$Wh(P, \sigma) := Wh(w_P\sigma),$$

$$\xi(P, \sigma, \eta) := \xi(w_P.P, w_P\sigma, \eta) \circ \lambda(w_P), \eta \in Wh(P, \sigma).$$

Comme $\lambda(w)$ définit une équivalence entre $i_P^G\sigma$ et $iG_{w_P.P}w_P\sigma$, on a:

$$Wh(i_P^G\sigma) = \{\xi(P, \sigma, \eta) | \eta \in Wh(P, \sigma)\}$$

On définit les intégrales de Jacquet par :

$$E_P^G(\sigma, \eta \otimes v) = c_{\xi,v} \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi),$$

où $\xi = \xi(P, \sigma, \eta)$, $\eta \in Wh(P, \sigma), v \in i_P^G E$, ce qui, par bilinéarité permet de définir $E_P^G(\sigma, \phi)$ pour $\phi \in Wh(P, \sigma \otimes i_P^G E)$. On notera souvent plus simplement $E_P^G(\phi)$ au lieu de $E_P^G(\sigma, \phi)$. De (4.4), on déduit l'égalité :

$$E_P^G(\sigma, \eta \otimes v) = E_{w_P.P}^G(w_P\sigma, \eta \otimes \lambda(w_P)v),\ v \in i_P^G E, \eta \in Wh(P, \sigma). \tag{4.5}$$

On suppose que P est anti-standard. Soit (σ_1, E_1) une représentation de M équivalente à (σ, E) et soit T est un opérateur d'entrelacement bijectif entre σ et σ_1. On note T^t l'application linéaire de $Wh(\sigma_1)$ dans $Wh(\sigma)$ déduite de T par transposition. On note $indT$ l'opérateur d'entrelacement induit de T. Alors, il résulte du Lemme 4 (iii) de [9] :

$$E_P^G(\sigma, T^t\eta_1 \otimes v) = E_P^G(\sigma_1, \eta_1 \otimes (indT)v), v \in i_{P\cap K}^K E, \eta \in Wh(\sigma_1). \tag{4.6}$$

4.2. Rappel sur les intégrales d'entrelacement et les matrices B

On introduit les intégrales d'entrelacement, comme dans [20], Thèorème IV. 1.1, avec un changement de notation toutefois. On en rappelle ci-dessous certaines propriétés. Soit $P = MU$, $P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M. Soit $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M.

(4.7) Il existe une fonction rationnelle définie sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, $A(P', P, .)$ à valeurs dans $Hom_G(i_P^G., i_{P'}^G.)$ avec les propriétés suivantes:
Pour tout (σ, E) objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\chi \in X(M)_{\mathbb{C}}$ vérifiant $\langle Re\chi, \alpha\rangle > R$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(P'^{-})$, on ait:

$$\langle (A(P', P, \sigma_\chi)v)(g), \check{e}\rangle = \int_{U\cap U'\backslash U'} \langle v(u'g), \check{e}\rangle du', \, v \in i_P^G V_\chi, \check{e} \in \check{E},$$

l'intégrale étant absolument convergente.
Si σ est tempérée, on peut prendre $R = 0$ (cf. [20], Proposition IV. 2.1)

La rationalité s'entend dans le sens suivant :

(4.8) Il existe une fonction polynôme sur $X(M)_{\mathbb{C}}$ non nulle, b, telle que pour tout $v \in i_{K\cap P}^K V$, l'application qui à $\chi \in X(M)_{\mathbb{C}}$ satisfaisant la condition ci-dessus associe la restriction à K de $b(\chi)A(P', P, \sigma_\chi)(v_\chi)$ est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie de $i_{P\cap K}^K E$ et se prolonge de façon polynomiale en $\chi \in X(M)_{\mathbb{C}}$ (cf. [20], Théorème IV.1.1).

Il existe une application rationnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, j, telle que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, de sous-groupe de Lévi M, on ait (cf. [20], IV.3.(1)) :

(4.9) Pour σ objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ tel que $A(P, P^-, \sigma)A(P^-, P, \sigma)$ soit défini, cet opérateur est l'homothétie de rapport $j(\sigma)$.

On a (cf. [20] IV.3 (3)) :

(4.10) Si $w \in W^G$, $j(w\sigma) = j(\sigma)$.

D'autre part on obtient facilement un analogue de [20] IV.1 (11) pour les adjoints des intégrales d'entrelacement.
D'après [20] Lemme V.2.1 et IV. 3 (6), on a :

(4.11) On suppose que $\mathcal{O}$ est l'orbite inertielle unitaire d'une représentation irréductible de carré intégrable. Alors la fonction j est strictement positive sur $\mathcal{O}$. On notera μ la fonction rationnelle sur $\mathcal{O}$, j^{-1}. On notera parfois plus précisément μ^G au lieu de μ, j^G au lieu de j.

Si α est élément de l'ensemble $\Sigma_{red}(P)$ des racines réduites de $\Sigma(P)$, on note A_α la composante neutre du noyau de α dans A_M et M_α le centralisateur de A_α. On note $j_\alpha(\sigma)$au lieu de j^{M_α}.

D'après [20] IV.3 (4), si P, P', P'' sont des sous-groupes paraboliques semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M, on l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

(4.12)
$$A(P'', P', \sigma)A(P', P, \sigma) = j(P'', P', P, \sigma)A(P'', P, \sigma),$$
où $j(P'', P', P, \sigma)$ est le produit des $j_\alpha(\sigma)$ pour $\alpha \in \Sigma_{red}(P) \cap \Sigma_{red}(P'') \cap \Sigma_{red}(P'^-)$.

On a aussi :

(4.13) Pour $\alpha \in \Sigma_{red}(P)$, les points où l'application rationnelle sur $X(M)_\mathbb{C}$, $\chi \mapsto j_\alpha(\sigma_\chi)$, a un pôle ou un zéro sont de la forme $\chi = \chi_\lambda$ avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}'_M)_\mathbb{C}$ de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = c$.
Les points où l'application rationnelle sur $X(M)_\mathbb{C}$, $\chi \mapsto A(P', P, \sigma_\chi)$ a un pôle ou bien où $A(P', P, \sigma_\chi)$ n'est pas inversible sont de la forme $\chi = \chi_\lambda$ avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}'_M)_\mathbb{C}$ de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = c$, avec $\alpha \in \Sigma(P') \cap \Sigma(P^-)$(cf. [13], p. 393).

Par transport de structure, on a, pour $x \in G$, normalisant M_0 :

$$\lambda(x)A(P', P, \sigma) = A(x.P', x.P, x\sigma)\lambda(x). \tag{4.14}$$

et :

(4.15) Si α est une racine réduite de $\Sigma(P)$, $w \in W^G$, alors:
$$j_\alpha(\sigma) = j_{w\alpha}(w\sigma).$$

Les intégrales d'entrelacement transforment les fonctionnelles de Jacquet en des fonctionnelles de Jacquet, ce qui permet d'introduire les matrices B (cf. [9], section 5.2) :

(4.16) Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M. Il existe une unique application rationnelle définie sur $\mathcal{O}$, $B(P, P', .)$ à valeurs dans $Hom_\mathbb{C}(Wh(P', .), Wh(P, .))$ telle que l'on ait l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:
$$\xi(P', \sigma, \eta) \circ A(P', P, \sigma) = \xi(P, \sigma, B(P, P', \sigma)\eta),\ \eta \in Wh(P', \sigma).$$
La fonction rationnelle sur $X(M)$, $\chi \mapsto B(P, P', \sigma_\chi)$ n'a de pôles qu'en des points ou l'application $\chi \mapsto A(P', P, \sigma_\chi)$ a un pôle.

La rationalité a ici le sens suivant :
Soit σ un objet de $\mathcal{O}$. Pour tout $\chi \in X(M)_\mathbb{C}$, $Wh(P, \sigma_\chi) = Wh(P, \sigma)$, et, avec les notations de (4.7), pour tout $\eta \in Wh(P', \sigma)$, la fonction $\chi \mapsto b(\chi)B(P, P', \sigma_\chi)\eta$ est une fonction polynomiale sur $X(M)_\mathbb{C}$ à valeurs dans $Wh(P, \sigma)$.

D'après (4.13) et (4.16), on a :

(4.17) Les points où l'application rationnelle sur $X(M)_{\mathbb{C}}$, $\chi \mapsto B(P,P',\sigma_\chi)$ a un pôle sont de la forme $\chi = \chi_\lambda$ avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}'_M)_{\mathbb{C}}$ de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = c$, avec $\alpha \in \Sigma(P') \cap \Sigma(P^-)$.

La relation qui définit $B(P',P,\sigma)$ comme fonction sur $\mathcal{O}$ est la suivante :

(4.18) Soit (σ,E), (σ_1,E_1) deux objets de $\mathcal{O}$ équivalents et T un entrelacement bijectif entre σ et σ_1. La transposée de T, T^t, détermine une bijection entre $Wh(P,\sigma_1)$ et $Wh(P,\sigma)$ d'une part, $Wh(P',\sigma_1)$ et $Wh(P',\sigma)$ d'autre part et l'on a:
$$B(P,P',\sigma_1) = (T^t)^{-1} B(P,P',\sigma) T^t.$$

4.3. Terme constant faible des fonctionnelles et intégrales de Jacquet tempérées

Soit $P = MU$ et $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G. On note
$$\mathcal{W}(M'|G|M) = \{s \in W^G | s.M \subset M'\}.$$
On surligne pour indiquer l'image dans le groupe de Weyl. Soit
$$\overline{W}(M'|G|M) := \overline{W}^{M'} \backslash \overline{\mathcal{W}}(M'|G|M).$$
On remarque que
$$\overline{W}(M'|G|M) := \overline{W}^{M'} \backslash \overline{\mathcal{W}}(M'|G|M)/\overline{W}^{M}.$$
Ceci permet de choisir un ensemble de représentants $W(M'|G|M)$ de $\overline{W}(M'|G|M)$ dans W^G tel que :

(4.19) Pour $s \in W(M'|G|M)$, s est de longueur minimum dans $\overline{W}^{M'} s$ qui contient $s\overline{W}^{M}$.

De plus, en utilisant un sous-groupe parabolique standard conjugué à P, $x.P$, on voit grâce à [22], Proposition 1.2.1.10, que

(4.20) $W(M'|G|M)$ est un ensemble de représentants d'un sous-ensemble de $P'\backslash G/P$.

(4.21) Soient P, P' deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G et soit $s \in W(M'|G|M)$. Alors, avec les notations de (4.3), $w_{s.P} = s^{-1}$.

Définition 4.1. — *Soit M le sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (σ, E) une représentation lisse, irréductible et de carré intégrable de M. On dit que σ est G-régulière si :*
Pour tout $s \in W(M|G|M)$ avec $s \neq 1$, les représentations $s\sigma$ et σ sont non équivalentes.

On remarque que d'après [20], Proposition IV.2.2 et (4.16), si σ est G-régulière et si P, P' sont des sous-groupes paraboliques de G ayant M pour sous groupe de Lévi, les applications rationnelles sur $X(M)$, $\chi \mapsto A(P, P', \sigma_\chi)$, $\chi \mapsto B(P, P', \sigma_\chi)$ n'ont pas pas de poles en $\chi = 1$ et leurs valeurs en 1 sont des opérateurs inversibles. De plus $i_P^G\sigma$ est irréductible.

Lemme 4.2. — *Soit σ une représentation lisse, irréductible et de carré intégrable de M. L'ensemble des $\chi \in X(M)$ tel que σ_χ soit G-régulière est un ouvert dense de $X(M)$.*

Démonstration. — Soit $s \in W(M|G|M)$ avec $s \neq 1$. Si l'ensemble $\Omega_s := \{\chi \in X(M) | s\sigma_\chi \approx \sigma_\chi\}$ est non vide, on fixe $\chi_0 \in \Omega_s$. Donc $s\sigma \approx \sigma \otimes \chi_0(s\chi_0)^{-1}$ Alors $\chi \in \Omega_s$ si et seulement $\sigma \otimes \chi_0(s\chi_0)^{-1}s\chi \approx \sigma \otimes \chi$, ce qui équivaut à $\chi(s\chi^{-1})\chi_0^{-1}s\chi_0$ élément du stabilisateur dans $X(M)$ de σ. Celui ci-est un ensemble fini. Donc Ω_s est égal à un nombre fini de translatés de l'ensemble X_s des $\chi \in X(M)$ tels que $\chi s\chi^{-1} = 1$. C'est un sous-groupe fermé de $X(M)$, distinct de $X(M)$, donc d'intérieur vide. Donc Ω_s est ouvert et d'intérieur vide. □

Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G. On introduit, pour $s \in W(M'|G|M)$, les sous-groupes paraboliques de G :

$$P_s = (M' \cap s.P)U', \ \tilde{P}_s = (M' \cap s.P)U'^-. \tag{4.22}$$

Soit (σ, E),une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M, G-régulière de M. Posons $(\pi, V) = (i_P^G\sigma, i_P^G E)$. On définit une application α :

$$\alpha : V \to \oplus_{s \in W(M'|G|M)} i_{M' \cap s.P}^{M'} sE, \ v \mapsto (v_s)_{s \in W(M'|G|M)}.$$

par

$$v_s(m') = \delta_{P'}^{-1/2}(m')(A(P_s, s.P, s\sigma)\lambda(s)v)(m'), \ m' \in M'.$$

D'après [20], début de la preuve de la Proposition V.1.1, on a :

(4.23) L'application α se factorise en un isomorphisme de M'-modules entre $V_{P'}^w$ et l'espace d'arrivée, qui est une somme de M'-modules irréductibles non équivalents, réduite à zéro si $W(M'|G|M)$ est vide. On identifie dans la suite $V_{P'}^w$ à l'aide de α avec l'image cet isomorphisme.

Soit $\eta \in Wh(P, \sigma)$. Comme $\lambda(s)$ entrelace $i_P^G \sigma$ et $i_{s.P}^G s\sigma$, d'après
(4.24) (4.4), il existe un unique $\mathfrak{s}\eta \in Wh(s.P, s\sigma)$ tel que:

$$\xi(s.P, s\sigma, \mathfrak{s}\eta) = \xi(P, \sigma, \eta) \circ \lambda(s^{-1}).$$

Théorème 4.3. — *Soit P (resp. P') un sous-groupe parabolique semi-standard (resp. standard) de G. Soit σ comme ci-dessus.*

(i) Pour $s \in W(M'|G|M)$, on a $Wh(\tilde{P}_s, s\sigma) = Wh(M' \cap s.P, s\sigma)$.

(ii)Soit $\eta \in Wh(P, \sigma)$. On note $\xi = \xi(P, \sigma, \eta)$. Alors, dans l'isomorphisme ci-dessus, $\xi_{P'}^w$ qui est un élément du dual de $V_{P'}$, est nul si $W(M'|G|M)$ est vide et sinon égal à $(\xi_s)_{s \in W(M'|G|M)}$, avec :

$$\xi_s = \xi(M' \cap s.P, s\sigma, B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta),$$

l'expression étant bien définie grâce à (i).
(iii) Si P est anti-standard, $\mathfrak{s}\eta = \eta$.

