



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Thomas MORZADEC

Laminations géodésiques plates

Tome 66, n° 1 (2016), p. 105-141.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_1_105_0



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2016,

Certains droits réservés.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

LAMINATIONS GÉODÉSIQUES PLATES

par Thomas MORZADEC

RÉSUMÉ. — Depuis leur introduction par Thurston, les laminations géodésiques sur les surfaces hyperboliques interviennent dans de nombreux domaines. Dans cet article, on introduit une généralisation des laminations géodésiques sur les espaces métriques complets, géodésiques, localement $CAT(0)$, tels que le bord à l'infini de leur revêtement universel est muni d'un ordre cyclique, invariant par l'action du groupe de revêtement. On étudie ces nouveaux objets sur les surfaces munies de structures de demi-translation et sur les graphes (métriques) finis. Le résultat principal de l'article est un théorème de classification des laminations géodésiques sur les surfaces compactes munies de structures de demi-translation. On démontre aussi que tous les graphes (métriques) finis, connexes, enrubannés, sans sommet terminal, hormis quatre (à homéomorphisme près), sont le support d'au moins une lamination géodésique plate avec une infinité indénombrable de feuilles, dont aucune n'est périodique à partir d'un certain temps.

ABSTRACT. — Since their introduction by Thurston, geodesic laminations on hyperbolic surfaces occur in many contexts. In this paper, we propose a generalization of geodesic laminations on locally $CAT(0)$, complete, geodesic metric spaces, whose boundary at infinity of the universal cover is endowed with an invariant total cyclic order. Then we study these new objects on surfaces endowed with half-translation structures and on finite metric graphs. The main result of the paper is a theorem of classification of geodesic laminations on a compact surface endowed with a half-translation structure. We also show that every finite connected metric fat graph, without extremal point, outside four homeomorphism classes, is the support of a geodesic lamination with uncountably many leaves none of which is eventually periodic.

1. Introduction.

L'objet principal de cet article est de proposer et d'étudier une généralisation des laminations géodésiques sur les surfaces hyperboliques (voir

Mots-clés: lamination géodésique, surface munie d'une structure de demi-translation, différentielle quadratique holomorphe, feuilletage singulier, surface hyperbolique.

Classification math. : 57M50, 51M05, 57R30, 30F60, 30F30, 30F35.

par exemple [3]) à celles sur les espaces métriques localement CAT(0) enrubannés (voir ci-dessous), plus particulièrement aux surfaces munies de structures de demi-translation (c'est-à-dire de structures plates à holonomie $\{\pm \text{Id}\}$). Une motivation, qui fera l'objet d'un travail ultérieur, est d'étudier en profondeur les dégénérescences de tels objets, comme initié dans [8]. Dans le cas des arbres, cette notion de lamination géodésique ne doit pas être confondue avec celle introduite dans par exemple [1] et [6].

Soient (X, d) un espace métrique géodésique complet, localement CAT(0), et $p : (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ un revêtement universel. On note $\partial_\infty \tilde{X}$ le bord à l'infini de (\tilde{X}, \tilde{d}) et Γ le groupe de revêtement de p . Un *ordre cyclique* sur $\partial_\infty \tilde{X}$ est une application $o : (\partial_\infty \tilde{X})^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, invariante pour l'action diagonale de Γ sur $(\partial_\infty \tilde{X})^3$, analogue à l'ordre cyclique sur le cercle défini par un choix d'orientation (c'est-à-dire $o(x, y, z)$ vaut 0 si x, y et z ne sont pas deux à deux distincts, vaut 1 si x, y et z sont ordonnés dans le sens direct, et -1 sinon), voir par exemple [16, 2.3.1].

On dit que (X, d) est *enrubanné* si $\partial_\infty \tilde{X}$ est muni d'un tel ordre cyclique o . Deux couples de points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\partial_\infty \tilde{X}$ sont dits *entrelacés* si les points sont deux à deux distincts et si $o(x_1, x_2, y_1) = -o(x_1, y_2, y_1)$, et deux géodésiques locales de (X, d) sont dites *entrelacées* si elles ont des relevés dans \tilde{X} dont les couples de points à l'infini sont entrelacés. On munit l'ensemble des géodésiques locales, orientées mais non paramétrées, de (X, d) de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte par l'action par translations à la source de \mathbb{R} sur les géodésiques locales paramétrées, que l'on appelle *topologie des géodésiques*.

DÉFINITION 1.1. — *Une lamination géodésique de (X, d, o) est un ensemble non vide Λ de géodésiques locales complètes de (X, d) , définies à changements d'origine près, dont les éléments sont appelés feuilles, tel que :*

- *les feuilles de Λ sont non auto-entrelacées et deux à deux non entrelacées ;*
- *Λ est invariant par changements d'orientation des feuilles ;*
- *Λ est fermé pour la topologie des géodésiques.*

On appellera support de Λ la réunion des images des feuilles de Λ .

Soit Σ une surface connexe, orientable (sans bord pour simplifier dans cette introduction). Une *structure de demi-translation* (ou *structure plate à holonomie $\{\pm \text{Id}\}$*) sur Σ est la donnée d'une partie discrète Z de Σ (éventuellement vide) et d'une métrique euclidienne sur $\Sigma - Z$ à singularités coniques d'angles $k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 3$ aux points de Z , telle que l'holonomie de tout lacet fermé, \mathcal{C}^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ soit contenue dans $\{\pm \text{Id}\}$. Nous renvoyons aux parties 2.4 et 2.5 notamment pour le

cas à bord. La surface Σ munie d'une structure de demi-translation est alors un espace métrique (Σ, d) , complet et localement $\text{CAT}(0)$, qui est naturellement enrubanné (voir la remarque 2.9).

Une lamination *cylindrique* sur (Σ, d) est une lamination dont les images des feuilles sont contenues dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré (elles sont alors périodiques). Une lamination Λ de (Σ, d) est dite *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte. C'est alors l'adhérence, pour la topologie des géodésiques, de la réunion d'une feuille ℓ et de son inverse. Si l'image de ℓ n'est pas compacte, alors Λ est dite *de type récurrent*. Nous montrerons qu'alors toutes les feuilles de Λ sont d'image dense dans un domaine de (Σ, d) , c'est-à-dire l'adhérence d'un ouvert connexe, bordé par des géodésiques locales périodiques, s'il n'est pas égal à Σ , et que les images des feuilles régulières (i.e. qui ne rencontrent pas de singularité) sont les feuilles régulières du feuilletage vertical d'une différentielle quadratique holomorphe sur Σ . Si l'image de ℓ est compacte (c'est alors un graphe fini), et si ℓ ou son inverse n'est pas périodique à partir d'un certain temps, alors Λ est dite *de type graphe fini* (nous montrerons qu'alors toutes ses feuilles ont la même image, et qu'aucune n'est périodique à partir d'un certain temps). Une paire de feuilles périodiques opposées est également un exemple de lamination minimale.

L'ensemble des géodésiques locales d'images les feuilles d'un feuilletage vertical minimal d'une différentielle quadratique holomorphe q sur Σ , est un exemple de lamination plate minimale de type récurrent, pour la structure de demi-translation définie par q (voir le lemme 4.12 pour les feuilles singulières).

On dit qu'un bout d'une feuille d'une lamination *aboutit* dans une sous-lamination minimale ou dans une sous-lamination cylindrique si elle admet un rayon dans la classe du bout qui est un rayon d'une feuille de la composante minimale ou un rayon d'une composante de bord du cylindre plat correspondant. Nous renvoyons à la partie 6 pour plus de détails. Le résultat principal de cet article est le théorème suivant de classification des laminations géodésiques sur (Σ, d) , si Σ est compacte.

THÉORÈME 1.2. — *Soit Λ une lamination géodésique sur une surface compacte, connexe, munie d'une structure de demi-translation. Alors Λ est la réunion d'un nombre fini de sous-laminations cylindriques, et de sous-laminations minimales de type récurrent ou de type graphe fini, ou paire de feuilles périodiques opposées d'images non contenues dans un cylindre plat (non dégénéré), et de feuilles isolées (pour la topologie des géodésiques)*

dont chacun des bouts aboutit dans une sous-lamination minimale ou dans une sous-lamination cylindrique.

Si G est un graphe métrique (voir la partie 5), une *orientation cyclique* de G est la donnée, pour chaque sommet x de G , d'un ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons géodésiques issus de x . On appelle *graphe cycliquement ordonné* un graphe muni d'une orientation cyclique. Dans cet article, on montre aussi le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3 (voir le théorème 5.2). — *Soit (G, or) un graphe fini, connexe, cycliquement ordonné, sans sommet terminal. Alors G est le support d'une lamination minimale non dénombrable, donc notamment dont aucune feuille n'est périodique à partir d'un certain temps, si et seulement si (G, or) n'est pas isomorphe à un cercle, une paire d'haltères, un huit plat ou un théta plat, par un isomorphisme préservant l'orientation cyclique (c'est-à-dire $\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \ominus$, où les orientations cycliques sont données par l'orientation du plan).*

Sauf mention du contraire, on supposera toujours que Σ est un revêtement, éventuellement trivial, d'une surface compacte. On note $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ_{Σ} . Si m est une métrique hyperbolique complète et d est une structure de demi-translation sur Σ , et si \tilde{m} et \tilde{d} sont les tirés en arrière de m et d sur $\tilde{\Sigma}$, il existe un unique homéomorphisme Γ_{Σ} -équivariant entre les bords à l'infini de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ et de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$, par lequel on les identifie. On note $\partial_{\infty} \tilde{\Sigma}$ ce bord à l'infini, et $\partial_{\infty}^2 \tilde{\Sigma} = \partial_{\infty} \tilde{\Sigma} \times \partial_{\infty} \tilde{\Sigma} - \{(x, x), x \in \partial_{\infty} \tilde{\Sigma}\}$. Si g est une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ ou de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$, on note $E(g) = (g(-\infty), g(+\infty))$ son couple de points à l'infini. Pour tout couple $(x, y) \in \partial_{\infty}^2 \tilde{\Sigma}$, il existe une unique géodésique $\tilde{\lambda}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ telle que $E(\tilde{\lambda}) = (x, y)$. En revanche, il existe au moins une géodésique $\tilde{\ell}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ telle que $E(\tilde{\ell}) = (x, y)$, mais cette géodésique n'est pas nécessairement unique. Si elle n'est pas unique, l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ dont le couple de points à l'infini est (x, y) est un ensemble de géodésiques parallèles qui feuilletent une bande plate, et dont les projetés sont des géodésiques locales périodiques qui feuilletent un cylindre plat. De ce fait, l'application φ qui associe à une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ l'unique géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ ayant le même couple de points à l'infini définit une correspondance non bijective entre les géodésiques plates et hyperboliques, dont l'on déduit les résultats principaux de cet article, notamment les deux théorèmes ci-dessus.

Dans la partie 2, nous rappelons les propriétés principales des espaces métriques localement CAT(0) enrubannés et des surfaces munies d'une

structure de demi-translation. Dans la partie 3, nous montrons que si un rayon d'une géodésique locale non auto-entrelacée d'une surface compacte munie d'une structure de demi-translation n'est pas d'image compacte, il admet un sous-rayon d'image dense dans un domaine de Σ . Puis dans la partie 4, nous établissons une correspondance naturelle (mais non bijective) entre les laminations pour une structure de demi-translation et celles pour une métrique hyperbolique complète sur Σ . Dans la partie 5, nous montrons que tous les graphes enrubannés, connexes, finis, sans sommet terminal, sauf quatre à homéomorphisme près, sont le support de laminations minimales, sur une infinité de surfaces munies de structures de demi-translation. Dans la partie 6, nous montrons le théorème de structure des laminations géodésiques sur les surfaces compactes munies de structures de demi-translation.

Plusieurs phénomènes radicalement nouveaux apparaissent par rapport aux laminations hyperboliques : les feuilles d'une lamination plate ne sont généralement pas deux à deux disjointes, les laminations plates ne sont pas déterminées par leur support (des familles non dénombrables ont le même support, et une lamination plate peut ne pas être minimale même si les images de tous les rayons géodésiques de toutes ses feuilles sont denses dans son support (voir la remarque 4.10)). Les composantes cylindriques peuvent contenir des familles non dénombrables de feuilles. Enfin, il y a trois types de composantes minimales d'une lamination plate sur une surface compacte (feuille périodique parcourue dans les deux sens, composante minimale de type récurrent ou de type graphe fini), et non deux comme pour les laminations hyperboliques.

Remerciements. — Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour sa disponibilité et ses relectures attentives des versions successives de cet article, ainsi que Yves Benoist, Sylvain Crovisier, Bertrand Deroin, Samuel Lelièvre, Sara Maloni et Pierre Pansu pour leurs réponses à mes nombreuses questions. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses très nombreuses remarques qui m'ont permis d'améliorer considérablement la rédaction de cet article.

