ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Florence GILLIBERT

Points rationnels sur les quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura de discriminant pq

Tome 63, n° 4 (2013), p. 1613-1649.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013___63_4_1613_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
63, 4 (2013) 1613-1649

POINTS RATIONNELS SUR LES QUOTIENTS D'ATKIN-LEHNER DE COURBES DE SHIMURA DE DISCRIMINANT pq

par Florence GILLIBERT (*)

RÉSUMÉ. — Soient p et q deux nombres premiers distincts et X^{pq}/w_q le quotient de la courbe de Shimura de discriminant pq par l'involution d'Atkin-Lehner w_q. Nous décrivons un moyen permettant de vérifier un critère de Parent et Yafaev en grande généralité pour prouver que si p et q satisfont des conditions de congruence explicites, connues comme les conditions du cas non ramifié de Ogg, et si p est assez grand par rapport à q, alors le quotient X^{pq}/w_q n'a pas de point rationnel non spécial.

ABSTRACT. — Let p and q be two distinct prime numbers, and X^{pq}/w_q be the quotient of the Shimura curve of discriminant pq by the Atkin-Lehner involution w_q. We describe a way to verify in wide generality a criterion of Parent and Yafaev to prove that if p and q satisfy some explicite congruence conditions, known as the conditions of the non ramified case of Ogg, and if p is large enough compared to q, then the quotient X^{pq}/w_q has no rational point, except possibly special points.

1. Introduction

La recherche de quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura sans point rationnel non spécial a été l'objet de plusieurs travaux notamment de Clark [3], Rotger [16], Rotger, Skorobogatof et Yafaev [17], Bruin, Flynn, González et Rotger [2], Parent et Yafaev [14] ainsi que de de Vera et Rotger [21]. Pour des équations de ces courbes, on peut aussi consulter les travaux

Mots-clés : courbes de Shimura, points rationnels, vecteurs de Gross, involutions d'Atkin-Lehner.
Classification math. : 10X99, 14A12, 11L05.
(*) L'auteur remercie Pierre Parent dont l'aide, l'encouragement et les conseils ont été cruciaux pour la réalisation de cet article. L'auteur remercie également Marusia Rebolledo, Victor Rotger et Andrei Yafaev pour avoir relu et commenté en détail cet article, ainsi que le référé pour ses suggestions et commentaires pertinents.

de Molina [11]. Ce problème est lié à une conjecture (attribuée à Coleman) sur les anneaux d'endomorphismes potentiels de variétés abéliennes de type GL_2 (*cf.* [2]). On dit qu'une variété abélienne simple $A/\mathbb{Q}$ est de type GL_2 si son algèbre d'endomorphisme $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ est un corps de nombre de degré $\dim(A)$. La conjecture est énoncée ainsi par Clark et Mazur : pour toute dimension g fixée, il y a un nombre fini de classes d'isomorphismes d'anneaux d'endomorphismes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de variétés abéliennes $A/\mathbb{Q}$ de type GL_2 de dimension g. Dans le cas $g = 1$, ces variétés abéliennes sont les courbes elliptiques, et la liste finie des anneaux d'endomorphismes possibles est connue. L'étude des courbes de Shimura permet d'aborder cette conjecture dans le cas de la dimension $g = 2$. En effet, étant donnés une algèbre de quaternion B_D de discriminant D et O_D un ordre maximal de B_D, la courbe de Shimura $X^D/\overline{\mathbb{Q}}$ paramétrise les surfaces abéliennes $A/\overline{\mathbb{Q}}$ munies d'un plongement de O_D dans $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A)$. Une surface abélienne $A/\overline{\mathbb{Q}}$ munie d'un tel plongement est soit simple, soit isogène au carré d'une courbe elliptique ayant multiplication complexe par un ordre dans un corps quadratique imaginaire K tel que B_D se plonge dans l'algèbre de matrice $\mathrm{M}_2(K) \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Dans ce dernier cas, le point de $X^D(\overline{\mathbb{Q}})$ associé à la surface abélienne A est appelé point spécial ou point CM. D'après [2, thm. 4.5], toute surface abélienne $A/\mathbb{Q}$, telle que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ pour un entier m et $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A) \simeq O_D$, est associée à un point rationnel non spécial sur le quotient X^D/w_m de la courbe de Shimura de discriminant D par l'involution d'Atkin-Lehner w_m. L'absence de point rationnel non spécial sur X^D/w_m est en fait un problème plus fort que l'absence de telles surfaces abéliennes $A/\mathbb{Q}$; en effet de tels points rationnels peuvent correspondre à des surfaces abéliennes à multiplication quaternionique définies sur une extension de $\mathbb{Q}$ et admettant $\mathbb{Q}$ comme corps de module.

Dans cet article, nous nous restreignons au cas où le discriminant D de la courbe de Shimura est le produit de deux nombres premiers p et q (pour une discussion sur le cas du discriminant quelconque voir la Remarque 1.2 ci-dessous). L'existence de points rationnels sur X^{pq}/w_q peut se produire dans deux cas décrits par Ogg (*cf.* Proposition 2.1) : le « cas ramifié » et le « cas non ramifié ». Nous nous plaçons dans le cas non ramifié de Ogg. Remarquons que dans ce cas l'absence de surfaces abéliennes $A/\mathbb{Q}$ telles que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(A)$ soit un ordre maximal de B_{pq} découle d'un résultat de Rotger : [16, thm. 1.4]. Dans leur article [14], Parent et Yafaev donnent un critère, pour l'absence de point rationnel non spécial sur un quotient d'Atkin-Lehner X^{pq}/w_q de courbe de Shimura dont le discriminant est le produit de deux nombres premiers. Nous rappelons leur

énoncé dans la Proposition 4.3. Une application immédiate de ce critère leur permet de déterminer un exemple de famille infinie de quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura sans point spécial, de la forme X^{251p}/w_{251}, mais la vérification de ce critère n'était jusqu'alors possible que dans de tels cas particuliers. Dans cet article nous appliquons ce critère à une famille de courbes X^{pq}/w_q beaucoup plus générale. En fait pour presques tous les X^{pq}/w_q à q fixé : pour tout nombre premier $q > 245$, et tout nombre premier p supérieur à une borne (non effective) dépendant de q, si la condition du cas non ramifié de Ogg est satisfaite (*cf.* Proposition 2.1 ci-dessous), alors nous pouvons appliquer le critère. À notre connaissance, aucun résultat antérieur ne permettait de savoir que cette famille n'a pas de point rationnel non spécial. Par ailleurs, ces courbes n'ont pas non plus de point rationnel spécial (*cf.* [2, prop. 5.1]).

THÉORÈME 1.1. — *Soit $q > 245$ un nombre premier avec $q \equiv 3 \mod 4$. Il existe une borne B_q dépendant de q telle que si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 1 \mod 4$, $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ et $p \geqslant B_q$, alors la courbe X^{pq}/w_q est sans point rationnel.*

Rotger et de Vera ont également prouvé l'absence de points rationnels sur des familles infinies de quotients d'Atkin-Lehner de courbes de Shimura, en utilisant des méthodes très différentes des nôtres (étude des représentations galoisienne associées aux surfaces abéliennes sous-jacentes *cf.* [21]). Comme ces derniers travaux prennent place dans le cas ramifié de Ogg, ils sont complémentaires du nôtre.

Résumons ici la preuve (on renvoie au texte pour les définitions et énoncés précis) : Le critère de Parent et Yafaev Proposition 4.3 ne peut être appliqué qu'à des couples de nombres premiers (p, q) satisfaisant les conditions du cas non ramifié de Ogg (*cf.* (2) Proposition 2.1 ci-dessous) et la condition supplémentaire $p \equiv -1 \mod 3$. Nous généralisons ce théorème dans la Proposition 4.4 en supprimant cette dernière condition. Celle-ci apparaît dans un lemme de Parent et Yafaev sur le groupe des composantes de $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$. On considère $\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p}$ la fibre en p du modèle régulier de X^{pq}/w_q, obtenu par éclatement aux points singuliers du modèle décrit par Cherednik et Drinfeld. Supposons que p et q satisfont les conditions du cas non ramifié de Ogg, et que q est « assez grand ». Soit $\mathcal{J}$ la composante exceptionnelle de $\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p}$ apparaissant après éclatement de l'unique point singulier d'épaisseur 2, et $J \neq \mathcal{J}$ une autre composante irréductible de $\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p}$. Parent et Yafaev prouvent que si $p \equiv -1 \mod 3$, pour $p \gg q$, on a $(p+1)(J - \mathcal{J}) \neq 0$ dans le groupe des composantes de

$\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$ (*cf.* [14, lemma 3.1.3]). Dans le troisième paragraphe nous généralisons ce lemme en montrant que le résultat reste valable si $p \equiv 1 \mod 3$ (*cf.* Lemme 3.2).

Dans le quatrième paragraphe, nous appliquons le critère de Parent-Yafaev (Théorème 4.4) pour prouver le Théorème 1.1. Pour cela il suffit de construire un cycle sur le graphe $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ constitué de vecteurs de Gross contenant l'arête exceptionnelle de longueur 2 avec une multiplicité première à p. Le chemin que nous construisons utilise également le vecteur d'Eisenstein qui appartient à l'espace engendré par les vecteurs de Gross. Comme les vecteurs de Gross sont invariants par l'action de w_q, nous travaillons sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$. Nous utilisons la description du graphe de $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ donnée par Ribet. Le groupe des chemins $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ est isomorphe au groupe des diviseurs sur les p-isogénies entre courbes elliptiques supersingulières en caractéristique q à isomorphisme près. D'autre part le groupe des chemins $\mathcal{P}_S$ sur le graphe $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$ est isomorphe au groupe des diviseurs sur les courbes elliptiques supersingulières en caractéristique q à isomorphisme près. Le groupe des cycles sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ est l'intersection des noyaux de deux morphismes naturels s_* et t_* de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{P}_S$.

Pour éviter la confusion entre les vecteurs de Gross sur $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$ et les vecteurs de Gross sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$, nous les désignons respectivement par vecteurs de Gross-modulaire (*cf.* Définition 2.4) et vecteurs de Gross-Shimura (*cf.* Définition 2.11). De même, le vecteur d'Eisenstein sur $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$ et le vecteur d'Eisenstein sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ sont appelés respectivement vecteur d'Eisenstein-modulaire et vecteur d'Eisenstein-Shimura.

Nous prouvons (sous certaines condition sur l'ordre O_D de discriminant D) que l'image d'un vecteur de Gross-Shimura $\gamma_D \in \mathcal{L}$ par l'application s_* (ou t_*) est le vecteur de Gross-modulaire $\Gamma_D \in \mathcal{P}_S$ correspondant au même discriminant. Construire un cycle C constitué de vecteurs de Gross-Shimura, revient à construire un chemin nul en vecteurs de Gross-modulaire. Pour trouver un cycle contenant les arêtes exceptionnelles avec une multiplicité λ première à p, nous construisons un cycle de la forme $C_0 = C + \lambda a_E$ où C est un chemin en vecteurs de Gross ne contenant pas l'arête exceptionnelle et a_E est le vecteur d'Eisenstein-Shimura. Pour cela, nous nous ramenons à construire une combinaison linéaire de vecteurs de Gross-modulaires égale au vecteur d'Eisenstein-modulaire en utilisant uniquement des vecteurs associés à des « bons » ordres.

Remarque 1.2. — Les raisons qui nous ont fait considérer le cas où le discriminant est produit de deux nombres premiers pq est que, grâce aux travaux de Ribet, nous disposons alors d'une description du graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$

en terme de courbes elliptiques supersingulière et de p-isogénies entre ces courbes, ainsi que d'une interprétation similaire pour les vecteurs de Gross (*cf.* Proposition 2.12), ce qui rend ces objets plus faciles à manipuler.

Cependant la méthode de Parent et Yafaev pourrait se généraliser au cas où le discriminant est le produit d'un nombre quelconque de nombres premiers. Plus précisément, soit p un nombre premier et m le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts et $\neq p$. On considère le quotient de la courbe de Shimura X^{pm} de discriminant pm par l'involution d'Atkin-Lehner w_m. Le graphe dual $\mathcal{G}(X^{pm}_{\mathbb{F}_p})$ de la fibre en p du modèle de Cerednik-Drinfeld de X^{pq} sur $\mathbb{Z}_p$ est un quotient d'un arbre de Bruhat-Tit. Ce graphe est biparti, et peut-être décrit grâce à la théorie des modules de Brandt et des matrices de Brandt (*cf.* [8, §1] et [9, §3]). On se place dans le cas non ramifié de Ogg pour le quotient X^{pm}/w_m c'est-à-dire aucune arête de ce graphe $\mathcal{G}(X^{pm}_{\mathbb{F}_p})$ n'est fixé par w_m. Condition qui peut être traduite par des congruences satisfaites par les facteurs premiers de pm (*cf.* [12, thm. p. 206] et sa preuve). Considérons $\widetilde{(X^{pm}/w_m)}/\mathbb{Z}_p$ la courbe régulière obtenue à partir de $(X^{pm}/w_m)/\mathbb{Z}_p$ par éclatements successifs en les singularités. D'après Ogg, un point rationnel de X^{pm}/w_m se réduit sur une composante exceptionnelle de la fibre $\widetilde{(X^{pm}/w_m)}_{\mathbb{F}_p}$ provenant de l'éclatement en un point singulier correspondant à une arête de $\mathcal{G}((X^{pm}/w_m)_{\mathbb{F}_p})$ de longueur paire (*cf.* [12, prop. p. 203] et la discussion qui suit p. 204). Sous les conditions du cas non ramifié de Ogg, une telle arête de $\mathcal{G}((X^{pm}/w_m)_{\mathbb{F}_p})$ est de longueur 2 et elle correspond alors à deux arêtes de longueur 2 de $\mathcal{G}(X^{pm}_{\mathbb{F}_p})$ échangés par w_m. Dans le cas du discriminant produit de deux nombres premiers p et q, il y a exactement deux arête de $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ échangés par w_q. Dans le cas général du discriminant produit de plus de deux nombres premiers, il y a plus de deux arêtes singulières de longueur 2 sur $\mathcal{G}((X^{pm}/w_m)_{\mathbb{F}_p})$ (*cf.* [9, (3.7) et (3.8)] pour des formules donnant ce nombre d'arêtes). La preuve du critère de Parent et Yafaev utilise des propriétés du groupe des composantes de la fibre en p du modèle de Néron de la Jacobienne de X^{pm}/w_m pour $m = q$ premier (*cf.* [14, Lemma 3.1.3]). Ce critère pourrait se généraliser dans le cas général où m est non nécessairement premier, sous réserve d'arriver à prouver des résultats analogues sur ce groupe des composantes. Or nous venons de faire remarquer que dans le cas général nous avons plusieurs composantes exceptionnelles sur $\widetilde{(X^{pm}/w_m)}_{\mathbb{F}_p}$. Cela complique alors les calculs dans le groupe des composantes. En effet, comme on peut le constater en regardant la preuve de notre Lemme 3.2, les outils employés dans ces preuves deviennent plus difficile à

manier lorsqu'il existe plus d'une composante exceptionnelle. Il s'agit néanmoins d'une difficulté technique, non essentielle, que nous nous proposons d'ailleurs d'étudier dans un travail futur.