Démonstration. — On procède comme dans la preuve du Théorème 3 de [9]. (i) est entièrement semblable à celle de (i) du l.c.

(ii) Si $W(M'|G|M)$ est vide, $V_{P'}^w$ est réduit à zéro, donc $\xi_{P'}^w$ est nul. Ceci prouve la première assertion de (ii).

On suppose maintenant que $W(M'|G|M)$ est non vide. On écrit :

$$\xi_{P'}^w = (\xi_s)_{s \in W(M'|G|M)},$$

où ξ_s est de la forme :

(4.25) $\xi_s = \xi(M' \cap s.P, s\sigma, \eta_s)$, pour un élément η_s de $Wh(M' \cap s.P, s\sigma)$.

ll s'agit donc de montrer :

$$\eta_s = B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta. \tag{4.26}$$

a) Montrons d'abord :

(4.27) Supposons P semi-standard et $P^- \subset P'$. Alors $\eta_{1_G} = \eta$.

On procède comme dans la preuve du Théorème 3 (ii) de [9]. Cela conduit à l'égalité, pour $v \in V$ à support dans $PP' = P'^- P'$:

$$c_{\xi_{P'}, v_{P'}}(a) = \langle \xi(P \cap M', \sigma, \eta), \sigma^-(a) v_{1_G} \rangle, a \in A_{M'},$$

où $\sigma^- = i_{P \cap M'}^{M'} \sigma$. Comme σ^- est unitaire, on en déduit que :

$$c_{\xi_P^w, v_P^w}(a) = \langle \xi(P \cap M', \sigma, \eta), \sigma^-(a) v_{1_G} \rangle, a \in A_M.$$

Évaluant en 1, on en déduit :

$$\langle \xi_{P'}, v_{P'} \rangle = \langle \xi(P \cap M', \sigma, \eta), v_{1_G} \rangle.$$

Tenant compte de [9], (7.12) et (7.13), on en déduit a).

b) La fin de la démonstration du Théorème est alors identique à celle du Théorème 3 de [9]. □

Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU \subset M'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de M' et soit $Q = PU'$. Soit (σ, E) une représentation lisse irréductible de M. De l'application :

$$E_P^{M'} : Wh(P,\sigma) \otimes i_P^{M'} E \to C^\infty(U_0 \cap M' \backslash M', \psi),$$

se déduit, par fonctorialité de l'induction et l'identification canonique de $i_{P'}^G(i_P^{M'}E)$ avec $i_Q^G E$, une application :

$$E_P^{P'} : Wh(P,\sigma) \otimes i_Q^G E \to i_{P'}^G C^\infty(U_0 \cap M' \backslash M', \psi).$$

Si ϕ est un élément de $Wh(P,\sigma) \otimes i_Q^G E$, on le regarde comme fonction sur G à valeurs dans $Wh(P,\sigma) \otimes E$. On a un isomorphisme de G-modules entre $i_Q^G E$ et $i_{P'}^G(i_P^{M'}\sigma)$. L'évaluation en l'élément neutre dans la deuxième réalisation de $i_Q^G E$, donne lieu à une application, notée $r_{M'}$, de $i_Q^G E$ dans $i_P^{M'}E$. Soit $v \in i_Q^G E$. On a (cf. [9], (7.21)) :

$$\rho(m') r_{M'}(v) = \delta_{P'}^{-1/2}(m') r_{M'}(\rho(m')v). \tag{4.28}$$

On note encore $r_{M'}$ l'application de $Wh(P,\sigma) \otimes i_Q^G$ dans $Wh(P,\sigma) \otimes i_{M' \cap P}^{M'} E$ obtenue par tensorisation de l'identité de $Wh(P,\sigma)$ avec $r_{M'}$. On a :

$$[E_P^{P'}(\phi)(1)](m') = [E_P^{M'}(r_{M'}\phi)](m'), m' \in M'. \tag{4.29}$$

De plus, si $P = M'$, $i_{M'}^{M'}E$ s'identifie naturellement à E. Avec cette identification on a :

$$(E_{M'}^{P'}\phi)(g) = E_{M'}^{M'}(\phi(g)) \tag{4.30}$$

Proposition 4.4. — *Soit $P = MU$ (resp. $P' = M'U'$) un sous-groupe parabolique anti-standard (resp. standard) de G, σ une représentation lisse irréductible unitaire de carré intégrable G-régulière de M.*
Si $s \in W(M'|G|M)$, on note $C(s, P', P, \sigma)$ l'application linéaire de $Wh(P,\sigma) \otimes i_P^G E$ dans $Wh(\tilde{P}_s, s\sigma) \otimes i_{P_s}^G sE$ définie par :

$$C(s, P', P, \sigma) = B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma) \otimes (A(P_s, s.P, s\sigma)\lambda(s)).$$

Alors, pour $\phi \in Wh(P,\sigma) \otimes i_P^G E$, $E_P^G(\phi)_{P'}^{ind} = 0$ si $W(M'|G|M)$ est vide et sinon, avec l'identification de $i_{P_s}^G sE$ avec $i_{P'}^G(i_{M' \cap s.P}^{M'} sE)$ et celle de $Wh(\tilde{P}_s, s\sigma)$ avec $Wh(M' \cap s.P, s\sigma)$ (cf. Théorème 4.3, (i)), on a :

$$E_P^G(\phi)_{P'}^{w,ind} = \sum_{s \in W(M'|G|M)} E_{M' \cap s.P}^{P'}(C(s, P', P, \sigma)\phi),$$

$$E_P^G(\phi)_{P'}^w = \sum_{s \in W(M'|G|M)} E_{M' \cap s.P}^{M'}(r_{M'}(C(s,P',P,\sigma)\phi)), \phi \in Wh(P,\sigma) \otimes i_P^G E.$$

Démonstration. — Les deux membres de la première égalité sont des fonctions sur $G \times M'$. Par équivariance, on se réduit à démontrer l'égalité en $(1, m')$ pour tout ϕ et tout $m' \in M'$. Cette égalité se réduit, grâce à (4.29), à la seconde. Grâce à (3.8) et (4.28), on se réduit à prouver l'égalité évaluée en 1. On peut se limiter à démontrer l'égalité pour $\phi = \eta \otimes v$, pour $\eta \in Wh(\sigma)$, $v \in i_P^G E$. Alors, avec les notations du Théorème précédent :

$$E_{P'}^G(\phi)_{P'}(1) = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \langle \xi_s, v_s \rangle.$$

En utilisant la définition de ξ_s et v_s, ce Théorème montre la deuxième égalité évaluée en 1. □

5. Transformation de Fourier-Whittaker

5.1. Définition de la transformée de Fourier-Whittaker

Lemme 5.1. — *On suppose que (π, V) est une représentation lisse de carré intégrable et irréductible de G. Alors :*
(i) Il existe un unique produit scalaire hermitien sur $Wh(\pi)$ tel que :

$$\int_{A_G U_0 \backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi',v'}(g)}dg = (\xi, \xi')(v, v'),\ \xi, \xi' \in Wh(\pi), v, v' \in V.$$

où l'intégrale est absolument converente d'après la Proposition 3.2.
(ii) Si χ est un caractère unitaire non ramifié de G, le produit scalaire sur $Wh(\pi_\chi) = Wh(\pi)$, ne dépend pas de χ.
(iii) Si T est un opérateur d'entrelacement unitaire avec une autre représentation lisse unitaire irréductible de carré intégrable de G, (π_1, V_1), l'opérateur transposé T^t détermine un opérateur unitaire entre $Wh(\pi)$ et $Wh(\pi_1)$.

Démonstration. — (i) Il s'agit d'une simple application du Lemme de Schur.

(ii) résulte immédiatement de la caractérisation du produit scalaire.
(iii) est immédiat. □

On appliquera ces notations aux sous-groupes de Lévi de G.

Proposition 5.2. — *(i) Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse de carré intégrable et irréductible de M. Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$. On munit*

$Wh(P,\sigma)$ du produit scalaire défini grâce au Lemme 5.1 et à la définition de $Wh(P,\sigma)$. Par tensorisation avec le produit scalaire d'induite unitaire de $i_P^G\sigma$, on en déduit un produit scalaire sur $Wh(P,\sigma)\otimes i_P^G E$.
Soit $f\in \mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$. Il existe un unique élément, $\hat f(P,\sigma)$ de $Wh(P,\sigma)\otimes i_P^G E$ tel que :

$$(5.1)\quad (\hat f(P,\sigma),\phi)=\int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{E_P^G(\sigma,\eta\otimes v)(g)}dg,\quad \phi\in Wh(P,\sigma)\otimes i_P^G E.$$

l'intégrale du membre de droite étant convergente d'après la Proposition 3.2 et (3.15). (ii) Soit σ_1 une représentation unitaire équivalente à σ de M et T un opérateur d'entrelacement unitaire entre σ et σ_1. On note $indT$ l'opérateur d'entrelacement induit de T, qui est unitaire. Alors on a :

$$(5.2)\qquad \hat f(P,\sigma_1)=((T^t)^{-1}\otimes indT)\hat f(P,\sigma),$$

ce qui définit $\hat f(P,\sigma)$ comme fonction sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $Wh\otimes i_P^G$.
(iii) Soit $P=MU,P'=M'U'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G et $s\in W(M'|G|M)$. Alors, pour (σ,E) objet de $\mathcal{O}$:

$$\hat f(s.P,s\sigma)=(Id\otimes\lambda(s))\hat f(P,\sigma).$$

(iv) Soit (σ,E) objet de $\mathcal{O}$. Soit $f\in C_c^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ et $g\in G$. On a :

$$(Id\otimes\rho(g))\hat f(P,\sigma)=(\rho(g)f)\hat{}(P,\sigma).$$

Démonstration. — (i) Pour f fixé, le second membre de (5.1) définit une forme antilinéaire sur $Wh(P,\sigma)\otimes i_P^G E$. Il est clair que si f est invariante à droite par un sous-groupe ouvert compact H de G, celle-ci est invariante par H. Par le Théorème de représentation de Riesz, en dimension finie, on en déduit (i).
(ii) La relation (5.2) résulte de la définition de $\hat f$ en (i) et de (4.6).
(iii) résulte de (4.5).
(iv) résulte de l'égalité $\rho(g)E_P^G(\sigma,\eta\otimes v)=E_P^G(\sigma,\eta\otimes\rho(g)v)$, qui est une conséquence immédiate de la définition des intégrales de Jacquet. □

On appellera $\hat f$ la transformée de Fourier-Whittaker de f, ou plus simplement sa transformée de Fourier.

Remarque 5.3. — Nous avons déjà défini dans [9] une transformation de Fourier-Whittaker pour les fonctions C_c^∞ en utilisant les représentations cuspidales de M au lieu des représentations de carré intégrable. Ces deux transformations sont différentes. Nous nous excusons auprès du lecteur de cet abus de terminologie.

5.2. Majorations des dérivées d'intégrales de Jacquet

On introduit l'espace $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$ des fonctions C^∞ sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $Wh\otimes i_P^G$. Pour tout sous-groupe compact ouvert, H, de K on note $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$ l'espace des fonctions C^∞ H-invariantes par l'action régulière droite de H. Si (σ, E) est un objet de $\mathcal{O}$, cet espace s'identifie à un sous-espace fermé $C^\infty(X(M), Wh(\sigma)\otimes(i_{K,K\cap P}E)^H)$ muni de la topologie déduite de la topologie naturelle sur $C^\infty(X(M))$. On vérifie aisément que cette topologie ne dépend pas du choix de σ. On note $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$ la réunion des espaces $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$ lorsque H varie et on le munit de la topologie limite inductive.
On définit une représentation lisse de G sur $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$, $\rho_\bullet$, telle que pour tout $\phi\in C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$ et σ objet de $\mathcal{O}$:

$$(\rho_\bullet(g)\phi)(\sigma) = (Id\otimes\rho(g))\phi(\sigma), g\in G.$$

Si H est comme ci-dessus et $g\in G$, $\rho_\bullet(g)$ est un opérateur continu entre $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$ et $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^{H'}$, où $H' = (g.H)\cap K$.
On note $Pol(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$ le sous-espace de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$ formé des applications polynomiales.

Lemme 5.4. — *On fixe H comme ci-dessus et on choisit H' comme dans (3.2). Si (σ, E_σ) est un objet de $\mathcal{O}$, on définit une application $p_{H'}$ de $Wh(\sigma)\otimes i_P^G E_\sigma$ dans $i_P^G\check{E}_\sigma\otimes i_P^G E_\sigma$, qui à $\eta\otimes v$ associe $(e_{H'}\xi(P,\sigma,\eta))\otimes v$. Utilisant (4.1), on voit que cela définit une application continue, notée encore $p_{H'}$ de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$ dans $C^\infty(\mathcal{O}, i_P^{\check{G}}\otimes i_P^G)^{H'\times H}$, où on munit cet espace d'une topologie analogue à celle de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$. Pour $\phi'\in C^\infty(\mathcal{O}, i_P^{\check{G}}\otimes i_P^G)$, soit $E_P^G(\phi'(\sigma))$ la combinaison linéaire de coefficients lisses de $i_P^G\sigma$ associée à $\phi'(\sigma)\in i_P^G\check{E}_\sigma\otimes i_P^G E_\sigma$. On a :*

(5.3) *Pour σ objet de $\mathcal{O}$, les restrictions à A_0^- de $E_P^G(\phi(\sigma))$ et $E_P^G((p_{H'}\phi)(\sigma))$ sont égales.*

Démonstration. — Cela résulte de (3.2). □

Lemme 5.5. — *Soit $\phi\in C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$. Alors pour tout sous-groupe parabolique standard, $P' = M'U$ et $m'\in M'$ les applications $\sigma\mapsto(E_P^G(\phi(\sigma)))_{P'}(m')$ et $\sigma\mapsto(E_P^G(\phi(\sigma)))_{P'}^w(m')$ sont C^∞ sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — D'après (3.8) et une propriété analogue pour le terme constant faible, il suffit de prouver les assertions du Lemme pour $m' = 1$. On suppose que ϕ est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de G, H. On utilise le Lemme précédent. On conclut gâce à l'analogue de notre Lemme pour les coefficients lisses (cf. [20] Lemme VI.2.1). □

Lemme 5.6. — *Soit w une fonction strictement positive sur G, invariante à gauche par U_0. On suppose que pour tout $g_0 \in G$, il existe une constante $C_{g_0} > 0$ telle que :*

$$w(gg_0^{-1}) \leqslant C_{g_0} w(g),\ g \in G.$$

(i) Soit D un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur $\mathcal{O}$. On suppose que pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, il existe $C' > 0$ telle que pour tout $a \in A_0^-$ et tout σ objet de $\mathcal{O}$:

$$|w(a) D(E_P^G(\phi(\sigma))(a))| \leqslant C'.$$

Alors, pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $g \in G$, σ objet de $\mathcal{O}$:

$$|w(g) D(E_P^G(\phi(\sigma))(g))| \leqslant C.$$

(ii) Soit $\phi \mapsto f_\phi$ un entrelacement entre $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ et $C^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$. On suppose que tout sous-groupe compact ouvert H de G il existe une semi-norme continue sur $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$, p', tel que,

$$|w(a) f_\phi(a)| \leqslant p'(\phi), a \in A_0^-, \phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H.$$