2. Définitions.

2.1. Espaces localement $CAT(0)$.

Dans tout cet article, nous utiliserons la terminologie de [4] concernant les espaces métriques : espaces $CAT(0)$, δ -hyperbolique... En particulier,

une *géodésique* (resp. une *géodésique locale*) d'un espace métrique (X, d) est une application isométrique (resp. localement isométrique) $\ell : I \rightarrow X$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . Nous dirons *segment*, *rayon* ou *droite géodésique* de X si I est respectivement un intervalle borné, une demi-droite (comme $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$) ou \mathbb{R} . S'il n'y a pas de précision, le terme *géodésique* désigne une droite géodésique. On appellera *germe* (de rayon géodésique) une classe d'équivalence de rayons géodésiques locaux pour la relation d'équivalence $r_1 \sim r_2$ si r_1 et r_2 coïncident sur un segment initial non vide et non réduit à un point.

Soient (X, d) un espace géodésique localement CAT(0) et $p : (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ . Si l'espace (X, d) est complet (par exemple si X est compact), d'après le théorème de Cartan-Hadamard (voir [4, Chap. II.4]), l'espace (\tilde{X}, \tilde{d}) est complet et CAT(0). Dans la suite, on supposera toujours que (X, d) est complet. Nous noterons $\partial_\infty \tilde{X}$ le bord à l'infini de (\tilde{X}, \tilde{d}) et $\partial_\infty^2 \tilde{X} = \partial_\infty \tilde{X} \times \partial_\infty \tilde{X} - \Delta$ (où $\Delta = \{(x, x), x \in \partial_\infty \tilde{X}\}$), muni de la topologie induite par la topologie produit.

Soit $\ell : \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ une géodésique locale. On dit que ℓ est *périodique* s'il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ell(t + T_0) = \ell(t)$, qu'elle est *positivement périodique* s'il existe des réels strictement positifs T et T_0 tels que $\ell(t + T_0) = \ell(t)$ pour tout $t > T$. On dit que ℓ est *positivement compacte* si $\ell([0, +\infty[)$ est compacte. Si ℓ est périodique ou positivement périodique, elle est aussi d'image compacte ou positivement compacte, mais la réciproque est fautive (voir le lemme 5.2).

On note \mathcal{G} l'ensemble des géodésiques locales paramétrées de (X, d) et $\tilde{\mathcal{G}}$ l'ensemble des géodésiques paramétrées de (\tilde{X}, \tilde{d}) (puisque (\tilde{X}, \tilde{d}) est CAT(0), les géodésiques locales de (\tilde{X}, \tilde{d}) sont des géodésiques). Alors \mathbb{R} agit sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ par translations à la source. On note \mathcal{G}_{np} et $\tilde{\mathcal{G}}_{np}$ les quotients de \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ pour ces actions, c'est-à-dire les ensembles de géodésiques locales définies à changements d'origine près. Si ℓ appartient à \mathcal{G} , on note toujours ℓ sa classe dans \mathcal{G}_{np} . On appellera indistinctement *topologie des géodésiques* la topologie compacte-ouverte sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ et la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte pour l'action par translations de \mathbb{R} sur \mathcal{G}_{np} et $\tilde{\mathcal{G}}_{np}$. Si $\tilde{\ell}$ appartient à $\tilde{\mathcal{G}}$, elle est propre et converge vers deux points distincts de $\partial_\infty \tilde{X}$ lorsque t tend vers $\pm\infty$ et on note $E(\tilde{\ell}) = (\tilde{\ell}(-\infty), \tilde{\ell}(+\infty)) \in \partial_\infty^2 \tilde{X}$. Si F est un ensemble de géodésiques de $\tilde{\mathcal{G}}$, on note $E(F) = \{E(\tilde{\ell}), \tilde{\ell} \in F\}$. Si F est un ensemble de géodésiques locales, le *support* de F , noté $\text{Supp}(F)$, est la réunion des images des éléments de F .

Si ℓ est une géodésique locale, on note ℓ^- la géodésique locale d'orientation opposée définie par $\ell^-(t) = \ell(-t)$. Enfin, la relation $r \sim r'$ s'il existe

des réels T, T' tels que $r(t) = \ell(t+T)$ et $r'(t) = \ell(t+T')$ ou $r(t) = \ell(-t+T)$ et $r'(t) = \ell(-t+T')$ pour tout t appartenant aux domaines de définition respectifs de r et r' , est une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques de ℓ . On appelle *bout* (au sens de Freudenthal) de ℓ une telle classe d'équivalence. Une géodésique locale a deux bouts. Puisqu'elles ne dépendent pas des paramétrages, ces définitions se prolongent aux géodésiques locales non paramétrées.

2.2. Ordres cycliques.

Soient Y un ensemble et Y^3 l'ensemble des triplets de points de Y . Un *ordre cyclique (total)* sur Y est une fonction $o : Y^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ telle que :

- pour tout $(x, y, z) \in Y^3$, on a $o(x, y, z) = 0$ si et seulement si $\text{card}(\{x, y, z\}) \leq 2$;
- pour tout $(x, y, z) \in Y^3$, $o(x, y, z) = o(y, z, x) = -o(x, z, y)$;
- pour tous les quadruplets (x, y, z, t) d'éléments de Y , si $o(x, y, z) = 1$ et $o(x, z, t) = 1$, alors $o(x, y, t) = 1$.

L'ordre cyclique *opposé* à o est $\bar{o} = -o$. Si Y est un espace topologique, on demande que la restriction de o au sous-ensemble des triplets d'éléments deux à deux distincts soit continue (pour la topologie produit). Si Y est muni d'une action d'un groupe Γ , on demande que o soit invariante pour l'action diagonale de Γ sur Y^3 . Nous renvoyons par exemple à [16, 2.3.1] pour des compléments sur les ordres cycliques.

2.3. Laminations géodésiques.

Soit (X, d) un espace métrique comme ci-dessus. On suppose qu'il existe un ordre cyclique o sur l'espace topologique $\partial_\infty \tilde{X}$ muni de l'action de Γ . Le triplet (X, d, o) est alors un espace localement CAT(0) *enrubanné*. Deux couples de points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\partial_\infty \tilde{X}$ sont *entrelacés* si les points sont deux à deux distincts et si $o(x_1, x_2, y_1) = -o(x_1, y_2, y_1)$.

DÉFINITION 2.1. — *Deux géodésiques de (\tilde{X}, \tilde{d}) sont dites entrelacées si leurs couples de points à l'infini sont entrelacés. Deux géodésiques locales ℓ_1 et ℓ_2 de (X, d) sont dites entrelacées si elles ont des relevés de ℓ_1 et ℓ_2 dans \tilde{X} qui sont entrelacés. Si ℓ_1 est entrelacée avec elle-même, elle est dite auto-entrelacée.*

Nous renvoyons à la partie 3.1 pour le cas particulier des surfaces munies de structures de demi-translation.

DÉFINITION 2.2. — Une lamination géodésique (ou simplement lamination) de (X, d, o) est un ensemble non vide Λ de géodésiques locales de (X, d) , définies à changements d'origine près, dont les éléments sont appelés feuilles, tel que :

- aucune feuille de Λ n'est auto-entrelacée ;
- les feuilles de Λ sont deux à deux non entrelacées ;
- si ℓ appartient à Λ alors ℓ^- aussi ;
- Λ est fermé pour la topologie des géodésiques.

Remarque. — Le choix du revêtement dans les définitions 2.1 et 2.2 est indifférent. Cette définition généralise les laminations hyperboliques (voir la partie 4.1). D'autres types de laminations, dans des arbres réels, ont été introduits par M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel (voir [1]) et par T. Coulbois, A. Hilion et M. Lustig (voir [6]), mais ce ne sont pas des arbres enrubannés. Je remercie le rapporteur d'avoir suggéré d'étudier les liens entre les laminations telles qu'introduites dans [6] et cette définition.

Soient $p' : (X', d') \rightarrow (X, d)$ un revêtement de (X, d) , Λ une lamination de (X, d) et Λ' l'ensemble des relevés des feuilles de Λ dans X' . Alors Λ' est une lamination de (X', d') , que l'on appelle *image réciproque de Λ par p'* . Dans cet article, l'espace (\tilde{X}, \tilde{d}) sera généralement δ -hyperbolique (au sens de Gromov) pour un certain $\delta \geq 0$ (voir [4, Déf. 1.1 p. 399]), et propre. De ce fait, pour tout $(x, y) \in \partial_\infty^2 \tilde{X}$, il existe au moins une géodésique de (\tilde{X}, \tilde{d}) dont le couple de points à l'infini est (x, y) (voir [4, Lem. 3.2 p. 428]). Dans la suite, on utilisera ce fait sans le mentionner. On rappelle un résultat découlant du théorème d'Ascoli.

LEMME 2.3. — Soit (Z, d) un espace métrique propre. L'ensemble des géodésiques de (Z, d) dont l'origine appartient à un compact de Z est compact pour la topologie compacte-ouverte.

COROLLAIRE 2.4. — Soit F un ensemble de géodésiques définies à changements d'origines près, qui est fermé pour la topologie des géodésiques. Alors le support de F est fermé dans Z .

Du lemme 2.3 on déduit les trois lemmes élémentaires suivants, avec (Z, d) un espace géodésique, CAT(0) et propre.

LEMME 2.5. — Soit Y un ensemble fermé de $\partial_\infty^2 Z$ et F l'ensemble de toutes les géodésiques ℓ de (Z, d) telles que $E(\ell)$ appartient à Y . Alors F est fermé pour la topologie des géodésiques et donc $\text{Supp}(F)$ est fermé dans Z .

LEMME 2.6. — Supposons de plus que l'espace (Z, d) est δ -hyperbolique, avec $\delta \geq 0$. Soient $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de géodésiques (non paramétrées mais orientées) de (Z, d) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n, y_n) le couple de ses points à l'infini. Si la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, y) dans $\partial_\infty^2 Z$, alors quitte à extraire, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une géodésique de (Z, d) , pour la topologie des géodésiques, dont le couple de points à l'infini est (x, y) .

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_{x_n} = [A, x_n[$ et $r_{y_n} = [A, y_n[$, avec $A \in Z$ fixé. Alors les suites $(r_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers les rayons $r_x = [A, x[$ et $r_y = [A, y[$ pour la topologie compacte-ouverte. Puisque $x \neq y$, il existe $T > 0$ tel que $d(r_x(T), r_y(T)) \geq 2\delta + 3$. Or, pour n assez grand, on a $\max\{d(r_{x_n}(T), r_x(T)), d(r_{y_n}(T), r_y(T))\} < 1$, donc $d(r_{x_n}(T), r_{y_n}(T)) \geq 2\delta + 1$. Puisque les triangles idéaux de côtés $r_{x_n}([0, +\infty[)$, $r_{y_n}([0, +\infty[)$ et $\ell_n(\mathbb{R})$ sont δ -fins, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point z_n de $\ell_n(\mathbb{R})$ tel que $d(r_{x_n}(T), z_n) \leq \delta$, et donc z_n appartient à la boule compacte de centre $r_x(T)$ et de rayon $\delta + 1$. On peut changer les origines pour que $\ell_n(0) = z_n$ pour tout n assez grand. Le lemme 2.6 est alors une conséquence du lemme 2.3. \square

LEMME 2.7. — On suppose toujours que (Z, d) est δ -hyperbolique (avec $\delta \geq 0$). Soient F un ensemble de géodésiques de (Z, d) , fermé pour la topologie des géodésiques, et Y_F l'ensemble des couples de points à l'infini des éléments de F . Alors Y_F est fermé dans $\partial_\infty^2 Z$.

Démonstration. — Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y_F qui converge vers (x, y) dans $\partial_\infty^2 Z$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ℓ_n un élément de F dont le couple de points à l'infini est (x_n, y_n) . D'après le lemme 2.6, quitte à extraire, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pour la topologie des géodésiques, vers une géodésique dont le couple de points à l'infini est (x, y) , et elle appartient à F car F est fermé pour cette topologie. Donc Y_F est fermé. \square

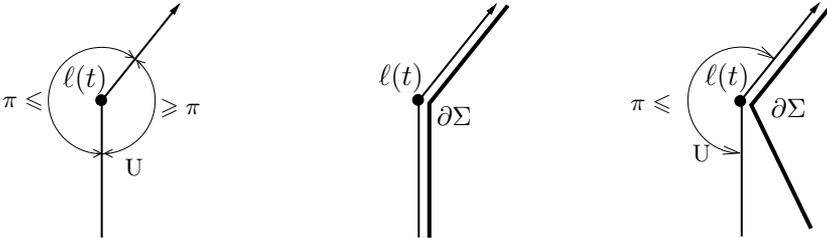
2.4. Structures de demi-translation.

