ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GABRIEL MOKOBODZKI

DANIEL SIBONY

Familles additives de cônes convexes et noyaux subordonnés

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 205-220

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_205_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 205-220.

FAMILLES ADDITIVES DE CONES CONVEXES ET NOYAUX SUBORDONNÉS

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

0. Introduction.

En théorie globale du potentiel (cf. [4], [5], [6]) on rencontre la situation suivante : étant donné Ω espace localement compact et $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe (celui des potentiels continus notamment) construire pour tout $\nu \in C$ un noyau V qui applique $\mathcal{C}_K^+(\Omega)$ (1) dans C et tel que $V1 = \nu$ (2). Un outil important est alors l'application Φ qui a tout $\nu \in C$ fait correspondre son support fermé $\Phi(\nu) \subset \Omega$ au sens de la théorie du potentiel, par exemple adhérence de la frontière fine du cône $C - R_+^+\nu$, (cf. [7]). D'où le problème, étant donné un cône abstrait C et une application Φ qu'on appellera porteur, de C dans les fermés de Ω, à quelles conditions existe-t-il pour tout $\nu \in C$ un noyau $V : \mathcal{C}_K^+(\Omega) \to C$ tel que $\Phi(V\varphi) \subset S_\varphi$, support ordinaire de φ et $V1 = \nu$. Dans [1] sont données des conditions suffisantes particulières. On résout ici le problème quand la donnée est plus généralement celle d'une famille (C_ω) de cônes dans C, ω parcourant les ouverts de Ω, la famille étant additive au sens que $C_{\omega_1 \cup \omega_2} = C_{\omega_1} + C_{\omega_2}$. On donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité du noyau, Ω étant localement compact quelconque. On traite ensuite le cas où la famille

(1) Si ω est ouvert $\subset \Omega$, $\mathcal{C}_K(\omega)$ est l'espace de fonction continue à support compact contenu dans ω.

(2) Où $V1 = \sup \{ V\varphi,\ \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega),\ \varphi \leqslant 1 \}$.

additive est donnée par un porteur, c'est-à-dire

$$C_\omega = \{\nu \in C ;\ \Phi(\nu) \subset \omega\}.$$

On donne pour terminer un opérateur de Dynkin dans ce cadre abstrait qui a les propriétés de l'opérateur de Dynkin généralisé que nous avons introduit dans [5].

1. Familles additives.

Soit Ω un espace localement compact, E un espace localement convexe, C un cône convexe saillant dans E. Soit $\mathfrak{R}$ la famille des ouverts relativement compacts de Ω, et soit une application de $\mathfrak{R}$ dans l'ensemble des sous-cônes convexes de C, $\omega \longmapsto C_\omega$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $(\omega_1 \subset \omega_2) \Longrightarrow (C_{\omega_1} \subset C_{\omega_2})$.

2) $C_{\omega_1 \cup \omega_2} = C_{\omega_1} + C_{\omega_2}$.

L'application $\omega \to C_\omega$ définit ce qu'on appellera une *famille additive de cônes convexes* (indexée par les ouverts relativement compacts de Ω).

DÉFINITION 1. — *Un noyau subordonné à la famille de cônes* C_ω *est une application* V *linéaire de* $\mathcal{C}_K(\Omega)$ *dans* $C - C$ *telle que*

$$V(\mathcal{C}_K^+(\omega)) \subset C_\omega, \qquad \forall \omega \in \mathfrak{R}.$$

On notera $\leqslant$ la relation d'ordre définie par le cône C. On se propose de résoudre les problèmes suivants :

Problèmes. — 1) Pour tout $\nu \in \bigcup_\omega C_\omega$ existe-t-il un noyau V subordonné à la famille (C_ω) et $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\omega)$ tel que $V\varphi = \nu$?

2) Dans quelle mesure une famille additive (C_ω) est-elle complètement déterminée par les noyaux qui lui sont subordonnés?

3) Donner des critères pour l'unicité de la solution du problème 1). Cette unicité s'entendra modulo la multiplication par une fonction de $\mathcal{C}_K^+(\Omega)$ convenable.

Propriétés élémentaires.

1) Soit (V_α) une famille d'applications linéaires de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $C - C$ telle que

$$V_\alpha(\mathcal{C}_K^+(\Omega)) \subset C, \qquad \forall \alpha,$$

et

$$C = \sum_\alpha V_\alpha(\mathcal{C}_K^+(\Omega)).$$

On lui associe naturellement une famille additive de cônes en posant pour tout $\omega \in \mathcal{R}$,

$$C_\omega = \sum_\alpha V_\alpha(\mathcal{C}_K^+(\omega)).$$

2) Soit Ω' ouvert relativement compact de Ω. On pose $K = \overline{\Omega}'$. Soit, pour tout ouvert ω de K,

$$S_\omega = C_{\omega \cap \Omega'}.$$

La famille (S_ω) est additive, ce qui permet de *se ramener au cas où* Ω *est compact*, ce qu'on fera.

3) La famille additive (C_ω) étant donnée, soit

$$T_\omega = \bigcup_{\varpi' \subset \omega} C_{\omega'}.$$

La famille T_ω est encore additive. *On supposera donc toujours que* $C_\omega = T_\omega$, $\forall \omega$ ouvert de Ω.