2. Vecteurs de Gross

Pour toute la suite, p et q sont deux nombres premiers distincts, tous deux $\geqslant 5$. Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la notion de vecteurs de Gross sur le graphe dual de la fibre en q de la courbe modulaire de niveau q, et sur le graphe dual de la fibre en p d'une courbe de Shimura de discriminant pq. Nous invitons le lecteur à se référer à [3] et [15] pour une introduction aux courbes de Shimura, à [6] pour la définition des vecteurs de Gross sur les courbes modulaires de niveau premier, et à [14, §4] pour le cas des vecteurs de Gross sur les courbes de Shimura de discriminant pq.

Dans les paragraphes suivants, on considérera l'existence éventuelle de points rationnels du quotient de la courbe de Shimura X^{pq} par l'involution d'Atkin-Lehner w_q. Cette existence de points rationnels ne peut se produire que dans les deux cas décrits par Ogg dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. — *Si $X^{pq}/w_q(\mathbb{Q})$ est non vide, alors $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et une des deux conditions suivante est satisfaite*

(1) $p \equiv 3 \mod 4$ *; (cas ramifié)*
(2) $p \equiv 1 \mod 4$ *et* $q \equiv 3 \mod 4$ *(cas non ramifié).*

Démonstration. — Consulter [17, thm. 3.1]. □

Nous nous placerons pour ce travail dans le cas non ramifié.

2.1. Vecteurs de Gross sur le graphe modulaire

D'après les travaux de Deligne et Rapoport (*cf.* [4, théorème 6.9 et exemple 6.16]) la fibre en q de la courbe modulaire $X_0(q)$ est constituée de deux composantes irréductibles s_1 et s_2 isomorphes à $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ se coupant transversalement. Il découle de cette description que le graphe dual de la fibre en q de la courbe modulaire $X_0(q)$, noté $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$, est constitué de deux sommets s_1 et s_2 et d'arêtes entre s_1 et s_2. Ces arêtes correspondent à l'ensemble S des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. On note $E_{j_1}, \ldots, E_{j_{g+1}}$ un système de représentants de S, où les j_k parcourent le sous-ensemble de $\mathbb{F}_{q^2}$ constitué par les j-invariants supersinguliers, et g est le genre de $X_0(q)$. Soit $B_{q\infty}$ l'algèbre de quaternions

sur $\mathbb{Q}$ ramifiée en q et l'infini. À la classe d'isomorphismes de la courbe elliptique E_{j_k}, on associe l'ordre maximal $\Omega_k = \mathrm{End}(E_{j_k}) \subseteq B_{q\infty}$.

Le cardinal de $(\Omega_k^*/\{\pm 1\})$ est appelé la longueur de l'arête de $\mathcal{G}(\!(X_0(q))\!)_{\mathbb{F}_q}$ correspondant à E_{j_k}. D'après [20, theorem 10.1 p. 103], si $j_k \neq 0, 1728$ ce cardinal est égal à 1. Il y a donc au plus deux arêtes de longueur > 1.

On désigne par $\mathcal{P}_S$ l'ensemble des chemins sur le graphe $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$, c'est le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs sur S. On définit le degré d'un chemin par : $\text{degré}(\sum_{k=1}^{g+1} \lambda_{j_k} E_{j_k}) = \sum_{k=1}^{g+1} \lambda_{j_k}$. On note $\mathcal{P}_S^0$ le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs de degré 0 sur S. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$ engendrée par les opérateurs de Hecke T_l, pour $l \neq q$ premier, agit sur les groupes $\mathcal{P}_S$ et $\mathcal{P}_S^0$ par l'action $T_l(E) = \sum_{C_l \subset E} E/C_l$, où $E \in S$ et C_l parcourt l'ensemble des sous-groupes d'ordre l de E.

Définition 2.2. — *L'accouplement de monodromie (cf.* [7, Exposé 9, § 9]*) est la forme bilinéaire non dégénérée* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *sur* $\mathcal{P}_S$ *définie par :*

$$\langle E_{j_k}, E_{j_l} \rangle = \delta_{j_k, j_l} \,\mathrm{card}(\Omega_k^*/\{\pm 1\}),$$

où δ_{j_k,j_l} *est le symbole de Kronecker. Ainsi* $E_{j_1}, \ldots E_{j_{g+1}}$ *est une base orthogonale pour cet accouplement. Chaque* E_{j_k} *est de norme* 1 *pour cet accouplement, sauf si* $j_k = 0$ *ou* 1728.

Définition 2.3. — *Le vecteur d'Eisenstein (ou vecteur d'Eisenstein-modulaire)* $A_E \in \frac{1}{6}\mathcal{P}_S$ *est :*

$$A_E = \sum_{k=1}^{g+1} \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega_k^*/\{\pm 1\})} E_{j_k}.$$

Le vecteur d'Eisenstein A_E forme une base de $(\mathcal{P}_S^0)^\perp$, l'espace orthogonal à $\mathcal{P}_S^0$ pour cet accouplement. Il est choisi de telle sorte que, pour $v \in \mathcal{P}_S$, le degré de v est $\langle v, A_E \rangle$.

Définition 2.4. — *Soit* O_D *l'ordre quadratique imaginaire de discriminant* D*. On lui associe un vecteur* $\Gamma_D \in \frac{1}{12}\mathcal{P}_S$*, appelé* vecteur de Gross sur le graphe modulaire *(ou vecteur de Gross-modulaire) :*

$$\Gamma_D = \frac{1}{2u(D)} \sum_{k=1}^{g+1} H_k(D) E_{j_k},$$

où $H_k(D)$ *est le nombre de plongements optimaux de* O_D *dans* Ω_k *modulo conjugaison par* Ω_k^* *(cf.* [6, §1, p. 122]*), et* $u(D) = \mathrm{card}(O_D^*/\{\pm 1\})$*. On a* $u(D) = 1$*, sauf pour* $D = -3$ *ou* -4*. De plus, on a* $u(-3) = 3$*,* $u(-4) = 2$*.*

Par la formule des traces d'Eichler, lorsque q est scindé dans O_D ou lorsque q divise le conducteur de O_D, il n'existe pas de plongement de O_D

dans $B_{q\infty}$ (voir [6, §1, p. 122]). Le vecteur Γ_D est non nul si q est inerte ou ramifié dans O_D et q^2 ne divise pas D. La proposition suivante donne une interprétation des vecteurs de Gross en terme de réduction modulo q des courbes elliptiques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ayant multiplication complexe par O_D. Nous nous plaçons dans le cas où q est inerte dans O_D, car nous ne manipulerons dans la suite que de tels vecteurs de Gross.

PROPOSITION 2.5. — *Soit O_D un ordre quadratique imaginaire de discriminant D et de nombre de classe $h(D)$, tel que q soit inerte dans O_D. Fixons $\mathcal{Q}$ une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au dessus de q. Le vecteur $u(D)\Gamma_D$ est constitué de la somme des réductions (non forcément distinctes) modulo $\mathcal{Q}$ des $h(D)$ courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ayant multiplication complexe par O_D.*

Démonstration. — Par la formule des traces d'Eichler (*cf.* [22, thm. 5.11, p. 92]), le nombre de plongements optimaux de O_D dans les ordres maximaux de $B_{q\infty}$ est

$$\sum_{i=1}^{g+1} H_i(D) = \left(1 - \left(\frac{D}{q}\right)\right) h(D) = 2h(D).$$

D'après le théorème fondamental de la multiplication complexe, il existe $h(D)$ courbes elliptiques $E_1/\overline{\mathbb{Z}},\ldots,E_{h(D)}/\overline{\mathbb{Z}}$ à $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorphisme près ayant multiplication complexe par O_D. Pour chacune de ces courbes elliptiques, il existe deux isomorphismes conjugués $f_1, f_2 \colon O_D \to \mathrm{End}(E)$. La place $\mathcal{Q}$ définit une inclusion de $\overline{\mathbb{Z}}$ dans une clôture algébrique de $O_D \otimes \mathbb{Z}_q$. Soit W un anneau de valuation discrète complet contenant $O_D \otimes \mathbb{Z}_q$, de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_q$, et tel que $E_1, \ldots, E_{h(D)}$ sont définies sur W. On note q' l'uniformisante de W. On considère l'ensemble des couples (E, g) constitués d'une courbe elliptique E/W à multiplication complexe par O_D sur W, muni d'un isomorphisme fixé $g \colon O_D \to \mathrm{End}(E)$. On dit que les couples (E, g) et (E', g') sont équivalents s'il existe un isomorphisme $i \colon (E \mod q') \to (E' \mod q')$ tel que $(g'(\alpha) \mod q') \circ i = i \circ (g(\alpha) \mod q')$ pour tout $\alpha \in O_D$. D'après Gross [6, fin du § 2, pp. 128-129], les plongements optimaux de O_D dans les ordres maximaux de $B_{q\infty}$ correspondent aux couples (E, g), à équivalence près. Le plongement optimal associé à un tel couple (E, g) est obtenu par composition de $g \colon O_D \to \mathrm{End}(E)$ et de la réduction $\mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E \mod q')$. Toute courbe elliptique E/W à multiplication complexe par O_D est une tordue d'une des courbes $E_1, \ldots, E_{h(D)}$. Donc tout couple $(E, g)/W$ est équivalent à un des couples $(E_l, f)/W$. Ainsi chacun des $2h(D)$ plongement optimaux de O_D dans les ordres maximaux de $B_{q\infty}$ correspond à d'un des $2h(D)$ couples $(E_l, f)/\overline{\mathbb{Z}}$. Cette correspondance est bijective par

égalité des cardinaux. Pour conclure il suffit de voir que :

$$2u(D)\Gamma_D = \sum_{k=1}^{g+1} \sum_{\substack{O_D \to \Omega_k \\ \text{optimal}}} E_{j_k}.$$

Donc, on a

$$2u(D)\Gamma_D = \sum_{\substack{(E,g)/W \\ \text{à équiv. près}}} (E \mod q') = 2(E_1 + \cdots + E_{h(D)}) \mod \mathcal{Q}.$$

□

PROPOSITION 2.6. — *Toute arête est de longueur* 1 *sauf dans les deux cas suivants :*

- *si q est inerte dans O_{-4}, alors* $1728 \mod q$ *est un j-invariant supersingulier et l'arête associée à la courbe elliptique E_{1728} de j-invariant* $1728 \mod q$ *est de longueur* 2. *Plus précisément $O_{-4} = \mathbb{Z}[\zeta_4]$ se plonge dans* $\mathrm{End}(E_{1728})$.
- *Si q est inerte dans O_{-3}, alors* $0 \mod q$ *est un j-invariant supersingulier et l'arête associée à la courbe elliptique E_0 de j-invariant* 0 *est de longueur* 3. *Plus précisément $O_{-3} = \mathbb{Z}[\zeta_6]$ se plonge dans* $\mathrm{End}(E_0)$.

Démonstration. — Découle de [19, thm. 10.1, p. 103] et du fait qu'une arête de longueur 2 (respectivement de longueur 3) correspond à un ordre maximal de $B_{q\infty}$ dans lesquels se plonge O_{-4} (respectivement O_{-3}). □

L'algèbre de Hecke $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$ agit sur l'espace $S_2(\Gamma_0(q))$ des formes modulaires paraboliques primitives f de poids 2 sur $\Gamma_0(q)$. On désigne par I_e l'idéal d'enroulement de $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs de $\mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$ annulant toutes les formes modulaires de $S_2(\Gamma_0(q))$ telles que $L(f,1) \neq 0$. Pour une forme modulaire primitive f, la formule de Gross [6, cor. 11.6, p. 167] et de façon plus générale un théorème de Waldspurger [10, p. 397], relie la valeur de $L(f,1)$ à la norme de l'image $\Gamma_{f,D}$ du vecteur de Gross Γ_D par l'idempotent primitif $1_f \in \mathbb{T}_{\Gamma_0(q)}$ associé à f. On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. — *L'espace engendré par les projections orthogonales des vecteurs de Gross de discriminant D premier à q sur $\mathcal{P}_S \otimes \mathbb{Q}$ est $\mathcal{P}_S[I_e] \otimes \mathbb{Q}$, où $\mathcal{P}_S[I_e]$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_S$ annulé par tous les éléments de I_e.*

Démonstration. — Consulter [13, prop. 4,2]. □

On rappelle finalement que le vecteur d'Eisenstein appartient au $\mathbb{Q}$-espace engendré par les vecteurs de Gross. Cela découle de la Proposition 2.8 ci-dessous.