Soit Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide). Supposons que Σ soit munie d'une métrique euclidienne sur $\Sigma - Z$, où Z est une partie discrète de Σ . Si l'holonomie de tout lacet fermé, \mathcal{C}^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ est contenue dans $\{\pm \text{Id}\}$, on dit que deux vecteurs tangents v_1 et v_2 à Σ sont de même direction, si v_2 est l'image de $\pm v_1$ par holonomie le long d'un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de $\Sigma - Z$. On dit qu'une réunion de chemins, \mathcal{C}^1 par morceaux, est de direction constante, si tous ses vecteurs tangents, aux points de $\Sigma - Z$, sont de même direction.

DÉFINITION 2.8. — Une structure de demi-translation (ou structure plate à holonomie $\{\pm \text{Id}\}$) sur une surface Σ est la donnée d'une partie discrète Z de Σ (éventuellement vide) et d'une métrique euclidienne sur $\Sigma - Z$ à singularité conique d'angle $k_z\pi$ en $z \in Z$, avec $k_z \in \mathbb{N}$ et $k_z \geq 3$ si $z \in Z - Z \cap \partial\Sigma$ et $k_z \geq 2$ si $z \in Z \cap \partial\Sigma$, telle que l'holonomie de tout lacet fermé, C^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ soit contenue dans $\{\pm \text{Id}\}$ et telle que le bord soit de direction constante.

Une structure de demi-translation définit une distance d qui est localement CAT(0). On supposera toujours que (Σ, d) est géodésique et complet. Nous appellerons *géodésiques locales plates* les géodésiques locales d'une structure de demi-translation. Une application continue $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ est une géodésique locale plate si et seulement si elle vérifie (voir [15, Th. 5.4 p.24] et [15, Th. 8.1 p. 35]) : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

- si $\ell(t)$ n'appartient pas à Z , il existe un voisinage V de t dans \mathbb{R} tel que $\ell|_V$ soit un segment euclidien (donc de direction constante) ;
- si $\ell(t)$ appartient à $Z - Z \cap \partial\Sigma$, alors les deux angles définis par $\ell([t, t + \varepsilon])$ et $\ell(]t - \varepsilon, t])$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, mesurés dans chaque composante connexe de $U - \ell(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$, où U est un voisinage assez petit de $\ell(t)$, sont supérieurs ou égaux à π ;
- si $\ell(t)$ appartient à $Z \cap \partial\Sigma$, alors l'angle défini par $\ell([t, t + \varepsilon])$ et $\ell(]t - \varepsilon, t])$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, mesuré dans la composante connexe de $U - \ell(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$ disjointe de $\partial\Sigma$, où U est un voisinage assez petit de $\ell(t)$, est supérieur ou égal à π .



Une *liaison de singularités* d'une structure de demi-translation est l'image d'un segment géodésique local (fermé) entre deux singularités (éventuellement confondues) qui ne rencontre pas de singularité en dehors de ses extrémités. Puisque les géodésiques locales ne peuvent changer de direction qu'aux singularités, une liaison de singularités est de direction constante.

Soit $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{d}) \rightarrow (\Sigma, d)$ un revêtement universel. L'espace $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ est une surface munie d'une structure de demi-translation qui est CAT(0) et propre. Nous noterons $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ son bord à l'infini.

Remarque 2.9. — Si (Σ, m) est un revêtement (éventuellement trivial) d'une surface compacte, connexe, orientable, munie d'une métrique hyperbolique à bord totalement géodésique, et si $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ est un revêtement universel, alors le bord à l'infini de $\tilde{\Sigma}$ est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de \mathbb{S}^1 (voir [4, Ex. 8.11 (2) p.265 et (4) p.266]). Donc les ordres opposés usuels de \mathbb{S}^1 induisent deux ordres opposés sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$. De plus, si on note Γ_Σ le groupe de revêtement de p , alors il existe un unique homéomorphisme Γ_Σ -équivariant entre $\partial_\infty(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ et $\partial_\infty(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ pour n'importe quelle distance géodésique, localement CAT(0), complète, d sur Σ , avec \tilde{d} le tiré en arrière de d , par lequel on les identifie (voir par exemple [2, §2]). Dans la suite, on ne considérera que l'ordre cyclique o_∞ ainsi défini sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$. Les espaces métriques $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ et $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ sont de plus quasi-isométriques, donc il existe $\delta \geq 0$ tel que $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ est δ -hyperbolique.

2.5. Différentielles quadratiques holomorphes.

Soit Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide). Rappelons qu'une structure de surface de Riemann à bord sur Σ est la donnée d'un atlas maximal de carte $(z_\nu : U_\nu \rightarrow V_\nu)_{\nu \in \tau}$, où $\{U_\nu\}_{\nu \in \tau}$ est un recouvrement ouvert de Σ et pour tout $\nu \in \tau$, l'application z_ν est un homéomorphisme sur un ouvert (relatif) V_ν de $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$, telle que les changements de cartes soient holomorphes (voir par exemple [15, Déf. 1.2 p. 2]). Le bord de Σ est l'ensemble des points x de Σ tels qu'il existe une carte de cette structure contenant x , envoyant x sur l'axe réel, ce qui ne dépend pas d'une telle carte.

DÉFINITION 2.10. — Une différentielle quadratique holomorphe sur Σ est la donnée d'une structure de surface de Riemann à bord X sur Σ et d'une famille q de fonctions holomorphes $(q_{U,z} : U \rightarrow \mathbb{C})_{(U,z) \in X}$ telles que pour toutes les cartes locales (U, z) et (V, w) de X , on a

- (1) $q_{U,z} dz^2 = q_{V,w} dw^2$ sur $U \cap V$;
- (2) l'image $q_{U,z}(U \cap \partial\Sigma)$ de $U \cap \partial\Sigma$ est contenue dans $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

On note $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ l'ensemble des différentielles quadratiques holomorphes sur Σ et q une différentielle quadratique holomorphe (X, q) (la structure sous-jacente est sous-entendue). Le groupe $\text{Diff}_0(\Sigma)$ des isotopies de Σ qui fixent point par point $\partial\Sigma$ et sont homotopes à l'identité par des applications qui fixent point par point $\partial\Sigma$, agit sur $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ par précomposition des cartes et des expressions des différentielles quadratiques holomorphes dans

ces cartes. On note $\mathcal{Q}(\Sigma)$ le quotient de $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ par cette action. La donnée d'une différentielle quadratique holomorphe définit une métrique euclidienne à singularités coniques du bon type sur Σ et, un champ de droites parallèles (verticales) sur le complémentaire des singularités. D'après l'existence du champ de droites parallèles, cette métrique est à holonomies dans $\{\pm \text{Id}\}$. Il existe donc une application d'oubli de $\mathcal{Q}(\Sigma)$ dans l'ensemble des structures de demi-translation, qui est invariante par l'action par rotation $(\mathbb{R}, +)$ défini par $(\theta, (X, q)) \mapsto (X, e^{2i\theta}q)$, et qui définit une application du quotient $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}(\Sigma)$ dans l'ensemble des structures de demi-translation, qui est une bijection. On notera $[q]$, avec $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, une structure de demi-translation. On ne confondra pas une surface de demi-translation qui peut être définie comme un couple (Σ, q) , avec $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, et la structure de demi-translation $[q]$ qui lui est associée.

3. Comportement des géodésiques locales d'une structure de demi-translation.

Soient $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel. On note or_x l'ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons issus d'un point x induit par un choix d'orientation de la surface et o_∞ l'ordre sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ défini dans la remarque 2.9. Si $\tilde{\ell}$ est une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, le complémentaire de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dans $\tilde{\Sigma}$ peut avoir plusieurs composantes connexes si $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ n'est pas disjointe de $\partial \tilde{\Sigma}$. Si $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$, on note x_\perp le projeté orthogonal de x sur $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$. Soient r_x, r_1 et r_2 les germes de $[x_\perp, x]$, de $[x_\perp, \tilde{\ell}(+\infty)[$ et de $[x_\perp, \tilde{\ell}(-\infty)[$ issus de x_\perp .

DÉFINITION 3.1. — *Le point $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ appartient au côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$ si $or_{x_\perp}(r_1, r_x, r_2) = 1$ (resp. -1). Le côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$ est la réunion (non connexe a priori) des composantes connexes de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dont les points appartiennent au côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$.*

3.1. Comportement de deux géodésiques locales d'une structure de demi-translation.

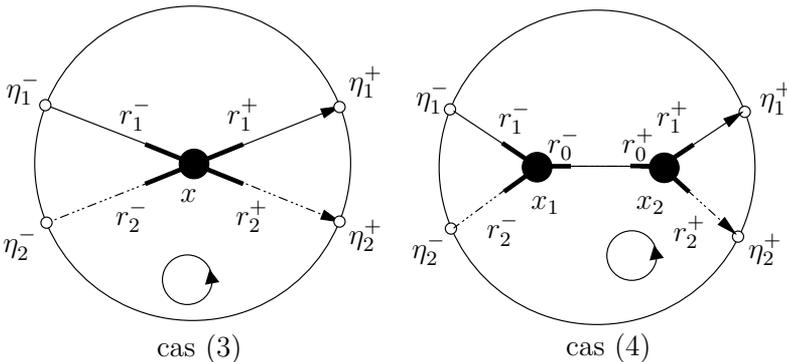
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux géodésiques locales paramétrées de $(\Sigma, [q])$ telles qu'il existe $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle maximal compact, non vide mais éventuellement réduit à un point, tel que $\ell_{1|I} = \ell_{2|I}$. Dans la suite, on notera alors $t_1 \leq t_2$

tels que $I = [t_1, t_2]$, $x_1 = \ell_1(t_1)$, $x_2 = \ell_1(t_2)$, et $r_1^-, r_2^-, r_1^+, r_2^+$ les germes de $\ell_1([t_1 - \varepsilon, t_1])$, $\ell_2([t_1 - \varepsilon, t_1])$, $\ell_1([t_2, t_2 + \varepsilon])$, $\ell_2([t_2, t_2 + \varepsilon])$ issus de x_1 et x_2 , et si $t_1 \neq t_2$, r_0^-, r_0^+ les germes de $\ell_1([t_1, t_1 + \varepsilon]) = \ell_2([t_1, t_1 + \varepsilon])$ et $\ell_1([t_2 - \varepsilon, t_2]) = \ell_2([t_2 - \varepsilon, t_2])$, pour un $\varepsilon > 0$ assez petit (voir la figure du lemme).

Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), si l'intersection des images de $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ n'est pas vide, c'est un point isolé ou une partie de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ isométrique à un intervalle fermé de \mathbb{R} . Comme les géodésiques ne peuvent changer de direction qu'au plus aux singularités, si les géodésiques n'ont pas la même image et si leur intersection n'est pas transverse, les (ou l'unique) extrémités de $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R}) \cap \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ sont des singularités. Par définition des ordres cycliques, $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont non entrelacées si et seulement si $\tilde{\ell}_1^i$ et $\tilde{\ell}_2^j$ sont non entrelacées (pour tout $i, j \in \{+, -\}$). Donc si leurs images sont confondues le long d'un segment ou un rayon géodésique, on peut les paramétrer pour que leurs restrictions au segment ou rayon soient égales.

LEMME 3.2. — *Deux géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ sont non entrelacées si et seulement si, en reprenant les notations précédentes, l'une des conditions exclusives suivantes est vérifiée :*

- (1) *Leurs images sont disjointes ;*
- (2) *Leurs images sont confondues au moins le long d'un rayon géodésique ;*
- (3) *Leurs images s'intersectent en un unique point x et $or_x(r_1^+, r_2^+, r_1^-) = or_x(r_1^+, r_2^-, r_1^-)$;*
- (4) *quitte à changer d'orientation et d'origines, leurs restrictions à un segment géodésique maximal $[x_1, x_2]$ non réduit à un point sont égales, et $or_{x_2}(r_1^+, r_2^+, r_0^+) = -or_{x_1}(r_1^-, r_2^-, r_0^-)$.*



Démonstration. — Les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont non entrelacées si et seulement si $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans la réunion de $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R})$ et d'un seul côté de $\tilde{\ell}_1$. Une analyse de cas montre que cela correspond aux conditions du lemme. \square

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ qui s'intersectent et sont non entrelacées, l'intersection de leurs images est une réunion (non connexe a priori) de singularités et de parties de Σ localement isométriques à des intervalles fermés de \mathbb{R} , et puisque p préserve l'orientation, on a les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 3.3. — *Les géodésiques ℓ_1 et ℓ_2 sont non entrelacées si et seulement si elles vérifient : pour chaque intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ tel que, quitte à changer d'orientations et d'origines, on a $\ell_{1|I} = \ell_{2|I}$, en reprenant les notations précédentes, l'une des conditions exclusives suivantes est vérifiée.*

- *I est de la forme $[t, +\infty[$ ou $]-\infty, t]$, avec $t \in \mathbb{R}$;*
- *$I = \{t\}$, et si $x = \ell_1(t)$, on a $or_x(r_1^+, r_2^+, r_1^-) = or_x(r_1^+, r_2^-, r_1^-)$;*
- *$I = [t_1, t_2]$ avec $t_1 < t_2$ et si $x_1 = \ell_1(t_1)$ et $x_2 = \ell_1(t_2)$, on a $or_{x_2}(r_1^+, r_2^+, r_0^+) = -or_{x_1}(r_1^-, r_2^-, r_0^-)$.*

COROLLAIRE 3.4. — *Deux géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ qui s'intersectent transversalement sont entrelacées.*

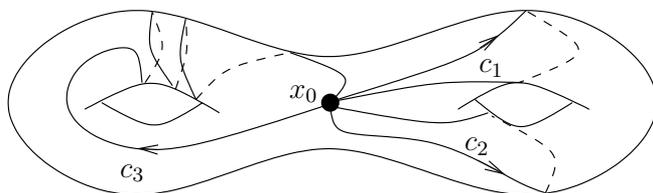
3.1.1. Géodésiques locales non auto-entrelacées.