Alors il existe une semi-norme continue sur $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$, p, tel que :

$$|w(g) f_\phi(g)| \leqslant p(\phi), g \in G, \phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H.$$

Démonstration. — Prouvons (ii), la preuve de (i) étant similaire.
Pour $f \in C^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$, on note :

$$\nu(f) = Sup_{g \in G} |w(g) f(g)|, \nu'(f) = Sup_{a \in A_0} |w(a) f(a)|,$$
$$\nu'_-(f) = Sup_{a \in A_0^-} |w(a) f(a)|.$$

Soit H un sous-groupe compact ouvert de G contenu dans K. Soit I un sous-ensemble fini de K tel que $IH = K$ et soit F_0 un sous-ensemble fini de M_0 tel que $G = U_0 A_0 F_0 K$.
Il nous faut majorer $\nu(f_\phi)$. D'après l'hypothèse sur w, la définition de I et F_0, et la propriété d'entrelacement de l'application $\phi \mapsto f_\phi$, il existe $C > 0$ tel que pour tout élément, ϕ, de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ invariant par H on ait :

$$\nu(f_\phi) \leqslant C Sup_{f_0 \in F_0, i \in I} \nu'(f_{\rho_\bullet(f_0 i)\phi}). \tag{5.4}$$

D'après (3.4), il existe $a_0 \in A$ tel que pour tout ϕ, f_0, i comme ci-dessus, la restriction à A_0 de $f_{\rho_\bullet(f_0 i a_0)\phi}$ est à support dans A_0^-.
Mais d'après les propriétés de w, on a :

$$\nu'(f) \leqslant C_{a_0} \nu'(\rho(a_0) f), f \in C^\infty(U_0 \backslash G, \psi).$$

Tenant compte de la propriété de a_0, on a :

$$\nu(f_\phi) \leqslant C C_{a_0} Sup_{f_0 \in F_0, i \in I} \nu'_-(f_{\rho_\bullet(f_0 i a_0)\phi}), \phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H.$$

Il existe un sous-groupe compact ouvert de G, H_1 tel que pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ invariant par H, tout $f_0 \in F_0$, $i \in I$, $\rho(f_0 i a_0)\phi$ est invariant par H_1. D'apès l'hypothèse, on en déduit qu'il existe une semi-norme continue p' sur $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ telle que :

$$\nu(f) \leqslant p'(\rho(fia_0)\phi), \phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H.$$

En tenant compte de la continuité des opérateurs $\rho_\bullet(g)$, on en déduit le résultat. □

Lemme 5.7. — *(i) Soit D un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur $\mathcal{O}$, $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$. Il existe $d \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que :*

$$|(D(E_P^G(\phi(\sigma))(g)))| \leqslant \delta_0^{1/2}(m_0(g))(1 + \|H_0(m_0(g))\|)^d, g \in G, \sigma \in \mathcal{O}.$$

Démonstration. — On choisit un sous-groupe ouvert compact de G, H, fixant ϕ et H' comme dans (3.2). On utilise les notations du Lemme 5.4. D'après [10], Lemme 6, et [20] Lemme II.1.1, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que :

$$(5.5) \qquad |(1 + \|H_0(a)\|)^{-d}\delta_0^{-1/2}(a)(E_P^G p_{H'}\phi(\sigma))(a)| \leqslant C, a \in A_0, \sigma \in \mathcal{O}$$

On introduit la fonction w sur G par

$$w(g) = |(1 + \|H_0(m_0(g))\|)^{-d}\delta_0^{-1/2}(m_0(g)).$$

Montrons que :

(5.6) w vérifie les hypothèses du Lemme 5.6.

Soit $g_0 \in G$. Il suffit de voir qu'il existe un sous-ensemble compact de M_0, Ω, tel que pour tout $g \in G$, $m_0(gg_0) \in m_0(g)\Omega$. L'ensemble $\{m_0(kg_0) | k \in K\}$ est un sous-ensemble compact de M_0 qui a les proprétés voulues. Alors la combinaison de (5.5) et des Lemmes 5.4 et 5.6 (i) conduit au résultat voulu. □

Remarque 5.8. — Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$, $\eta \in Wh(\sigma)$ et $v \in i_{K \cap P}^K E$. Soit D un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur $X(M)$. Pour $\chi \in X(M)_u$, on note v_χ l'élément de $i_P^G(E_\chi)$ dont la restriction à K est égale à v. On démontre, de manière similaire au Lemme précédent, qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telle que :

$$|(D(E_P^G(\eta \otimes v_\chi)(g))| \leqslant \delta_0^{1/2}(m_0(g))(1 + \|H_0(m_0(g))\|)^d, g \in G, \chi \in X(M).$$

Soit f un élément de $\mathcal{A}^w(U_0\backslash G, \psi)$. On note, pour P' sous-groupe parabolique standard de G :

$$(5.7) \qquad f_{P'}^+ := f_{P'} - f_{P'}^w.$$

LEMME 5.9. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que :*

$$(E_P^G(\phi(\sigma)))_{P'}^+(a) \leqslant Ce^{-\varepsilon\|H_0(a)\|}, a \in A_{M'} \cap A_0^-.$$

Démonstration. — On suppose que ϕ est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de G, H. On utilise le Lemme 5.4 et ses notations. Alors d'après le Lemme 3.4, on a :

$$(E_P^G(\phi(\sigma)))_{P'}^+(a) = (E_P^G(p_{H'}\phi(\sigma)))_{P'}^+(a), a \in A_0^-,$$

où dans le membre de droite on utilise les notations de [20] pour les coefficients lisses. Alors le lemme Lemme VI.2. 3 de l.c. conduit au résultat voulu car, avec les notations de celui-ci, $\Xi^M(a) = 1$ pour $a \in A_{M'}$. □

5.3. Premières propriétés de la transformée de Fourier-Whittaker

Soit $P = MU$ un sous groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M.

PROPOSITION 5.10. — *Soit (σ, E) objet de $\mathcal{O}$. Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, $g \in G$.*
(i) On a : $(\rho_\bullet(g)\hat{f})(P, \sigma) = (\rho(g)f)\hat{}(P, \sigma)$.

(ii) On rappelle que $Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$ est muni du produit scalaire obtenu par produit tensoriel du produit scalaire sur $Wh(\sigma)$ et sur $i_P^G E$. Si $f, f' \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et $f' \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, sont tels que ff' est intégrable sur $U_0\backslash G$, on pose $(f, f')_G = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{f'(g)}dg$. Alors :

$$(f, E_P^G(\phi))_G = (\hat{f}(P, \sigma), \phi), \phi \in Wh(\sigma) \otimes i_P^G E, f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi).$$

Démonstration. — (i) est une reformulation de la Proposition 5.2 (iv) et (ii) résulte immédiatement de la définition de $\hat{f}$. □

PROPOSITION 5.11. — *On retient les notations précédentes. Pour $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ on note $\hat{f}_{P,\mathcal{O}}$, la restriction de $\hat{f}(P, .)$ aux objets de $\mathcal{O}$.*
(i)Alors $\hat{f}_{P,\mathcal{O}}$ est un élément de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$.
(ii) De plus l'application $f \mapsto \hat{f}_{P,\mathcal{O}}$ est continue de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ dans $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$.

Démonstration. — (i) On utilise la définition de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ (cf. section 5.2). Avec les notations de la Remarque 5.8, il suffit de voir que, pour σ objet de $\mathcal{O}$, $v \in i_{K\cap P}^K \sigma$, $\eta \in Wh(\sigma)$ et D opérateur différentiel à coefficients

C^∞ sur $X(M)$, l'application $\chi \to (\hat{f}_{P,\mathcal{O}}(\sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi)$ est C^∞. Mais d'après la Proposition précédente :

$$(\hat{f}_{P,\mathcal{O}}(\sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi) = \int_{U_0 \backslash G} f(g) \overline{E_P^G(\eta \otimes v_\chi)(g)} dg.$$

La remarque 5.8 et la définition de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ permettent d'utiliser le Théorème de dérivation sous le signe somme pour achever de prouver (i).
(ii) Soit H un sous-groupe compact ouvert. Toujours en utilisant le Théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient une majoration de $|D(\hat{f}_{P,\mathcal{O}}(\sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi)|$ par une semi-norme continue de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)^H$ évaluée en f. Ceci achève de prouver la continuité voulue. □

6. Paquets d'ondes et leurs transformées de Fourier-Whittaker

6.1. Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz

Proposition 6.1. — *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M. On fixe sur $X(M)$ la mesure de Haar fixée en 2.2. On munit $\mathcal{O}$ d'une mesure $X(M)$-invariante et telle que pour tout objet de $\mathcal{O}$, (σ, E), l'application de $X(M)$ dans $\mathcal{O}$, qui à χ associe $[\sigma_\chi]$, préserve localement les mesures. Si $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, on définit $f_\phi \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ par :*

$$f_\phi(g) := \int_{\mathcal{O}} \mu(\sigma) E_P^G(\phi(\sigma))(g) d\sigma, \; g \in G$$

qu'on appellera paquet d'ondes de ϕ.

(i) On a, pour $g \in G$, $\rho(g) f_\phi = f_{\rho_\bullet(g)\phi}$.

(ii) De plus f_ϕ est élément de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$. L'application $\phi \mapsto f_\phi$ de $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ dans $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ est continue.

Démonstration. — (i) est immédiat.
Montrons (ii). On pose :

$$\nu_{d,A_0^-}(f) = sup_{a \in A_0^-} \delta_{P_0}(a)^{-1} (1 + \|H_{M_0}(a)|)^d \|f(a)|, f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi).$$

D'après le Lemme 5.6 (ii), il suffit, pour tout sous-groupe compact ouvert, H, de G, de majorer $\nu_{d,A_0^-}(f_\phi)$ pour $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$:
On va montrer que la restriction de f_ϕ à A_0^- coincide avec la restriction d'un paquet d'ondes sur le groupe (cf [20] VI.13). On utilise les notations et le résultat du Lemme 5.4. Dans [20], section VI.3, les paquets d'ondes de

coefficients lisses de représentations de G ont été définis. D'après le Lemme 5.4, on a :

(6.1) Pour $\sigma \in \mathcal{O}$, les restrictions à A_0^- de $E_P^G(\phi(\sigma))$ et $E_P^G((p_{H'}\phi)(\sigma))$ sont égales.

D'où l'on déduit :

(6.2) Les restrictions de f_ϕ et $f_{p_{H'}\phi}$ à A_0^- sont égales,

où dans le second membre, il s'agit des paquets d'ondes de [20]. D'après [20], Proposition VI.3.1, l'application $\phi' \mapsto f_{\phi'}$ est une application continue de $C^\infty(\mathcal{O}, (\check{i}_P^G \otimes i_P^G)^{H' \times H'})$ dans l'espace de Schwartz de G, ce qui conduit notamment à une majoration de $\nu_{d,A_0^-}(f_{\phi'})$. Joint à la continuité de l'application $\phi \mapsto p_{H'}\phi$ et à (6.2), on conclut à une majoration de $\nu_d(f_\phi)$, où ν_d a été déinie en (3.11). Ceci achève de prouver la Proposition. $\square$

Remarque 6.2. — Soit σ un objet de $\mathcal{O}$, $\eta \in Wh(\sigma)$ et $v \in i_{K\cap P}^K\sigma$. Pour $\chi \in X(M)$, on note v_χ l'élément de $i_P^G(\sigma \otimes \chi)$ dont la restriction à K est égale à v. On démontre de manière similaire à la Proposition que, pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$, $\Phi = \int_{X(M)} E_P^G(\eta \otimes v_\chi)\phi(\chi)d\chi$ est un élément de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ et que l'application $\phi \to \Phi$ est continue de $C^\infty(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$.

6.2. Transformation unipotente et transformée de Fourier-Whittaker

Lemme 6.3. — *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G.*
(i) Il existe $C, C' > 0$ tel que :

(6.3) $C'(1 + \|H_0(m_0(u))\|) \leqslant (1 + \underline{\sigma}(u) \leqslant C(1 + \|H_0(m_0(u))\|), u \in U.$

(ii) Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que l'intégrale :

$$\int_U \delta_0^{1/2}(m_0(u))(1 + \|H_0(m_0(u))\|)^{-d}du$$

soit absolument convergente.

Démonstration. — (i) résulte de [20], Lemme II.3.4, utilisé pour P_0, de sorte que U est contenu dans U_0^-, et I.1(6).
(ii) résulte alors du Lemme II.4.2 de [20].

Lemme 6.4. — *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, (σ, E) une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M.*

Soit $\varepsilon > 0$. On note

$$X(M)^{\varepsilon} : \{\chi = \chi' \delta_P^{\varepsilon} | \chi' \in X(M)\}.$$

Soit $v \in i_{P\cap K}^{K} E$ et $\eta \in Wh(\sigma)$.
(i) Il existe $C > 0$ tel que :

$$\int_{U^-} |\langle \eta, v_\chi(u^-)\rangle| du^- \leqslant C, \chi \in X(M)^{\varepsilon}.$$

(ii) Pour $\chi \in X(M)^{\varepsilon}$, on a :

$$\langle \xi(P, \sigma_\chi, \eta), v_\chi \rangle = \int_{U^-} \psi(u^-)^{-1} \langle \eta, v_\chi(u^-)\rangle du^-$$

où l'intégrale est absolument convergente.