4) Soit Ω un espace localement compact, (C_ω) une famille additive de cônes convexes telle que pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, $C_\omega = \bigcup_{\varpi' \subset \omega,\ \varpi' \text{ compact}} C_{\omega'}$.

Soit maintenant f une application continue de Ω dans un espace localement compact Ω'. Pour tout ouvert 0 de Ω' on pose $S0 = Cf^{-1}(0)$. La famille $(S0)$, indexée par les ouverts de Ω', est encore additive.

5) Soient Ω localement compact, (C_ω) une famille additive de cônes convexes. Soit $C' \subset C = \bigcup_{\omega \subset \Omega} C_\omega$ un sous-cône convexe de C, héréditaire à gauche, c'est-à-dire que

$$(\varphi \in C',\ 0 \leqslant \varphi' \leqslant \varphi) \Longrightarrow (\varphi' \in C').$$

La famille $C'_\omega = C \cap C_\omega$ est encore additive et tout noyau V subordonné à la famille (C'_ω) est subordonné à la famille (C_ω).

Par exemple on pourra prendre $C' = C_v = \bigcup_{n \geqslant 0} [0, nv]$ pour $v \in C$.

La série de remarques précédentes montre les possibilités de réduction des conditions de notre problème à la situation simplifiée suivante :

L'espace Ω *est compact, le cône* C *possède une unité pour l'ordre* u, *c'est-à-dire que* $C = C_u$, *pour* $u \in C$, la famille (C_ω) étant toujours additive.

6) *Recollement de familles additives.* — Soit (Ω_α) un recouvrement ouvert de Ω, et pour tout α une famille additive $(C^\alpha_\omega)_\omega$, ω décrivant l'ensemble des ouverts relativement compacts de Ω_α, avec

$$C^\alpha_\omega = \bigcup_{\varpi' \subset \omega} C^\alpha_{\omega'}.$$

Supposons la condition de compatibilité

$$(\omega \subset \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta, \ \ \omega \text{ ouvert}) \Longrightarrow C^\alpha_\omega = C^\beta_\omega.$$

On peut alors définir sur Ω tout entier une famille additive (C_ω) telle que $C_\omega = C^\alpha_\omega$ lorsque $\omega \subset \Omega_\alpha$. Il suffit de poser

$$C_\omega = \sum_{\substack{\alpha, U \\ \bar{U} \subset \omega}} C^\alpha_U.$$

Signalons qu'on peut de la même manière recoller des familles de noyaux subordonnés.

2. Construction de noyaux subordonnés.

On se placera désormais dans le cadre suivant :

1) Ω est un compact métrisable.

2) L'espace vectoriel $E = C - C$, $C = C_u$ (C admet une unité pour l'ordre) et E est complet pour la norme jauge de l'ensemble, $B = \{v \in E, \ -u \leqslant v \leqslant +u\}$, C est fermé dans E.

3) Pour tout ω, le cône C_ω est complet pour les suites de type l^1.

Rappelons qu'un cône convexe Γ saillant est complet pour les suites du type l^1 si pour tout $v \in \Gamma$, toute suite

$(\nu_n \subset \Gamma)$, telle que $\nu_n \prec \nu$ (ordre de Γ), toute suite $(\alpha_n) \subset \mathbf{R}^+$ telle que $\Sigma\alpha_n < +\infty$, il existe $y \in \Gamma$ et un seul tel que

$$\left(\sum_n \alpha_n\right)\nu \succ y \succ \sum_{n<p} \alpha_n \nu_n \quad \text{et} \quad \left(y - \sum_{n \leqslant p} \alpha_n \nu_n\right) \prec \left(\sum_{n \geqslant p} \alpha_n\right).\nu.$$

$\left(\text{On écrit alors} \quad y = \sum_n \alpha_n \nu_n\right)$.

Théorème 2. — *Sous les hypothèses* 1, 2, 3 *pour tout* $\nu_0 \in \bigcup_\omega C_\omega$, *il existe* V *noyau subordonné à la famille* (C_ω) *tel que* $V1 = \nu_0$.

Démonstration — Soit d une métrique compatible avec la topologie de Ω, δ le diamètre associé à d. Soit Δ l'ensemble des couples (ν, ω), où ω est ouvert contenu dans Ω et $\nu \in C_\omega$. On considère les familles finies suivantes :

$$\mathcal{C} = \{(\nu_\alpha), (\omega_\alpha)\}_{\alpha \in I} \quad (\text{I fini}),$$

telles que pour tout $\alpha \in I$, $(\nu_\alpha, \omega_\alpha) \in \Delta$, avec

$$\begin{cases} \nu_0 = \sum_\alpha \nu_\alpha \\ \Omega = \bigcup_\alpha \omega_\alpha \end{cases}$$

On dira que $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}'$ — et on notera $\mathcal{C}' \prec \mathcal{C}$ — si $\mathcal{C} = \{(\nu_\alpha), (\omega_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, $\mathcal{C}' = \{(\nu_\beta), (\omega_\beta\}_{\beta \in J}$, et il existe φ application de I *sur* J telle que

$$\omega_\beta = \bigcup_{\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)} \omega_\alpha, \qquad \nu_\beta = \sum_{\alpha \in \varphi^{-1}(\beta)} \nu_\alpha \qquad \text{pour tout} \qquad \beta \in J.$$

On posera $\delta(\mathcal{C}) = \sup\ \{\delta(\omega_\alpha);\ \{\nu_\alpha, \omega_\alpha) \in \mathcal{C}\}$. Par abus de langage, les familles $\mathcal{C}$ seront appelées des décompositions finies de ν_0.