On suppose dans cette partie que la surface Σ est compacte de genre $g \in \mathbb{N}$, et on note $b \in \mathbb{N}$ le nombre de composantes connexes de son bord. Soient x_0 un point de Σ et $B = (c_1, \dots, c_n)$ une suite finie d'arcs \mathcal{C}^1 orientés, simples, fermés en x_0 , que l'on peut supposer paramétrés par $[0, 1]$ avec $c_i(0) = c_i(1) = x_0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, tels que pour tout $k \neq p$, on ait $c_k([0, 1]) \cap c_p([0, 1]) = \{x_0\}$. On note, par abus, encore B la réunion $c_1([0, 1]) \cup \dots \cup c_n([0, 1])$. On munit Σ d'une distance qui induit sa topologie. Soient F_1, \dots, F_k les complétés des composantes connexes de $\Sigma - B$ (pour la distance induite). Pour tout $i = 1, \dots, k$, le complété F_i est une surface (topologique) à bord. On renvoie à [12] pour les démonstrations des premiers lemmes de cette partie.

LEMME 3.5. — *La caractéristique d'Euler de Σ vérifie $\chi(\Sigma) = 1 - n + \sum_1^k \chi(F_i)$.*

On dit que la suite finie (c_1, \dots, c_n) est un *bouquet plongé essentiel* en x_0 si de plus aucun arc c_i n'est librement homotope à un point, et si pour

k, p distincts dans $\{1, \dots, n\}$, c_k n'est homotope ni à c_p ni à $\overline{c_p}$ relativement à x_0 (où $\overline{c_p}$ est défini par $\overline{c_p}(t) = c_p(1 - t)$).



LEMME 3.6. — Si $B = (c_1, \dots, c_n)$ est un bouquet plongé essentiel en x_0 , alors $n \leq 6g + 3b - 3$.

COROLLAIRE 3.7. — Si x et y sont deux points distincts de Σ et si (c_1, \dots, c_n) est une suite finie d'arcs simples joignant x à y qui sont deux à deux non homotopes relativement à x et y , et sont deux à deux d'images disjointes en dehors de x et y , alors $n \leq 6g + 3b - 2$.

On considère de nouveau une structure de demi-translation $[q]$ sur Σ . Puisque Σ est compacte, le nombre k de singularités de $[q]$ est fini. Si $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ est une géodésique locale et R est l'image d'un segment géodésique compact, on dit que ℓ parcourt R s'il existe au moins un intervalle compact I de \mathbb{R} tel que $\ell(I) = R$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 3.8. — Soient (X, d) un espace géodésique localement $CAT(0)$ et (x, y) un couple de points de X . Alors il existe un unique segment géodésique dans chaque classe d'homotopie relative d'arcs joignant x à y .

LEMME 3.9. — Soit F une famille de géodésiques locales non auto-entrelacées de $(\Sigma, [q])$ qui sont deux à deux non entrelacées. Alors il y a au plus $k^2 \cdot (6g + 3b - 2)$ liaisons de singularités qui sont parcourues par une géodésique locale de F .

Démonstration. — Soient h et h' deux liaisons de singularités distinctes joignant deux singularités x et y de $[q]$. Puisque h et h' sont de direction constante, si elles s'intersectent en dehors de leurs extrémités, l'intersection est transverse. Donc, d'après le corollaire 3.4, si h et h' sont parcourues par des éléments de F , elles ne s'intersectent pas en dehors de leurs extrémités. De plus, d'après le lemme 3.8, elles ne sont pas homotopes relativement à x et y . Donc, quitte à les ordonner, la famille des liaisons de singularités joignant x et y , qui sont parcourues par des éléments de F , est une suite d'arcs simples satisfaisant les hypothèses du corollaire 3.7, donc il y en a au plus $6g + 3b - 2$.

Puisque $[q]$ n'a que k singularités, il y a k^2 couples de singularités. Donc il y a au plus $k^2 \cdot (6g + 3b - 2)$ liaisons de singularités qui sont parcourues par un élément de F . \square

LEMME 3.10. — Soit $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale non auto-entrelacée qui n'est pas positivement compacte. Il existe $T > 0$ tel que $\ell|_{[T, +\infty[}$ est de direction constante.

Démonstration. — D'après le lemme 3.9 appliqué à $F = \{\ell\}$, il n'y a qu'un nombre fini de liaisons de singularités qui sont parcourues par ℓ . Puisque toutes les liaisons de singularités sont compactes, la réunion des liaisons de singularités parcourues par ℓ est compacte. Donc ℓ ne rencontre pas de singularité à partir d'un certain temps. Elle est de direction constante à partir de ce temps. \square

Si q est une différentielle quadratique holomorphe sur Σ , une trajectoire de q est un intervalle, un rayon ou une droite géodésique locale, verticale pour q , ne rencontrant pas de singularité, maximale (voir [15, Déf. 5.5.3 p.25]). Si $\ell : I \rightarrow \Sigma$ est une trajectoire (I est alors un intervalle ouvert), un rayon de trajectoire de ℓ est une application r de la forme $\ell|_J$, où J est un sous-intervalle strict de I , non compact et fermé dans I . Si J est relativement compact, on dit que r converge vers un zéro x de q si $r(t)$ converge vers x quand t tend vers la borne supérieure, ou inférieure, de J qui n'appartient pas à I . Si J n'est pas relativement compact, on dit que r est récurrent s'il est dense dans un domaine, c'est-à-dire l'adhérence d'un ouvert connexe de Σ bordé par des réunions connexes d'images de trajectoires critiques de longueur finie et de singularités, si ce n'est pas Σ , du feuilletage vertical de q (voir [15, p.53]). Un domaine n'est pas toujours une sous-surface de Σ car son bord peut ne pas être une sous-variété de Σ .

LEMME 3.11 (Voir [15, 11.4 p.53]). — Les trajectoires d'une différentielle quadratique holomorphe q d'une surface compacte Σ , à bord (éventuellement vide) sont classées dans les familles suivantes :

- (1) Les trajectoires périodiques. Elles feuillettent des cylindres plats ouverts.
- (2) Les trajectoires critiques, dont au moins un rayon converge vers une singularité. Il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires critiques. Si un rayon d'une trajectoire critique ne converge pas vers une singularité, il admet un sous-rayon récurrent.
- (3) Les spirales, c'est-à-dire les trajectoires dont tous les rayons sont récurrents. Si α est une spirale, l'adhérence A de l'image de α est un

domaine, bordé par des réunions connexes d'images de trajectoires critiques de longueur finie et de singularités, si ce n'est pas Σ .

Puisque ce sont les seules possibilités et que deux trajectoires de la liste ne peuvent avoir de point en commun à moins qu'elles ne coïncident, la surface Σ privée des zéros de q et des liaisons de singularités verticales de q se divise entre des cylindres plats ouverts (feuilletés par des trajectoires périodiques) et les intérieurs des domaines qui sont les adhérences de chacune des spirales qu'ils contiennent.

Si ℓ est une géodésique locale de $(\Sigma, [q])$ telle que $\ell|_{[T, +\infty[}$ ne rencontre pas de singularité, et est donc de direction constante, quitte à choisir un autre représentant de $[q]$, on peut supposer que $\ell|_{[T, +\infty[}$ est de direction verticale pour q , et donc que c'est un rayon de trajectoire de q . D'après la classification ci-dessus, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.12. — *Le rayon $\ell|_{[T, +\infty[}$ est périodique ou récurrent et dans le second cas, son image est dense dans un domaine du feuilletage vertical de q .*

4. Image au bord à l'infini d'une famille de géodésiques.

4.1. Rappels sur les laminations géodésiques hyperboliques.

Soient Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), et m une métrique hyperbolique à bord totalement géodésique (complète) sur Σ . Dans cette partie 4.1, la surface Σ peut avoir des points enlevés. Une *lamination hyperbolique* Λ_m est une partie non vide fermée de Σ , réunion d'images de géodésiques locales hyperboliques, simples et deux à deux disjointes. L'espace (Σ, m) est localement CAT(0). Soit $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ un revêtement universel. Le bord à l'infini $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ est muni de l'ordre o_∞ défini dans la remarque 2.9, et on est dans le cadre de la partie 2.1. On considère alors les paramétrages (à changements d'origine près) des géodésiques hyperboliques locales de Λ_m , dans chaque sens. On note $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ l'image réciproque de Λ_m dans $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$. Les géodésiques de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ sont deux à deux disjointes et donc deux à deux non entrelacées. De plus, la métrique est hyperbolique, donc puisque le support de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé dans $\tilde{\Sigma}$, l'ensemble des couples de points à l'infini des éléments de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ (d'après [13, Lem. 1.6.1 p.68]), et pour chaque élément $(x, y) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$, il existe une unique géodésique (à changement d'origine près) dont le couple

de points à l'infini est (x, y) . D'après le lemme 2.5, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé pour la topologie des géodésiques. C'est donc une lamination au sens de la définition 2.2, et puisque il est Γ_{Σ} -équivariant (où Γ_{Σ} est le groupe de revêtement de p), l'ensemble des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est une lamination de (Σ, m) . Dans la suite de cette partie, on appellera Λ_m cet ensemble et support de Λ_m la réunion $\text{Supp}(\Lambda_m)$ des images de ses éléments dans Σ .

La lamination Λ_m est *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte. Une *composante minimale* d'une lamination est une sous-lamination minimale. Si $\text{Supp}(\Lambda_m)$ est compact, Λ_m est minimale si et seulement si l'image de tout rayon géodésique de toute feuille de Λ_m est dense dans le support de Λ_m .

Supposons que (Σ, m) soit d'aire finie. Le complété \overline{D} d'une composante connexe D du complémentaire de $\text{Supp}(\Lambda_m)$ dans Σ , pour la distance induite, est une surface hyperbolique à bord totalement géodésique, d'aire finie. Il est obtenu en rajoutant abstraitement à D un bord qui est la réunion des images d'un nombre fini de feuilles de Λ_m . En particulier, le bord du complété de D a un nombre fini de pointes, chacune délimitée par deux géodésiques du bord (éventuellement égales, voir [3, p.7]).

On dit qu'un bout e d'une géodésique locale simple λ spirale sur une lamination Λ_m de (Σ, m) si λ n'intersecte pas le support de Λ_m et si pour tout rayon r dans la classe de e , le support de Λ_m est l'ensemble des points d'accumulation de $r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ (voir la partie 2.1 pour la définition d'un bout).

LEMME 4.1. — Soit Λ_m une lamination de (Σ, m) . On considère une feuille λ de Λ_m , un bout e de λ (correspondant à $t \rightarrow +\infty$), et C une composante minimale compacte de Λ_m . Alors e spirale sur C si et seulement s'il existe une feuille λ_0 de C dont le point à l'infini (pour $t \rightarrow +\infty$) d'un relevé est égal au point à l'infini d'un relevé d'un rayon dans la classe de e .

Démonstration. — On fixe un paramétrage de λ . Supposons qu'il existe une feuille λ_0 de C dont un relevé $\tilde{\lambda}_0$ a le même point à l'infini (pour $t \rightarrow +\infty$) que celui d'un relevé $\tilde{\lambda}$ de λ . La projection $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ n'augmente pas les distances, et par une propriété bien connue de la géométrie hyperbolique, on sait que quitte à changer d'origine $d(\tilde{\lambda}_0(t), \tilde{\lambda}(t))$ tend vers 0, et donc $d(\lambda(t), \lambda_0(t))$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Donc l'ensemble des points d'accumulation de $\lambda(t)$ quand t tend vers l'infini est égal à celui de $\lambda_0(t)$, qui est le support de C car C est minimale et compacte.