Proposition 2.8. — *Soient D le discriminant de l'ordre maximal O_D d'un corps quadratique imaginaire, tel que q soit inerte ou ramifié dans O_D et $l \neq q$ un nombre premier. On a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle A_E, A_E\rangle}{\langle A_E, \Gamma_{l^{2n}D}\rangle}\Gamma_{l^{2n}D} = A_E.$$

Il en découle que A_E appartient au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\Gamma_{l^{2n}D}$, pour $n \geqslant 1$.

Démonstration. — Consulter [13, thm. 4.3]. □

On peut remarquer de la même façon que le vecteur d'Eisenstein-Shimura sur le graphe dual de la fibre en p de la courbe de Shimura X^{pq} (*cf.* Définition 2.9 ci-dessous) s'exprime lui aussi comme combinaison linéaire de vecteurs de Gross.

2.2. Vecteurs de Gross sur le graphe de Shimura

Soit $X^{pq}/\mathbb{Q}$ la courbe de Shimura de discriminant pq et de niveau 1. Ribet donne la description de $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$, le graphe dual de la fibre en p du modèle de Cerednik-Drinfeld $X^{pq}/\mathbb{Z}_p$ de cette courbe de Shimura, (*cf.* [15, propositions 4.4 et 4.7]). L'ensemble de ses sommets est constitué de deux copies $S_1 \sqcup S_2$ de l'ensemble S des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques supersingulières $\overline{\mathbb{F}}_q$. L'ensemble de ses arêtes est l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_n\}$ des classes d'isomorphismes de $p-$isogénies entre ces courbes elliptiques. Chacune de ces isogénies $e_i \colon E_{j_1} \to E_{j_2}$ s'interprète comme une arête reliant le sommet de S_1 correspondant à E_{j_1} au sommet de S_2 correspondant à E_{j_2}. De manière équivalente l'ensemble des arêtes du graphe s'identifie avec l'ensemble des couples (E, C_p), où E est une courbe elliptique supersingulière à isomorphisme près sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, et C_p est un sous-groupe d'ordre p de E défini à action de $\mathrm{End}(E)^*$ près. On munit ce graphe d'une orientation en considérant que toutes les arêtes sont orientées d'un sommet de S_1 vers un sommet de S_2. À chaque arête $e = (E, C_p)$ on associe l'ordre d'Eichler $\mathrm{End}(e) = \{\alpha \in \mathrm{End}(E) \ : \ \alpha(C_p) \subseteq C_p\}$ de niveau p dans $B_{q\infty}$. On définit la longueur d'une arête $e = (E, C_p)$ comme le cardinal de $\mathrm{End}(e)^*/\{\pm 1\}$. Comme pour le graphe modulaire, les arêtes ont toutes une longueur 1, sauf peut-être les quatre arêtes décrites dans le Corollaire 2.15 ci-après.

Les involutions d'Atkin Lehner w_p et w_q agissent sur le graphe de la manière suivante : l'involution w_p échange chaque sommet de S_1 (respectivement S_2) avec le sommet de S_2 (respectivement S_1) correspondant à la

même courbe elliptique à isomorphisme près, et échange l'arête correspondant à une isogénie (E, C_p) avec l'opposé de l'arête correspondant à son isogénie duale $(E/C_p, E[p]/C_p)$. L'involution w_q agit comme le Frobenius sur le graphe, c'est-à-dire qu'elle échange chaque sommet de S_1 (respectivement S_2) avec le sommet de S_1 (respectivement S_2) correspondant à l'image par le Frobenius en q de la courbe elliptique correspondante, et échange l'arête correspondant à l'isogénie (E, C_p) avec l'arête correspondant à l'image de cette isogénie par le Frobenius.

Comme dans le paragraphe précédent, on considère $\mathcal{L}$ le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$. On appelle les éléments de $\mathcal{L}$ les chemins sur le graphe. Notons $\mathcal{L}^0$ le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs de degré 0. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$ engendrée par les opérateurs de Hecke T_l, pour $l \neq p, q$ premier, agit sur ces groupes par l'action :

$$T_l((E, C_p)) = \sum_{C_l \subset E} (E/C_l, (C_p + C_l)/C_l),$$

où C_l parcourt les sous-groupes d'ordre l de E.

On définit l'accouplement de monodromie sur $\mathcal{L}$ par :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \operatorname{card}(\operatorname{End}(e_i)^*/\{\pm 1\}).$$

On remarque que les $(e_i)_{i=1\ldots n}$ forment une base orthogonale de $\mathcal{L}$ pour cet accouplement, et que presque tous les e_i sont de norme 1.

DÉFINITION 2.9. — *Le vecteur d'Eisenstein (ou vecteur d'Eisenstein-Shimura) est défini par :*

$$a_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{card}(\operatorname{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i.$$

Il forme une base de $(\mathcal{L}^0)^\perp$, l'espace orthogonal à $\mathcal{L}^0$ pour l'accouplement de monodromie.

On remarque que le module $\mathcal{L}$ s'identifie naturellement avec le groupe des diviseurs des points supersinguliers de $X_0(pq)(\mathbb{F}_{q^2})$. Le vecteur d'Eisenstein sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ correspond donc à un vecteur d'Eisenstein pour la courbe modulaire de niveau non premier $X_0(pq)_{\mathbb{F}_q}$. De la même façon, les vecteurs de Gross sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ qui seront introduits dans la Définition 2.11 ci-dessous, correspondent à des vecteurs de Gross pour la courbe modulaire $X_0(pq)_{\mathbb{F}_q}$.

DÉFINITION 2.10. — *On note par s l'application qui a une arête $e = (E_{j_k}, C_p)$ de $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ associe la courbe $E_{j_k} \in S$. On a :*

$$s_* \colon \mathcal{L} \to \mathcal{P}_S$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s(e_i).$$

De manière similaire on définit l'application t qui a l'arête $e = (E_{j_k}, C_p)$ associe la courbe $E_{j_k}/C_p \in S$. On a :

$$t_* \colon \mathcal{L} \to \mathcal{P}_S$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t(e_i).$$

Soit Y l'intersection des noyaux de s_* et t_*. C'est un sous $\mathbb{Z}$-module de $\mathcal{L}^0$. D'après [15, cor. 4.5], Y est isomorphe à $H_1(\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p}), \mathbb{Z})$. On appelle les éléments de Y les cycles ou chemins fermés de $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$.

Définition 2.11. — *Soit O_D un ordre quadratique imaginaire de discriminant D. On définit le* vecteur de Gross sur le graphe dual de la fibre en p de la courbe de Shimura, *(ou vecteur de Gross-Shimura), $\gamma_D \in \frac{1}{12}\mathcal{L}$, par :*

$$\gamma_D = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(D)}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i,$$

où $h_i(D)$ est le nombre de plongements optimaux de O_D dans l'ordre d'Eichler $R_i = \mathrm{End}(e_i)$.

Lorsque q est scindé (ou p est inerte) dans l'ordre O_D, d'après la formule des traces d'Eichler, il n'existe aucun plongement de O_D dans les ordres d'Eichler de niveau p de $B_{q\infty}$, et le vecteur γ_D est nul (*cf.* [22, thm. 5.11, p. 92]). Lorsque q est inerte (ou ramifié et ne divisant pas le conducteur de O_D) et p scindé (ou ramifié et ne divisant pas le conducteur de O_D) dans O_D, le vecteur γ_D est non nul. De manière similaire à la Proposition 2.5, la proposition suivante donne une description des arêtes du vecteur γ_D en terme de réduction modulo q des isogénies entre courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ à multiplication complexe par O_D. Nous nous restreignons au cas où q est inerte et p scindé dans O_D, car nous ne manipulerons dans la suite que des vecteurs satisfaisant ces hypothèses.

Proposition 2.12. — *Soit O_D un ordre quadratique imaginaire de discriminant D et de nombre de classe $h(D)$, tel que q soit inerte et p scindé dans O_D. Fixons $\mathcal{Q}$ une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au dessus de q. Le vecteur γ_D est constitué de $2h(D)$ arêtes, chacune de ces arêtes e pondérée par $2/(\mathrm{card}(\mathrm{End}(e)^*/\{\pm 1\}))$. Ces arêtes correspondent aux réductions modulo $\mathcal{Q}$ des $2h(D)$ p-isogénies entre les $h(D)$ courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ayant multiplication complexe par O_D.*

Démonstration. — Par la formule des traces d'Eichler, le nombre de plongements optimaux de O_D dans les ordres d'Eichler de niveau p de $B_{q\infty}$ est

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(D) = \left(1 - \left(\frac{D}{q}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{D}{p}\right)\right)h(D) = 4h(D).$$

Les ordres d'Eichler $R_1,\ldots,R_n$ de niveau p correspondent aux $\mathrm{End}(E_{j_i}, C_p)$, où $i = 1,\ldots,g+1$ et C_p parcourt les sous-groupes d'ordre p de E_{j_i} à isomorphisme près.

Soit $\Phi\colon O_D \to \mathrm{End}(E_{j_i}, C_p)$ un plongement optimal. Le plongement induit $\Phi'\colon O_D \to \mathrm{End}(E_{j_i})$ est également optimal. D'après la Proposition 2.5, ce plongement Φ' provient d'un couple (E, g), où $E/\overline{\mathbb{Q}}$ est une courbe elliptique à multiplication complexe par O_D munie d'un isomorphisme $g\colon O_D \to \mathrm{End}(E)$, de telle sorte que $(E \mod \mathcal{Q}) = E_{j_i}$. Comme la réduction modulo $\mathcal{Q}$ réalise un isomorphisme $E[p] \to E_{j_i}[p]$, il existe un sous-groupe C d'ordre p de E tel que $(C \mod \mathcal{Q}) = C_p$. Pour des raisons de compatibilité, on a $g(O_D)$ inclus dans $\mathrm{End}(E, C)$, c'est-à-dire $\mathrm{End}(E) = \mathrm{End}(E, C) \simeq O_D$. L'isogénie $E \to E/C$ de noyau C est une p-isogénie entre E et une courbe elliptique E/C à multiplication complexe par O_D. Par la théorie de la multiplication complexe, une telle isogénie correspond à un idéal P de O_D au dessus de p. Comme p est scindé dans O_D, il existe deux isogénies distinctes de E dans des courbes elliptiques à multiplication complexe par O_D, et C est le noyau d'une de ces deux isogénies. Finalement un plongement optimal Φ de O_D dans un ordre d'Eichler $R = \mathrm{End}(E_{j_i}, C_p)$ correspond à un des $4h(D)$ couples $((E, C), g)$ constitués d'une p-isogénie à isomorphisme près (E, C) entre courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ayant multiplication complexe par O_D, et d'un isomorphisme $g\colon O_D \to \mathrm{End}(E, C)$. Ici Φ est la composée de g et de la réduction modulo $\mathcal{Q}$ de $\mathrm{End}(E, C) \to \mathrm{End}(E_{j_i}, C_p)$. Cette correspondance est bijective par égalité des cardinaux. □

La proposition suivante décrit l'action des involutions d'Atkin-Lehner sur les vecteurs de Gross.

Proposition 2.13. — *Avec les hypothèses de la Proposition 2.12, on a* $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$, *et* $w_q(\gamma_D) = \gamma_D$.

Démonstration. — Prouvons d'abord que $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$. Soit τ une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ telle que, pour chaque arête e_i, l'arête $e_{\tau(i)}$ est son isogénie duale. L'involution w_p agit sur les arêtes du graphe

en envoyant e_i sur $-e_{\tau(i)}$. Ainsi on a

$$w_p(\gamma_D) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(D)}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})}(-e_{\tau(i)}),$$

or $\mathrm{End}(e_i) \simeq \mathrm{End}(e_{\tau(i)})$ donc $w_p(\gamma_D) = -\gamma_D$.

Rappelons que w_q agit comme le Frobenius sur les sommets et les arêtes du graphe. Fixons $\mathcal{Q}$ une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au dessus de q et soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que σ se réduit en le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ modulo $\mathcal{Q}$. Considérons $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ l'ensemble des p-isogénies à isomorphismes près entre courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ à multiplication complexe par O_D. D'après la Proposition 2.12,

$$\gamma_D = \sum_{g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(g \mod \mathcal{Q})^*/\{\pm 1\})}(g \mod \mathcal{Q}),$$

donc

$$w_q(\gamma_D) = \sum_{g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(g \mod \mathcal{Q})^*/\{\pm 1\})}(\sigma(g) \mod \mathcal{Q}).$$

Or σ réalise une bijection de $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ dans $\mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ telle que pour tout $g \in \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, on a $\mathrm{End}(\sigma(g) \mod \mathcal{Q}) \simeq \mathrm{End}(g \mod \mathcal{Q})$ donc $w_q(\gamma_D) = \gamma_D$. □

La Proposition 2.12 nous permet de décrire l'image de γ_D par les applications s_* et t_*, en comparant le vecteur γ_D sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ au vecteur Γ_D sur $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$.