Commencons par démontrer (i). On a :
(6.4)

$$\langle \eta, v_\chi(u^-)\rangle = \chi'(m_P(u^-))\delta_P^{\varepsilon}(m_P(u^-))\langle \eta, \sigma(m_P(u^-))v(k(u^-))\rangle, u^- \in U^-.$$

Soit $P_0' = (P_0 \cap M)U$. C'est un sous-groupe parabolique minimal semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M_0. D'après le Lemme 3.2, η est tempérée. Tenant compte de (3.13) et de l'égalité $m_{P_0\cap M}(m_P(u^-)) = m_{P_0'}(u^-)$, on voit qu'il existe $C' > 0$ et $d' \in N$ tels que pour tout $k \in K$ et $m \in M$:

$$(6.5) \quad \langle \eta, \sigma(m_P(u^-))v(k)\rangle \leqslant C' \delta_{P_0\cap M}^{1/2}((m_{P_0'}(u^-))(1 + \|H_0(m_{P_0'}(u^-))\|)^{d'} .$$

Par ailleurs, par exponentiation de la première inégalité du Lemme II.3.4 de [20], on voit qu'il existe $C_1, C_1' > 0$ tels que :

$$\delta_P(m_P(u^-))^{\varepsilon} \leqslant C_1 e^{-C_1'(1+\underline{\sigma}(u^-))},\ u^- \in U^-.$$

Donc :

(6.6) Pour tout $d'' \in \mathbb{N}$, il existe $C'' > 0$ tel que

$$\delta_P(m_P(u^-))^{\varepsilon} \leqslant C''(1 + \underline{\sigma}(u^-))^{-d''}, u^- \in U^-.$$

Utilisant (6.5), (6.6) et le Lemme 6.3 (i), en y remplaçant P_0 par P_0' et U par U^-, on voit que pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\chi = \chi' \delta_P^{\varepsilon}, \chi' \in X(M)$, $u \in U^-$:

$$|\langle \eta, v_\chi(u^-)\rangle| \leqslant C \delta_{P_0\cap M}^{1/2}(m_{P_0'}(u^-))(1 + \|H_0(m_{P_0'}(u^-))\|)^{-d}.$$

On remarque que, d'une part :

$$\delta_{P_0'}(m_0) = \delta_{P_0\cap M}(m_0)\delta_P(m_0),\ m_0 \in M_0,$$

et d'autre part :

$$m_0(m_P(u^-)) = m_{P_0'}(u^-), \delta_P(m_P(u^-)) = \delta_P(m_{P_0'}(u^-)).$$

Donc

$$\delta_{P_0'}(m_{P_0'}(u^-)) = \delta_{P_0\cap M}(m_0(m_P(u^-))\delta_P(m_P(u^-)).$$

De l'inégalité précédente, de (6.4) et du Lemme 6.3 (ii), appliqué à P_0' au lieu de P_0 et U^- au lieu de U, on déduit (i).
Alors le second membre de l'égalité de (ii) définit un élément de $Wh(i_P^G\sigma)$. Celui-ci est égal à $\xi(P,\sigma,\eta)$ d'après (4.1). □

Proposition 6.5. — *(i) Si $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$ et $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G, on définit :*

$$f^P(m) = \delta_P^{1/2}(m)\int_U f(mu)du,\ m \in M,$$

l'intégrale étant absolument convergente.
(ii) On appelle f^P la transformée unipotente de f relativement à P. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Soit d comme dans le Lemme 6.3 (ii). Il existe une semi-norme continue, p, sur $\mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)^H$ telle que :

$$\|f^P(m)\| \leqslant p(f)\delta_{P_0\cap M}^{1/2}(m_0(m))(1+\|H_0(m_0(m))\|)^d, m \in M.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G,\psi)$. Soit d comme dans le Lemme 6.3 (ii). D'après (3.11), on a :

$$|f(mu)| \leqslant \nu_d(f)\delta_P^{1/2}(m)\delta_0^{1/2}(m_0(mu))(1+\|H_0(m_0(mu)\|)^{-d}, m\in M, u\in U.$$

Donc

$$f^P(m) \leqslant \nu_d(f)I(m),$$

où :

$$I(m) = \int_U \delta_P^{1/2}(m)\delta_0^{1/2}(m_0(mu))(1+\|H_0(m_0(mu)\|)^{-d}du.$$

On voit que $I(m)$ est invariante à droite par $K\cap M$, en changeant u en kuk^{-1} pour $k \in K\cap M$. Pour majorer $I(m)$, on peut donc se ramener à $m = u_1m_1$ avec $m_1 \in M_0$, $u_1 \in U_0$. On voit immédiatement qu'alors $m_0(mu) = m_0(m)m_0(u)$. Donc

$$\delta_P(m)\delta_0(m_0(mu)) = \delta_{P_0\cap M}(m_0(m))\delta_0(m_0(u)), u \in U. \tag{6.7}$$

On pose $X = H_0(m_0(m))$, $Y = H_0(m_0(u))$, $Z = H_0(m_0(mu))$. On a $Y = Z-X$. L'inégalite triangulaire implique $(1+\|Z\|)(1+\|X\|) \geqslant 1+\|Y\|$. On en déduit :

$$(1+\|H_0(m_0(mu))\|)^{-d} \leqslant (1+\|H_0(m_0(u))\|)^{-d}(1+\|H_0(m_0(m))\|)^d. \tag{6.8}$$

Tenant compte de (6.8), et de (6.7), on en déduit :

$$I(m) \leqslant \delta_{P_0\cap M}^{1/2}(m_0(m))(1+\|H_0(m_0(m))\|)^d \int_U \delta_0^{1/2}(m_0(u))(1+\|H_0(m_0(u))\|)^{-d}du.$$

L'intégrale, I, du membre de droite étant convergente d'après le Lemme 6.3, on a :

$$|f^P(m)| \leqslant I\nu_d(f)\delta_{P_0\cap M}^{1/2}(m_0(m))(1+\|H_0(m_0(m))\|)^d, m \in M.$$

Ceci achève de prouver le Lemme. □

On définit $f^{P,ind}$ par :

$$f^{P,ind}(g,m) = (\rho(g)f)^P(m),\ g \in G, m \in M. \tag{6.9}$$

Alors $f^{P,ind} \in i_P^G C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$.

Proposition 6.6. — *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, (σ, E) une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M. Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ tel que pour tout $g \in G$, $f^{P,ind}(g)$ est élément de $\mathcal{C}(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$. Alors :*

$$\hat{f}(P,\sigma)(g) = (f^{P,ind}(g))\hat{}(M,\sigma), g \in G,$$

égalité qu'on réécrit :

$$\hat{f}(P,\sigma) = (f^{P,ind}\hat{})(M,\sigma).$$

Démonstration. —
Soit $v \in i_{K\cap P}^K E$, $\eta \in Wh(\sigma)$ et $\phi \in C^\infty(X(M))$. Pour $\chi \in X(M)$, on note v_χ l'élément de $i_P^G E_\chi$ dont la restriction à K est égale à v. Soit

$$I := \int_{X(M)} (\hat{f}(P,\sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi)\phi(\chi)d\chi,$$

l'intégrale étant convergente d'après la Proposition 5.11 (i). On utilise la Proposition 5.10 (ii) et la Remarque 5.8 pour utiliser le Théorème de Fubini et en déduire :

$$I = (f, \int_{X(M)} E_P^G(\eta \otimes v_\chi)\phi(\chi)d\chi)_G, \tag{6.10}$$

c'est à dire :

$$I = \int_{U_0\backslash G} f(g) \int_{X(M)} \overline{\langle \xi(P,\sigma_\chi,\eta), i_P^G\sigma(g)v_\chi\rangle \phi(\chi)} d\chi dg.$$

On suppose maintenant que ϕ élément de l'espace $Pol(\mathcal{O})$ des fonctions polynomiales sur $\mathcal{O}$ et que f est à support compact modulo U_0. Soit $\varepsilon > 0$. On peut remplacer l'intégrale sur $X(M)$ par l'intégrale sur $X(M)^\varepsilon$, car

$\hat{f}(P,\sigma_\chi)$ est polynomiale (cf. la preuve de la Proposition 5 (i) de [9] qui s'adapte ici). D'après [9], (8.19), on a :

(6.11) Soit Ω un sous-ensemble compact modulo l'action à gauche de U_0. Il existe une fonction continue à support compact sur G telle pour tout $g \in \Omega$, $\int_{U_0} \tau(ug)dg = 1$.

Appliquant ceci au support de f et reprenant le calcul de I, on trouve :

$$I = \int_G f(g)\tau(g) \int_{X(M)^\varepsilon} \overline{\langle \xi(P,\sigma_\chi,\eta), i_P^G \sigma(g) v_\chi\rangle \phi(\chi)} d\chi dg.$$

D'après le Lemme 6.4, pour $\chi \in X(M)^\varepsilon$, on a :

$$\langle \xi(P,\sigma_\chi,\eta), i_P^G \sigma_\chi(g) v_\chi\rangle = \int_{U^-} \psi(u^-)^{-1} \langle \eta, v_\chi(u^- g)\rangle du^-, \tag{6.12}$$

où l'intégrale est absolument convergente et pour tout $g \in G$:

$$\int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U^-} |\psi(u^-)^{-1} \langle \eta, v_\chi(u^- g)\rangle| du^- < +\infty. \tag{6.13}$$

Donc :

$$I = \int_G \tau(g) f(g) \int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U^-} \overline{\psi(u^-)^{-1} \langle \eta, v_\chi(u^- g)\rangle \phi(\chi)} du^- d\chi dg.$$

L'application τf est une application continue sur G, à support compact. Ce support est donc contenu dans un nombre fini de H-classes a droite, où H est un sous-groupe compact ouvert de G fixant v. Il résulte de (6.13) que le Théorème de Fubini s'applique et l'intégrale sur $G \times X(M)^\varepsilon \times U^-$ est absolument convergente. Il en ira de même des intégrales suivantes car elles sont obtenues grâce au Théorème de Fubini ou par un changement de variable.

En utilisant l'égalité $f(u^- g) = \psi(u^-) f(g)$ et le fait que ψ est unitaire, on a :

$$I = \int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U^-} \int_G \tau(g) f(u^- g) \overline{\langle \eta, v_\chi(u^- g)\rangle \phi(\chi)} dg du^- d\chi.$$

On change g en $u^- g$ dans l'intégrale intérieure :

$$I = \int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U^-} \int_G \tau((u^-)^{-1} g) f(g) \overline{\langle \eta, v_\chi(g)\rangle \phi(\chi)} dg du^- d\chi.$$

Tenant compte de l'invariance à gauche par $U_0 \cap M$ de $f(g)\overline{\langle \eta, v_\chi(g)\rangle}$, on obtient :

$$I = \int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U^-} \int_{U_0 \cap M \backslash G} \int_{U_0 \cap M} \tau((u^-)^{-1} u_0 g) f(g) \overline{\langle \eta, v_\chi(g)\rangle \phi(\chi)} du_0 dg dh d\chi.$$

Transformant la succession des intégrales sur U^- et $U_0 \cap M$ en une intégrale sur U_0 et en utilisant les propriétés de τ (cf. (6.11)), on en déduit :

$$I = \int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U_0 \cap M \backslash G} f(g) \overline{\langle \eta, v_\chi(g) \rangle \phi(\chi)} dg d\chi.$$

Utilisant la formule intégrale (2.8) et tenant compte du fait que v_χ est invariante à gauche par U, il s'ensuit que I est égal à :

$$\int_{X(M)^\varepsilon} \int_{U \times (U_0 \cap M \backslash M) \times K} f(umk) \overline{\langle \eta, v_\chi(mk) \rangle \phi(\chi)}\ \delta_P^{-1}(m) du dm dk d\chi.$$

Mais on a :

$$\langle \eta, v_\chi(mk) \rangle = \delta_P^{1/2}(m) E_M^M(\sigma_\chi, \eta \otimes v_\chi(k))(m)$$

et

$$\int_U f(umk) du = \delta_P^{1/2}(m) [f^{P,ind}(k)](m).$$

Donc les fonctions modules disparaissent et l'on a, grâce à une utilisation du Théorème de Fubini, rendue possible par la convergence absolue des intégrales déjà mentionnée :

$$I = \int_{(U_0 \cap M \backslash M) \times K} [f^{P,ind}(k)](m) \int_{X(M)^\varepsilon} \overline{E_M^M(\sigma_\chi, v_\chi(k) \otimes \eta)(m) \phi(\chi)} d\chi dm dk.$$

Par holomorphie, on a :

$$\int_{X(M)^\varepsilon} E_M^M(\sigma_\chi, v(k) \otimes \eta)(m) \phi(\chi) d\chi = \int_{X(M)} E_M^M(\sigma_\chi, v(k) \otimes \eta)(m) \phi(\chi) d\chi.$$

D'après la Proposition 6.1, appliquée à M au lieu de G et P, le premier membre de cette égalité définit un élément de $\mathcal{C}(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$ qu'on note Φ_k. On a donc :

$$I = \int_{(U_0 \cap M \backslash M) \times K} [f^{P,ind}(k)](m) \overline{\Phi_k(m)} dm dk. \tag{6.14}$$

D'abord, f étant fixée, d'après (6.10) et la Remarque 5.8, l'application $\phi \to I$ est une forme linéaire continue sur $C^\infty(\mathcal{O})$. Par ailleurs, le second membre, J, de (6.14) est bien défini pour $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$, car pour tout $k \in K$, $f^{P,ind}(k) \in \mathcal{A}^w(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$ et $\Phi_k \in \mathcal{C}(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$. De plus l'application $\phi \mapsto \Phi_k$ est continue de $C^\infty(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{C}(U_0 \cap M \backslash M, \psi)$ d'après la Remarque 6.2. Donc l'application $\phi \mapsto J$ est une forme linéaire continue sur $C^\infty(\mathcal{O})$. Par densité, l'égalité (6.14) est vraie pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$. On fixe $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$. D'après (6.10) et la Remarque 5.8, l'application $f \mapsto I$ est continue sur $\mathcal{C}(U_0 \backslash G, \psi)$. De même l'application $f \mapsto J$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(U_0 \backslash G, \psi)$: cela résulte du fait que pour tout $k \in K$, $\Phi_k \in \mathcal{C}(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$ et de la Proposition 6.5 (ii). Donc, par densité (6.14) est vrai pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O})$ et pour tout $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$. Supposons que f vérifie l'hypothèse du Théorème. On peut alors, grâce à la Remarque 5.8, utilisée pour M au lieu de G, appliquer le Théorème de Fubini pour obtenir, pour tout $\phi \in C^\infty(X(M))$:

$$\int_{XM)} (\hat{f}(P,\sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi) d\chi \\ = \int_{X(M)\times U_0\cap M\backslash M \times K} [f^{P,ind}(k)](m)\overline{E_M^M(v_\chi(k)\otimes\eta)(m)\phi(\sigma)}dmdkd\chi.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\phi \in C^\infty(X(M))$, on en déduit en particulier l'égalité :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \eta\otimes v) = \int_{K\times U_0\cap M\backslash M} (f^{P,ind}(k)(m)\overline{E_M^M(\sigma_\chi, \eta\otimes v(k))(m)}dkdm,$$

où on note encore v l'élément de $i_P^G E$ dont la restriction à K est égale à v. D'après la définition de la transformée de Fourier-Whittaker pour M, on en déduit :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \eta\otimes v) = ((f^{P,ind}(M,\sigma)\hat{)}, \eta\otimes v).$$

Comme ceci est vrai pour tout $v \in i_P^G E$, on en déduit :

$$\hat{f}(P,\sigma) = (f^{P,ind}\hat{)}(M,\sigma).$$

Ceci achève la preuve de la Proposition. □

6.3. Assertion A et relations de Maass-Selberg

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $P' = MU'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M. On sait (cf. [20], V.1 (11)), que l'on a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

$$A(P', P, \sigma)^* = A(P, P', \sigma). \tag{6.15}$$

Nous démontrerons plus loin (cf. Théorème 6.15), l'assertion suivante dite Assertion A :

On a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$,

$$B(P, P', \sigma)^* = B(P', P, \sigma). \tag{6.16}$$

,

Proposition 6.7. — *Supposons l'assertion A vraie. Soit $P = MU$ (resp. $P' = M'U'$) un sous-groupe parabolique antistandard (resp. standard) de G. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M. Soit (σ, E) un élément G-régulier de $\mathcal{O}$. Soit $\phi \in Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$ et $s \in W(M'|G|M)$. Alors on a :*

$$\mu^G(\sigma)\|C(s, P', P, \sigma)\phi\|^2 = \mu^{M'}(s\sigma)\|\phi\|^2.$$

Démonstration. — On peut se limiter à prouver l'assertion pour $\phi = \eta \otimes v$, avec $\eta \in Wh(\sigma)$, $v \in i_P^G E$. Alors d'après la définition des fonctions C (cf. Proposition 4.4) :

$$\|C(s, P', P, \sigma)(\eta \otimes v)\|^2 = \|B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma)\eta\|^2 \|A(P_s, s.P, s\sigma)v\|^2.$$

D'après la formule d'adjonction pour les intégrales d'entrelacement (cf (6.15)) et l'assertion A qu'on suppose vraie, on a :

$$\|B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma)\eta\|^2 = x\|\eta\|^2, \ \ \|A(P_s, s.P, s\sigma)v\|^2 = y\|v\|^2,$$

où x et y sont les scalaires tels que :

$$B(s.P, \tilde{P}_s, s\sigma)B(\tilde{P}_s, s.P, s\sigma) = xId, \ \ A(s.P, P_s, s\sigma)A(P_s, s.P, s\sigma) = yId.$$

On a donc :

$$\|C(s, P', P, \sigma)\eta \otimes v\|^2 = xy\|\eta \otimes v\|^2.$$

On calcule xy à l'aide de (4.12) et de la définition des matrices B. On trouve, par un calcul analogue à celui de [20], fin de la preuve du Lemme V.2.2 :

$$xy = \mu^{M'}(s\sigma)\mu^G(s\sigma)^{-1}$$

puis, en utilisant (4.10) :

$$xy = \mu^{M'}(s\sigma)\mu^G(\sigma)^{-1}.$$

Le Lemme en résulte. □

Nous aurons besoin du Lemme suivant.