Réciproquement, supposons que le support de C soit l'ensemble limite de $\lambda(t)$ (pour $t \rightarrow +\infty$). Si λ appartient à C , on prend $\lambda_0 = \lambda$. Sinon, l'image de λ est contenue dans une composante D du complémentaire du support de C , et on a vu que le complété \overline{D} de D est obtenu en recollant abstraitement un bord à D qui est la réunion des images d'un nombre fini de feuilles de C . Puisque le bout e s'accumule sur C , la géodésique λ converge vers une pointe du bord de \overline{D} , et donc il existe une feuille λ_0 de C , abstraitement contenue dans le bord de \overline{D} telle que, quitte à changer d'origine, la distance $d(\lambda(t), \lambda_0(t))$ tend vers 0. Il existe alors des relevés $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}_0$ de λ et λ_0 tels que $d(\tilde{\lambda}(t), \tilde{\lambda}_0(t))$ tend vers 0. \square

Soient Λ_m une lamination géodésique de (Σ, m) et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ son image réciproque dans $\tilde{\Sigma}$. Si Σ n'a pas de bord mais des points enlevés, la lamination Λ_m est *quasi-maximale* si les complétés des composantes connexes du complémentaire du support de Λ_m dans Σ sont des triangles géodésiques idéaux ou des monogones géodésiques idéaux privés d'un point. Si (Σ, m) est une surface compacte, à bord (éventuellement vide) totalement géodésique, Λ_m est *quasi-maximale* si aucune composante de bord n'appartient à Λ_m et si les complétés des composantes connexes du complémentaire du support de la lamination sont des triangles géodésiques idéaux ou des monogones géodésiques idéaux privés d'un disque.

LEMME 4.2. — *Si (Σ, m) est une surface hyperbolique, connexe, compacte, à bord totalement géodésique, il existe au moins une lamination sur (Σ, m) qui est à la fois minimale et quasi-maximale si et seulement si Σ n'est pas un pantalon.*

Démonstration. — Soient (Σ_1, m_1) la surface hyperbolique complète obtenue en recollant des bouts évasés à bord géodésique sur chacune des composantes de bord de Σ et m'_1 une métrique hyperbolique sur Σ_1 , complète et d'aire finie. Puisque Σ n'est pas un pantalon, la surface Σ_1 n'est pas la sphère privée de trois points. Il existe alors une lamination Λ_1 de (Σ_1, m'_1) qui est à la fois minimale, quasi-maximale et de support compact, donc dont les feuilles ne finissent pas dans les pointes (voir par exemple la démonstration de [9, Lem. 2.3 p. 10-11]). En étendant naturellement la bijection naturelle de [3, Lem. 18] entre laminations géodésiques à support compact, pour des métriques hyperboliques qui ne sont pas nécessairement d'aire finie, on montre qu'il existe une unique lamination géodésique de (Σ, m) en bijection avec Λ_1 , qui est minimale et quasi-maximale comme Λ_1 . Enfin, si Σ est un pantalon, les seules laminations minimales sont les géodésiques du bord, qui ne sont pas quasi-maximales. \square

4.2. Liens entre géodésiques locales hyperboliques et plates.

On suppose dans cette partie 4.2 que Σ est compacte et munie d'une structure de demi-translation $[q]$ ainsi que d'une métrique hyperbolique m (à bord totalement géodésique) sur Σ , et on fixe $p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ un revêtement universel. On note Γ_Σ le groupe de revêtement de p , $[\tilde{q}]$ et \tilde{m} les relevés de $[q]$ et m sur $\tilde{\Sigma}$. Les espaces $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ sont CAT(0) et puisque Σ est compacte, il existe un unique homéomorphisme Γ_Σ -équivariant entre les bords à l'infini de $\tilde{\Sigma}$ pour les métriques \tilde{m} et $[\tilde{q}]$ par lequel on les identifie (voir par exemple [2, §2]).

Si G est un ensemble de géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ deux à deux non entrelacées, alors $\text{Supp}(G)$ est fermé dans $\tilde{\Sigma}$ si et seulement si $E(G)$ est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ (voir [13, Lem. 1.6.1 p. 68] et la partie 2.1 pour les définitions de $\text{Supp}(G)$ et $E(G)$). Dans le cas des ensembles de géodésiques plates, cette équivalence est fautive. Par exemple, si on considère l'ensemble F des géodésiques plates parallèles d'images contenues dans une bande plate de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, privée des bords, alors $E(F)$ est un unique couple alors que F n'est pas fermé. Dans cette partie, nous étudions le lien entre ensembles de géodésiques plates et ensembles de géodésiques hyperboliques.

On appelle *lamination plate* une lamination géodésique au sens de la définition 2.2 d'une surface munie d'une structure de demi-translation. On dit qu'elle est *pleine* si son image réciproque dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ n'est pas une sous-lamination stricte d'une lamination plate ayant le même ensemble de couples de points à l'infini de feuilles. Toute lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est contenue dans une unique lamination plate pleine $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$ ayant le même ensemble de couples de points à l'infini au revêtement universel et $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}} - \Lambda_{[q]}$ est composé de feuilles périodiques (voir le lemme 4.5). Si λ et ℓ sont des géodésiques locales (non paramétrées mais orientées) de (Σ, m) et $(\Sigma, [q])$, on dit que λ *correspond* à ℓ s'il existe des relevés $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\ell}$ de λ et ℓ ayant le même couple de points à l'infini, et on dit qu'une lamination hyperbolique *correspond* à une lamination plate si leurs images réciproques au revêtement universel ont les mêmes ensembles de couples de points à l'infini de feuilles. A toute géodésique locale plate correspond une unique géodésique locale hyperbolique. De plus, si $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ est l'image réciproque par p d'une lamination plate $\Lambda_{[q]}$, et si Y est l'ensemble des couples de points à l'infini des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, alors Y est Γ_Σ et ι -invariant (où $\iota: (x, y) \mapsto (y, x)$), les couples d'éléments de Y sont deux à deux non entrelacés et Y est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ d'après le lemme 2.7. D'après [13, Lem. 1.6.1 p.68], il existe donc une unique

lamination hyperbolique $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ telle que $E(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}) = Y$, et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est Γ_{Σ} -invariante par naturalité. Donc l'ensemble Λ_m des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est l'unique lamination hyperbolique de (Σ, m) qui correspond à $\Lambda_{[q]}$ (par construction).

LEMME 4.3. — *L'application qui à une lamination plate associe l'unique lamination hyperbolique qui lui correspond induit une bijection entre l'ensemble des laminations plates pleines et l'ensemble des laminations hyperboliques.*

Démonstration. — Montrons que la restriction de cette application aux laminations plates pleines est surjective. Soient Λ_m une lamination hyperbolique de (Σ, m) , et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ son image réciproque par p . On note $Y = E(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}})$, $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ l'ensemble maximal de géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (définies à changements d'origine près) tel que pour tout $\tilde{\ell} \in \tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ il existe $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ qui correspond à $\tilde{\ell}$.

Comme pour $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$, les géodésiques de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ ne sont pas entrelacées et $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ est stable par $\ell \mapsto \ell^-$. Enfin, puisque Y est fermé dans $\partial_{\infty}^2 \tilde{\Sigma}$, et puisque l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ contient toutes les géodésiques plates dont le couple de points à l'infini appartient à Y , d'après le lemme 2.5, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ est fermé pour la topologie des géodésiques, donc c'est une lamination plate pleine. Et comme $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ est Γ_{Σ} -équivariant, donc l'ensemble $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$ des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ par p est une lamination plate de $(\Sigma, [q])$, et Λ_m correspond à $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$. Donc la restriction de l'application aux laminations plates pleines est surjective. Par définition des laminations plates pleines, elle est aussi injective. □

On rappelle le théorème de la bande plate. On dit que deux géodésiques c et c' d'un espace métrique (X, d) sont à distance de Hausdorff finie s'il existe $K > 0$ tel que $d(c(t), c'(t)) \leq K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 4.4. — (voir [4, Th. 2.13 p.182]) *Soient (X, d) un espace métrique CAT(0) et $c, c' : \mathbb{R} \rightarrow X$ deux géodésiques. Si c et c' sont à distance de Hausdorff finie, l'enveloppe convexe de $c(\mathbb{R}) \cup c'(\mathbb{R})$ est isométrique à une bande plate $\mathbb{R} \times [0, D] \subset \mathbb{E}^2$, avec $D \geq 0$.*

LEMME 4.5. — (voir [11, Th. 2.(c)]) *On rappelle que Σ est compacte. Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, telles que $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont à distance de Hausdorff finie et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(\tilde{\ell}_1(t), \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})) \geq \delta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors les projetés $p \circ \tilde{\ell}_1$ et $p \circ \tilde{\ell}_2$ de $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sur Σ sont des*

géodésiques périodiques qui sont contenues dans un cylindre plat maximal, dont l'intérieur est plongé isométriquement dans $(\Sigma, [q])$.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit Λ_m une lamination hyperbolique de (Σ, m) qui ne contient pas de feuille fermée. Alors il existe une unique lamination plate $\Lambda_{[q]}$ telle que Λ_m corresponde à $\Lambda_{[q]}$. Elle est pleine et chaque feuille de Λ_m ne correspond qu'à une seule feuille de $\Lambda_{[q]}$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe deux géodésiques (non paramétrées) distinctes $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ qui ont le même couple de points à l'infini qu'un relevé $\tilde{\lambda}$ d'une feuille λ de Λ_m . Alors d'après le théorème 4.4, les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont contenues dans une même bande plate, et il existe $\delta > 0$ tel que tout point de l'une est à distance δ de l'autre. Donc, d'après le lemme 4.5, les projetés $\ell_1 = p \circ \tilde{\ell}_1$ et $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ sont périodiques. Mais alors il existe un élément hyperbolique γ du groupe de revêtement de p , tel que $\tilde{\lambda}(-\infty) = \tilde{\ell}_1(-\infty)$ et $\tilde{\lambda}(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$ sont respectivement les points fixes répulsif et attractif de γ , et λ serait fermée. Donc chaque feuille de Λ_m ne correspond qu'à une seule géodésique locale de $(\Sigma, [q])$, et Λ_m ne correspond qu'à une seule lamination plate. \square

4.3. Laminations plates minimales.

Dans cette partie 4.3, on suppose toujours que Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$ et on note $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ_Σ . De même que pour une lamination hyperbolique, une lamination plate est *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte, ou de manière équivalente, si pour chacune de ses feuilles ℓ , la paire $\{\ell, \ell^-\}$, où ℓ^- est la feuille ℓ orientée dans l'autre sens, est dense dans la lamination, pour la topologie des géodésiques. Une lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est minimale si et seulement si elle n'a pas deux feuilles périodiques distinctes qui soient librement homotopes et si la lamination hyperbolique Λ_m qui lui correspond est minimale. C'est notamment le cas si Λ_m est minimale et n'est pas une feuille fermée. On considère deux lemmes généraux.

LEMME 4.7. — *Si $\Lambda_{[q]}$ est une lamination plate minimale de $(\Sigma, [q])$, qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, aucune de ses feuilles n'est positivement périodique.*

Démonstration. — Supposons par contraposée qu'il existe une feuille ℓ de $\Lambda_{[q]}$ qui est positivement périodique. Alors quitte à changer son origine,

elle est égale, à partir d'un certain temps, à une géodésique locale périodique ℓ' et il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $\ell(t_n) = \ell'(0)$ pour tout n . Alors la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\ell_n(t) = \ell(t+t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ converge vers ℓ' pour la topologie compacte-ouverte, et ℓ' appartient à $\Lambda_{[q]}$ car $\Lambda_{[q]}$ est fermée pour la topologie des géodésiques. Par minimalité, $\Lambda_{[q]} = \{\ell', \ell'^-\}$. \square

Soient Λ_m une lamination hyperbolique et C une composante minimale de Λ_m qui n'est pas une feuille fermée. Si λ_2 est une feuille de C et si λ_1 est une feuille de Λ_m dont le bout (pour $t \rightarrow +\infty$) spirale sur C , il existe des géodésiques locales plates ℓ_1 et ℓ_2 , uniques à changements d'origine près, qui correspondent à λ_1 et λ_2 . On fixe des paramétrages de λ_1 , λ_2 , ℓ_1 et ℓ_2 .