Il est facile de voir qu'on peut trouver une suite $(\mathcal{C}_n)$ de décompositions finies, croissante pour la relation $\prec$, et telle que $\delta(\mathcal{C}_n) \leqslant 1/2^n$, $\forall n$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, on pose

$$\overline{\mathcal{C}}_n\varphi = \sum_\alpha \sup_{x \in \omega_\alpha} \varphi(x).\nu_\alpha$$
$$\underline{\mathcal{C}}_n\varphi = \sum_\alpha \inf_{x \in \omega_\alpha} \varphi(x).\nu_\alpha$$

où $\{(v_\alpha), (\omega_\alpha)\} = \mathfrak{T}_n$. On a, pour $m < n$,

$$\underline{\mathfrak{T}}_m\varphi \leqslant \underline{\mathfrak{T}}_n\varphi \leqslant \overline{\mathfrak{T}}_n\varphi \leqslant \overline{\mathfrak{T}}_m\varphi, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega).$$

Pour tout p entier, il existe n_p tel que

$$(n \geqslant n_p) \Longrightarrow \sup_{x, y \in \omega_\alpha} |\varphi(x) - \varphi(y)| < 1/2^p$$

pour tout ouvert ω_α tel que $(v_\alpha, \omega_\alpha) \in \mathfrak{T}_n$.

Par suite, pour tout p et tous $n, m \geqslant n_p$, on a

$$0 \leqslant \overline{\mathfrak{T}}_n\varphi - \underline{\mathfrak{T}}_m\varphi \leqslant \frac{1}{2^p} v_0.$$

Les suites $(\overline{\mathfrak{T}}_n\varphi)$ et $(\underline{\mathfrak{T}}_n\varphi)$ convergent donc vers la même limite dans C. Soit $V\varphi$ cette limite commune. Pour tout ω ouvert contenant le support de φ, montrons que $V\varphi \in C_\omega$. Soit ω un tel ouvert. Il est clair que $\underline{\mathfrak{T}}_n \in C_\omega \forall n$. On a

$$V\varphi = \underline{\mathfrak{T}}_0\varphi + \sum_{p \geqslant 0} (\underline{\mathfrak{T}}_{n_{p+1}}\varphi - \underline{\mathfrak{T}}_{n_p}\varphi).$$

Donc $V\varphi$ est somme d'une suite de type l^1 et par suite appartient à C_ω. Il est clair que $V1 = v_0$. Les opérateurs $\underline{\mathfrak{T}}_n$ sont surlinéaires, les opérateurs $\overline{\mathfrak{T}}_n$ sous linéaires. Par suite V est linéaire sur $\mathcal{C}^+(\Omega)$ et se prolonge naturellement à $\mathcal{C}(\Omega)$. Le théorème est démontré.

Corollaire 3. — 1) *Soit* Ω *un espace localement compact métrisable,* C *un cône convexe,* (C_ω) *une famille additive de cônes convexes dans* C, *complets pour les suites de type* l^1, *avec* $C_\omega = \bigcup_{\substack{\varpi' \subset \omega \\ \varpi' \text{ compact}}} C_{\omega'}$. *Alors, pour tout* $v_0 \in \bigcup_\omega C_\omega$, *il existe un noyau* V *subordonné à la famille* (C_ω) *et* $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$ *tels que* $V\varphi = v_0$.

2) *Soit* (V_α) *la famille des noyaux subordonnés à la famille additive* (C_ω). *On a*

$$C_\omega = \sum_\alpha V^\alpha(\mathcal{C}_K^+(\omega)) = \bigcup_\alpha V^\alpha(\mathcal{C}_K^+(\omega)).$$

On a donc résolu les problèmes 1) *et* 2) *posés au début.*

Problème de l'unicité.

Avant de formuler nos hypothèses pour avoir l'unicité, nous allons montrer quelques conséquences de celle-ci.

Définitions. — 1) *Soit* (C_ω) *une famille additive indexée par les ouverts relativement compacts de* Ω, *et* V *un noyau subordonné à* (C_ω). *On appelle support fermé du noyau* V *le complémentaire du plus grand ouvert* $U \subset \Omega$ *tel que*

$$(\varphi \in \mathcal{C}_K^+(U)) \Longrightarrow (V\varphi = 0);$$

on le notera Supp V.

2) *Un noyau subordonné* V *est dit injectif sur son support si, pour tout couple* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, $(V\varphi_1 = V\varphi_2)$ *implique* $\varphi_1 = \varphi_2$ *sur* Supp V.

Cas où Ω *est compact.*

On dira que la famille (C_ω) a la propriété d'unicité si pour tout $v_0 \in \bigcup_\omega C_\omega$, il existe au plus un noyau V subordonné à (C_ω) tel que $V1 = v_0$.

Cas où Ω *est localement compact.*

Soit, pour tout compact K de Ω la famille additive indexée par les ouverts $\mathcal{O}$ de K : $C'_{\mathcal{O}} = C_{\mathcal{O} \cap \mathring{K}}$.