Lemme 6.8. — *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit f une fonction holomorphe sur l'intersection, U, d'un voisinage ouvert de 0 dans E et du complémentaire d'un nombre fini d'hyperplans, et à valeurs dans un espace vectoriel complexe de dimension finie. On la suppose en outre bornée sur U. On suppose qu'il existe une famille finie de fonctions affines sur E, $(l_i)_{i \in I}$, telle que le produit de f par le produit des l_i s'étende en une fonction holomorphe, g, au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$. Alors f s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans E.*

Démonstration. — On peut supposer que I a été choisi minimal et il faut montrer qu'il est alors vide. Raisonnons par l'absurde et supposons I non vide. Soit $i_0 \in I$. On note $f_0 := (\prod_{i\in I\setminus\{i_0\}} l_i)f$. Alors f_0 est holomorphe sur U et $l_{i_0}f_0$ s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de 0, à savoir g. D'après la minimalité de I, l_{i_0} s'annule en 0. Choisissons des coordonnées affines $(z_1,\dots,z_n)$ telles que l_{i_0} soit égale à la fonction z_1. On a :

$$f_0(z_1,\dots,z_n) = z_1^{-1}g(z_1,\dots,z_n).$$

Comme f_0 est bornée au voisinage de 0, on en déduit que g s'annule dans un voisinage de 0 sur l'hyperplan d'équation $z_1 = 0$ et f_0 s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de 0. Ceci contredit le fait que I est minimal. Ceci achève de prouver que I est vide. □

Proposition 6.9. — *Supposons l'assertion A vraie. On note encore $C(s,P',P,.)$ le prolongement rationnel de $C(s,P',P,.)$ (cf. Proposition 4.4) à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Avec les notations de la Proposition précédente, l'application $\sigma \mapsto \mu^G(\sigma)\mu^{M'}(s\sigma)^{-1}C(s,P',P,\sigma)$ est holomorphe au voisinage de $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — Soit (σ,E) objet de $\mathcal{O}$ et $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$. Grâce à (4.13), (4.12) et (4.17), on peut appliquer le Lemme précédent à la fonction définie sur le complémentaire d'un nombre fini d'hyperplans affines de $(\mathfrak{a}'_M)_{\mathbb{C}}$:

$$\lambda \mapsto \mu^G(\sigma\otimes\chi_\lambda)\mu^{M'}(s(\sigma\otimes\chi_\lambda))^{-1}C(s,P',P,\sigma\otimes\chi_\lambda)\phi(\sigma\otimes\chi_\lambda)$$

dont le carré de la norme est égal à $\mu^G(\sigma\otimes\chi_\lambda)\mu^{M'}(s(\sigma\otimes\chi_\lambda))$, d'après la Proposition 6.7. Mais cette fonction est régulière (cf. dans [20], ce qui suit l'équation V.2. (1)). La Proposition en résulte. □

Proposition 6.10. — *Soient $P = MU$, $P' = M'U'$ des sous-groupes paraboliques anti-standard de G tels que M et M' soient conjugués, $s \in W(M'|G|M)$et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de M. On pose, pour (σ,E) objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ et lorsque cela a un sens :*

$$C^0(s,P',P,\sigma) := B(s.P,P',s\sigma)^{-1}\otimes A(P',s.P,s\sigma)\lambda(s).$$

Tenant compte de l'égalité $Wh(s.P,s\sigma) = Wh(\sigma)$ (cf. (4.4)), on voit que lorsqu'il est défini, $C^0(s,P',P,\sigma)$ est élément de

$$Hom(Wh(\sigma)\otimes i_P^G E, Wh(s\sigma)\otimes i_{P'}^G sE).$$

Cela définit une fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Si l'assertion A est vraie, l'application $\sigma \mapsto C^0(s,P',P,\sigma)$ est holomorphe au voisinage de $\mathcal{O}$ et, pour tout σ objet de $\mathcal{O}$, $C^0(s,P',P,\sigma)$ est unitaire.

Démonstration. — D'après (4.9) et (4.16), on a :

$$B(s.P, P', s\sigma)^{-1} = j(s\sigma)^{-1} B(P', s.P, s\sigma).$$

De (6.15) et de l'assertion A, on déduit que $C^0(s, P', P, \sigma)^* C^0(s, P', P, \sigma)$ est égal à

$$[B(s.P, P', s\sigma)B(P', s.P, s\sigma)]^{-1} \otimes [\lambda(s^{-1})A(s.P, P', s\sigma)A(P', s.P, \sigma)\lambda(s)].$$

Utilisant (4.12) et son analogue pour B, on en déduit.

$$C^0(s, P', P, \sigma)^* C^0(s, P', P, \sigma) = Id,$$

ce qui prouve que, lorsqu'il est défini, $C^0(s, P', P)$ est unitaire. Pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, d'après (4.13), (4.12) et (4.17), on peut appliquer le Lemme 6.8 à la fonction définie sur le complémentaire d'un nombre fini d'hyperplans affines de $(a'_M)_\mathbb{C}$, $\lambda \mapsto C^0(s, P', P, \sigma_\chi)\phi(\sigma_\chi)$. Le Lemme en résulte. □

6.4. Transformation unipotente de paquets d'ondes

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M.

Soit $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$. On dit que que ϕ est très régulière si ϕ vérifie les propriétés suivantes :

(6.17) Pour tout sous-groupe parabolique standard, $P' = M'U'$, de G et $s \in W(M'|G|M)$, la fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_\mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \mu^G(\sigma)\mu^{M'}(s\sigma)^{-1}C(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma)$, est holomorphe sur un voisinage de $\mathcal{O}$.

(6.18) Pour tout sous-groupe parabolique antistandard $P = MU$, $P' = M'U'$, de G et $s \in W(M'|G|M)$, la fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_\mathbb{C}$, $C^0(s, P', P)\phi(\sigma)$ est holomorphe sur un voisinage de $\mathcal{O}$.

D'après les propriétés de rationalité (4.8), (4.16) :

(6.19) Il existe $p_\mathcal{O} \in Pol(\mathcal{O})$ non identiquement nul tel que pour tout $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, $p_\mathcal{O}\phi$ soit très régulière.

On note que si $g \in G$ et si ϕ est très régulière, $\rho_\bullet(g)\phi$ est très régulière d'après les propriètés d'entrelacement des fonctions C et C^0. On remarque que, d'après les Propositions 6.9 et et 6.10 :

(6.20) Si l'Assertion A est vraie, tout $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ est très régulière.

La preuve du Théorème suivant suit au plus près la preuve de la Proposition VI.4.1 de [20]. L'utilisation de fonctions polynomiales très régulières permet toutefois des déplacements de contour qui simplifient la preuve. Un simple argument de densité et continuité permet de passer aux fonctions C^∞.

Théorème 6.11. — *Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G, soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation, lisse irréductible et de carré intégrable de M, et $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$. Pour ϕ très régulière, on a :*
(i) Si le rang semi-simple de M' est inférieur ou égal à celui de M et si M' n'est pas conjugué à M, $f_\phi^{P',ind}$ est nul.
(ii) Supposons M et M' conjugués. Pour tout $m' \in M'$ et $g \in G$, on a :

$$(f_\phi^{P',ind}(g))(m') = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}} E_{M'}^{M'}[(C^0(s, P', P, \sigma)(\phi(\sigma))(g)](m') d\sigma.$$

(iii) De plus, si M et M' sont conjugués, $f_\phi^{P',ind}$ est à valeurs dans $\mathcal{C}(U_0 \backslash G, \psi)$.
(iv) Si l'assertion A est vraie, les mêmes conclusions sont valables pour tout $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$.

Démonstration. — Prouvons (i) et (ii). Soit $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, $g \in G$ et $m' \in M'$. On a :

$$\rho(g) f_\phi = f_{\rho_\bullet(g)\phi},$$
$$f_\phi^{P'}(m') = (\rho(m') f_\phi^{P'})(1) = \delta_{P'}^{-1/2}(m')(\rho(m') f_\phi)^{P'}(1)$$

et pour v' élément de l'espace de $i_{P'}^G s\sigma$:

$$((i_{P'}^G s\sigma)(m'))v')(1) = \delta_{P'}^{1/2}(m')(s\sigma(m'))(v'(1)).$$

On est donc ramené à calculer $f_\phi^{P'}(1)$ pour tout ϕ très régulière. On fixe un sous-groupe compact ouvert H comme dans (2.6) tel que ϕ est invariante par $\rho_\bullet(H)$.

Il existe une constante $C_H > 0$ telle que pour tout $\varphi \in C^\infty(H)$:

$$\int_H \varphi(g) dh = c_H \int_{H \cap U'^- \times H \cap M' \times H \cap U'} \varphi(u'^- m' u') du'^- dm' du', \tag{6.21}$$

où les mesures sont celles induites par les mesures de Haar sur G, U'^-, M', U'.

On fixe $a \in A_{M'}$ tel que $|\alpha(a)|_F < 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U'_n = a^{-n}(H \cap U')a^n$. Alors on a :

$$f_\phi^{P'}(1) = \int_{U'} f_\phi(u') du'.$$

Donc

$$\begin{aligned}(6.22)\qquad f_\phi^{P'}(1) &= lim_{n\to\infty}\int_{U'_n} f_\phi(u')du' \\ &= lim_{n\to\infty}\delta_{P'}(a)^{-n}\int_{H\cap U'} f_\phi(a^{-n}u'a^n)du'.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{H\cap U'} f_\phi(a^{-n}u'a^n)du' = \int_{H\cap U'}\int_{\mathcal{O}} E_P^G(\phi(\sigma))(a^{-n}u'a^n)d\sigma du'.$$

On remarque que :

$$E_P^G(\phi(\sigma))(a^{-n}u'a^n) = E_P^G((\rho_\bullet(u'a^n)\phi)(\sigma))(a^{-n}).$$

On pose alors :

$$\phi_n = \int_{H\cap U'} \rho_\bullet(u'a^n)\phi du' \in Pol(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G),$$

l'intégrale se réduisant à une somme finie, puisque ϕ est H-invariante. Alors :

$$(6.23)\qquad f_\phi^{P'}(1) = lim_{n\to\infty}\delta_{P'}(a)^{-n})\int_{\mathcal{O}} E_P^G(\phi_n(\sigma))(a^{-n})d\sigma.$$

Comme $a^{-n}(H\cap M')(H\cap U'^-)a^n \subset H$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}(6.24)\qquad \phi_n &= c\int_{H\cap U'\times H\cap M'\times H\cap U'^-} \rho_\bullet(u'm'u'^-a^n)\phi du'^- dm' du' \\ &= cc_H^{-1}\int_H \rho_\bullet(ha^n)\phi dh.\end{aligned}$$

où $c = vol(H\cap M')^{-1}vol(H\cap U'^-)^{-1}$. Donc $\phi_n \in Pol(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)^H$. D'après les propriétés du terme constant (cf. (3.7)), et en tenant compte de l'égalité $\delta_{P'^-} = \delta_{P'}^{-1}$, on peut choisir N assez grand pour que, pour tout $n \geqslant N$, on ait :

$$E_P^G(\phi_n(\sigma))(a^{-n}) = \delta_{P'}(a)^{n/2}E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}(a^{-n}).$$

et avec la notation (5.7) :

$$(6.25)\qquad E_P^G(\phi_n(\sigma))(a^{-n}) = \delta_{P'}(a)^{n/2}[E_P^G(\phi_n(\sigma))^w_{P'^-}(a^{-n}) + E_P^G(\phi_n(\sigma))^+_{P'^-}(a^{-n})].$$

En reportant dans les égalités (6.23) puis (6.22), on obtient :

$$(6.26)\qquad f_\phi^{P'}(1) = X^w + X^+,$$

où

$$(6.27)\qquad \begin{aligned} X^w &= lim_{n\to\infty}\delta_{P'}(a)^{n/2}\int_{\mathcal{O}}\mu(\sigma)[E_P^G(\phi_n(\sigma))^w_{P'-}(a^{-n})]d\sigma,\\ X^+ &= lim_{n\to\infty}\delta_{P'}(a)^{n/2}\int_{\mathcal{O}}\mu(\sigma)[E_P^G(\phi_n(\sigma))^+_{P'-}(a^{-n})]d\sigma,\end{aligned}$$

pour peu que ces limites existent.
Montrons :

(6.28) Il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\sigma \in \mathcal{O}$ on ait:
$[E_P^G(\phi_n(\sigma))^+_{P'-}(a^{-n})| \leqslant C\delta_{P'}(a)^{n/2}(1+\|H_0(a^n)\|)^d e^{-\varepsilon\ \|H_0(a^n)\|}$.