LEMME 4.8. — *Pour tout relevé paramétré $\tilde{\ell}_2$ de ℓ_2 dans $\tilde{\Sigma}$, quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l'infini, et une suite de relevés (paramétrés) $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ_1 tels que la suite de feuilles paramétrées $(\tilde{\ell}'_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $\tilde{\ell}'_{1,n}(t) = \tilde{\ell}_{1,n}(t+t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie compacte-ouverte.*

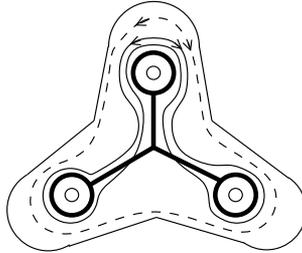
Démonstration. — Soit $\tilde{\lambda}_2$ le relevé de λ_2 qui correspond à $\tilde{\ell}_2$. Puisque le bout de λ_1 (pour $t \rightarrow +\infty$) spirale sur C , il existe une suite de réels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $\lambda_1(s_n)$ converge vers $\lambda_2(0)$, et il existe une suite $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de relevés de λ_1 telle que la suite $(\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\lambda}_2(0)$. D'après le lemme 2.3, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on reparamètre $\tilde{\lambda}_{1,n}$ pour que $\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n)$ soit l'origine, quitte à extraire et à inverser l'orientation de $\tilde{\lambda}_2$, la suite $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\lambda}_2$ pour la topologie compacte-ouverte, et donc la suite des couples de points à l'infini des feuilles $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le couple de points à l'infini de $\tilde{\lambda}_2$. Soient $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de relevés de ℓ_1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le relevé $\tilde{\ell}_{1,n}$ corresponde à $\tilde{\ell}_{1,n}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\tilde{\ell}_{1,n}(t_n)$ soit un point de $\tilde{\ell}_{1,n}(\mathbb{R})$ le plus proche de $\tilde{\ell}_2(0)$. Puisque Σ est compacte, il existe $\delta > 0$ tel que $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est δ -hyperbolique, et d'après le lemme 2.6 et la définition de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quitte à extraire, la suite $(\tilde{\ell}'_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\tilde{\ell}'_{1,n}(t) = \tilde{\ell}_{1,n}(t+t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie compacte-ouverte.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_n \in \Gamma_\Sigma$ tel que $\tilde{\ell}_{1,n} = \gamma_n \tilde{\ell}_{1,1}$, et puisque $\tilde{\ell}_{1,n}$ et $\tilde{\lambda}_{1,n}$ ont le même couple de points à l'infini, on a $\tilde{\lambda}_{1,n} = \gamma_n \tilde{\lambda}_{1,1}$. Puisque Γ_Σ agit par isométries sur $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, on en déduit que $d(\tilde{\ell}_{1,n}(0), \tilde{\lambda}_{1,n}(0)) = d(\tilde{\ell}_{1,1}(0), \tilde{\lambda}_{1,1}(0))$, où d est la distance définie par la structure de demi-translation. De même, les points $\tilde{\ell}_{1,n}(t_n)$ et $\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n)$

restent à distance bornée. De plus, puisque Σ est compacte, les revêtements $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ sont quasi-isométriques, donc les géodésiques hyperboliques $\tilde{\lambda}_{1,n}$ sont des quasi-géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (voir par exemple [4, Prop. 8.19 et Déf. 8.22 p. 140-142]). Donc la distance $d(\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n), \tilde{\lambda}_{1,n}(0))$ tend vers l'infini et donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini. \square

COROLLAIRE 4.9. — *Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate minimale qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées. Alors si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux feuilles de $\Lambda_{[q]}$ et $\tilde{\ell}_2$ est un relevé de ℓ_2 dans $\tilde{\Sigma}$, quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de relevés de ℓ_1 qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques. De plus, l'image de chacun des rayons géodésiques de chacune des feuilles de $\Lambda_{[q]}$ est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$.*

Démonstration. — On applique le lemme 4.8 en prenant pour C la lamination hyperbolique Λ_m correspondant à $\Lambda_{[q]}$, qui est minimale et n'est pas une feuille fermée, en remarquant que chacun des bouts de chacune des feuilles de Λ_m spirale sur Λ_m . La deuxième assertion du corollaire vient du fait que p n'augmente pas les distances. \square



Remarque 4.10. — Une lamination plate peut ne pas être minimale même si les images de tous les rayons géodésiques de toutes ses feuilles sont denses dans son support. Par exemple, on considère la surface de demi-translation ci-dessus, dont les singularités sont d'angle 3π et situées aux sommets du graphe en gras. Alors la réunion des deux géodésiques plates correspondant aux deux courbes périodiques dessinées (et de leurs inverses) est une lamination plate telle que l'image de chacun des rayons géodésiques de chacune des feuilles est égale au graphe. Mais la lamination n'est pas minimale.

LEMME 4.11. — *Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate minimale de $(\Sigma, [q])$ qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées. Supposons qu'il existe une feuille de $\Lambda_{[q]}$ dont l'image est compacte. Alors toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ont la même image, et l'image de chacun des rayons de chacune des feuilles lui est égale.*

Démonstration. — Soient ℓ_1, ℓ_2 des feuilles de $\Lambda_{[q]}$. D'après le corollaire 4.9, si $\tilde{\ell}_2$ est un relevé de ℓ_2 , quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de relevés de ℓ_1 qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques.

Supposons que l'image de ℓ_1 est compacte. Si ℓ_1 était régulière, son image serait contenue dans un cylindre plat et ℓ_1 serait périodique, et on aurait $\Lambda_{[q]} = \{\ell_1, \ell_1^-\}$. Donc l'image de ℓ_1 est contenue dans une union finie de liaisons de singularités. Si K est une boule compacte de $\tilde{\Sigma}$ qui intersecte l'image de $\tilde{\ell}_2$, il n'y a qu'un nombre fini de liaisons de singularités contenues dans K qui se projettent sur une liaison de singularités parcourue par ℓ_1 . Et puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), tout segment géodésique parcourt au plus une fois chacune de ces liaisons de singularités. Il n'y a donc qu'un nombre fini de segments géodésiques dont l'image est contenue dans la réunion de ces liaisons de singularités, et la suite $(\tilde{\ell}_{1,n|K})_{n \in \mathbb{N}}$ des restrictions des feuilles $\tilde{\ell}_{1,n}$ à K est constante à partir d'un certain rang, égale à $\tilde{\ell}_{2|K}$. On en déduit que l'image de $p(\tilde{\ell}_{2|K})$ est contenue dans l'image de ℓ_1 , et ceci étant vrai pour toutes les boules compactes, l'image de ℓ_2 est contenue dans celle de ℓ_1 , et en particulier compacte. De même, l'image de ℓ_1 est contenue dans celle de ℓ_2 , donc elles sont égales. Toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ont donc la même image qui est la réunion d'un nombre fini de liaisons de singularités et de singularités. La deuxième assertion du lemme est une conséquence du lemme 4.8. \square

Une géodésique $\tilde{\ell}$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est une *feuille de Levitt* s'il existe au moins une composante connexe $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ telle que

- $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ est une composante de bord du complété de $\tilde{\Sigma}^+$ pour la distance induite ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'angle défini par les germes de $\tilde{\ell}([t - \varepsilon, t])$ et $\tilde{\ell}([t, t + \varepsilon])$, avec $\varepsilon > 0$, mesuré dans $\tilde{\Sigma}^+$, est égal à π .

La notion de feuille de Levitt non régulière correspond aux droites singulières du relevé d'un feuilletage introduites par G. Levitt dans [10]. On appelle $\tilde{\Sigma}^+$ un *côté sans angle* de $\tilde{\ell}$.

En un point donné, qui n'est pas une singularité de $[\tilde{q}]$, ne passent au plus que deux feuilles de Levitt ayant une direction donnée (à changement d'orientation près), et s'il y en a deux, alors l'intersection de leurs côtés sans angle est vide. Une feuille de Levitt est entièrement déterminée par la donnée de son côté sans angle (à changement d'orientation près). On appelle *feuille de Levitt* de $(\Sigma, [q])$ le projeté d'une feuille de Levitt de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Une feuille de Levitt est de direction constante.

Supposons qu'il existe une feuille ℓ_0 de $\Lambda_{[q]}$ dont l'image n'est pas compacte. D'après les lemmes 3.10 et 3.11, elle admet un rayon géodésique

$\ell_0|_{[T, +\infty[}$, avec $T > 0$, ne rencontrant pas de singularité, qui est de direction constante et est dense dans un domaine du feuilletage vertical $\mathcal{F}_{q'}$ d'une différentielle quadratique holomorphe q' de la classe $[q]$, que l'on note D . D'après le corollaire 4.9, tous les rayons géodésiques des feuilles de $\Lambda_{[q]}$ sont denses dans le support de $\Lambda_{[q]}$, qui est donc égal à D . Puisque $\ell_0([T, +\infty[)$ est dense dans D et puisque les autres feuilles de $\Lambda_{[q]}$ n'intersectent pas transversalement $\ell_0([T, +\infty[)$, toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ sont de direction constante et de même direction. En particulier, la feuille ℓ_0 est de direction constante. On note $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ l'image réciproque de $\Lambda_{[q]}$ dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$.

LEMME 4.12. — *On suppose que $\Lambda_{[q]}$ est une lamination plate minimale qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, et contient une feuille ℓ_0 qui n'est pas d'image compacte. La lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est alors égale à l'ensemble des feuilles de Levitt qui sont d'image contenue dans D et de même direction que ℓ_0 , privé (éventuellement) des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de D .*

Démonstration. — On a vu que le support de la lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est D et qu'aucun segment de feuille de $\Lambda_{[q]}$ n'a une autre direction que celle de ℓ_0 . Donc $\Lambda_{[q]}$ contient l'ensemble des feuilles régulières du feuilletage vertical $\mathcal{F}_{q'}$ de q' , de même direction que ℓ_0 , qui sont denses dans D .

Montrons que l'ensemble E des feuilles de Levitt $\tilde{\ell}$ d'image contenue dans $p^{-1}(D)$ et de même direction qu'un relevé de ℓ_0 , telle que l'image de $\tilde{\ell}$ est contenue dans l'adhérence de l'intersection $\text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}) \cap \tilde{\Sigma}^+$, où $\tilde{\Sigma}^+$ est un côté sans angle de $\tilde{\ell}$, est contenu dans $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$.

Soit $\tilde{\ell}_1$ une feuille de E . Il existe $\tilde{x} \in \ell_1(\mathbb{R})$ qui n'est pas une singularité de $[\tilde{q}]$, et $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de feuilles régulières de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, dont l'origine appartient à un côté sans angle $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\ell}_1$, telle que $(\tilde{\ell}_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} . D'après le lemme 2.3, quitte à extraire, la suite $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une feuille $\tilde{\ell}_2$ de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ passant par \tilde{x} , pour la topologie des géodésiques. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la feuille $\tilde{\ell}_n$ est régulière et son origine appartient à $\tilde{\Sigma}^+$, donc la géodésique $\tilde{\ell}_2$ est une feuille de Levitt passant par \tilde{x} , de même direction que $\tilde{\ell}_1$, et elle a un côté sans angle contenant $\tilde{\ell}_n(0)$, pour n assez grand. Donc ce côté sans angle a une intersection non vide avec $\tilde{\Sigma}^+$. On a vu qu'il est alors égal à $\tilde{\Sigma}^+$, et donc $\tilde{\ell}_2 = \tilde{\ell}_1$ à changement d'orientation et d'origine près. Donc $\tilde{\ell}_1$ appartient à $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$.

Réciproquement, montrons que $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ est contenu dans E . Nous avons vu que l'ensemble des feuilles de Levitt régulières, contenues dans $p^{-1}(D)$, de même direction qu'un relevé de ℓ_0 , est contenu dans $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, et la réunion de

leurs images est dense dans $p^{-1}(D)$. Soient $\tilde{\ell}_1$ l'une d'elles et $\tilde{\ell}_2$ une feuille quelconque de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$. Puisque $\Lambda_{[q]}$ est minimale et n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, d'après le corollaire 4.9, il existe une suite de relevés paramétrés $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\ell_1 = p(\tilde{\ell}_1)$ qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques. Or, l'image d'un relevé de ℓ_1 dans $\tilde{\Sigma}$ est disjointe de $\partial\tilde{\Sigma}$, car sinon elle serait contenue dans $\partial\tilde{\Sigma}$, et l'image de ℓ_1 serait contenue dans $\partial\Sigma$ (et ne serait pas dense dans D), et est disjointe de l'image de $\tilde{\ell}_2$ car les relevés de ℓ_1 sont réguliers, distincts de $\tilde{\ell}_2$, et ils ne sont pas entrelacés avec $\tilde{\ell}_2$. Quitte à extraire, il existe une composante connexe $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ qui contient toutes les feuilles de la suite. Comme $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'angle défini par les germes $\tilde{\ell}_2([t - \varepsilon, t])$ et $\tilde{\ell}_2([t, t + \varepsilon[)$, avec $\varepsilon > 0$, mesuré dans $\tilde{\Sigma}^+$, est égal à π . Donc $\tilde{\ell}_2$ est une feuille de Levitt dont $\tilde{\Sigma}^+$ est un côté sans angle. De plus, par construction, l'image de $\tilde{\ell}_2$ est dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+ \cap \text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]})$. Donc $\tilde{\ell}_2$ appartient à E .