On dira que la famille (C_ω) (ω parcourant les ouverts relativement compacts de Ω) a la propriété d'unicité, si pour tout K compact $\subset \Omega$ la famille $(C'_{\mathcal{O}})$ ($\mathcal{O}$ ouvert de K) a la propriété d'unicité.

Théorème 4. — *Soit* Ω *compact métrisable,* (C_ω) *une famille additive de cônes complets pour les suites de type* l^1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *La famille* (C_ω) *a la propriété d'unicité.*

2) *Pour tout* $u \in \bigcup_\omega C_\omega$, *et tout couple* ω_1, ω'_2 *d'ouverts avec* $\overline{\omega}_1 \cap \overline{\omega}'_2 = \emptyset$, *si* $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ *avec* $u_1 \in C_{\omega_1}$ *et* $u'_2 \in C_{\omega'_2}$, *on a* $u'_1 \geq u_1$ *(pour l'ordre défini par le cône* C).

Proposition 5. — *Dans les conditions du théorème la propriété d'unicité entraîne que tout noyau subordonné est injectif sur son support.*

Démonstration. — Si $V\varphi_1 = V\varphi_2$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^+(\Omega))$, on considère les deux noyaux

$$V_1 : \varphi \to V(\varphi_1 - \inf(\varphi_1, \varphi_2)).\varphi$$
$$V_2 : \varphi \to V(\varphi_2 - \inf(\varphi_1, \varphi_2)).\varphi.$$

D'après la propriété d'unicité, on a $V_1\varphi = V_2\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, car $V_1 1 = V_2 1$. Supposons $V_1 1 \neq 0$; on a

$$\varphi_1 - \inf(\varphi_1, \varphi_2) = \Sigma\varphi_n$$

avec $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, $\varphi_n \leqslant M/2^n$ et

support de $\varphi_n \subset \{\varphi_1 - \inf(\varphi_1, \varphi_2) > 0\}$ $\forall n$

(M: constante). Il existe donc φ_n tel que $V_1\varphi_n \neq 0$ et $V_2\varphi_n = 0$, ce qui est impossible. Donc $V_2 1 = V_1 1 = 0$, d'où $\varphi_1 = \varphi_2$ sur Supp V.

1) $\Longrightarrow$ 2). Considérons le recouvrement de Ω formé des deux ouverts (ω_1, Ω). La famille $\mathcal{E} = \{u_1, \omega_1), (u_2, \Omega)\}$ est une décomposition de u; soit $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $\varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ sur $\overline{\omega}_1$ et $\varphi = 0$ sur $\overline{\omega}_2'$. On a $\underline{\mathcal{E}}\varphi = u_1$ et $V\varphi \geqslant \underline{\mathcal{E}}'\varphi$, quelle que soit la décomposition $\mathcal{E}'$, donc $V\varphi \geqslant u_1$. De même $V(1 - \varphi) \geqslant u_2'$. D'où $u_1' \geqslant u_1$.

2) $\Longrightarrow$ 1). On s'appuiera sur le lemme suivant :

LEMME 6. — *Soient* V *et* T *deux noyaux subordonnés à* (C_ω) *tels que pour tous* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ *avec* $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi \leqslant 1$ *et* $\psi = 1$ *sur* S_φ, *on ait* $T\psi \geqslant V\varphi$. *Dans ces conditions,* $T\varphi \geqslant V\varphi$ $\forall \varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$.

Démonstration. — Soit $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $h \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, avec $h \leqslant 1$ et $h = 1$ sur $S\varphi$.

Pour n fixé on a

$$\varphi = \sum_{p=1}^{2^n} \left[\inf(p/2^n, \varphi) - \inf\left(\frac{p-1}{2^n}, \varphi\right)\right].$$

On pose

$$g_p^n = \inf(p/2^n, \varphi) - \inf\left(\frac{p-1}{2^n}, \varphi\right).$$

On a

$$S_{g_p^n} \subset [g_{p-1}^n = 1/2^n], \qquad \forall p \geqslant 2$$

($S_{g_p^n}$: support de g_p^n).

D'après l'hypothèse on a

$$V\varphi = Vg_1^n + \sum_{p=2}^{2^n} Vg_p^n \leqslant Vg_1^n + \sum_{p=2}^{2^n} Tg_{p-1}^n.$$

On a

$$s_n = T\varphi - \sum_{p=2}^{2^n} Vg_p^n \in C,$$

$r_n = s_{n-1} - s_n \leqslant 1/2^n$ Th.

Donc les C_ω étant complets pour les suites de type l^1, on a $\Sigma r_n \in C$; par suite, la limite de s_n est dans C, d'où $T\varphi \geqslant V\varphi$. c.q.f.d.

Démontrons l'implication $2) \Longrightarrow 1)$.

Soient V et T deux noyaux subordonnés à la famille (C_ω), et tels que $V1 = T1 = v_0$. Pour montrer qu'ils sont identiques, il suffit de voir qu'ils vérifient les hypothèses du lemme précédent. Soient donc φ, $\psi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, avec $\varphi \leqslant \psi \leqslant 1$ et $[\psi = 1] \supset S\varphi$. On a

$$v_0 = V\varphi + V(1 - \varphi) = T\psi + T(1 - \psi).$$

Il existe alors deux ouverts ω et ω' tels que $V\varphi \in C_\omega$, $T(1 - \psi) \in C_{\omega'}$, avec $\varpi \cap \varpi' = \emptyset$. D'où $V\varphi \leqslant T\psi$, d'après la propriété 2).