Corollaire 2.14. — *Avec les hypothèses de la Proposition 2.12, les arêtes du vecteur de Gross γ_D sur le graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ sont distribuées de la façon suivante : de chaque sommet E_{j_k} dans S_1 partent $H_k(D)$ arêtes de γ_D. Chacune de ces arêtes est précédée du coefficient $2/l$, où l est la longueur de l'arête. En particulier, si le vecteur γ_D ne contient pas d'arêtes de longueur 2 ou 3, on a :*

$$s_*(\gamma_D) = t_*(\gamma_D) = 4\Gamma_D.$$

Démonstration. — Dans la démonstration de la Proposition 2.12, nous avons montré que les $H_k(D)$ plongements optimaux de O_D dans l'ordre maximal $\mathrm{End}(E_{j_k})$ définissent $2H_k(D)$ plongements optimaux de O_D dans des ordres d'Eichler de la forme $\mathrm{End}(E_{j_k}, C_p)$ qui correspondent à des arêtes de $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ partant du sommet $E_{j_k} \in S_1$. Cela se traduit par la formule suivante :

$$\sum_{\substack{i=1\ldots n \\ e_i=(E_{j_k},C_p)}} h_i(D) = 2H_k(D).$$

Si le vecteur γ_D ne contient pas d'arêtes de longueur 2 ou 3, on a :

$$\gamma_D = \sum_{i=1}^{n} h_i(D) e_i.$$

On en déduit que

$$s_*(\gamma_D) = \sum_{k=1}^{g+1} 2H_k(D) E_{j_k} = 4\Gamma_D.$$

D'autre part, pour chaque arête $e = (E_{j_k}, C_p)$, on a

$$s_*(-w_p(e)) = s_*((E_{j_k}/C_p, E_{j_k}[p]/C_p)) = E_{j_k}/C_p = t_*(e).$$

Ce qui implique que $t_*(\gamma_D) = s_*(-w_p(\gamma_D))$. Or d'après la Proposition 2.13, on a $\gamma_D = -w_p(\gamma_D)$. En conséquence $t_*(\gamma_D) = s_*(\gamma_D)$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

En appliquant la Proposition 2.12, on décrit les arêtes de longueur $\neq 1$.

COROLLAIRE 2.15. — *Toutes les arêtes du graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ sont de longueur 1 sauf dans les cas suivants :*

- *Si q est inerte et p scindé dans O_{-4}, il existe exactement deux arêtes de longueur 2. Ces deux arêtes relient le sommet $E_{1728} \in S_1$ au sommet $E_{1728} \in S_2$ et sont échangées par w_q.*
- *Si q est inerte et p scindé dans O_{-3}, il existe exactement deux arêtes de longueur 3. Ces deux arêtes relient le sommet $E_0 \in S_1$ au sommet $E_0 \in S_2$ et sont échangées par w_q.*

En particulier, si on se place dans le cas non ramifié de Ogg (voir Proposition 2.1), il existe deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$. Donc une seule arête exceptionnelle de longueur 2 sur $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$.

Démonstration. — Comme dans la Proposition 2.6, on voit que les arêtes de longueur 2 sont les arêtes de γ_{-4} et les arêtes de longueur 3 sont les arêtes de γ_{-3}.

D'après la formule des traces d'Eichler, si q est scindé ou p est inerte dans O_{-4}, le vecteur γ_{-4} est nul. Supposons que q est inerte et p scindé dans O_{-4}. Soit $E/\overline{\mathbb{Q}}$ l'unique courbe elliptique ayant multiplication par O_{-4}. On sait que le j-invariant de E est 1728. D'après la Proposition 2.12, les arêtes de γ_{-4} correspondent aux réductions modulo q des 2 p-isogénies entre courbes elliptiques à multiplication complexe par O_{-4}. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui se réduit en le Frobenius modulo q. Le morphisme σ agit comme la conjugaison complexe sur O_{-4}, car q est inerte dans O_{-4}. Comme p est scindé dans O_{-4}, l'idéal pO_{-4} se décompose en le produit de deux idéaux P et $\sigma(P)$ dans O_D. Par la théorie de la multiplication complexe, ces idéaux

correspondent à deux p-isogénies conjuguées par σ, notées $[P]$ et $[\sigma(P)]$, de $E \to E$. Ces deux p-isogénies se réduisent en deux arêtes du graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ reliant le sommet $E_{1728} \in S_1$ au sommet $E_{1728} \in S_2$. Ces deux arêtes sont échangées par w_q qui agit comme le Frobenius sur le graphe, ce qui nous donne la forme annoncée de l'ensemble des arêtes de γ_{-4}.

On traite le cas des arêtes de longueur 3 de manière similaire. □

PROPOSITION 2.16. — *Soient O_{D_1} et O_{D_2} deux ordres quadratiques imaginaires de discriminant respectifs D_1 et D_2 premiers à q. Supposons aussi que q soit inerte dans O_{D_1} et O_{D_2}. Il existe une borne B dépendant de q telle que, pour $p \geqslant B$, si p est scindé dans ces deux ordres, les vecteurs de Gross γ_{D_1} et γ_{D_2} sur le graphe dual de la fibre en p de la courbe de Shimura X^{pq} sont sans arêtes communes.*

Démonstration. — Soient α_1 et α_2 tels que $O_{D_i} = \mathbb{Z}[\alpha_i]$, pour $i = 1, 2$. Soient $\phi_i \colon O_{D_i} \to \Omega$ des plongements optimaux des ordres O_{D_i} dans un même ordre maximal $\Omega = \mathrm{End}(E)$, où $E/\overline{\mathbb{F}}_q$ est une courbe elliptique supersingulière.

Remarquons d'abord que $\phi_1(\alpha_1)$ et $\phi_2(\alpha_2)$ ne commutent pas. En effet, s'ils commutent, $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)]$ est un sous-corps commutatif de $B_{q\infty}$ strictement plus grand que $\mathbb{Q}$. Donc il est de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ et est isomorphe à $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1)]$ et à $\mathbb{Q}[\phi_2(\alpha_2)]$, ce qui n'est possible que si ces deux derniers corps sont égaux. Comme les plongements ϕ_i sont optimaux, $\mathbb{Q}[\phi_i(\alpha_i)] \cap \Omega = \mathbb{Z}[\phi_i(\alpha_i)] = \phi_i(O_{D_i})$, ce qui est impossible car, par hypothèse, $O_{D_1} \neq O_{D_2}$.

Comme dans le Corollaire 2.14, chacun de ces plongements ϕ_i définit deux plongements optimaux $O_{D_i} \to \mathrm{End}(E, C^i_{p,j})$ dans des ordres d'Eichler de niveau p, où $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ et $C^i_{p,j}$ est un sous-groupe d'ordre p de E. Plus précisément $C^i_{p,1}$ et $C^i_{p,2}$ sont les deux sous-espaces propres du morphisme restreint $\phi_i(\alpha_i)|_{E[p]}$. Pour prouver que pour p assez grand il n'y a pas de plongement optimal de O_{D_1} et O_{D_2} dans un même ordre d'Eichler de niveau p, il suffit de prouver que pour p assez grand $\phi_1(\alpha_1)|_{E[p]}$ et $\phi_2(\alpha_2)|_{E[p]}$ n'ont pas d'espace propre commun. On identifie ces restrictions avec $(\phi_1(\alpha_1) \mod p)$ et $(\phi_2(\alpha_2) \mod p)$ qui sont des éléments de $\Omega \otimes \mathbb{F}_p \simeq M_2(\mathbb{F}_p)$. Comme $\phi_1(\alpha_1)$ et $\phi_2(\alpha_2)$ ne commutent pas dans $B_{q\infty}$, on a $\mathbb{Q}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)] = B_{q\infty}$. Donc il existe une constante $M \in \mathbb{Z}$ ne dépendant que de $\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)$, telle que $\Omega \subseteq \frac{1}{M}\mathbb{Z}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)]$. Pour p ne divisant pas M, on a $\mathbb{Z}[\phi_1(\alpha_1), \phi_2(\alpha_2)] \otimes \mathbb{F}_p = M_2(\mathbb{F}_p)$. Dans ce cas $(\phi_1(\alpha_1) \mod p)$ et $(\phi_2(\alpha_2) \mod p)$ n'ont pas d'espace propre commun, sinon ils engendreraient un sous-groupe de Borel de $M_2(\mathbb{F}_p)$.

Lorsque ϕ_1 et ϕ_2 parcourent les ensembles finis des plongements optimaux de O_{D_1} et O_{D_2} dans les ordres maximaux, M prend un nombre fini

de valeurs. Donc pour p supérieur à toutes ces valeurs, les vecteurs γ_{D_1} et γ_{D_2} sont sans arête commune. □

3. Groupe des composantes de $\mathbf{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$

On considère le modèle régulier $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ sur $\mathbb{Z}_p$ du quotient d'Atkin-Lehner X^{pq}/w_q, obtenu par éclatement aux points singuliers du modèle décrit par Cherednik et Drinfeld. Parent et Yafaev ont prouvé le présent lemme sur le groupe des composantes de la fibre en p de la jacobienne du quotient d'Atkin-Lehner X^{pq}/w_q.

LEMME 3.1. — *Soient p, q deux nombres premiers tels que $g(X_0(q)) \geqslant 5$, $q \equiv 3 \mod 4$, $p \equiv 5 \mod 12$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Soient $\mathcal{J}$ la composante irréductible exceptionnelle de $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ provenant de la multiplication par ζ_4 et $J \neq \mathcal{J}$ une autre composante irréductible de $\widetilde{X^{pq}/w_q}$. Pour $p \gg q$, on a $(p+1)(\mathcal{J} - J) \neq 0$ dans le groupe des composantes de $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$.*

Démonstration. — Cela découle du Lemme [14, lemma 3.2.3]. □

Le but de ce paragraphe est de généraliser le Lemme 3.1 en supprimant la condition $p \equiv -1 \mod 3$. Nous allons prouver le lemme ci-dessous :

LEMME 3.2. — *Soient p, q deux nombres premiers tels que $g(X_0(q)) \geqslant 6$, $q \equiv 3 \mod 4$, $p \equiv 1 \mod 4$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Soient $\mathcal{J}$ la composante irréductible exceptionnelle de $\widetilde{X^{pq}/w_q}$ provenant de la multiplication par ζ_4 et $J \neq \mathcal{J}$ une autre composante irréductible de $\widetilde{X^{pq}/w_q}$. Pour $p \gg q$, on a $(p+1)(\mathcal{J} - J) \neq 0$ dans le groupe des composantes de $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$.*

Remarque 3.3. — D'après [18, prop. 1.43], le genre de $X_0(q)$ est la partie entière $\lfloor \frac{q+1}{12} \rfloor$ de $\frac{q+1}{12}$ si $q \not\equiv 1 \mod 12$ et $\lfloor \frac{q+1}{12} \rfloor - 1$ si $q \equiv 1 \mod 12$. On en déduit que si $q \geqslant 79$ alors $g(X_0(q)) \geqslant 6$. D'autre part, d'après la Définition 2.3, le poids du vecteur d'Eisenstein modulaire est $w(A_E) = \sum_{k=1}^{g+1} (\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}))^{-1}$, où $g = g(X_0(q))$. Comme, d'après le Corollaire 2.6, $\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}) = 1$ sauf au plus pour deux valeurs de j_k, on a $w(A_E) > g(X_0(q)) - 1 \geqslant 5$.

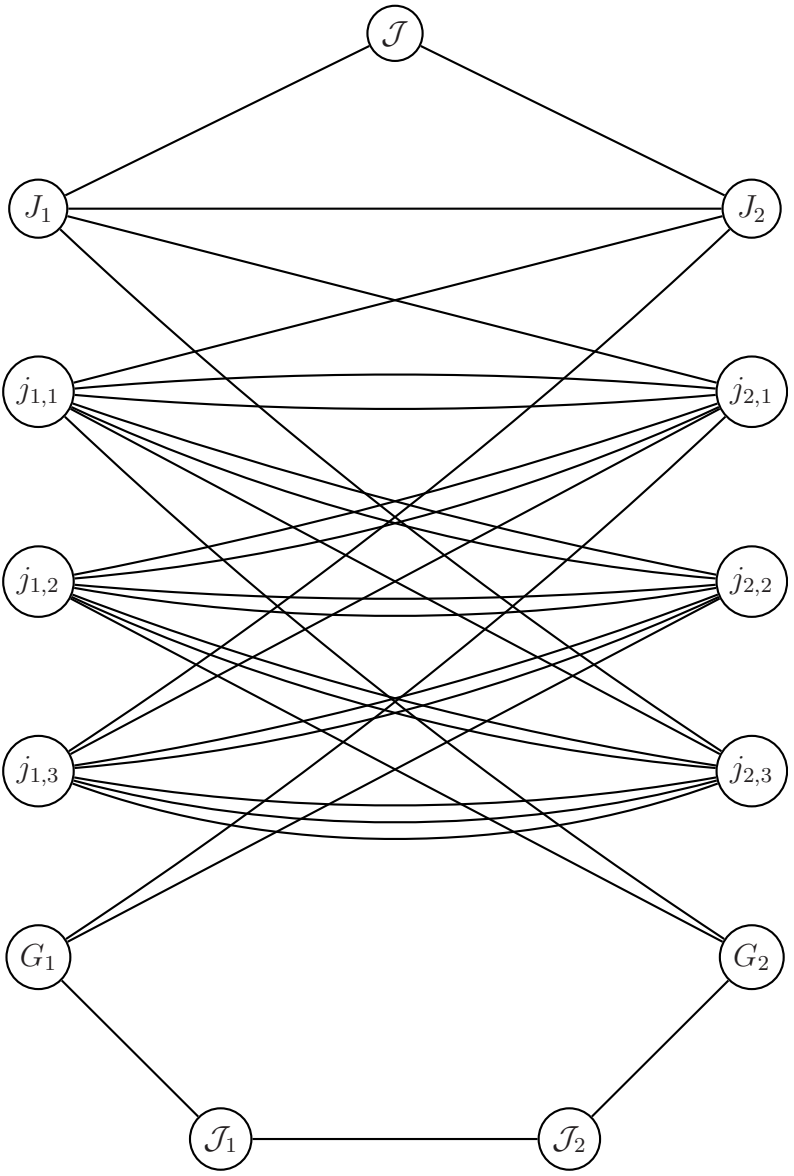
Notation 3.4. — Pour faciliter la compréhension des notations qui suivent, nous invitons le lecteur à consulter l'Exemple 3.5 ci-dessous.