Par compacité de $\mathcal{O}$, il suffit de prouver que pour σ_0 objet de $\mathcal{O}$, on a une telle majoration pour σ dans un voisinage convenable de σ_0. Fixons $\sigma_0 \in \mathcal{O}$ et un ensemble fini $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$ tel que $\{\phi'(\sigma_0)|\phi' \in \mathcal{F}\}$ forme une base de $Wh(\sigma_0) \otimes (i_P^G E_{\sigma_0})^H$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de σ_0 dans $\mathcal{O}$ tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{U}$, $\{\phi'(\sigma)|\phi' \in \mathcal{F}\}$ forme une base de $Wh(\sigma) \otimes (i_P^G E_\sigma)^H$. Pour tout $\phi'' \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$ et tout $\sigma \in \mathcal{U}$, on peut donc écrire de façon unique :

$$\phi''(\sigma) = \sum_{\phi' \in \mathcal{F}} C(\phi', \phi'', \sigma)\phi'(\sigma).$$

Quitte à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\phi'' \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)^H$ et tout $\sigma \in \mathcal{U}$, on ait :

$$\sum_{\phi' \in \mathcal{F}} |C(\phi', \phi'', \sigma)| \leqslant C_1 Sup\{|(\phi'(\sigma), \phi''(\sigma))||\phi' \in \mathcal{F}\}.$$

D'après le Lemme 5.9, il existe $C_2 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout σ objet de $\mathcal{O}$ et $\phi' \in \mathcal{F}$:

$$|(E_P^G(\phi'(\sigma)))^+_{P'}(a^{-n})| \leqslant C_2 e^{-\varepsilon n\|H_0(a)\|}.$$

Donc

$$(6.29)\quad |(E_P^G\phi_n(\sigma))^+_P(a^{-n})| \leqslant C_1C_2 Sup\{(\phi'(\sigma), \phi(\sigma))|\phi' \in \mathcal{F}\}e^{-\varepsilon n\|H_0(a)\|}.$$

Fixons $\phi' \in \mathcal{F}$. Pour $(\sigma, E) \in \mathcal{U}$, on a :

$$(\phi'(\sigma), \phi_n(\sigma)) = \int_{H\cap U}(\phi'(\sigma), \rho(ua^n)\phi(\sigma))du.$$

Comme ϕ' est invariante à droite par H et le produit scalaire sur $Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$ étant G-invariant, on a donc :

$$(\phi'(\sigma), \phi_n(\sigma)) = vol(H \cap U)(\phi'(\sigma), \rho(a^n)\phi(\sigma)).$$

De la définition de ce produit scalaire sur $Wh(\sigma)\otimes i_P^G E$ résulte l'existence de $\phi'_1 \in C^\infty(\mathcal{O}, \check{i}_P^G \otimes i_P^G)$ telle que, pour tout σ objet de $\mathcal{O}$, l'application $g \mapsto (\phi'(\sigma), \rho(g)\phi(\sigma))$ soit de la forme $g \mapsto E_P^G(\phi'_1(\sigma))(g)$, où E_P^G est l'application coefficient de [20] section V.1. Donc, d'après [20], Lemmes VI.2.2, II.1.1 et Équation I. 1(6), il existe $C_3 > 0$ tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$:

$$|(\phi'(\sigma), \phi_n(\sigma))| \leqslant C_3 \delta_0(a^{n/2})(1 + n\|H_0(a)\|)^d.$$

Joint à (6.29), cela prouve (6.28). Joint à (6.27) et au choix de a, on en déduit que $X^+ = 0$.

En utilisant successivement (3.8), l'égalité $\delta_{P'^-} = \delta_{P'}^{-1}$ et la définition de U'_n pour effectuer un changement de variable, on établit les égalités :

$$\begin{aligned} E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}(a^{-n}) &= \delta_{P'}^{1/2}(a^{-n}) \int_{H\cap U'} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{ind}(a^{-n}u'a^n)](1)du' \\ &= \delta_{P'}^{1/2}(a^{n}) \int_{U'_n} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{ind}(u')](1)du'. \end{aligned}$$

En tenant compte de (6.23) et (6.25), on en déduit :

$$X^w = lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{O}} \int_{U'_n} \mu(\sigma)[E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{ind}(u')](1)du'd\sigma.$$

Si le rang semi-simple de M' est inférieur ou égal à celui de M' et si M et M' ne sont pas conjugués, on voit que $X^w = 0$ grâce à la Proposition 4.4, car alors $W(M'|G|M)$ est vide. Ceci achève de prouver (i).

Prouvons (ii).

Suposons M et M' conjugués. On va utiliser la Proposition 4.4 pour donner une expression de $E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{ind}$. Comme M et M' sont conjugués, pour tout $s \in W(M'|G|M)$, $M' \cap s.P = M'$. Dans notre utilisation de la Proposition 4.4, P' est ici remplacé par P'^- et P_s est ici égal à P'^-, $\tilde{P}_s$ est ici égal à P'. On a alors, grâce à la Proposition 4.4 et (4.30) :

$$X^w = lim_{n\to\infty} X_n^w$$

où

$$X_n^w = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}} \int_{U'_n} \mu(\sigma)[E_{M'}^{M'}(C(s, P'^-, P, \sigma)\phi(\sigma)(u'))](1)d\sigma du'$$

et on veut passer à la limite sur n. Mais un déplacement de contour d'intégration est nécessaire. Si χ est un caractère non ramifié de M, on note $\mathcal{O}\chi$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations σ_χ lorsque σ décrit les objets de $\mathcal{O}$. On munit $\mathcal{O}\chi$ de la mesure obtenue par transport de structure de la mesure sur $\mathcal{O}$. Posons :

$$(6.30) \qquad \phi_s(\sigma) := \mu(\sigma)C(s, P'^-, P, \sigma)\phi(\sigma) \in Wh(P', s\sigma) \otimes i_{P'^-}^G(sE).$$

Comme ϕ est très régulière, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $s \in W(M'|G|M)$ ϕ_s, est holomorphe sur $\{\sigma \otimes \chi | \|Re\, \chi\| < \varepsilon_1 \|Re\, \delta_P\|\}$. On choisit $\varepsilon > 0$ strictement plus petit que ε_1. On pose

$$\Lambda_{s,\varepsilon} := s^{-1}\delta_{P'}^{-\varepsilon}. \tag{6.31}$$

Pour des raisons d'holomorphie,, on a :

$$X_n^w = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon}} \int_{U'_n} [E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma)(u'))](1) d\sigma du'. \tag{6.32}$$

On veut passer à la limite sur n dans cette expression. Il faut majorer $[E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma)(u'))](1)$.

Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$. Soit $v_s \in i_{P'^-}^G(sE)_{s\Lambda_{s,\varepsilon}}$, $\eta_s \in Wh(P', s\sigma)$. On remarque que $Wh(P', s\sigma)$ est égal à $Wh(s\sigma)$, puisque P' est anti-standard. Alors, il résulte de la définition que :

$$[E_{M'}^{M'}(v_s \otimes \eta_s)(g)](1) = \langle \eta_s, v_s(g) \rangle.$$

On écrit :

$$u' = u^{'-}(u')m'(u')k(u'),\ u'^-(u') \in U'^-,\ m'(u') \in M', k(u') \in K,$$

de sorte que $m'(u') = m_{P'^-}(u')$, etc.. Tenant compte des propriétés de covariance de v_s, on voit que :

$$\langle \eta_s, v_s(u') \rangle = (s\Lambda_{s,\varepsilon})(m'(u'))\delta_{P'}^{-1/2}(m'(u'))\langle \eta_s, s\sigma(m'(u'))v_s(k(u')) \rangle$$

et, tenant compte de la définition de $\Lambda_{s,\varepsilon}$, on obtient :

$$\langle \eta_s, v_s(u') \rangle = \delta_{P'}^{-1/2-\varepsilon}(m'(u'))\langle \eta_s, s\sigma(m'(u'))v_s(k(u')) \rangle.$$

Tenant compte du fait que la restriction de v_s à K ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on déduit de (6.6), du Lemme 6.3 (i) et de la tempérance de η_s (cf. Proposition 3.2), que pour tout $d \in N$, il existe $C > 0$ tel que :

$$|\langle \eta_s, v_s(u') \rangle| \leqslant C\delta_{P'}^{-1/2}(m'(u'))\delta_{P_0 \cap M}^{1/2}(m_0(m'(u'))(1 + \|H_0(m_0(m'(u'))\|)^{-d}$$

où C est une constante qui ne dépend que de la restriction de v_s à K et de η_s mais pas de $\sigma \in \mathcal{O}$. Comme P' est anti-standard, on a l'égalité :

$$\delta_{P'}^{-1}(m'(u'))\delta_{P_0 \cap M}(m_0(m'(u')) = \delta_{P_0}(m_0(m'(u')).$$

Donc, on a :

$$|\langle \eta_s, v_s(u') \rangle| \leqslant C\delta_{P_0}^{1/2}(m_0(m'(u')))(1 + \|H_0(m_0(m'(u'))\|)^{-d}.$$

On en déduit que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe $C' > 0$ tel que pour tout $s \in W(M'|G|M)$ et σ objet de $\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon}$:

$$|E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma))(u')](1)| \leqslant C'\delta_{P_0}(m'(u'))(1 + \|H_0(m_0(m'(u'))\|)^{-d}, u' \in U'.$$

Comme le second membre de cette inégalité est une fonction intégrable sur $\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon} \times U'$, pour d bien choisi, d'après le Lemme 6.3. On peut appliquer le Théorème de convergence dominée et déduire de (6.32) :

$$X^w = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon}} \int_{U'} \mu(\sigma)[E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma)(u'))](1) d\sigma du',$$

la fonction sous le signe intégrale étant intégrable pour la mesure produit. On peut appliquer le théorème de Fubini et commencer par calculer l'intégrale sur U'. Soit σ objet de $\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon}$. Si v est invariante par un sous-groupe compact ouvert de G, H, on a :

$$\langle \eta, (A(P', P'^-, s\sigma)v)(1)\rangle = \langle e_{M'\cap H}\eta, (A(P', P'^-, s\sigma)v)(1)\rangle.$$

Donc, d'après la définition des intégrales d'entrelacement, notamment la dernière assertion de (4.7), on a :

$$\langle \eta, (A(P', P'^-, s\sigma)v)(1) >= \int_{U'} \langle e_{M'\cap H}\eta, v(u')\rangle du'.$$

Comme $v(u')$ est $M' \cap H$-invariante, on obtient finalement :

$$\langle \eta, (A(P', P'^-, s\sigma)v)(1) >= \int_{U'} \langle \eta, v(u')\rangle du'.$$

De cette dernière égalité et de (6.30), on en déduit :

$$\begin{aligned}&\int_{U'} [E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma))(u')](1) du' \\ &\qquad = E_{M'}^{M'}[((Id_{Wh(P',s\sigma)} \otimes A(P', P'^-, s\sigma))C(s, P'^-, P, \sigma)\phi(\sigma))(1)](1).\end{aligned}$$

Tenant compte de la définition des fonctions C (cf. Proposition 4.4) et de (4.12), on voit, grâce à (6.26), que $f_\phi^{P'}(1)$ est égal à la somme sur $s \in W(M'|G|M)$ de :

$$\int_{O\Lambda_{s,\varepsilon}} \mu(\sigma) j(P', P'^-, s.P, s\sigma) E_{M'}^{M'}[((B(P', s.P, s\sigma, s\chi) \otimes (A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s))\phi(\sigma))(1)](1) d\sigma.$$

Montrons, avec les notations de la Proposition 6.10 :

$$\begin{aligned}(6.33)\ \mu(\sigma) j(P', P'^-, s.P, s\sigma)[((B(P', s.P, s\sigma, s\chi) \otimes (A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s)) \\ = C^0(s, P', P, \sigma).\end{aligned}$$

Comme $C^0(s, P', P, \sigma) = B(s.P, P's\sigma)^{-1} \otimes A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s)$, il faut donc montrer

$$\mu(\sigma) j(P', P'^-, s.P, s\sigma) B(P', s.P, s\sigma, s\chi) = B(s.P, P', s\sigma)^{-1}.$$

Mais

$$B(P', s.P, s\sigma) B(s.P, P', s\sigma) = j(P', s.P, P', s\sigma).$$

Donc

$$\mu(\sigma)j(P', P'^{-}, s.P, s\sigma)B(P', s.P, s\sigma, s\chi)$$

est égal à :

$$\mu(\sigma)j(P', P'^{-}, s.P, s\sigma)j(P', s.P, P')B(s.P, P', s\sigma)^{-1}.$$

On déduit de (4.12), $j(P', P'^{-}, s.P, s\sigma)j(P', s.P, P') = j(s\sigma)$. Mais, cf. [20], IV. 3(3) $\mu(\sigma) = \mu(s\sigma) = j(s\sigma)^{-1}$. Cela prouve (6.33).
En choisissant ε suffisamment petit, comme ϕ est très régulière, on peut, pour des raisons d'holomorphie, remplacer l'intégrale sur $\mathcal{O}\Lambda_{s,\varepsilon}$ par l'intégrale sur $\mathcal{O}$. Ceci achève la preuve de (ii).
Alors (iii) résulte de (i) et (ii) et de la Proposition 6.1 appliquée à M au lieu de G et P.
(iv) Si l'Assertion A est vraie, le résultat est aussi valable pour ϕ polynomiale, d'après (6.20). D'après les Propositions 6.1 et 6.5 (ii), l'application, $\phi \to f_\phi^P(1)$ est une forme linéaire continue sur $C^\infty(\mathcal{O}, Wh\otimes i_P^G)$. Son évaluation en ϕ est égale au premier membre de l'égalité de (ii) pour $g = m' = 1$. Mais, si l'Assertion A est vraie, le deuxième membre, pour $g = m' = 1$, est également une forme linéaire continue sur ce même espace d'après la Proposition 6.1. La densité de $Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ dans $C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ et (i) et (ii) impliquent l'analogue de (i) et (ii) pour $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$.
Utilisant la Proposition 6.1 appliquée à M au lieu de G et P, on déduit l'analogue de (iii). □

6.5. Transformée de Fourier de paquets d'ondes

Théorème 6.12. — *Soient $P = MU, P = M'U'$ des sous-groupes paraboliques anti-standard de G. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M. Soit $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ très régulière ou, si l'Assertion A est vraie, $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$. Soit (σ_1, E_1) une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M'. Si M et M' sont conjugués, on a :*

$$\hat{f}_\phi(g)(P', \sigma_1) = \sum_{s \in W(M'|G|M), s^{-1}\sigma_1 \in \mathcal{O}} C^0(P', P, s, s^{-1}\sigma_1)\phi(s^{-1}\sigma_1).$$

Démonstration. — La preuve est entièrement analogue à celle du Thèorème 5 de [9], en y remplaçant $\tilde{(}C(s, P', P, s\sigma)\phi)(s\sigma)$ par $C^0(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma)$. □

6.6. Produit scalaire de paquets d'ondes

Proposition 6.13. — *Soit $P = MU, P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G. Soit $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}_1$) l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse, irréductible et de carré intégrable de M (resp. M'). Soit $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Whi_P^G)$, $\phi_1 \in Pol(\mathcal{O}_1, Wh \otimes i_{P'}^G)$ très régulières (resp. $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, i_P^G), \phi_1 \in C^\infty(\mathcal{O}_1, Wh \otimes i_{P'}^G)$ si l'Assertion A est vraie).*
(i) Si M et M' ne sont pas conjugués dans G, $(f_\phi, f_{\phi_1})_G$ est nul.

(ii) Si M et M' sont conjugués dans G, $(f_\phi, f_{\phi_1})_G$ est égal à :

$$\int_{\mathcal{O}_1} \sum_{s \in W(M'|G|M), s\mathcal{O}=\mathcal{O}_1} \mu(\sigma_1)(C^0(s, P', P, s^{-1}\sigma_1)\phi(s^{-1}\sigma_1), \phi_1(\sigma_1))d\sigma_1.$$

Démonstration. — La démonstration est semblable à celle de [20], Proposition VII.2.2. Nous la donnons pour la commodité du lecteur.