Corollaire 7. — *Le théorème précédent est valable lorsqu'on suppose que Ω est localement compact métrisable.*

Cela tient à la définition de l'unicité que nous avons donnée dans le cas où Ω est localement compact.

Définition 8. — *La propriété 2) du théorème précédent sera appelée propriété de partition.*

Remarque. — Voici un cas important où la propriété d'unicité est vérifiée. Supposons que le cône $C = \bigcup_\omega C_\omega$ a la propriété de décomposition de Riesz, que les cônes C_ω sont héréditaires pour leur ordre propre, et enfin que

$$(\omega \cap \omega' = \emptyset) \Longrightarrow C_\omega \cap C_{\omega'} = \{0\}.$$

Dans ces conditions, la propriété 2) du théorème précédent est vérifiée, car si $u = u_1 + u_2'$, on peut écrire $u_1 = v + w$ avec $v \leqslant u_1'$ et $w \leqslant u_2'$, donc $w \in C_{\omega_2'} \cap C_{\omega_1} = \{0\}$.

4. Existence et unicité de noyaux subordonnés, sans hypothèse de métrisabilité.

Lorsque l'espace Ω — compact ou localement compact — est métrisable, on construit les noyaux subordonnés à la famille additive (C_ω) par une méthode de choix récurrent, qui est inapplicable sans métrisabilité. Nous allons voir que la propriété 2) du théorème précédent, équivalente à la propriété d'unicité, permet de construire les noyaux subordonnés à la famille (C_ω) (l'unicité dispensant de faire un choix).

THÉORÈME 9. — *Soit Ω un espace localement compact, (C_ω) une famille additive de cônes l^1-complets, et vérifiant la propriété de partition. Alors, pour tout $v \in \bigcup_\omega C_\omega$, il existe V noyau subordonné à la famille (C_ω) tel que $V\varphi = v$, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, φ égale à 1 sur un ouvert ω vérifiant $v \in C_\omega$. Un tel noyau est unique.*

Démonstration. — 1) On peut toujours se ramener au cas où Ω est compact;

2) Si Ω' est un quotient compact métrisable de Ω, on définit canoniquement une famille additive sur Ω' en posant, pour ω' ouvert de Ω', $C_{\omega'} = C_{\pi^{-1}(\omega')}$, où π est l'application de Ω sur Ω'. La famille $(C_{\omega'})$ définie sur Ω' possède la propriété de partition. Par suite, pour tout $v \in C_{\Omega'}$, il existe un noyau et un seul V' subordonné à $(C_{\omega'})$ tel que $V'1 = v$. Soit Ω'' un quotient (métrisable) compact de Ω', et θ l'application de Ω' sur Ω''. Soit $v \in C_{\Omega''}$ donc $v \in C_{\Omega'}$ et V'' subordonné à la famille $(C_{\omega''})$ définie sur Ω'', tel que $V''1 = v$. Considérons le noyau U sur $\mathcal{C}(\Omega'')$ défini par $U\varphi = V'(\varphi \circ \theta)$. U est subordonné à $(C_{\omega''})$ et $U1 = v$, donc $U = V''$, donc $V''\varphi = V'(\varphi \circ \theta)$, $\forall\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega'')$.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, considérons l'espace $\Omega' = \varphi(\Omega) \subset \mathbf{R}^+$. Sur cet espace, on désigne par $u_{\Omega'}$ la fonction numérique de Ω' dans $\mathbf{R}$ définie par $u_{\Omega'}(x) = x$. On pose $V\varphi = V'(u_{\Omega})$, où V' est le noyau (unique) subordonné à la famille $(C_{\omega'})$ sur Ω' et tel que $V'1 = v$. Il existe donc bien pour tout $v \in C_\Omega$ un noyau subordonné à la famille (C_ω) avec $V1 = v$.

5. Porteurs.

Soit Ω un espace localement compact et C un cône convexe saillant.

Définitions 10. — 1) *Si* $\mathcal{K}_0(\Omega)$ *est l'ensemble des compacts non vides de* Ω, *on appelle porteur sur le cône* C *toute application* Φ *de* C *dans* $\mathcal{K}_0(\Omega) \cup \{\emptyset\}$, *tel que* $(\Phi(v) = \emptyset) \Longleftrightarrow (v = 0)$ *et* $(u,\ v \in C;\ u \leqslant v) \Longrightarrow (\Phi(u) \subset \Phi(v))$.

2) *Le porteur est additif si* $\Phi(u+v) = \Phi(u) \cup \Phi(v);\ u, v \in C$.

3) *Le porteur est décomposable si pour tout* $u \in C$ *et tout recouvrement fini* $(\omega_i)_{i \leqslant n}$ *de* Ω *il existe* $(u_i)_{i \leqslant n} \subset C$ *tel que* $u = \sum\limits_1^n u_i$ *et* $\Phi(u_i) \subset \omega_i$ *pour tout* $i \leqslant n$.

Certaines familles additives de cônes définissent un porteur.