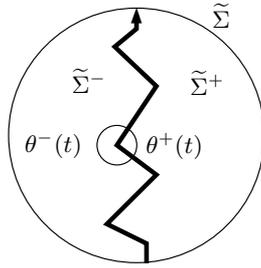
Montrons enfin que l'ensemble $p(E)$ des projetés des éléments de E dans Σ est égal à l'ensemble des feuilles de Levitt d'image contenue dans D et de même direction que ℓ_0 , privé (éventuellement) des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de D . Par définition, tout élément de $p(E)$ est une feuille de Levitt d'image contenue dans D , de même direction que ℓ_0 , et puisque son image est dense dans D , elle n'est pas contenue dans le bord de D . Réciproquement, soit ℓ une feuille de Levitt d'image contenue dans D , qui n'est pas contenue dans le bord de D , de même direction que ℓ_0 . Soient $\tilde{\ell}$ un relevé de ℓ , $\tilde{\Sigma}^+$ un côté sans angle de $\tilde{\ell}$, et $\tilde{x} \in \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ tel que \tilde{x} appartient à l'intérieur de $p^{-1}(D)$. Alors il existe une suite de feuilles $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ d'image contenue dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+$, dont on peut fixer les paramétrages de sorte que $(\tilde{\ell}_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} . Comme précédemment, la suite $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell}$ pour la topologie des géodésiques, donc $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ est contenue dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+ \cap \text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]})$. Donc $\tilde{\ell}$ est un élément de E . □

4.4. Rayons asymptotiques.

Dans cette partie 4.4, on suppose toujours que $(\Sigma, [q])$ est une surface compacte, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ est un revêtement universel. On caractérise maintenant les rayons géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ayant le même point à l'infini. La notion de rayon géodésique quasi-droit vient de [7, § 3.4].

Soit $\tilde{r} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \tilde{\Sigma}$ un rayon géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. On peut prolonger \tilde{r} (de manière non unique et indifférente) en une géodésique. On dit que \tilde{r} rencontre une composante \tilde{b} du bord de $\tilde{\Sigma}$ du côté + (resp. -) à l'instant t si \tilde{b} est contenue dans la réunion de l'image de $\tilde{\ell}$ et de son côté + (resp. -, voir la définition 3.1), et si $\tilde{r}(t)$ appartient à \tilde{b} .

On dit que \tilde{r} est quasi-droit si quitte à inverser $+/-$, le rayon \tilde{r} ne rencontre pas de composante de bord du côté + à partir d'un instant $t_0 > 0$, et si, pour $t > t_0$, on note $\theta^+(t)$ l'angle défini par les germes de \tilde{r} issus de $\tilde{r}(t)$, mesuré du côté +, on a $\sum_{t > t_0} (\theta^+(t) - \pi) < +\infty$. On dit alors que + est un côté quasi-droit de \tilde{r} . Un point $\eta \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}$ est quasi-droit s'il existe un rayon géodésique quasi-droit \tilde{r} tel que $\tilde{r}(+\infty) = \eta$.



LEMME 4.13 (voir [7, Prop. 3.10]).

- Soient \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 deux rayons géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ tels que $\tilde{r}_1(+\infty) = \tilde{r}_2(+\infty)$. Alors si l'un n'est pas quasi-droit, il existe $T_1, T_2 \geq 0$ tel que $\tilde{r}_1(t + T_1) = \tilde{r}_2(t + T_2)$ pour tout t assez grand.
- Soit $\eta \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}$ un point quasi-droit. Alors tout rayon géodésique \tilde{r} de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ tel que $\tilde{r}(+\infty) = \eta$ est quasi-droit.

Démonstration. — Supposons par exemple que \tilde{r}_1 n'est pas quasi-droit. Soit $\tilde{\ell}$ une géodésique qui prolonge \tilde{r}_1 comme ci-dessus. Si l'image de \tilde{r}_2 intersecte $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ en un point, alors puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), le rayon \tilde{r}_2 est confondu avec $\tilde{\ell}$ à partir de ce point. Supposons par l'absurde que l'image de \tilde{r}_2 est contenue dans une composante connexe (ouverte) du côté + de $\tilde{\ell}$ (quitte à échanger + et -).

Ou bien il existe une suite réelle $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, telle que \tilde{r}_1 rencontre une composante de bord du côté + en $\tilde{r}_1(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors, puisque $\tilde{r}_2(+\infty) = \tilde{r}_1(+\infty)$, il existerait des instants t_n tel que \tilde{r}_2 intersecte l'image de \tilde{r}_1 en $\tilde{r}_1(t_n)$.

Ou bien il existe $T > 0$ tel que \tilde{r}_1 ne rencontre pas de composante de bord du côté + à partir de l'instant T , et alors $\sum_{t > T} (\theta^+(t) - \pi) = +\infty$. On peut reprendre alors les démonstrations des lemmes [7, Lem. 3.10] et

[7, Prop. 3.3]. Il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $t_n > T$, telle que $\theta^+(t_n) > \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les points $\tilde{r}_1(t_n)$ sont alors des singularités, et puisque les singularités sont isolées, on en déduit que, quitte à extraire, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, et $\tilde{r}_1(t_n)$ tend vers $\tilde{r}_1(+\infty)$. De plus, puisque $\theta^+(t_n) > \pi$ pour tout n , il existe des géodésiques \tilde{c}_n dont les origines sont les points $\tilde{r}_1(t_n)$, qui ne rencontrent $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ qu'en leurs origines. On renvoie à [7, Prop. 3.3] pour la démonstration que la condition $\sum_{t>T}(\theta^+(t) - \pi) = +\infty$ implique que les points à l'infini $\tilde{c}_n(\pm\infty)$ tendent vers $\tilde{r}_1(+\infty)$ quand n tend vers l'infini (pour la topologie de $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$). Donc si l'image de \tilde{r}_2 est disjointe de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$, pour n assez grand, le rayon \tilde{r}_2 intersecte $\tilde{c}_n(]0, +\infty[)$ et $\tilde{c}_n(]-\infty, 0[)$ le long de deux composantes connexes disjointes, ce qui est impossible dans un espace CAT(0). Donc \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 sont confondus à partir d'un certain temps.

Le deuxième point du lemme se démontre à partir du premier par la contraposée. □

LEMME 4.14. — Soient $\ell_1 : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale positivement compacte de $(\Sigma, [q])$ dont l'image n'est pas contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré et ℓ_1 un relevé de ℓ_1 dans $\tilde{\Sigma}$. Soit $\tilde{\ell}_2$ une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ telle que $\tilde{\ell}_2(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$. Alors les géodésiques ℓ_2 et $\tilde{\ell}_1$ coïncident à partir d'un certain temps, quitte à changer les origines, et donc $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ coïncide aussi avec ℓ_1 à partir de ce temps.

Démonstration. — Considérons d'abord un côté de $\tilde{\ell}_1$, noté $+$. Si $\tilde{\ell}_1$ rencontre des composantes de bord du côté $+$ en des temps arbitrairement grands, alors le côté $+$ n'est pas quasi-droit. Supposons que $\tilde{\ell}_1$ ne rencontre pas de composante de bord du côté $+$ à partir d'un instant $T_1 > 0$. Puisque ℓ_1 est positivement compacte, il existe $T_0 > T_1$ tel que l'ensemble $\{\theta^+(t), t > T_0\}$, défini par $\tilde{\ell}_1$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs qui apparaissent chacune une infinité de fois dans la somme $\sum_{t>T_0}(\theta^+(t) - \pi)$. En particulier, cette somme vaut 0 si chacune de ces valeurs est nulle et $+\infty$ sinon. Puisque $\ell_1(]T_0, +\infty[)$ n'est pas contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré, il existe t_+ tel que $\theta^+(t_+) - \pi > 0$, donc cette somme vaut $+\infty$. Dans les deux cas, le côté $+$ n'est pas quasi-droit. De même, le côté $-$, s'il existe, n'est pas quasi-droit. Donc $\tilde{\ell}_1|_{]0, +\infty[}$ n'est pas quasi-droit. D'après le lemme 4.13, les deux géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ coïncident à partir d'un certain temps, à changement d'origine près. □

LEMME 4.15. — Soit $\ell_1 : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale périodique de $(\Sigma, [q])$ dont l'image est contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré. Soient $\tilde{\ell}_1$ un relevé de ℓ_1 dans $\tilde{\Sigma}$ et \tilde{B} la bande plate maximale contenant $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R})$, dont on fixe des paramétrages des composantes de bord.

Soit $\tilde{\ell}_2$ une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ telle que $\tilde{\ell}_2(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$. Alors si $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ n'est pas contenue dans \tilde{B} , la géodésique $\tilde{\ell}_2$ coïncide avec un des bords \tilde{b} de \tilde{B} à partir d'un certain temps, quitte à changer les origines et les orientations, et donc $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ coïncide avec $b = p \circ \tilde{b}$ à partir de ce temps.

Démonstration. — La démonstration de ce lemme se déduit facilement de la démonstration de [7, Prop. 3.10]. Quitte à inverser leur orientation, les bords de \tilde{B} ont le même couple de points à l'infini que $\tilde{\ell}_1$. De plus, ils n'ont qu'un seul côté quasi-droit. Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), si $\tilde{\ell}_2$ intersecte un bord de \tilde{B} en un point, elle est confondue avec ce bord à partir de ce point. Supposons par l'absurde que $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans $\tilde{\Sigma} - \tilde{B}$. On considère le bord \tilde{b} de \tilde{B} tel que $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans une composante connexe du complémentaire de \tilde{B} correspondant au côté + (quitte à échanger) de \tilde{b} , qui n'est pas quasi-droit. On montre de même que dans la démonstration du lemme 4.13 que \tilde{b} et $\tilde{\ell}_2$ sont confondues à partir d'un certain temps. \square

De même que dans la partie 4.3, on considère une métrique hyperbolique m , à bord totalement géodésique, sur Σ , ainsi qu'une lamination plate minimale $\Lambda_{[q]}$ qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées et Λ_m la lamination hyperbolique minimale qui lui correspond. On note $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ leurs images réciproques par p .

LEMME 4.16. — *Supposons que $\Lambda_{[q]}$ soit un ensemble de feuilles de Levitt denses dans un domaine (voir le lemme 4.12). Alors si λ est une géodésique de (Σ, m) qui spirale sur Λ_m , et si ℓ est la géodésique locale plate à laquelle elle correspond (qui est unique à changement d'origine près), il existe une feuille ℓ_1 de $\Lambda_{[q]}$ telle que ℓ et ℓ_1 coïncident à partir d'un certain temps (quitte à changer les origines).*

Démonstration. — D'après le lemme 4.1, il existe une feuille ℓ_0 de $\Lambda_{[q]}$ dont un relevé à le même point à l'infini qu'un relevé de ℓ . Puisque les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ne sont pas positivement compactes, d'après le lemme 4.14, ℓ n'est pas positivement compacte. Puisqu'elle n'est pas auto-entrelacée, d'après le lemme 3.10, elle ne rencontre pas de singularité et est donc de direction constante à partir d'un certain temps, soit $T > 0$. Comme ℓ_0 est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$, qui est un domaine d'un feuilletage de direction constante (voir le lemme 4.12), on peut paramétrer ℓ_0 pour que son origine appartienne à l'intérieur du support de $\Lambda_{[q]}$. Alors, d'après le lemme 4.8, il existe $t > T$ tel que $\ell(t)$ soit arbitrairement proche de $\ell_0(0)$, et donc appartienne à l'intérieur du support de $\Lambda_{[q]}$. Puisque ℓ et ℓ_0 ne sont pas entrelacées, si $\ell([t, +\infty[)$ n'est pas contenue dans l'image de ℓ_0 ,

le rayon $\ell_{|t,+\infty[}$ n'intersecte pas $\ell_0(\mathbb{R})$, et puisque $\ell_0(\mathbb{R})$ est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$, il a la même direction que ℓ_0 . Donc $\ell_{|t,+\infty[}$ est un rayon d'au moins une feuille de Levitt de même direction que ℓ_0 , qui n'est pas contenue dans le bord de $\text{Supp}(\Lambda_{[q]})$. C'est donc un rayon d'une feuille de $\Lambda_{[q]}$ d'après le lemme 4.12. \square

5. Lamination plate minimale de support un graphe fini.

Dans cette partie, on cherche à savoir à quelle condition un graphe métrique fini peut être plongé isométriquement dans une surface compacte munie d'une structure de demi-translation telle qu'il soit le support d'une lamination plate minimale (qui ne soit pas une paire de feuilles périodiques opposées). Nous utiliserons les définitions et conventions sur les graphes de [14]. On confond un graphe et sa réalisation topologique, et on le munit d'une distance géodésique telle que chaque demi-arête soit isométrique à un intervalle compact de \mathbb{R} . On supposera de plus qu'il est connexe et sans sommet terminal. La *valence* d'un point est le cardinal de l'ensemble des germes de rayons issus de ce point. Un *arbre simplicial* est un graphe simplement connexe dont la longueur des arêtes est minorée par une constante strictement positive.