On note $\mathcal{G}((\widetilde{X^{pq}/w_q})_{\mathbb{F}_p})$ le graphe dual de la fibre en p de $\widetilde{X^{pq}/w_q}$. Rappelons que ce graphe est le graphe obtenu à partir du graphe $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$ en remplaçant chaque arête exceptionnelle de longueur l par une chaîne

de l arêtes de longueur 1. On renvoie au Corollaire 2.15 pour une description de ces arêtes. On désigne par $S_1' = S_1/w_q$ et $S_2' = S_2/w_q$ les deux partitions du graphe $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$. L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p})$ est l'union disjointe de S_1', S_2' et de l'ensemble des sommets exceptionnels que nous allons décrire. On note $\mathcal{J}$ le sommet exceptionnel de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)}_{\mathbb{F}_p})$ provenant de l'éclatement de $(X^{pq}/w_q)/\mathbb{Z}_p$ en l'unique point singulier d'épaisseur 2. Le sommet $\mathcal{J}$ est relié par une arête à chacun des deux sommets $J_1 \in S_1'$ et $J_2 \in S_2'$ correspondant au j-invariant $1728 \mod q$. Lorsque $q \equiv -1 \mod 3$ et $p \equiv 1 \mod 3$, on note $G_1 \in S_1'$ et $G_2 \in S_2'$ les deux sommets correspondant à la classe du j-invariant $0 \mod q$. Les sommets G_1 et G_2 sont reliés à deux sommets exceptionnels $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ provenant de l'unique point singulier d'épaisseur 3 après éclatements successifs. On note par $j_{1,1}, j_{1,2}, \ldots, j_{1,l}$ les sommets de S_1' distincts de J_1 et G_1. De même $j_{2,1}, j_{2,2}, \ldots, j_{2,l}$ désignent les sommets de S_2' distincts de J_2 et G_2.

Soient a et b deux sommets du graphe. On note $N(a,b)$ le nombre d'arêtes entre les deux sommets a et b, et $N(a)$ la puissance du sommet a (*i.e.*, le nombre d'arêtes qui partent du sommet a ou arrivent au sommet a).

Exemple 3.5 (Graphe de $\mathcal{G}((\widetilde{X^{13*47}/w_{47}})_{\mathbb{F}_{13}})$*).*



Nous invitons le lecteur à se référer au présent exemple pour faciliter la compréhension des calculs qui suivent. (On note cependant que ce graphe

ne satisfait pas à la condition du Corollaire 3.9 ci-dessous. En effet, dans cet exemple, certains des sommets de S_1' ne sont pas reliés à tous les sommets de S_2').

La preuve du Lemme 3.1 repose sur la description du groupe des composantes donnée par Raynaud [1, thm. 1, p. 274].

LEMME 3.6. — *(« Loi K »). Avec les notations du Lemme 3.2, on a $(p+1)(\mathcal{J}-J)=0$ dans le groupe des composantes de $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$, si et seulement s'il existe une fonction ν de l'ensemble des sommets S de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ dans $\mathbb{Z}$ telle que pour chaque sommet C de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$, on a l'égalité :*

$$\sum_{D\mapsto C}\nu(C)-\nu(D)=\begin{cases}-(p+1)\ \textit{si}\ C=\mathcal{J};\\ p+1\ \textit{si}\ C=J;\\ 0\ \textit{sinon.}\end{cases}$$

où $\sum_{D\mapsto C}$ désigne la somme faite sur tous les sommets D voisins du sommet C avec une multiplicité égale au nombre d'arêtes entre D et C. C'est-à-dire :

$$\sum_{D\in S}N(C,D)(\nu(C)-\nu(D))=\begin{cases}-(p+1)\ \textit{si}\ C=\mathcal{J};\\ p+1\ \textit{si}\ C=J;\\ 0\ \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — Consulter [14, Sublemma 3.1.3.1]. □

Le Lemme 3.6 peut se traduire de manière électrodynamique, on pourra consulter à ce sujet [14, § 3.1] ou [5, II.1]. Identifions le graphe $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ à un circuit électrique de la manière suivante : les sommets du graphe sont les nœuds du circuit et les arêtes du graphe sont des fils reliant ces nœuds. Chacun de ces fils étant d'une résistance de 1 Ohm. Supposons que les nœuds $\mathcal{J}$ et J soient reliées aux pôles d'un générateur électrique, et qu'un courant de $p+1$ Ampères entre dans le circuit en le nœud J et quitte le circuit au nœud $\mathcal{J}$. Soit ν une répartition des potentiels, exprimée en Volts, sur l'ensemble des nœuds du circuit, définie à une répartition constante près. La différence de potentiel entre deux nœuds reliés par un fil A et B est $u(A,B)=\nu(A)-\nu(B)$. Chaque fil entre A et B est parcouru par un courant (éventuellement d'intensité nulle) dirigé de A vers B si $u(A,B)\geqslant 0$ et de B vers A si $u(A,B)\leqslant 0$. La loi d'Ohm affirme que si le fil c, de résistance $r(c)$ est parcouru par un courant dirigé de A vers B, dont l'intensité est $i(c)$ Ampères, alors la différence de potentiel $u(A,B)$ est égale à $r(c)i(c)$ Volts. Dans le cas qui nous intéresse $i(c)=u(A,B)=\nu(A)-\nu(B)$ comme $r(c)=1$. La loi des nœuds de Kirchhoff affirme que pour chaque nœud

A, la somme des intensité des courants arrivant au nœud A est égale à la somme des intensités des courants partant du sommet A. En combinant la loi de Kirchhoff en un nœud C avec la loi d'Ohm sur tous les fils partant de C, on retrouve les équations du Lemme 3.6. Or d'après [1, thm. 1, p. 274] la solution ν de ce système est unique à une fonction constante près. Donc prouver que $(p+1)(\mathcal{J}-J) \neq 0$ revient à prouver que le circuit électrique décrit ne peut pas admettre de répartition de potentiel ν à valeurs entières.

Les lemmes suivants décrivent la répartition des arêtes de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$.

LEMME 3.7. — *Avec les hypothèses du Lemme 3.2, fixons $j \in \mathbb{F}_{q^2}$ un j-invariant supersingulier défini à action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ près, et soit C le sommet de S_1' ou S_2' associé à ce j-invariant. Le nombre $N(C)$ d'arêtes qui partent de C dans le graphe $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ est donné par :*

$(p+1)$ *si j appartient à $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$;*
$(p+1)/2$ *si j appartient à $\mathbb{F}_q$ et $j \not\equiv 0,\ 1728$;*
$(p+3)/4$ *si $j \equiv 1728$;*
$(p+1)/6$ *si $j \equiv 0$ et $p \equiv -1 \mod 3$;*
$(p+5)/6$ *si $j \equiv 0$ et $p \equiv 1 \mod 3$.*

Démonstration. — Le nombre d'arêtes partant de chaque sommet non exceptionnel du graphe $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet correspondant dans le graphe $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$. Le Lemme [14, lemma 3.1.2] et sa preuve donnent le résultat. □

LEMME 3.8. — *Soient $j_1, j_2 \in \mathbb{F}_{q^2}$ deux j-invariants supersinguliers définis à action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ près. On note $C_1 \in S_1'$ et $C_2 \in S_2'$ les sommets associés à ces j-invariants. On note $\epsilon(C_1, C_2) = 2$ si $j_1 \in \mathbb{F}_q$ et $j_2 \in \mathbb{F}_q$ et $\epsilon(C_1, C_2) = 1$ si $j_1 \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ ou $j_2 \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$. Le nombre d'arêtes $N(C_1, C_2)$ entre les sommets C_1 et C_2 dans le graphe $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ est :*

$$\frac{p+1}{w(A_E)} \times \frac{1}{\epsilon(C_1, C_2) w(C_1) w(C_2)} + O_q(\sqrt{p})$$

où $w(A_E) = \sum_{k=1}^{g+1} (\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}))^{-1}$ est le degré du diviseur $A_E \in \mathcal{P}_S$, et $w(C_i) = \mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_i})^*/\{\pm 1\})$.

Démonstration. — On applique le Lemme [14, lemma 3.1.2] qui donne le nombre d'arêtes N entre les deux sommets C_1 et C_2 dans $\mathcal{G}((X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p})$. Le nombre d'arêtes $N(C_1, C_2)$ liant les deux sommets non exceptionnels C_1 et C_2 dans $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$ étant égal à N, ou à $N-1$ si $\{C_1,\ C_2\} = \{J_1,\ J_2\}$ ou $\{C_1,\ C_2\} = \{G_1,\ G_2\}$ et $p \equiv 1 \mod 3$. □

Une conséquence utile du Lemme 3.8 est le corollaire suivant.

Corollaire 3.9. — *Pour $p \gg q$, on a $N(C_1, C_2) > 0$ pour tout $C_1 \in S_1'$ et $C_2 \in S_2'$.*

Dans la suite, nous supposerons que cette condition est satisfaite.

Pour prouver le Lemme 3.2, nous devons traiter le cas où $p \equiv 1 \mod 3$. Si $q \equiv 1 \mod 3$, la seule composante exceptionnelle est $\mathcal{J}$ et la preuve de [14, lemma 3.1.3] reste valable. On se place dans le cas où $q \equiv -1 \mod 3$. Supposons d'abord que J n'est pas une des composantes exceptionnelles $\mathcal{J}_1$ ou $\mathcal{J}_2$. Soient i et j tels que $\{i,j\} = \{1,2\}$. On note $I(G_i) = 0$ si $J \neq G_i$ et $I(G_i) = p+1$ si $J = G_i$. En appliquant la loi K (Lemme 3.6) successivement aux sommets $\mathcal{J}_i$ et $\mathcal{J}_j$, on trouve :

$$(\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(\mathcal{J}_j)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i)) = 0,$$

$$(\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(\mathcal{J}_i)) + (\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j)) = 0.$$

Soit :

$$\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i) = \nu(\mathcal{J}_i) - \nu(\mathcal{J}_j) = \nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j).$$

Donc :

$$\nu(G_i) - \nu(G_j) = 3(\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i)). \tag{3.1}$$

D'autre part en appliquant la loi K au sommet G_i, on trouve :

$$N(G_i, G_j)(\nu(G_i) - \nu(G_j)) + (\nu(G_i) - \nu(\mathcal{J}_i))$$
$$+ \sum_{D \in S_j' \setminus \{G_j\}} N(G_i, D)(\nu(G_i) - \nu(D)) = I(G_i).$$

En combinant avec l'égalité (3.1) (ou directement en appliquant la loi des résistances en série), on trouve :

$$(N(G_i, G_j) + \frac{1}{3})(\nu(G_i) - \nu(G_j)) + \sum_{D \in S_j' \setminus \{G_j\}} N(G_i, D)(\nu(G_i) - \nu(D)) = I(G_i).$$

Pour C_1 et C_2 différents de $\mathcal{J}_1$ et de $\mathcal{J}_2$ on pose :

$$N'(C_1, C_2) = \begin{cases} N(C_1, C_2) + 1/3 \text{ si } \{C_1, C_2\} = \{G_1, G_2\}; \\ N(C_1, C_2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous permet de considérer un système d'équations dont les inconnues sont les $\nu(C)$ où $C \in S_1' \sqcup S_2' \sqcup \{\mathcal{J}\}$, c'est-à-dire $C \neq \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$, et dont les coefficients sont les $N'(C_1, C_2)$ pour $C_1, C_2 \in S_1' \sqcup S_2' \sqcup \{\mathcal{J}\}$. Pour prouver que ce système est sans solution entière, reprenons la preuve de [14, lemma 3.1.3] en remplaçant dans toutes les équations $N(C_1, C_2)$ par $N'(C_1, C_2)$. La preuve de [14, lemma 3.1.3] utilise les valeurs asymptotiques

(à $O_q(\sqrt{p})$ près) de $N(C_1, C_2)$. Ces valeurs étant conservées lorsqu'on remplace $N(C_1, C_2)$ par $N'(C_1, C_2)$. On obtient une preuve du Lemme 3.2 dans le cas où $J \neq \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$.

Il reste à prouver le Lemme 3.2 dans le cas où $J = \mathcal{J}_1$ ou $\mathcal{J}_2$. Comme l'involution w_p échange $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ et laisse invariant $\mathcal{J}$, il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME 3.10. — *Avec les notations du Lemme 3.2, supposons que* $q \equiv -1 \mod 3$ *et* $p \equiv 1 \mod 3$. *Pour* $p \gg q$, *on a* $(p+1)(\mathcal{J} - \mathcal{J}_1) \neq 0$ *dans le groupe des composantes de* $\mathrm{Jac}(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}$.

Démonstration. — On suppose qu'il existe une répartition de potentiels entiers ν, sur les sommets de $\mathcal{G}(\widetilde{(X^{pq}/w_q)_{\mathbb{F}_p}})$, tel qu'un courant de $p+1$ Ampères entre dans le circuit au sommet $\mathcal{J}_1$ et le quitte en $\mathcal{J}$.

Nous allons prouver que pour $p \gg q$ les potentiels $\nu(j_{1,1}), \ldots, \nu(j_{1,l})$ et $\nu(j_{2,1}), \ldots, \nu(j_{2,l})$ sont tous égaux (*cf.* Sous-Lemme 6). Puis nous obtiendrons une contradiction (*cf.* Sous-Lemmes 7 et 8). Fixons J_M un sommet ayant un potentiel maximal dans $S_1' \cup S_2' \setminus \{G_1, G_2\}$. Ainsi que J_m un sommet ayant un potentiel minimal dans $S_1' \cup S_2' \setminus \{J_1, J_2\}$.