Proposition 11. — *Soit* (C_ω) *une famille additive de cônes convexes* $C_\omega \subset C$, $\forall \omega$ *ouvert relativement compact* $\subset \Omega$.

Supposons que

1) $(\omega \cap \omega' = \emptyset) \Longrightarrow C_\omega \cap C_{\omega'} = \{0\}$.

2) Si $u \in C$, $v \in C_\omega$ *et* $u \leqslant v$, *alors* $u \in C_\omega$.

Alors il existe un porteur Φ *sur* C, *additif et décomposable, tel que*

$$(u \in C_\omega) \Longrightarrow (\Phi(u) \subset \omega),$$

et ce porteur est unique.

Démonstration. — Il suffit de poser $\Phi(u) = \bigcap\limits_{u \in C_\varpi} \varpi$.

L'unicité repose sur le lemme suivant.

Lemme 12. — *Soient* Φ *et* Φ' *deux porteurs sur* C, *tels que* Φ' *est décomposable et* $\Phi(v) \subset \Phi'(v)$, $\forall v \in C$. *Alors* $\Phi(v) = \Phi'(v)$, $\forall v \in C$.

Démonstration. — Soit $v \in C$ tel que $\Phi'(v)$ contienne strictement $\Phi(v)$, $(v \neq 0)$. Soit ω' un ouvert relativement compact tel que $\Phi(v) \subset \omega'$ et $\Phi'(v) \cap \complement \omega' \neq \emptyset$. On peut écrire

$v = v_1 + v_2$ avec

$$\Phi'(v_1) \subset \complement \Phi(v) \qquad \text{et} \qquad \Phi'(v_2) \subset \omega'.$$

Donc $\Phi(v_1) \subset \Phi'(v_1) \subset \complement \Phi(v)$. Or par définition d'un porteur $\Phi(v_1) \subset \Phi(v)$. Donc $\Phi(v_1) = 0$ et $v_1 = 0$. Par suite $v = v_2$ et $\Phi'(v) \subset \omega'$, contrairement au choix de ω'.

Pour achever la preuve de la proposition précédente, on s'appuiera, sur le lemme suivant.

Notation. — On notera $v \tilde{\in} C_\omega$ si $v \in C_{\omega'}$ pour un ω' tel que $\varpi' \subset \omega$.

LEMME 13. — 1) $\Phi(v) = \bigcap_{v \tilde{\in} C_\omega} \omega$.

2) *Pour tout* $v \in C$, *la famille des* ω *tels que* $v \tilde{\in} C_\omega$ *est filtrante décroissante.*

3) $(\Phi(u) = \emptyset) \Longrightarrow (u = 0)$.

Démonstration. — 1) est évident, et 3) résulte de 2). Démontrons donc 2). Soient ω_1, ω_2 tels que $v \tilde{\in} C_{\omega_1}$, $v \tilde{\in} C_{\omega_2}$. Soient ω'_1, ω'_2 tels que $\varpi'_i \subset \omega_i$ et $v \in C_{\omega'_i} (i = 1,2)$.

On a $\varpi'_1 \cap \varpi'_2 \subset \omega_1 \cap \omega_2$. Soit ω'_3 un ouvert tel que

$$\omega'_1 \cap \omega'_2 \subset \omega'_3 \subset \varpi'_3 \subset \omega_1 \cap \omega_2.$$

On peut écrire $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in C_{\omega'_3}$ et $v_2 \in C_{\omega_1 \setminus (\overline{\omega'_1 \cap \omega'_2})}$.

Or $v_2 \leqslant v$, donc $v_2 \in C_{\omega'_2}$. Donc, comme $C_{\omega'_2} \cap C_{\omega_1 \setminus (\overline{\omega'_1 \cap \omega'_2})} = \{0\}$, $v_2 = 0$. Donc $v \in C_{\omega'_3}$. c.q.f.d.

Il est clair alors que l'application Φ est un porteur sur C, décomposable et additif.

Remarque. — Pour établir la proposition précédente, on n'a pas fait usage de la convexité des cônes C_ω. De fait, on peut introduire la notion de famille (C_ω) décomposable (c'est-à-dire $C_{\omega_1 \cup \omega_2} \subset C_{\omega_1} + C_{\omega_2}$) de cônes quelconques. La proposition reste vraie dans ce cas.

DÉFINITION 14. — C *étant un cône convexe et* Φ *un porteur sur* C, *un noyau* V (*application linéaire de* $\mathcal{C}^+_K(\Omega)$ *dans* C) *est dit subordonné au porteur* Φ *si*

$$\Phi(V\varphi) \subset S\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^+_K(\Omega).$$

Remarque. — Si on part d'une famille (C_ω) vérifiant les conditions de la proposition, on lui associe canoniquement un porteur Φ, et il est équivalent de dire qu'un noyau est subordonné au porteur Φ ou à la famille (C_ω).