On a l'égalité

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{U_0\backslash G} f_\phi(g) \int_{\mathcal{O}_1} \overline{\mu(\sigma_1)(E_{P'}^G(\phi_1(\sigma_1))(g)} d\sigma_1 dg.$$

Comme $\mathcal{O}_1$ est compact et comme $f_\phi \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, on déduit du Lemme 5.7 et (3.15) que l'intégrale double est absolument convergente et l'on obtient :

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{\mathcal{O}_1} \mu(\sigma_1)(f_\phi, E_{P'}^G(\phi_1(\sigma_1)))_G d\sigma_1$$

et d'après la définition de $\hat{f}$:

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{\mathcal{O}_1} \mu(\sigma_1)(\hat{f}_\phi(P', \sigma_1), \phi_1(\sigma_1))d\sigma_1.$$

Supposons le rang semi-simple de M' inférieur ou égal à celui de M. En utilisant la Proposition 6.6 et le Théorème 6.11 (i), on voit que $(f_\phi, f_{\phi_1})_G = 0$ si M n'est pas conjugué à M'. Si le rang semi-simple de M' est strictement plus grand que celui de M, il suffit d'appliquer la relation $(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \overline{(f_{\phi_1}, f_\phi)_G}$, pour achever la preuve de (i).

Supposons maintenant M et M' conjugués dans G. Le Théorème 6.12 calcule $\hat{f}_\phi(P', \sigma_1)$, ce qui conduit à (ii). □

Corollaire 6.14. — *Avec les notations de la Proposition précédente, en supposant l'assertion A vraie, si M et M' ne sont pas conjugués, $\hat{f}_\phi(P',)$ est nul pour $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, i_P^G)$.*

Démonstration. — Pour tout ϕ_1 comme ci-dessus, on a $(f_\phi, f_{\phi_1})_G = 0$. Soit encore, d'après la Proposition 5.10 :

$$\int_{\mathcal{O}_1} (\hat{f}_\phi(P', \sigma_1), \phi_1(\sigma_1))\mu(\sigma_1)d\sigma_1 = 0.$$

Comme cela est vrai pour tout $\phi_1 \in C^\infty(\mathcal{O}_1, Wh \otimes i_{P'}^G)$, on en déduit la nullité voulue. □

6.7. Adjoint de la matrice : preuve de l'assertion A

Théorème 6.15. — *Soit P, Q des sous-groupes paraboliques semi-standard de G possédant le même sous-groupe de Lévi semi-standard, M. On suppose P anti-standard. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et de carré intégrable de M. On a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:*

$$B(P, Q, \sigma)^* = B(Q, P, \sigma)$$

Démonstration. — Soit P' le sous-groupe parabolique anti-standard de G auquel Q est conjugué et $\mathcal{O}_1$ une orbite inertielle de M' conjuguée de $\mathcal{O}$ par un élément de $W(M'|G|M)$. Soit $\phi \in Pol(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$, $\phi_1 \in Pol(\mathcal{O}_1, Wh \otimes i_{P'}^G)$ très régulières. Alors, d'après la Proposition précédente :

$$(6.34) \quad (f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{\mathcal{O}_1} \sum_{s \in W(M'|G|M), s\mathcal{O} = \mathcal{O}_1} \mu(\sigma_1)(C^0(s, P', P, s^{-1}\sigma_1)\phi(s^{-1}\sigma_1), \phi_1(\sigma_1))d\sigma_1.$$

Puis en utilisant $(f_\phi, f_{\phi'})_G = \overline{(f_{\phi'}, f_\phi)_G}$, on a :

$$(6.35) \quad (f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{\mathcal{O}} \sum_{t \in W(M|G|M'), t^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}_1} \mu(\sigma)(\phi(\sigma), C^0(t, P, P', t^{-1}\sigma)\phi_1(t^{-1}\sigma))d\sigma.$$

On pose $\sigma = s^{-1}\sigma_1$ dans (6.34). Comme $\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1)$ d'après [20] IV.3 (3), on a :

$$(6.36) \quad (f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{\mathcal{O}} \sum_{s \in W(M'|G|M), s\mathcal{O} = \mathcal{O}_1} \mu(\sigma)(C^0(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma), \phi_1(s\sigma))d\sigma.$$

A $s \in W(M'|G|M)$ correspond un unique élément t de $W(M|G|M')$ tel que $ts = m \in M_0 \cap K$. Si ϕ est très régulière, il en va de même de $p\phi$ pour tout $p \in Pol(\mathcal{O})$. Par ailleurs si $F \in C^\infty(\mathcal{O})$ est tel que :

$$\int_{\mathcal{O}} p(\sigma)F(\sigma)d\sigma = 0, p \in Pol(\mathcal{O}),$$

alors $F = 0$.
Donc, pour tout σ objet de $\mathcal{O}$, les expressions sous le signe intégrale dans les membres de droite des égalités (6.35) et (6.36) sont égales.
Soit $\mathcal{O}'$ l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{O}$ tels que, avec les notations de (6.19), $p_{\mathcal{O}}(\sigma)$ soit non nul et tels que si $w \in W(M, \mathcal{O})$, $w\sigma$ ne soit équivalente à σ que si $w = 1$. On remarque que $\mathcal{O}'$ est dense dans $\mathcal{O}$.
Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}'$, $s \in W(M'|G|M)$ et t comme ci-dessus. D'après (6.19) on peut choisir ϕ_1 très régulière tel que $\phi_1(s\sigma)$ soit non nul et arbitraire dans $i_P^G(tE_1)$ et tel que $\phi_1(s'\sigma) = 0$ si $s' \in W(M'|G|M)$ est distinct de s. De même $\phi(\sigma)$ peut être choisi arbitrairement. Alors, tous les termes sous le signe intégrale de (6.35) (resp.(6.36)) sont nuls excepté celui correspondant à s (resp. t). On en déduit :

$$(C^0(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma), \phi_1(s\sigma)) = (\phi(\sigma), C^0(t, P, P', t^{-1}\sigma)\phi_1(t^{-1}\sigma)). \tag{6.37}$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions scalaires sur $\mathcal{O}$. Comme $m\sigma$ est équivalente à σ, on ne change pas le deuxième membre en remplacant σ par $m\sigma$. Comme on a $s = t^{-1}m$, on a donc :

$$(\phi(\sigma), C^0(t, P, P', t^{-1}\sigma)\phi_1(t^{-1}\sigma)) = (\phi(m\sigma), C^0(t, P, P', s\sigma)\phi_1(s\sigma)).$$

Mais ϕ est une fonction sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $Wh \otimes i_P^G$. L'opérateur $\sigma(m)$ entrelace σ et $m\sigma$ et le transposé de $\sigma(m)$, $\sigma'(m^{-1})$, induit une bijection de $Wh(\sigma)$ sur $Wh(m\sigma)$, Donc

$$\phi(m\sigma) = T\phi(\sigma),$$

où $T = \sigma'(m^{-1}) \otimes \lambda(m)$, dont l'adjoint est égal à $\sigma'(m) \otimes \lambda(m^{-1})$. Donc :

$$\begin{aligned}(\phi(\sigma), &C^0(t, P, P', t^{-1}\sigma)\phi_1(t^{-1}\sigma)) \\ &= (\phi(\sigma), (\sigma'(m) \otimes \lambda(m^{-1}))C^0(t, P, P', s\sigma)\phi_1(s\sigma)).\end{aligned}$$

Joint à l'égalité (6.37), on en déduit :

$$C^0(s, P', P, \sigma)^* = (\sigma'(m) \otimes \lambda(m^{-1}))C^0(t, P, P', s\sigma), \tag{6.38}$$

où $*$ désigne l'adjoint. D'après la définition des fonctions C^0 (cf. Proposition 6.10) et l'égalité $ts = m$, on a :

$$C^0(s, P', P, \sigma) = B(s.P, P', s\sigma)^{-1} \otimes A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s)$$

$$C^0(t.P, P', s\sigma) = B(t.P', P, m\sigma)^{-1} \otimes A(P, t.P', m\sigma)\lambda(t).$$

On a, par conjugaison par m et en tenant compte de l'égalité $m^{-1}t = s^{-1}$

$$\lambda(m^{-1})A(P, t.P', m\sigma)\lambda(t) = A(P, t.P', \sigma)\lambda(s^{-1}).$$

Par ailleurs (cf. (6.15) :

$$(A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s))^* = \lambda(s^{-1})A(s.P, P', s\sigma)$$

puis par conjugaison par s^{-1} :

$$(A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s))^* = A(P, t.P, \sigma)\lambda(s^{-1}).$$

Alors les égalités précédentes jointes à l'égalité (6.38), montrent, après que l'on ait pris les inverses :

$$B(s.P, P', s\sigma)^* = B(t.P', P, m\sigma)\sigma'(m^{-1}) \tag{6.39}$$

Par conjugaison par m, on a :

$$B(t.P', P, m\sigma)\sigma'(m^{-1}) = \sigma'(m^{-1})B(t.P, P, \sigma)$$

Mais d'après l'analogue de [9], (7.20), dont la preuve, par transport de structure, est identique et où $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ sont triviaux car P et P' sont standard, on a :

$$\sigma'(m^{-1})B(t.P, P, \sigma) = B(P', s.P, s\sigma)$$

Joignant les deux égalités précédentes à (6.39), on obtient :

$$B(s.P, P', s\sigma)^* = B(P', s.P, s\sigma)$$

Échangeant le rôle de P et P', on en déduit le Théorème. □

7. Formule de Plancherel

7.1. Équation fonctionnelle pour les intégrales de Jacquet

Soit Θ l'ensemble des couples $(P, \mathcal{O})$ où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse irréductible et de carré intégrable de M.

Proposition 7.1. — *Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G tels que M et M' soient conjugués et $s \in W(M'|G|M)$. Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ et $\phi \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$. On a l'égalité de fonctions sur $\mathcal{O}$:*

$$E_{P'}^G(C^0(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma)) = E_P^G(\phi(\sigma)).$$

Démonstration. — Soit $\eta' \in Wh(s\sigma)$. D'après la définition des matrices B, on a l'égalité de fonctions sur $\mathcal{O}$:

$$\xi(s.P, s\sigma, B(s.P, P', s\sigma)\eta') = \xi(P', s\sigma, \eta') \circ A(P', s.P, s\sigma).$$

Mais d'après (4.4), on a $Wh(s.P, s\sigma) = Wh(\sigma)$ et l'égalité :

$$\xi(s.P, s\sigma, B(s.P, P', s\sigma)\eta') = \xi(P, \sigma, B(s.P, P', s\sigma)\eta')\lambda(s^{-1}).$$

Donc on a :

$$\xi(P, \sigma, B(s.P, P', s\sigma)\eta') = \xi(P', s\sigma, \eta') \circ A(P', s.P, s\sigma) \circ \lambda(s). \tag{7.1}$$

Posant

$$\eta = B(s.P, P', s\sigma)\eta' \in Wh(s.P, s\sigma) = Wh(\sigma),$$

on a, lorsque $B(s.P, P', s\sigma)^{-1}$ est défini :

$$\xi(P, \sigma, \eta) = \xi(P', s\sigma, B(s.P, P', s\sigma)^{-1}\eta)A(P', s.P, s\sigma) \circ \lambda(s).$$

Utilisant la définition des intégrales de Jacquet et la définition de $C^0(s, P', P, \sigma)$, on en déduit la Proposition. □

Remarque 7.2. — Notons $A(s, P', P, \sigma) := A(P', s.P, s\sigma)\lambda(s)$ l'opérateur d'entrelacement entre $i_P^G\sigma$ et $i_{P'}^G s\sigma$, lorqu'il est défini. Comme dans la définition des matrices B, on voit qu'il existe une unique application linéaire, notée $B(s^{-1}, P, P', \sigma)$, entre $Wh(s\sigma)$ et $Wh(\sigma)$ telle que :

$$\xi(P, \sigma, B(s^{-1}, P, P', s\sigma)\eta') = \xi(P', s\sigma, \eta') \circ A(s, P', P, \sigma), \eta' \in Wh(s\sigma).$$

On déduit de (7.1), l'égalité :

$$B(s.P, P', s\sigma) = B(s^{-1}, P, P', s\sigma).$$

Cela permet une définition des fonctions C^0 sans avoir recours, pour les intégrales de Jacquet, à des sous-groupes paraboliques autres qu'anti-standard.

7.2. Équation fonctionnelle pour la Transformée de Fourier-Whittaker

Proposition 7.3. — *Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$.*
(i) L' ensemble des couples $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ tels que que $\hat{f}_{P,\mathcal{O}}$ soit non nul est fini.
(ii) Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques antistandard de G et $s \in W(M'|G|M)$ tels que M et M' soient conjugués. Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$. On a l'égalité, pour tout (σ, E) objet de $\mathcal{O}$:

$$\hat{f}(P', s\sigma) = C^0(s, P', P, \sigma)\hat{f}(P, \sigma).$$

Démonstration. — (i) Soit H un sous-groupe compact ouvert de G fixant f. (i) résulte du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ tels que pour un objet de $\mathcal{O}$, (σ, E), l'espace $i_P^G E$ contienne un vecteur non nul invariant par H (cf [20], Théorème VIII.1.2).
(ii) Soit $\phi \in Wh(\sigma) \otimes i_P^G E$. On a par définition de $\hat{f}$:

$$(\hat{f}(P,\sigma), \phi) = \int_{U_0 \backslash G} f(g) \overline{E_P^G(\phi)(g)} dg.$$

Tenant compte de la Proposition 7.1, on en déduit :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \phi) = \int_{U_0 \backslash G} f(g) \overline{E_{P'}^G(C^0(s, P', P, \sigma)\phi)(g)} dg.$$

De la définition de $\hat{f}$, on en déduit :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \phi) = (\hat{f}(P', s\sigma), (C^0(s, P', P, \sigma)\phi).$$

Mais, l'Assertion A tant maintenant démontrée, l'adjoint de $(C^0(s, P', P, \sigma)$ est égal à $(C^0(s, P', P, \sigma)^{-1}$, daprès la Proposition 6.10. Donc :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \phi) = ((C^0(s, P', P, \sigma)^{-1} \hat{f}(P', s\sigma), \phi).$$

Comme cela est vrai pour tout ϕ, on en déduit l'égalité voulue. □

7.3. Espace $\mathcal{S}^{inv}$ et applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{W}$

On définit :

$$\mathcal{S} = \oplus_{(P,\mathcal{O}) \in \Theta} C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G).$$

Si $P = MU$ est un sous groupe parabolique anti-standard de G, on note $p(P)$ le nombre de sous-groupes paraboliques anti-standard dont le Lévi standard est conjugué à M. Si I est un ensemble fini, on note $|I|$ son cardinal. On définit :

$$c(P) := p(P)|W(M|G|M)|. \tag{7.2}$$

On munit $\mathcal{S}$ du produit scalaire qui fait de cette somme une somme directe orthogonale et qui, pour tout $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, $\phi, \phi' \in C^\infty(\mathcal{O}, Wh \otimes i_P^G)$ vérifie :

$$(\phi, \phi') = c(P)^{-1} \int_{\mathcal{O}} \mu(\sigma)(\phi(\sigma), \phi(\sigma'))d\sigma. \tag{7.3}$$

On note $\mathcal{S}^{inv}$ l'ensemble des éléments $(\phi_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O}) \in \Theta}$ tels que, si $(P = MU, \mathcal{O}) \in \Theta$, $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G tel que M et M' soient conjugués et $s \in W(M'|G|M)$, on a :

$$\phi_{P', s\mathcal{O}}(s\sigma) = C^0(s, P', P, \sigma)\phi_{P,\mathcal{O}}(\sigma),$$

pour tout σ objet de $\mathcal{O}$.
Pour $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, on note $\mathcal{F}f$, la famille $(\hat{f}_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta}$. D'après les Propositions 5.11 et 7.3, c'est un élément de $\mathcal{S}^{inv}$.
Tenant compte de la Proposition 6.1, on note $\mathcal{W}$, l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ qui à $(\phi_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta}$ associe $\sum_{(P,\mathcal{O})\in\Theta} c(P)^{-1} f_{\phi_{P,\mathcal{O}}}$, la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.