SOUS-LEMME 1. — *Soient* i, j *tels que* $\{i, j\} = \{1, 2\}$ *et* $J_M \in S_j'$. *On a la majoration suivante pour l'intensité du courant que* J_M *reçoit de* G_i :

$$N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)) \leqslant \frac{6(p+1)}{(3w(A_E) - 1)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Démonstration. — Remarquons que si $\nu(G_i) \leqslant \nu(J_M)$ la proposition est évidente. On va donc supposer $\nu(G_i) > \nu(J_M)$. Par la loi K exprimée en le sommet G_i,

$$\sum_{D \mapsto G_i} (\nu(G_i) - \nu(D)) = 0,$$

c'est-à-dire

(3.2)
$$\sum_{\substack{D \mapsto G_i \\ D \neq G_j, \mathcal{J}_i}} (\nu(G_i) - \nu(D)) = N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i)).$$

Nous allons majorer $N(G_j, G_i)(\nu(G_j) - \nu(G_i)) + (\nu(\mathcal{J}_i) - \nu(G_i))$. En appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}_1$ on trouve :

$$(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1)) + (\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2)) = p + 1 \ ;$$

et en appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}_2$ on obtient

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2) = \nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2). \tag{3.3}$$

Donc, on a

$$(\nu(\mathcal{J}_1)-\nu(G_1))+(\nu(\mathcal{J}_2)-\nu(G_2))=p+1. \tag{3.4}$$

D'après [14, sublemma 3.1.3.2], on a $\nu(\mathcal{J}_1)\geqslant\nu(G_1),\nu(\mathcal{J}_2)$ donc $\nu(\mathcal{J}_1)-\nu(G_1)\geqslant 0$ et $\nu(\mathcal{J}_2)-\nu(G_2)=\nu(\mathcal{J}_1)-\nu(\mathcal{J}_2)\geqslant 0$ d'après l'égalité (3.3). On a donc

$$\nu(\mathcal{J}_i)-\nu(G_i)\leqslant p+1. \tag{3.5}$$

On applique la loi K au sommet G_j :

$$\sum_{\substack{D\mapsto G_j\\ D\neq G_i,\mathcal{J}_j}}(\nu(D)-\nu(G_j))=N(G_j,G_i)(\nu(G_j)-\nu(G_i))+(\nu(G_j)-\nu(\mathcal{J}_j)).$$

Si on suppose $\nu(G_j)>\nu(G_i)$, on a par hypothèse $\nu(G_i)>\nu(J_M)\geqslant\nu(D)$ pour tout $D\in(S_1'\sqcup S_2')\setminus\{G_1,G_2\}$, on en déduit $\nu(G_j)>\nu(D)$ et

$$N(G_i,G_j)(\nu(G_j)-\nu(G_i))\leqslant\nu(\mathcal{J}_j)-\nu(G_j). \tag{3.6}$$

En combinant l'égalité (3.4) avec l'inégalité (3.6) si $\nu(G_j)>\nu(G_i)$ et en considérant l'inégalité (3.5) si $\nu(G_j)\leqslant\nu(G_i)$, on trouve l'inégalité suivante :

$$N(G_j,G_i)(\nu(G_j)-\nu(G_i))+(\nu(\mathcal{J}_i)-\nu(G_i))\leqslant p+1. \tag{3.7}$$

En combinant l'égalité (3.2) avec la majoration (3.7), on trouve :

$$\sum_{\substack{D\mapsto G_i\\ D\neq G_j,\mathcal{J}_i}}(\nu(G_i)-\nu(D))\leqslant p+1.$$

Comme J_M a un potentiel maximal parmi tous les sommets adjacents à G_i différents de G_j et $\mathcal{J}_i$, on a

$$\sum_{\substack{D\mapsto G_i\\ D\neq G_j,\mathcal{J}_i}}(\nu(G_i)-\nu(J_M))\leqslant p+1.$$

Soit :

$$\big(N(G_i)-N(G_i,G_j)-N(G_i,\mathcal{J}_i)\big)(\nu(G_i)-\nu(J_M))\leqslant p+1.$$

Soit C l'intensité du courant que J_M reçoit de G_i, on a l'inégalité :

$$C=N(G_i,J_M)(\nu(G_i)-\nu(J_M))\leqslant N(G_i,J_M)\frac{(p+1)}{(N(G_i)-N(G_i,G_j)-1)}.$$

On utilise les Lemmes 3.7 et 3.8 :

$$C \leqslant \frac{p+1}{(p+5)/6-1-(p+1)/(18w(A_E))+O_q(\sqrt{p})}N(G_i,J_M),$$
$$\leqslant \left(\frac{18w(A_E)}{3w(A_E)-1}+\frac{O_q(\sqrt{p})}{p+1}\right)\left(\frac{p+1}{w(A_E)\epsilon(G_i,J_M)3w(J_M)}+O_q(\sqrt{p})\right).$$

Finalement :

$$C \leqslant \frac{6(p+1)}{(3w(A_E)-1)\epsilon(G_i,J_M)w(J_M)}+O_q(\sqrt{p}).$$

□

On démontre un résultat similaire pour J_m.

Sous-lemme 2. — *Soient i,j tels que $\{i,j\}=\{1,2\}$ et $J_m \in S'_j$. On a la majoration suivante pour le courant que J_m donne à J_i :*

$$N(J_m,J_i)(\nu(J_m)-\nu(J_i)) \leqslant \frac{4(p+1)}{(2w(A_E)-1)\epsilon(J_i,J_m)w(J_m)}+O_q(\sqrt{p}).$$

Démonstration. — Remarquons que si $\nu(J_i) \geqslant \nu(J_m)$ la proposition est évidente, nous supposerons dans la suite que $\nu(J_i)<\nu(J_m)$. Par la loi K exprimée en le sommet J_i,

$$\sum_{\substack{D\mapsto J_i \\ D\neq J_j,\mathcal{J}}} \nu(D)-\nu(J_i)=N(J_i,J_j)(\nu(J_i)-\nu(J_j))+(\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J})). \tag{3.8}$$

Nous allons majorer la quantité $N(J_i,J_j)(\nu(J_i)-\nu(J_j))+(\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}))$. En appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}$, on trouve :

$$(\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}))+(\nu(J_j)-\nu(\mathcal{J}))=p+1. \tag{3.9}$$

D'après [14, sublemma 3.1.3.2] on a $\nu(\mathcal{J}) \leqslant \nu(J_j)$, donc

$$\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}) \leqslant p+1. \tag{3.10}$$

On applique la loi K au sommet J_j :

$$\sum_{\substack{D\mapsto J_j \\ D\neq J_i,\mathcal{J}}} \nu(D)-\nu(J_j)=N(J_i,J_j)(\nu(J_j)-\nu(J_i))+\nu(J_j)-\nu(\mathcal{J}).$$

Si $\nu(J_j)<\nu(J_i)$, alors comme par hypothèse $\nu(J_i)<\nu(J_m)\leqslant\nu(D)$ pour tout sommet $D\in S'_1\sqcup S'_2\setminus\{J_1,J_2\}$, on a $\nu(J_j)\leqslant\nu(D)$ et

$$N(J_i,J_j)(\nu(J_i)-\nu(J_j)) \leqslant \nu(J_j)-\nu(\mathcal{J}). \tag{3.11}$$

En combinant l'inégalité (3.11) avec l'égalité (3.9) si $\nu(J_j)<\nu(J_i)$ et en considérant l'inégalité (3.10) si $\nu(J_j)\geqslant\nu(J_i)$, on trouve la majoration :

$$N(J_i,J_j)(\nu(J_i)-\nu(J_j))+(\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J})) \leqslant p+1. \tag{3.12}$$

En combinant cette inégalité (3.12) avec l'égalité (3.8), on trouve :

$$\sum_{\substack{D\mapsto J_i\\ D\neq J_j,\mathcal{J}}} \nu(D)-\nu(J_i)\leqslant p+1.$$

Comme J_m a un potentiel minimal parmi tous les sommets adjacents à J_i différents de J_j et $\mathcal{J}$, on a

$$(N(J_i)-N(J_i,\mathcal{J})-N(J_i,J_j))(\nu(J_m)-\nu(J_i))\leqslant p+1,$$

donc

$$\nu(J_m)-\nu(J_i)\leqslant \frac{p+1}{N(J_i)-1-N(J_i,J_j)}.$$

On utilise les Lemmes 3.7 et 3.8 :

$$\nu(J_m)-\nu(J_i)\leqslant \frac{p+1}{(p+3)/4-1-(p+1)/(w(A_E)8)+O_q(\sqrt{p})}.$$

Soit

$$\nu(J_m)-\nu(J_i)\leqslant \frac{8w(A_E)}{2w(A_E)-1}+\frac{O_q(\sqrt{p})}{p+1}.$$

D'autre part, le courant C que J_m donne à J_i est :

$$\begin{aligned} C&=N(J_i,J_m)(\nu(J_m)-\nu(J_i))\\ &=\left(\frac{p+1}{w(A_E)2\epsilon(J_i,J_m)w(J_m)}+O_q(\sqrt{p})\right)(\nu(J_m)-\nu(J_i)).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$C\leqslant \frac{4(p+1)}{(2w(A_E)-1)\epsilon(J_i,J_m)w(J_m)}+O_q(\sqrt{p}).$$

□

Nous allons prouver que J_M ne peut pas être égal à J_1 ou J_2 et que J_m ne peut pas être G_1 ou G_2.

Sous-lemme 3. — *Pour $p\gg q$, on a les inégalités : $\nu(J_1),\nu(J_2)<\nu(J_M)$ et $\nu(G_1)$, $\nu(G_2)>\nu(J_m)$.*

Démonstration. — Supposons que pour $j=1$ ou 2 on a $J_j=J_M$, nous allons obtenir une contradiction pour $p\gg q$. En appliquant la loi de Kirchhoff au sommet J_j on obtient :

$$\sum_{\substack{D\mapsto J_j\\ D\neq\mathcal{J},G_i}} \nu(D)-\nu(J_j)=N(J_j,G_i)(\nu(J_j)-\nu(G_i))+\nu(J_j)-\nu(\mathcal{J})\ ;$$

où i est tel que $\{i,j\}=\{1,2\}$. Par hypothèse, pour tout sommet D adjacent à J_j et différent de $\mathcal{J}$ et de G_i, on a $\nu(D)\leqslant\nu(J_j)$. D'où :

$$N(J_j,G_i)(\nu(G_i)-\nu(J_j))\geqslant\nu(J_j)-\nu(\mathcal{J}). \tag{3.13}$$

On applique le Sous-Lemme 1 à $J_j = J_M$:

$$N(J_j, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_j)) \leqslant \frac{3(p+1)}{2(3w(A_E)-1)} + O_q(\sqrt{p}). \tag{3.14}$$

D'autre part, en appliquant la loi K à $\mathcal{J}$ on trouve :

$$\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_1) + \nu(\mathcal{J}) - \nu(J_2) = -(p+1),$$

comme $\nu(J_1), \nu(J_2) \leqslant \nu(J_j)$ on en déduit que :

$$\nu(J_j) - \nu(\mathcal{J}) \geqslant (p+1)/2. \tag{3.15}$$

En combinant ces trois inégalités (3.13), (3.14) et (3.15) on trouve :

$$\frac{p+1}{2} \leqslant \frac{3(p+1)}{2(3w(A_E)-1)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est contradictoire pour $p \gg q$ comme $w(A_E) > 4/3$ d'après la Remarque 3.3.

Supposons que pour $j = 1$ ou 2 on a $G_j = J_m$, nous allons obtenir une contradiction pour $p \gg q$. En appliquant la loi de Kirchhoff au sommet G_j on obtient :

$$\sum_{\substack{D \mapsto G_j \\ D \neq \mathcal{J}_j, J_i}} \nu(D) - \nu(G_j) = N(G_j, J_i)(\nu(G_j) - \nu(J_i)) + \nu(G_j) - \nu(\mathcal{J}_j) \ ;$$

où i est tel que $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Par hypothèse, pour tout sommet D adjacent à G_j et différent de $\mathcal{J}_j$ et de J_i, on a $\nu(D) \geqslant \nu(G_j)$. D'où :

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \leqslant N(G_j, J_i)(\nu(G_j) - \nu(J_i)),$$

on applique le Sous-Lemme 2 à $G_j = J_m$:

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \leqslant \frac{2(p+1)}{3(2w(A_E)-1)} + O_q(\sqrt{p}). \tag{3.16}$$

D'autre part, en appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}_1$

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2) = p + 1, \tag{3.17}$$

et en appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}_2$

$$\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2) + \nu(\mathcal{J}_2) - \nu(\mathcal{J}_1) = 0,$$

soit

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2) = 2(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(\mathcal{J}_2)). \tag{3.18}$$

En combinant les deux égalités (3.17) et (3.18), on obtient :

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \frac{1}{2}(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2)) = p + 1. \tag{3.19}$$

Comme $\nu(G_j) \leqslant \nu(G_1), \nu(G_2)$, on a l'inégalité : $3/2(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_j)) \geqslant p+1$. Si $j = 1$ on en déduit que $\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) \geqslant 2/3(p+1)$. Si $j = 2$, en combinant (3.17) et (3.18), on obtient $\nu(\mathcal{J}_2) - \nu(G_2) \geqslant 1/3(p+1)$. Dans tous les cas on a :

$$\nu(\mathcal{J}_j) - \nu(G_j) \geqslant \frac{1}{3}(p+1).$$

En combinant avec l'inégalité (3.16) :

$$\frac{1}{3}(p+1) \leqslant \frac{2(p+1)}{3(2w(A_E)-1)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est impossible si $p \gg q$ comme $w(A_E) > 3/2$, d'après la Remarque 3.3. □

On suppose dans la suite que les hypothèses du Sous-Lemme 3 ci-dessus sont satisfaites.