PROPOSITION 15. — *Soit Φ un porteur sur C, Ω étant localement compact. Tout noyau V subordonné à Φ est injectif sur son support.*

Démonstration. — Si $V\varphi_1 = V\varphi_2 \neq 0$ $(\varphi_i \in \mathcal{C}_K^+(\Omega))$, on peut toujours supposer $\inf(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ dans Ω. Si $\varphi_1(x) \neq 0$ pour un $x \in \operatorname{Supp} V$, soit $\varphi_1' \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, tel que $\varphi_1' \leqslant \varphi_1$, $V\varphi_1' \neq 0$, et $S\varphi_1' \cap S\varphi_2 = \emptyset$. On a alors $\Phi(V\varphi_1') \subset S\varphi_1'$, et comme $V\varphi_1' + V(\varphi_2 - \varphi_1') = V\varphi_2 \neq 0$, on a $\Phi(V\varphi_1') \subset S\varphi_2$. D'où $V\varphi_1' = 0$, ce qui est contradictoire.

Voici un critère permettant de vérifier la propriété de partition et par là même l'existence et l'unicité d'un noyau subordonné à un porteur.

PROPOSITION 16. — *Supposons que C possède la propriété de décomposition de Riesz, et soit Φ un porteur sur C. La propriété de partition est alors vérifiée, c'est-à-dire, si $u = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ $(u_i,\ u_i' \in C)$ et si $\Phi(u_1) \cap \Phi(u_2') = \emptyset$ alors $u_1' \geqslant u_1$.*

Démonstration. — On décompose $u_1 = v + w$ avec $v \leqslant u_1'$ et $w \leqslant u_2'$. Or $w = 0$, car on doit avoir $\Phi(w) \subset \Phi(u_1) \cap \Phi(u_2') = \emptyset$. Donc $u_1 = v \leqslant u_1'$.

6. Opérateur de Dynkin abstrait.

Soit C un cône convexe, Ω localement compact, Φ un porteur additif sur C. On suppose vérifiée la propriété de partition.

DÉFINITION 17. — *Soit $v \in C - C$, et ω un ouvert $\subset \Omega$. On dira que v est C-positif sur ω — ou plus simplement positif — si pour tout compact $K \subset \omega$ il existe $w \in C$ avec $\Phi(w) \subset \complement K$ tel que $v + w \in C$.*

PROPOSITION 18. — *Soit* V *un noyau subordonné à* C *et* $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{Supp}\ V)$. *Alors pour tout ouvert* ω,

$$(V\varphi \geqslant 0 \quad dans \quad \omega) \Longleftrightarrow (\varphi \geqslant 0 \quad dans \quad \omega).$$

Démonstration. — $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Si $V\varphi \geqslant 0$ dans ω, supposons $\varphi(x) < 0$ pour $x \in \omega$, donc $\varphi < 0$ dans un ouvert $\delta \subset \omega$. On a $\varphi^+ = 0$ dans δ, donc $-V\varphi^- \geqslant 0$ dans δ. La proposition résulte alors du

LEMME 19. — *Soit* $u \in C$ et $-u \geqslant 0$ *dans l'ouvert* ω. *Alors* $\Phi(u) \cap \omega = \emptyset$.

En effet, pour tout K compact $\subset \omega$ il existe $w \in C$ avec $\Phi(w) \subset \complement K$ et $w - u \in C$, donc $w = u + u'$, d'où $\Phi(u) \subset \complement K$.

DÉFINITION 20. — *Soit* $v_0 \in C$ *fixé. Pour tout* $u \in C - C$ *et tout* $x \in \Omega$, *on pose*

$$\mathrm{A}u(x) = \inf_{\substack{\omega \searrow x \\ \omega \text{ ouvert}}} \{\lambda > 0 ; \lambda v_0 - u \geqslant 0 \quad dans \quad \omega\}.$$

THÉORÈME 21. — *Pour tout noyau* V *subordonné à* C *tel que* $V1 = v_0$, *on a* $AV\varphi = \varphi$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}(\Phi(v_0))$.

Démonstration. — Soit $\lambda > AV\varphi(x)$. La fonction $AV\varphi$ étant s.c.s., on a $\lambda > AV\varphi$ dans $\omega \ni x$. Donc $V(\lambda - \varphi) \geqslant 0$ dans ω, donc $\lambda \geqslant \varphi$ dans ω d'après la proposition. Réciproquement, si $\lambda > \varphi(x)$, $\lambda > \varphi$ dans ω, donc $V(\lambda - \varphi) \geqslant 0$ dans ω, donc $\lambda \geqslant AV\varphi(x)$.

Moyennant la propriété de partition et de décomposabilité du porteur, l'opérateur A possède une propriété de positivité qui s'exprime ainsi :

THÉORÈME 22. — *Supposons le porteur* Φ *décomposable et possédant la propriété de partition. Alors pour tout* $u \in C - C$, *on a* $(\mathrm{A}u \leqslant 0$ *dans* $\Omega) \Longrightarrow (u \in -C)$.

Pour le démontrer on utilisera les résultats suivants :

LEMME 23. — *Soit* $v_0, v \in C$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $v_0 - v \geqslant 0$ *dans l'ouvert* $\omega \subset \Omega$.

2) *Pour toute décomposition de* v, $v = v_1 + v_2$, $v_1, v_2 \in C$, *avec* $\Phi(v_1) \subset \omega$, *on a* $v_0 \geqslant v_1$, *c'est-à-dire* $v_0 - v_1 \in C$.