7.4. Injectivité de $\mathcal{F}$

Soit (π, V) une représentation admissible lisse de G, $\xi \in Wh(\pi)$. On suppose que π est tempérée de sorte que ξ est également tempérée. Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$. On note f^* la fonction sur G définie par $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ pour $g \in G$. On définit $\pi'(f^*)\xi \in \check{V}$, par :

$$\langle \pi'(f^*)\xi, v\rangle = \int_{G/U_0} f^*(g)\langle \pi'(g)\xi, v\rangle dg. \tag{7.4}$$

l'intégrale étant convergente puisque ξ est tempérée. La représentation régulière droite de G dans $L^2(U_0\backslash G, \psi)$ se décompose en une intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de G, $(\int_Z^{\oplus} \pi_z d\mu(z), \int_Z^{\oplus} H_z d\mu(z))$. On note, pour $z \in Z$, $(\pi_z^\infty, H_z^\infty)$ la représentation lisse de G, π_z^∞, dans l'espace H_z^∞, des vecteurs lisses de H_z, i.e. fixés par un sous-groupe compact ouvert de G.

Proposition 7.4. — *Pour μ-presque tout $z \in Z$, il existe un morphisme de G-modules, β_z, entre $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ et H_z^∞ et il existe $\xi_z \in Wh(\pi_z^\infty)$ tels que :*
(i) Pour tout $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, $f = \int_Z^{\oplus} \beta_z(f) d\mu(z)$.
(ii) Pour μ-presque tout $z \in Z$, π_z est tempérée.
(ii) Pour μ-presque tout $z \in Z$, on a

$$(\beta_z(f), v) = \overline{\langle \pi_z'(f^*)\xi_z, v\rangle}, f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi), v \in H_z^\infty.$$

Démonstration. — D'après [2], section 3.6 et section 1.4, pour montrer (i) il suffit de démontrer que l'injection de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ est « fine » dans le sens de l.c., section 1.4. On introduit pour cela la fonction w sur $U_0\backslash G$:

$$w(g) = (1 + \|H_0(m_0(g))\|)^d$$

où $d = 2dim\, A_0$. Soit $S_w := \{f \in L^2(U_0\backslash G, \chi) | \int_{U_0\backslash G} |f(g)|^2 w(g) dg < \infty\}$. Alors $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ est un sous espace de S_w et l'injection est continue d'après (3.14). Il suffit donc de montrer que l'injection de S_w est « fine » (cf. l.c section 1.4). Pour cela utilisant la section 3.6 et le Théorème 3.4 de l.c., il suffit de voir que w est un poids sommable dans le sens de l.c., section 3.2. Pour cela on introduit $\Lambda = \Lambda(A_0)F_0$, où F_0 est un sous-ensemble fini de M_0 tel que $U_0A_0F_0K$. Alors c'est un « net » au sens de l.c. section 3.2. On vérifie facilement que :

$$\sum_{g\in\Lambda} w(g)^{-1} < \infty.$$

Donc w est bien sommable. Comme on l'a dit, (i) en résulte.
(ii) a été démontré dans [9], Théorème 7. Ceci implique que pour μ-presque tout $z \in Z$, ξ_z est tempérée.
On déduit (iii) de (i) comme dans la Proposition 15 de [9]. □

Corollaire 7.5. — *Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$, si pour toute représentation unitaire irréductiblle tempérée lisse de G et $\xi \in Wh(\pi)$, $\pi'(f^*)\xi = 0$, alors f est nulle.*

Proposition 7.6. — *$\mathcal{F}$ est une application linéaire injective de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ dans $\mathcal{S}^{inv}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ tel que $\mathcal{F}f = 0$. Comme dans la preuve de la Proposition 11 de [9], on voit que, pour tout $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, (σ, E) objet de $\mathcal{O}$ et $\xi \in Wh(\sigma)$:

$$(i_P^G\sigma)'(f^*)\xi(P, \sigma, \eta) = 0.$$

Comme toute représentation lisse unitaire irréductible et tempérée de G, (π, V), est un facteur direct d'une représentation $i_P^G\sigma$ et que l'espace $Wh(i_P^G\sigma)$ est égal à $\{\xi(P, \sigma, \eta) | \eta \in Wh(\sigma)\}$, on en déduit :

$$\pi'(f^*)\xi = 0, \xi \in Wh(\sigma).$$

La proposition résulte alors du Corollaire précédent. □

7.5. Formule de Plancherel

Théorème 7.7. — *L'application $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ sur $\mathcal{S}^{inv}$, dont l'inverse est donné par la restriction de $\mathcal{W}$ à $\mathcal{S}^{inv}$. En particulier :*

$$f = \sum_{(P=MU,\mathcal{O})\in\Theta} c(P)^{-1} \int_{\mathcal{O}} \mu(\sigma) E_P^G(\hat{f}_{P,O}(\sigma))d\sigma, f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi).$$

De plus $\mathcal{F}$ est une isométrie, lorsque $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ est muni du produit scalaire $(.,.)_G$ et $\mathcal{S}$ du produit scalaire défini en (7.3).

Démonstration. — On a déjà montré que $\mathcal{F}$ est injective. Montrons que la restriction de $\mathcal{FW}$ à $\mathcal{S}^{inv}$ est l'identité. Soit $\Phi = (\phi_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta} \in \mathcal{S}^{inv}$. Calculons $\mathcal{FW}\Phi$. Soit $(P = MU, \mathcal{O})$, $(P' = M'U'', \mathcal{O}')$ deux éléments de Θ. D'après le Corollaire de la Proposition 6.13, $(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}})\check{}_{P',\mathcal{O}'}$ est nul si M et M' ne sont pas conjugués. Si M et M' sont conjugués, d'après le Théorème 6.12, et le fait que $\Phi \in \mathcal{S}^{inv}$, on a pour σ_1 objet de $\mathcal{O}'$:

$$(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}})\check{}_{P',\mathcal{O}'}(\sigma_1) = \sum_{s\in W(M'|G|M), s^{-1}\sigma_1\in\mathcal{O}} C^0(s, P', P, s^{-1}\sigma_1)\phi_{P,\mathcal{O}}(s^{-1}\sigma_1).$$

De la définition de $\mathcal{S}^{inv}$, on en déduit, que, pour σ_1 objet de $\mathcal{O}'$ on a :

$$(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}})\check{}_{P',\mathcal{O}'}(\sigma_1) = |\{s \in W(M'|G|M), s^{-1}\sigma_1 \in \mathcal{O}\}|\phi_{P',\mathcal{O}'}(\sigma_1).$$

Appliquons cela pour calculer $(\mathcal{W}\Phi)\check{}_{P,\mathcal{O}}$. D'après ce qui précède et en échangeant le rôle de P et P', $c(P)(\mathcal{W}\Phi)\check{}_{P,\mathcal{O}}$ est la somme sur $(P' = M'U', \mathcal{O}') \in \Theta$, avec M et M' conjugués, de $|\{s \in W(M'|G|M), s^{-1}\mathcal{O}' = \mathcal{O}\}|\phi_{P,\mathcal{O}}$. Mais l'ensemble des couples $(s, \mathcal{O}')$ tels $s^{-1}\mathcal{O}' = \mathcal{O})$ est égal à $\{(s, s\mathcal{O})|s \in W(M'|G|M)\}$, dont le nombre d'élément est égal à $|W(M'|G|M)|$.
Montrons que si M' et M sont conjugués par un élément de $\overline{W}^G$, on a :

$$|W(M'|G|M)| = W(M|G|M)|. \tag{7.5}$$

En effet si $M' = x.M$ avec x élément de $\overline{W}^G$, on a $\overline{W}^{M'} = x.\overline{W}^M$ ainsi que, avec les notations de la section 4.3, $\overline{\mathcal{W}}(M'|G|M) = x\overline{\mathcal{W}}(M|G|M)$. Alors (7.5) en résulte immédiatement. En sommant sur les $(P', \mathcal{O}')$ et tenant compte de la définition de $\mathcal{W}$, on voit que

$$(\mathcal{W}\Phi)\check{}_{P,\mathcal{O}} = p(P)|W(M|G|M)|c(P)^{-1}\phi_{P,\mathcal{O}}.$$

Finalement :

$$(\mathcal{W}\Phi)\check{}_{P,\mathcal{O}} = \phi_{P,\mathcal{O}}.$$

Donc

$$\mathcal{FW}\Phi = \Phi, \Phi \in \mathcal{S}^{inv}.$$

Ceci montre que $\mathcal{F}$ est surjective sur $\mathcal{S}^{inv}$. Comme on a vu que $\mathcal{F}$ était aussi injective, c'est bien une bijection sur entre $\mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ et $\mathcal{S}^{inv}$. Ce qu'on vient de montrer prouve également que l'inverse de $\mathcal{F}$ est égal à la restriction à $\mathcal{S}^{inv}$ de $\mathcal{W}$.
Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{W}$ restreint à $\mathcal{S}^{inv}$ est isométrique.
Soit $\Phi = (\phi_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta}, \Phi' = (\phi'_{P,\mathcal{O}})_{(P,\mathcal{O})\in\Theta} \in \mathcal{S}^{inv}$. Alors :

$$(\mathcal{W}\Phi, \mathcal{W}\Phi') = \sum_{(P,\mathcal{O}),(P',\mathcal{O}')\in\Theta} c(P)^{-1}c(P')^{-1}(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}}, f_{\phi'_{P',\mathcal{O}'}})_G. \tag{7.6}$$

D'après la Proposition 6.13, $(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}}, f_{\phi'_{P',\mathcal{O}'}})_G$ est nul si M et M' ne sont pas conjugués par W^G et sinon :

$$(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}}, f_{\phi'_{P',\mathcal{O}'}})_G$$
$$= \sum_{s\in W(M'|G|M), s\mathcal{O}=\mathcal{O}'} \int_{\mathcal{O}'} \mu(\sigma_1)(C^0(s,P',P,s^{-1}\sigma_1)\phi_{P,\mathcal{O}}(s^{-1}\sigma_1), \phi'_{P',\mathcal{O}'}(\sigma_1))d\sigma_1.$$

Comme $\phi \in \mathcal{S}^{inv}$, on a :

$$(f_{\phi_{P,\mathcal{O}}}, f_{\phi'_{P',\mathcal{O}'}})_G = |\{s \in W(M'|G|M), s\mathcal{O} = \mathcal{O}'\}|(\phi_{P',\mathcal{O}'}, \phi'_{P',\mathcal{O}'}).$$

Si P et P' sont associés, on a $c(P) = c(P')$. Reportant dans (7.6) et regroupant les termes correspondant à $\phi'_{P',\mathcal{O}'}$, on trouve :

$$(\mathcal{W}\Phi, \mathcal{W}\Phi') = \sum_{(P',\mathcal{O}')\in\Theta} p(P')|W(M'|G|M')c(P')^{-2}(\phi_{P',\mathcal{O}'}, \phi'_{P',\mathcal{O}'}).$$

Soit encore :

$$(\mathcal{W}\Phi, \mathcal{W}\Phi') = \sum_{(P',\mathcal{O}')\in\Theta} c(P')^{-1}(\phi_{P',\mathcal{O}'}, \phi'_{P',\mathcal{O}'}).$$

Finalement

$$(\mathcal{W}\Phi, \mathcal{W}\Phi') = (\Phi, \Phi').$$

Donc l'inverse de $\mathcal{F}$ est bien isométrique.Il en va de même de $\mathcal{F}$. Ceci achève la preuve du Théorème. □

Remarque 7.8. — La Proposition 6.11 et La surjectivité de $\mathcal{W}$ montre que pour tout $f \in \mathcal{C}(U_0\backslash G, \psi)$ et tout sous-groupe parabolique anti-standard de G, P, l'application f^P est un élément de $\mathcal{C}(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arthur, « A local trace formula », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1991), nº 73, p. 5-96.

[2] J. Bernstein, « On the support of the Plancherel measure », *J. Geom. Phys.* **5** (1988), p. 663-710 (1989).

[3] P. Blanc & P. Delorme, « Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites pour un espace symétrique réductif *p*-adique G/H », *Ann. Inst. Fourier* **58** (2008), p. 213-261.

[4] A. Borel & J. Tits, « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55-150.

[5] C. Bushnell & G. Henniart, « Generalized Whittaker models and the Bernstein center », *Amer. J. Math.* **125** (2003), p. 513-547.

[6] W. Casselman, « Introduction to the theory of admissible representations of *p*-adic reductive groups », http ://www.math.ubc.ca/˜ cass/research.html.

[7] W. Casselman & J. Shalika, « The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function », *Compositio Math.* **41** (1980), p. 207-231.

[8] P. Deligne, « Le “centre” de Bernstein rédigé par Pierre Deligne. Travaux en Cours », Representations of reductive groups over a local field, Hermann, Paris, 1984, p. 1-32.

[9] P. Delorme, « Théorème de Paley-Wiener pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif p-adique », à paraitre au J. Inst. Math. Jussieu, arXiv :0905.2598.

[10] ———, « Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif p-adique », Progr. Math., vol. 220, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2004, p. 131-176.

[11] ———, « The Plancherel formula on reductive symmetric spaces from the point of view of the Schwartz space. Lie theory », Progr. Math., vol. 230, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2005, p. 135-175.

[12] ———, « Constant term of smooth H_ψ-invariant functions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), p. 933-955.

[13] V. Heiermann, « Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p-adique », *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), p. 388-415.

[14] J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Text In Math, vol. 21, Springer, 1981.

[15] A. Knapp, « Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples », Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[16] N. Matringe, « Derivatives and asymptotics of Whittaker functions », arXiv :1004.1315.

[17] F. Rodier, « Modèles de Whittaker des représentations admisssibles des groupes réductifs p-adiques quasi-déployés », manuscript non publié.

[18] Y. Sakellaridis & A. Venkatesh, « Periods and harmonic analysis on spherical varieties », preliminary version available on the web page of the first author.

[19] F. Shahidi, « On certain L-functions », *Amer. J. Math.* **103** (1981), p. 297-355.

[20] J.-L. Waldspurger, « La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra) », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 235-333.

[21] N. Wallach, *Real reductive groups. II*, Pure and Applied Mathematics, 132-II, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[22] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

Manuscrit reçu le 21 janvier 2011,
accepté le 15 mars 2011.

Patrick DELORME
Institut de Mathématiques de Luminy,
UMR 6206 CNRS,
Université de la Méditerranée,
163 Avenue de Luminy,
13288 Marseillle Cedex 09, France
delorme@iml.univ-mrs.fr