Sous-lemme 4. — *Soient i, j tels que $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $J_M \in S'_j$. Pour $p \gg q$, le potentiel $\nu(J_M)$ ne peut pas être strictement supérieur au potentiel de 3 sommets ou plus de S'_i.*

Démonstration. — D'après les hypothèses, $\nu(J_M)$ est supérieur aux potentiels de tous les sommets de $S'_i \setminus \{G_i\}$. Supposons que $\nu(J_M)$ est strictement supérieur au potentiel de 3 sommets D_1, D_2, D_3 de S'_i. On applique la loi K au sommet J_M en remarquant que $J_M \neq J_j$, d'après le Sous-Lemme 3 :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_M \\ D \neq G_i}} \nu(J_M) - \nu(D) = N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)).$$

Comme $\nu(J_M) - \nu(D) \geqslant 0$ pour $D \in S'_i \setminus \{G_i\}$, on a $\nu(G_i) - \nu(J_M) \geqslant 0$, donc $G_i \notin \{D_1, D_2, D_3\}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{3} N(J_M, D_k)(\nu(J_M) - \nu(D_k)) \leqslant N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)). \tag{3.20}$$

Par hypothèse, $\nu(J_M) - \nu(D_k) \geqslant 1$, on en déduit l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{3} N(J_M, D_k) \leqslant N(J_M, G_i)(\nu(G_i) - \nu(J_M)).$$

On rappelle que

$$N(J_M, D_k) = \frac{p+1}{w(A_E)\epsilon(J_M, D_k)w(J_M)w(D_k)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Comme $\epsilon(J_M, D_k) \leqslant \epsilon(G_i, J_M)$ et $w(D_k) = 1$ sauf pour $D_k = J_i$, auquel cas $w(J_i) = 2$.

$$\sum_{k=1}^{3} N(J_M, D_k) \geqslant \frac{5}{2} \times \frac{(p+1)}{w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

En combinant avec l'inégalité (3.20) et le Sous-Lemme 1, on obtient :

$$\frac{5(p+1)}{2w(A_E)\epsilon(G_i, J_M)w(J_M)} \leqslant \frac{6(p+1)}{(3w(A_E)-1)w(J_M)\epsilon(G_i, J_M)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Comme d'après la Remarque 3.3 $w(A_E) > 5/3$, on obtient une contradiction pour $p \gg q$. □

On démontre un résultat similaire pour J_m.

Sous-lemme 5. — *Soient i, j tels que $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $J_m \in S'_j$. Le potentiel $\nu(J_m)$ ne peut pas être strictement inférieur au potentiel de 3 sommets ou plus de S'_i.*

Démonstration. — D'après les hypothèses, $\nu(J_m)$ est inférieur à tous les potentiels des sommets de $S'_i \setminus \{J_i\}$. Supposons en outre que $\nu(J_m)$ est strictement inférieur au potentiel de 3 sommets D_1, D_2, D_3 de S'_i. On applique la loi K au sommet J_m en notant que $J_m \neq G_j$ par le Sous-Lemme 3 :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_m \\ D \neq J_i}} \nu(D) - \nu(J_m) = N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Comme $\nu(D) - \nu(J_m) \geqslant 0$ pour tout $D \in S'_2 \setminus \{J_i\}$, on a $\nu(J_m) - \nu(J_i) \geqslant 0$, donc $J_i \notin \{D_1, D_2, D_3\}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{3} N(D_k, J_m)(\nu(D_k) - \nu(J_m)) \leqslant N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Comme par hypothèse, $\nu(D_k) - \nu(J_m) \geqslant 1$ pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\sum_{k=1}^{3} N(D_k, J_m) \leqslant N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Soit en appliquant le Lemme 3.8 :

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{p+1}{w(A_E)\epsilon(J_m, D_k)w(J_m)w(D_k)} + O_q(\sqrt{p}) \leqslant N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

Remarquons que $\epsilon(J_m, D_k) \leqslant \epsilon(J_i, J_m)$ et $w(D_k) = 1$ sauf pour $D_k = G_i$, auquel cas $w(G_i) = 3$. On en déduit :

$$\frac{(7/3)(p+1)}{w(A_E)w(J_m)\epsilon(J_i, J_m)} + O_q(\sqrt{p}) \leqslant N(J_m, J_i)(\nu(J_m) - \nu(J_i)).$$

En utilisant la majoration donnée par le Sous-Lemme 2, on obtient :

$$\frac{(7/3)(p+1)}{w(A_E)w(J_m)\epsilon(J_i,J_m)} \leqslant \frac{4(p+1)}{(2w(A_E)-1)w(J_m)\epsilon(J_i,J_m)} + O_q(\sqrt{p}).$$

Ce qui est contradictoire pour $p \gg q$ comme $w(A_E) > 7/2$ d'après la Remarque 3.3. □

Sous-lemme 6. — *Sous l'hypothèse que $g(X_0(q)) \geqslant 6$, pour $p \gg q$ les potentiels $\nu(j_{1,1}), \nu(j_{1,2}), \ldots, \nu(j_{1,l})$ et $\nu(j_{2,1}),\ \nu(j_{2,2}), \ldots, \nu(j_{2,l})$ sont tous égaux. En particulier $\nu(J_M) = \nu(J_m)$.*

Démonstration. — Notons n le cardinal de S_1' (et S_2'). On rappelle que $S_1' = S_1/w_q$ (*cf.* notations 3.4), que le cardinal de S_1 est $g(X_0(q)) + 1$, et que w_q laisse fixe au moins les deux sommets J_1 et G_1 de S_2. Donc $n \geqslant 2 + (g(X_0(q)) - 1)/2$, on en déduit $n \geqslant 5$.

Pour $i = 1, 2$, on fixe $J_{i,M}$ un sommet ayant un potentiel maximal dans l'ensemble $S_i' \setminus \{G_i\}$. Ainsi que $J_{i,m}$ un sommet dans l'ensemble $S_i' \setminus \{J_i\}$ ayant un potentiel minimal. Supposons que $\nu(J_{1,M}) \neq \nu(J_{2,M})$, alors J_M a un potentiel strictement supérieur au potentiel de $n-1$ sommets ou plus de la répartition opposée. Pour $p \gg q$ cela contredit le Sous-Lemme 4. De même si $\nu(J_{1,m}) \neq \nu(J_{2,m})$, alors J_m a un potentiel strictement inférieur au potentiel de $n-1$ sommets ou plus de la répartition opposée ce qui contredit le Sous-Lemme 5 pour $p \gg q$. On a donc $\nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$ et $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m})$ pour $p \gg q$.

Supposons que $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m}) < \nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$. Si $\nu(J_{1,M})$ est strictement supérieur au potentiel de 3 sommets ou plus de S_2' on peut appliquer le Sous-Lemme 4 pour $J_M = J_{1,M}$. Sinon il y a au plus 2 sommets D_1, D_2 de S_2' de potentiel strictement inférieur à $\nu(J_{1,M})$, tous les sommets de $S_2' \setminus \{D_1, D_2\}$ sont de potentiel supérieur ou égal à $\nu(J_{1,M})$, et strictement supérieur à $J_{1,m}$. Il y a donc $n-2$ sommets ou plus de S_2' de potentiel strictement supérieur au potentiel de $J_m = J_{1,m}$. Ceci contredit le Sous-Lemme 5. Finalement pour $p \gg q$ on doit avoir $\nu(J_{1,m}) = \nu(J_{2,m}) = \nu(J_{1,M}) = \nu(J_{2,M})$, ce qui démontre la proposition. □

Dans toute la suite, nous supposons que les hypothèses du Sous-Lemme 6 sont satisfaites. Les potentiels $\nu(j_{1,1}), \ldots, \nu(j_{1,l})$ et $\nu(j_{2,1}), \ldots, \nu(j_{2,l})$ sont donc tous égaux à $\nu(J_m) = \nu(J_M)$.

Sous-lemme 7. — *On a $\nu(J_1) \equiv \nu(J_2) \mod 2$. En outre $\nu(J_1) \neq \nu(J_2)$.*

Démonstration. — En appliquant la loi K au sommet $\mathcal{J}$ on obtient :

$$\nu(J_1) - \nu(\mathcal{J}) + \nu(J_2) - \nu(\mathcal{J}) = p + 1.$$

En considérant cette égalité modulo 2, on trouve :

$$\nu(J_1) \equiv \nu(J_2) \mod 2,$$

ce qui démontre le premier point.

Supposons que $\nu(J_1) = \nu(J_2)$. En appliquant la loi K au sommet J_1, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{l} N(J_1, j_{2,k})(\nu(j_{2,k}) - \nu(J_1)) + N(J_1, G_2)(\nu(G_2) - \nu(J_1)) + (\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_1)) = 0.$$

En appliquant la loi K au sommet J_2, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{l} N(J_2, j_{1,k})(\nu(j_{1,k}) - \nu(J_2)) + N(J_2, G_1)(\nu(G_1) - \nu(J_2)) + (\nu(\mathcal{J}) - \nu(J_2)) = 0.$$

Or, $N(J_1, j_{2,k}) = N(J_2, j_{1,k})$, et $N(J_2, G_1) = N(J_1, G_2)$. En outre, pour $p \gg q$, par le Sous-Lemme 6, on a $\nu(j_{2,k}) = \nu(j_{1,k})$ et par le Corollaire 3.9, $N(J_1, G_2) > 0$. On en déduit : $\nu(G_1) = \nu(G_2)$. D'autre part, en appliquant successivement la loi K aux sommets $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$, on trouve (voir preuve du Sous-Lemme 3 formule (3.19) ou appliquer la loi des résistances en série) :

$$\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_1) + \frac{1}{2}(\nu(\mathcal{J}_1) - \nu(G_2)) = p + 1.$$

En considérant cette égalité modulo 3, comme par hypothèse $p \equiv 1 \mod 3$, on a :

$$\nu(G_2) - \nu(G_1) \equiv 2 \mod 3.$$

En particulier $\nu(G_1) \neq (G_2)$ ce qui est contradictoire. On a donc $\nu(J_1) \neq \nu(J_2)$. □

Le Sous-Lemme 8 suivant nous permet de conclure à une contradiction avec le Sous-Lemme 7 pour $p \gg q$, ce qui achève la preuve du Lemme 3.10. □

Sous-lemme 8. — *On a* $|\nu(J_1) - \nu(J_2)| < 2$ *pour* $p \gg q$.

Démonstration. — Soient i et j tels que $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et $\nu(J_i) \leqslant \nu(J_j)$. Supposons que $\nu(J_j) - \nu(J_i) \geqslant 2$. D'après le Sous-Lemme 3, $\nu(J_M) > \nu(J_j)$, donc $\nu(J_M) \geqslant \nu(J_i) + 3$. En outre, d'après les Sous-Lemmes 3 et 6, on a $\nu(G_j) > \nu(J_m) = \nu(J_M) \geqslant \nu(J_i) + 3$. Donc pour tout sommet $D \in S_j \backslash \{J_j\}$, on a $\nu(D) - \nu(J_i) \geqslant 3$. En appliquant la loi K à J_i, on trouve :

$$\sum_{\substack{D \mapsto J_i \\ D \neq \mathcal{J}}} (\nu(D) - \nu(J_i)) = \nu(J_i) - \nu(\mathcal{J}),$$

donc :

$$\sum_{\substack{D\mapsto J_i\\ D\neq\mathcal{J},J_j}} 3 \leqslant \nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}),$$

c'est-à-dire :

$$3(N(J_i)-1-N(J_i,J_j)) \leqslant \nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}),$$

soit d'après les Lemmes 3.7 et 3.8,

$$3\left(\frac{(p+3)}{4}-1-\frac{p+1}{8w(A_E)}+O_q(\sqrt{p})\right) \leqslant \nu(J_i)-\nu(\mathcal{J}).$$

D'autre part en appliquant la loi K à $\mathcal{J}$

$$\nu(J_1)-\nu(\mathcal{J})+\nu(J_2)-\nu(\mathcal{J})=p+1$$

et en utilisant l'inégalité : $\nu(J_i)\leqslant\nu(J_j)$, on trouve

$$\nu(J_i)-\nu(\mathcal{J})\leqslant\frac{p+1}{2}.$$

On en déduit :

$$\frac{(6w(A_E)-3)(p+1)}{8w(A_E)}+O_q(\sqrt{p})\leqslant\frac{p+1}{2},$$

d'après la Remarque 3.3, on a $w(A_E)>3/2$ et cette inégalité est impossible pour $p\gg q$. □

4. Points rationnels sur les courbes de Shimura

Le critère de [14] repose sur une description du groupe des caractères du quotient d'enroulement de la composante neutre $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$ de la fibre en p du modèle de Néron sur $\mathbb{Z}_p$ de la jacobienne $\mathrm{Jac}(X^{pq})$ de la courbe de Shimura X^{pq}. D'après un théorème de Raynaud (*cf.* [7, 12.4]), le groupe des caractères de $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$ est isomorphe au groupe des cycles sur le graphe dual de la fibre en p de la courbe de Shimura $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$. À l'aide d'une généralisation de la formule de Gross, Parent et Yafaev prouvent que le groupe des caractère du quotient d'enroulement de $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$ est isomorphe au groupe des cycles sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ constitués de projections orthogonales pour l'accouplement de monodromie de vecteurs de Gross sur l'espace des diviseurs de degré 0 sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$.