Démonstration. — 1) $\Longrightarrow$ 2). Soit $v = v_1 + v_2$ ($v_i \in C$) avec $\Phi(v_1) \subset \omega$. Il existe $w \in C$ avec $\Phi(w) \cap \Phi(v_1) = \emptyset$ et tel que $v_0 - v + w = t \in C$.

Donc $v_0 + w = v_1 + v_2 + t$. D'après la propriété de partition, on a bien $v_0 - v_1 \in C$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Φ étant décomposable, pour tout compact $K \subset \omega$, il existe une décomposition de $v : v = v_1 + v_2$ avec $\Phi(v_1) \subset \omega$ et $\Phi(v_2) \subset \complement K$.

Par hypothèse, $v_0 - v_1 \in C$, donc $v_0 - v + v_2 = v_0 - v_1 \in C$, et $\Phi(v_2) \subset \complement K$.

Lemme 24. — *Soit* $u \in C - C$, $t \in C$, *tels que* $u + t \geqslant 0$. *On suppose* $u \geqslant 0$ *sur l'ouvert* ω.

Alors pour toute décomposition $t = t_1 + t_2$ *de* t *telle que* $\Phi(t_1) \subset \omega$, on a $u + t - t_1 = u + t_2 \geqslant 0$.

Démonstration. — On a $u + t = v \in C$. Soit $w \in C$ tel que $\Phi(w) \cap \Phi(t_1) = \emptyset$ et $w + u = s \in C$, un tel w existe, car $u \geqslant 0$ sur ω. On a $u = s - w = v - t$, c'est-à-dire $s + t = v + w$. Donc $v + w = s + t_1 + t_2$. D'après la propriété de partition, on a $t_1 \leqslant v$, donc

$$v - t_1 = u + t - t_1 = u + t \in C.$$

c.q.f.d.

On en déduit — le porteur Φ étant décomposable — la

Proposition 25. — *Soit* $v \in C - C$; v *est* $\geqslant 0$ *sur l'ouvert* ω, *si et seulement si pour tout compact* $K \subset \omega$ *on peut écrire*

$$v = s + (t - w), \qquad s, t, w \in C,$$

avec $\Phi(s) \subset \omega$, $\Phi(t) \cup \Phi(w) \subset \complement K$.

Proposition 26. — *Soit* $u \in C - C$, ω_1 et ω_2 *deux ouverts de* Ω. *Si* u *est* $\geqslant 0$ *sur* ω_1 *et sur* ω_2, *alors* u *est* $\geqslant 0$ *sur* $\omega_1 \cup \omega_2$.

Démonstration. — Soit K compact $\subset \omega_1 \cup \omega_2$. On écrit $K = K_1 \cup K_2$ avec $K_i \subset \omega_i$. Comme $u \geqslant 0$ sur ω_1, il existe $v_1 \in C$ avec $\Phi(v_1) \subset \complement K_1$ tel que

$$u + v_1 \in C.$$

Soit $v_1 = w_1 + t_1$ une décomposition de v_1 telle que

$$\Phi(w_1) \subset \omega_2 \qquad \text{et} \qquad \Phi(t_1) \subset \complement K_2.$$

D'après le lemme précédent, puisque $u \geqslant 0$ dans ω_2, on a encore $u + t_1 \in C$. On a aussi $\Phi(t_1) \subset (\complement K_1) \cap (\complement K_2) = \complement K$. Donc u est $\geqslant 0$ dans $\omega_1 \cup \omega_2$.

Remarque. — Il résulte de la proposition précédente que si u est $\geqslant 0$ sur un recouvrement $(\omega_i)_{i \in I}$ d'un ouvert ω, u est $\geqslant 0$ sur ω.

Démonstration du théorème 22. — On peut supposer Ω compact. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un recouvrement ouvert fini de Ω, soit $\omega_1, \ldots, \omega_u$ avec $\varepsilon v_0 - u \geqslant 0$ dans ω_i, $i \leqslant u$. Donc $\varepsilon v_0 \geqslant u$ dans Ω, donc $u \in - C$.

Remarque. — Les constructions et résultats de ce travail s'appliquent en théorie du potentiel (cf. [2], [5], [7]); leur intérêt est de rendre inutiles certaines hypothèses de métrisabilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea, Axiomatic theory of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, 15, 283-312.

[2] W. Hansen, *C.R. Ac. Sc.*, 265, sér. A, (1967), 53.

[3] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, 12, (1962), 415-571.

[4] Hunt, Markov Processes and Potentials, *Illinois J. of Math.*, 1, (1957), 44-93 et 316-369.

[5] G. Mokobodzki et D. Sibony, Théorie globale du potentiel, *C.R. Ac. Sc.*, 264, sér. A, 506-509.

[6] G. Mokobodzki et D. Sibony, Cônes de fonctions et théorie du potentiel, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, IHP, Paris, (1966-67), n° 8 et 9.

[7] G. Mokobodzki et D. Sibony, Cônes adaptés de fonctions continues, *Séminaire Choquet*, t. 6, (1966-67), n° 5, 35 p.

[8] G. Mokobodzki et D. Sibony, Sur une propriété caractéristique du cône des potentiels, *C.R. Ac. Sc.*, 266, sér. A, 215.

Manuscrit reçu le 15 avril 1968.

Gabriel Mokobodzki et Daniel Sibony,
Institut Poincaré,
11, rue Pierre-Curie
Paris, 5e.