Rappelons que $\mathcal{L}$ et Y (introduits dans le paragraphe 2) désignent respectivement les $\mathbb{Z}$-modules des chemins et des cycles sur le graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$. On considère également les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}=\mathcal{L}\otimes\mathbb{Q}$ et $Y_{\mathbb{Q}}=Y\otimes\mathbb{Q}$.

On note $I_{pq,e}$ l'idéal d'enroulement de $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs de $\mathbb{T}_{\Gamma_0(pq)}$ annulant toutes les formes modulaires primitives f de poids 2 pour $\Gamma_0(pq)$ telles que $L(f,1) \neq 0$. On a la proposition suivante qui généralise la Proposition 2.7.

PROPOSITION 4.1. — *On note par $\mathbb{E}$ l'espace engendré par les projections orthogonales des vecteurs de Gross sur $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$. On a l'égalité : $\mathbb{E} = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}[I_{pq,e}]$.*

Consulter [14, prop. 4.2]. En combinant la Proposition 4.1 avec le théorème de Raynaud décrivant le groupe des caractères de $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$ comme groupe des cycles sur $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *L'espace $\mathbb{E} \cap Y_{\mathbb{Q}}$ est le groupe des caractères du quotient d'enroulement de $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$.*

Consulter [14, prop. 4.3].

THÉORÈME 4.3. — *Soient p et q deux nombres premiers tels que $q > 245$, $q \equiv 3 \mod 4$, $p \equiv 5 \mod 12$, $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et $p \gg q$. S'il existe $C \in Y \cap \mathbb{E}$, un chemin fermé sur le graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ constitué de projections orthogonales de vecteurs de Gross sur $\mathcal{L}^0$, qui contient les deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 avec une multiplicité première à p, alors la courbe quotient X^{pq}/w_q est sans point rationnel non spécial.*

Démonstration. — Consulter [14, Theorem 5.3]. L'énoncé que nous donnons est légèrement différent : nous remplaçons l'hypothèse « C est un chemin fermé fait de vecteurs de Gross » par « C est un chemin fermé constitué de projection orthogonales de vecteurs de Gross ». En consultant la preuve de Parent et Yafaev, on voit que C correspond à un caractère du quotient d'enroulement de $\mathrm{Jac}(X^{pq})^0_{\mathbb{F}_p}$, ce qui est équivalent, d'après la Proposition 4.2, au fait que C est dans $Y \cap \mathbb{E}$.

On peut aussi noter que le vecteur d'Eisenstein appartient à l'espace engendré par les vecteurs de Gross, et donc que la projection orthogonale sur $\mathcal{L}^0$ d'un chemin en vecteurs de Gross est également constitué de vecteurs de Gross. □

Nous allons utiliser le travail du troisième paragraphe pour généraliser ce critère en supprimant la condition $p \equiv -1 \mod 3$. Ainsi les hypothèses de congruences sur p et q sont équivalentes aux conditions du cas non ramifié de Ogg ((2) Théorème 2.1).

THÉORÈME 4.4. — *Soient p et q deux nombres premiers tel que $q > 245$, $q \equiv 3 \mod 4$, $p \equiv 1 \mod 4$, $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et $p \gg q$. S'il existe $C \in Y \cap \mathbb{E}$, un*

chemin fermé sur le graphe $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ constitué de projections orthogonales de vecteurs de Gross sur $\mathcal{L}^0$, qui contient les deux arêtes exceptionnelles de longueur 2 avec une multiplicité première à p, alors la courbe quotient X^{pq}/w_q est sans point rationnel non spécial.

Démonstration. — Dans la preuve de [14, Theorem 5.3] l'hypothèse $p \equiv -1 \mod 3$ n'est utilisée que dans la preuve du Lemme [14, lemma 3.1.3]. Or nous avons généralisé ce lemme (*cf.* Lemme 3.2) en supprimant cette condition. □

Pour la preuve du Théorème 1.1, nous utiliserons la présente proposition décrivant l'image du vecteur d'Eisenstein-Shimura a_E par les applications s_* et t_*.

PROPOSITION 4.5. — *Si A_E et a_E désignent respectivement les vecteurs d'Eisenstein sur le graphe modulaire $\mathcal{G}(X_0(q)_{\mathbb{F}_q})$ et le graphe de Shimura $\mathcal{G}(X^{pq}_{\mathbb{F}_p})$ (cf. Définitions 2.3 et 2.9), on a : $s_*(a_E) = (p+1)A_E$, et $t_*(a_E) = (p+1)A_E$.*

Démonstration. — Par définition :

$$a_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(e_i)^*/\{\pm 1\})} e_i = \sum_{\substack{(E,C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{(\mathrm{End}(E,C_p)^*/\{\pm 1\})} (E, C_p),$$

où (E, C_p) parcourt l'ensemble des couples constitué d'une courbe elliptique supersingulière E en caractéristique q et d'un sous groupe d'ordre p de E, l'image de a_E par s_* est :

$$s_*(a_E) = \sum_{k=1}^{g+1} \left(\sum_{\substack{(E_{j_k},C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k}, C_p)^*/\{\pm 1\})} \right) E_{j_k}.$$

Pour k fixé, il y a $p+1$ couples de la forme (E_{j_k}, C_p). Par la formule des classes pour le groupe $\mathrm{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\}$ opérant sur l'ensemble des (E_{j_k}, C_p), on a :

$$\sum_{\substack{(E_{j_k},C_p) \\ \text{à isom. près}}} \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k}, C_p)^*/\{\pm 1\})} = \frac{p+1}{\mathrm{card}(\mathrm{End}(E_{j_k})^*/\{\pm 1\})}.$$

Donc $s_*(a_E) = (p+1)A_E$. On montre de même que $t_*(a_E) = (p+1)A_E$. □

Prouvons maintenant notre résultat principal : le Théorème 1.1 dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

THÉORÈME 4.6. — *Soit $q > 245$ un nombre premier avec $q \equiv 3 \mod 4$. Il existe une borne B_q dépendant de q telle que si p est un nombre premier*

vérifiant $p \equiv 1 \mod 4$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ *et* $p \geqslant B_q$, *alors la courbe* X^{pq}/w_q *est sans point rationnel.*

Démonstration. — Soit $l \neq p, q$ un nombre premier. D'après la Proposition 2.8, le vecteur d'Eisenstein modulaire A_E sur $\mathcal{G}((X_0(q))_{\mathbb{F}_q})$ appartient au $\mathbb{Q}-$espace engendré par les vecteurs de Gross de la forme Γ_D, pour $D = -4l^{2n}$, où $n \geqslant 1$. Ces vecteurs Γ_D correspondent à des sous-ordres stricts O_D de l'ordre O_{-4} de conducteurs l^n. On peut donc écrire A_E comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\lambda_0 A_E = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \Gamma_{-4l^{2n}},$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_0 \neq 0$. Pour ne pas avoir de dénominateurs on choisit tous les λ_n multiples de 12. D'après la Proposition 2.16, il existe une borne B telle que, pour $p \geqslant B$, chacun des vecteurs $\gamma_{-4l^{2n}}$ soit sans arête commune avec les vecteurs γ_{-4} et γ_{-3}. On suppose dans la suite $p \geqslant B$, de telle sorte que les vecteurs $\Gamma_{-4l^{2n}}$ ne contiennent pas d'arête exceptionnelle de longueur 2 ou 3. On impose en outre que p ne divise pas λ_0. On suppose également que $p \gg q$ de telle sorte qu'on puisse appliquer le Théorème 4.4.

Considérons le chemin en vecteurs de Gross $C = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \gamma_{-4l^{2n}}$ sur le graphe dual de la fibre en p de la courbe de Shimura X^{pq}. D'après l'hypothèse, $p \equiv 1 \mod 4$, p est scindé dans O_{-4} et dans tous ses sous-ordres stricts $O_{-4l^{2n}}$. En outre chacun de ces vecteurs ne contient que des arêtes de longueur 1. On peut appliquer le Corollaire 2.14 :

$$s_*(C) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n s_*(\gamma_{-4l^{2n}}) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n 4\Gamma_{-4l^{2n}} = 4\lambda_0 A_E.$$

De même $t_*(C) = 4\lambda_0 A_E$. D'autre part d'après la Proposition 4.5, on a : $s_*(a_E) = t_*(a_E) = (p+1)A_E$. Le chemin $C_0 = (p+1)C - 4\lambda_0 a_E$, est un chemin fermé. Pour cela il suffit de voir que $s_*(C_0) = t_*(C_0) = 0$.

D'autre part, le chemin C_0 est la projection orthogonale pour l'accouplement de monodromie du chemin en vecteurs de Gross $(p+1)C$ sur l'espace $\mathcal{L}^0$ des diviseurs de degré 0. Donc C_0 appartient à $\mathbb{E}$. Finalement C_0 est un chemin de $\mathbb{E} \cap Y$. D'après les hypothèses faites sur p, les vecteurs du chemin C ne contiennent pas d'arête exceptionnelle de longueur 2. D'autre part le vecteur d'Eisenstein a_E contient chacune des deux arêtes exceptionnelle de longueur 2 avec multiplicité 1/2. Le chemin C_0 passe par chacune de ces arêtes exceptionnelles avec multiplicité $2\lambda_0$. Donc on peut appliquer le théorème de Parent-Yafaev à ce chemin. On en déduit que la courbe de Shimura X^{pq}/w_q est sans point rationnel non spécial.

Par ailleurs, le nombre de points rationnel spécial sur un quotient d'Atkin-Lehner de courbe de Shimura est explicitement calculé dans [2, prop. 5.1]. On déduit de cette proposition que s'il existe des points rationnels spéciaux sur le quotient X^{pq}/w_q alors soit le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ a nombre de classes 1, soit $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ a nombre de classes 1 soit $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ a nombre de classes 2. Rappelons que pour un entier positif d sans facteurs carré, le corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ est de nombre de classe 1 pour :

$$d \in \{3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163\},$$

et ce corps est de nombre de classe 2 pour :

$$d \in \{5, 6, 10, 13, 15, 22, 35, 37, 51, 58, 91, 115, 123, 187, 235, 267, 403, 427\}.$$

D'après les conditions de l'énoncé, on a $p \equiv 1 \mod 4$ et $q \geqslant 245 > 163$, donc les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ n'ont pas nombre de classes 1. En outre comme $pq > 427$ le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$ n'a pas nombre de classes 2. Il n'y a donc pas non plus de point rationnel spécial sur X^{pq}/w_q. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990, x+325 pages.

[2] N. Bruin, E. V. Flynn, J. González & V. Rotger, « On finiteness conjectures for endomorphism algebras of abelian surfaces », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **141** (2006), n° 3, p. 383-408.

[3] P. Clark, « Local and global points on moduli spaces of potentially quaternionic abelian surfaces », Thèse, Harvard University, 2003, Available at http ://math.uga.edu/∼pete/thesis.pdf.

[4] P. Deligne & M. Rapoport, « Les schémas de modules de courbes elliptiques », in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 143-316. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[5] B. Edixhoven, « On Néron models, divisors and modular curves », *J. Ramanujan Math. Soc.* **13** (1998), n° 2, p. 157-194.

[6] B. H. Gross, « Heights and the special values of L-series », in *Number theory (Montreal, Que., 1985)*, CMS Conf. Proc., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 115-187.

[7] A. Grothendieck, M. Raynaud & D. Rim, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7-I)*, vol. 288, Lecture Notes in Math., Springer, 1972.

[8] B. W. Jordan & R. A. Livné, « On the Néron model of Jacobians of Shimura curves », *Compositio Math.* **60** (1986), n° 2, p. 227-236.

[9] A. Kontogeorgis & V. Rotger, « On the non-existence of exceptional automorphisms on Shimura curves », *Bull. Lond. Math. Soc.* **40** (2008), n° 3, p. 363-374.

[10] W. Luo & D. Ramakrishnan, « Determination of modular forms by twists of critical L-values », *Invent. Math.* **130** (1997), n° 2, p. 371-398.

[11] S. Molina, « Specialisation of Heegner points and applications », Thèse, Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.

[12] A. P. Ogg, « Mauvaise réduction des courbes de Shimura », in *Séminaire de théorie des nombres, Paris 1983–84*, Progr. Math., vol. 59, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985, p. 199-217.

[13] P. J. R. Parent, « Towards the triviality of $X_0^+(p^r)(\mathbb{Q})$ for $r > 1$ », *Compos. Math.* **141** (2005), n° 3, p. 561-572.

[14] P. J. R. Parent & A. Yafaev, « Proving the triviality of rational points on Atkin-Lehner quotients of Shimura curves », *Math. Ann.* **339** (2007), n° 4, p. 915-935.

[15] K. A. Ribet, « On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms », *Invent. Math.* **100** (1990), n° 2, p. 431-476.

[16] V. Rotger, « Which quaternion algebras act on a modular abelian variety ? », *Math. Res. Lett.* **15** (2008), n° 2, p. 251-263.

[17] V. Rotger, A. Skorobogatov & A. Yafaev, « Failure of the Hasse principle for Atkin-Lehner quotients of Shimura curves over $\mathbb{Q}$ », *Mosc. Math. J.* **5** (2005), n° 2, p. 463-476, 495.

[18] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1, xiv+267 pages.

[19] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1992, Corrected reprint of the 1986 original, xii+400 pages.

[20] ———, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994, xiv+525 pages.

[21] C. de Vera & V. Rotger, « Galois representations over fields of moduli and rational points on Shimura curves », preprint available at : http ://www-ma2.upc.edu/vrotger/docs/students/dV-R.pdf.

[22] M.-F. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 800, Springer, Berlin, 1980, vii+169 pages.

Manuscrit reçu le 31 janvier 2011,
révisé le 26 février 2012,
accepté le 22 mai 2012.

Florence GILLIBERT
IMB Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence (France)
florence.gillibert@math.u-bordeaux1.fr