Soit G un graphe. Une *orientation cyclique* de G est la donnée, pour chaque sommet x de G , d'un ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons géodésiques issus de x . On appelle *graphes cycliquement ordonnés* les graphes munis d'une orientation cyclique.

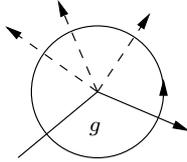
Remarque 5.1. — Soit (T, or) un arbre simplicial cycliquement ordonné, et $\partial_\infty T$ son bord à l'infini. Si a, b, c sont des points deux à deux distincts de $\partial_\infty T$, on note $t = t(a, b, c)$ le centre du tripode défini par a, b et c ($t =]a, b[\cap]a, c[\cap]b, c[$), et r_a, r_b, r_c les germes issus de t définis par $[t, a[, [t, b[, [t, c[$. On pose alors $o(a, b, c) = or_t(r_a, r_b, r_c)$. La fonction $o : (\partial_\infty T)^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ainsi définie (avec $o(a, b, c) = 0$ si a, b, c ne sont pas deux à deux distincts) est un ordre cyclique sur $\partial_\infty T$, et l'application f qui à une orientation cyclique de T associe l'ordre cyclique total sur $\partial_\infty T$ ainsi défini, est injective (voir [16, Prop. 3.9]).

Si (G, or) est un graphe fini cycliquement ordonné, et si $p : \tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement universel, alors \tilde{G} est un arbre simplicial et il existe une unique orientation cyclique \tilde{or} sur \tilde{G} telle que p préserve l'orientation cyclique, qui définit un ordre cyclique sur $\partial_\infty \tilde{G}$. De plus, la valence de chaque sommet de

\tilde{G} est finie. Donc \tilde{G} est CAT(0) et propre, et on est dans les conditions de la partie 2.1 pour définir des laminations géodésiques sur de tels graphes.

Soient (G, or) un graphe cycliquement ordonné et $(\Sigma, [q])$ une surface munie d'une structure de demi-translation tels qu'il existe un plongement isométrique ϕ de G dans $(\Sigma, [q])$. On dit que ϕ *préserve l'orientation cyclique* si en notant or^Σ l'orientation cyclique induite sur $\phi(G)$ par un choix d'orientation de Σ , alors $\phi : (G, or) \rightarrow (\phi(G), or^\Sigma)$ préserve l'orientation cyclique.

Une géodésique locale $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ *serre à droite* si pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t)$ est un sommet de G , le germe de $g([t, t + \varepsilon[$ succède à celui de $g(]t - \varepsilon, t])$ (pour $\varepsilon > 0$), pour l'ordre $or_{g(t)}$ (i.e. si on note r_1 et r_2 les germes de $g([t, t + \varepsilon[$ et de $g(]t - \varepsilon, t])$, alors pour tout germe r_3 distinct de r_1 et r_2 , on a $or_{g(t)}(r_3, r_1, r_2) = 1$).



Chaque arête de G est parcourue dans les deux sens par deux géodésiques locales qui serrent à droite, éventuellement égales, qui sont uniques (à changement d'origine près).

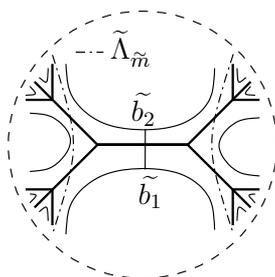
THÉOREME 5.2. — *Soit (G, or) un graphe fini cycliquement ordonné (connexe et sans sommet terminal). Alors G est le support d'une lamination minimale non dénombrable, donc dont aucune feuille n'est positivement ou négativement périodique, si et seulement si (G, or) n'est pas isomorphe à un cercle, une paire d'haltères, un huit plat ou un théta plat, par un isomorphisme préservant l'orientation cyclique (c'est-à-dire $\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \ominus$, où les orientations cycliques sont données par l'orientation du plan).*

Démonstration. — Décrivons le plongement classique de G dans une surface munie d'une structure de demi-translation. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ une géodésique locale qui serre à droite. Puisque G est fini, il existe au moins deux réels $t_1 < t_2$ et $\varepsilon > 0$ tels que les germes de $g|_{[t_1, t_1 + \varepsilon[}$ et de $g|_{[t_2, t_2 + \varepsilon[}$ sont égaux, et puisque g est déterminée par la donnée d'un de ses germes, la géodésique locale g est périodique. Puisque G est fini, l'ensemble des géodésiques locales qui serrent à droite (à changements d'origine près) est fini et chaque arête est parcourue dans les deux sens par deux éléments de cet ensemble, éventuellement égaux.

Le long de chaque élément de cet ensemble, on recolle, par isométrie locale, un cylindre plat de hauteur 1 et de la bonne circonférence, le long de l'une de ses composantes de bord et on note (Σ, d) l'espace métrique ainsi obtenu et toujours G le plongé de G dans (Σ, d) . Alors par construction, chaque point de Σ qui n'est pas un sommet de valence supérieure ou égale à trois de G admet un voisinage isométrique à un ouvert du demi-plan supérieur fermé de \mathbb{R}^2 (muni de la métrique euclidienne), et chaque sommet de valence supérieure ou égale à trois de G est une singularité conique d'angle $k\pi$, où $k \geq 3$ est sa valence. De plus, les cylindres plats sont recollés le long de géodésiques locales de direction constante. Donc si on les feuillette par des feuilles parallèles à leur bord, on construit ainsi un champ de droites parallèle sur (Σ, d) . Enfin, chacun des cylindres plats est orientable, et puisque les recollements en chaque sommet sont ordonnés selon l'ordre cyclique sur les germes de rayons issus du sommet, la surface Σ est orientable. On a vu dans la partie 2.5 que d est définie par une structure de demi-translation, soit $[q]$. On peut choisir l'orientation de Σ pour que le plongement de G dans Σ préserve l'orientation.

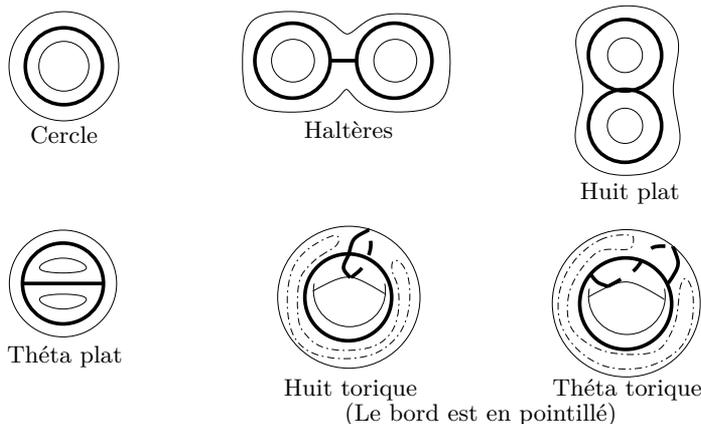
La surface compacte Σ ne peut être ni un disque, ni une sphère, ni un tore. Supposons que Σ n'est ni un cylindre ni un pantalon. Alors $\chi(\Sigma) < 0$ et il existe une métrique hyperbolique m à bord totalement géodésique sur Σ . D'après le lemme 4.2, il existe au moins une lamination minimale et quasi-maximale sur (Σ, m) , qui est non dénombrable. Soit $\Lambda_{[q]}$ l'unique lamination plate à laquelle elle correspond, qui est aussi minimale et non dénombrable (voir la partie 4.2 pour la définition de cette correspondance).

Supposons qu'il existe un point d'une feuille ℓ de $\Lambda_{[q]}$ qui n'appartienne pas à G . Si ℓ n'est pas parallèle à une composante du bord, alors ℓ rencontre transversalement une composante du bord, ce qui est impossible car ℓ est définie sur \mathbb{R} . Donc ℓ est parallèle à une composante du bord, et donc périodique, ce qui est impossible car $\Lambda_{[q]}$ est minimale et non dénombrable. Donc le support de $\Lambda_{[q]}$ est contenu dans G .



On note $\tilde{\Lambda}_{[q]}$ et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ les images réciproques de $\Lambda_{[q]}$ et Λ_m dans $\tilde{\Sigma}$. Supposons qu'il existe une arête a de G qui n'est parcourue par aucune feuille de $\Lambda_{[q]}$. Alors si $\tilde{a} : [-r, r] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ est un relevé paramétré de a (avec $r > 0$), en notant A et B les ensembles de points de $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ qui sont respectivement les extrémités des rayons qui ont le même germe que $\tilde{a}|_{[0, r[}$ ou $\tilde{a}|_{]-r, 0]}$, aucune feuille de $\tilde{\Lambda}_{[q]}$ n'a ses points à l'infini appartenant respectivement à A et B , et de même pour $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$. Donc le plus court segment géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ qui joint les composantes de bord \tilde{b}_1 et \tilde{b}_2 dont les points à l'infini appartiennent respectivement à A et B (voir la figure), n'est intersecté par aucune feuille de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$, et il existe une composante du complémentaire du support de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ dont le complété a au moins \tilde{b}_1 et \tilde{b}_2 comme composantes de $\partial \tilde{\Sigma}$ dans son bord. Or, puisque Λ_m est quasi-maximale, les complétés des composantes connexes du complémentaire de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ dans $\tilde{\Sigma}$ sont des triangles géodésiques idéaux ou des polygones géodésiques idéaux dont un seul côté n'est pas une feuille mais une composante du bord de $\tilde{\Sigma}$. Donc chaque arête de G est parcourue par au moins une feuille de $\Lambda_{[q]}$. D'après le lemme 4.11, chaque feuille parcourt toutes les arêtes.

Si Σ est un cylindre plat, les feuilles d'une lamination de $(\Sigma, [q])$ sont périodiques. De même, si Σ était un pantalon et s'il existait une lamination non dénombrable sur $(\Sigma, [q])$, la lamination hyperbolique lui correspondant serait non dénombrable, ce qui est impossible sur un pantalon hyperbolique. Il reste donc à déterminer les graphes finis enrubannés dont la surface munie d'une structure de demi-translation associée, construite ci-dessus, soit un pantalon. Soient (G, or) un tel graphe et $(\Sigma, [q])$ le pantalon plat associé. Puisque Σ se rétracte par déformation forte sur G , le groupe fondamental de G en un point quelconque est isomorphe au groupe fondamental de Σ au même point, et est donc un groupe libre à deux générateurs. Le graphe G est donc homéomorphe à un graphe de type huit, haltères, ou théta. Si G est homéomorphe à un graphe de type haltères, quitte à prendre le symétrique d'une haltère par rapport à l'axe, on montre qu'il n'existe qu'une seule orientation cyclique sur G , sinon il existe deux orientations cycliques sur G (à isomorphisme préservant l'orientation cyclique près). On montre alors que Σ n'est un pantalon que si G est le graphe des haltères, du théta plat ou du huit plat. \square



6. Théorème de structure des laminations géodésiques plates.

Dans cette partie, on donne un théorème de structure des laminations géodésiques sur une surface compacte munie d'une structure de demi-translation. On note de nouveau $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et on suppose que Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$.

Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate. On appelle *composante cylindrique* de $\Lambda_{[q]}$ un ensemble maximal de feuilles de $\Lambda_{[q]}$ contenues dans un cylindre plat non dégénéré fermé (elles sont alors périodiques). Une *composante minimale* est une sous-lamination minimale. Une composante minimale est dite de *type graphe fini* si son support est un graphe fini (nécessairement sans sommet terminal), et de *type récurrent* si c'est la réunion des feuilles de Levitt locales contenues dans son support et de même direction, privé éventuellement des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de son support (voir la définition précédant le lemme 4.12). Si ℓ est une géodésique plate, on dit qu'un de ses bouts *aboutit* dans une composante cylindrique s'il existe un rayon géodésique correspondant à ce bout qui coïncide avec un bord du cylindre plat maximal correspondant, à partir d'un certain temps (elle peut être disjointe des feuilles de la composante cylindrique), et qu'elle *aboutit* dans une composante minimale s'il existe un rayon géodésique correspondant à ce bout qui est un rayon d'une feuille de cette composante minimale.

THÉORÈME 6.1. — Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate sur une surface compacte munie d'une structure de demi-translation $(\Sigma, [q])$. Alors $\Lambda_{[q]}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes cylindriques, d'un nombre fini de composantes minimales (de type récurrent ou graphe fini ou paire de feuilles périodiques opposées d'images non contenues dans un cylindre plat non dégénéré) et d'un nombre fini de feuilles isolées (pour la topologie des géodésiques) dont chacun des bouts aboutit dans une composante minimale ou dans une composante cylindrique.

Remarque. — Si les supports de deux composantes minimales de type récurrent s'intersectent, l'intersection ne peut être qu'une réunion de points isolés et de liaisons de singularités qui n'est pas connexe a priori, contenue dans leurs bords. De même, le support d'une composante minimale de type récurrent ne peut intersecter le cylindre plat contenant le support d'une composante cylindrique que le long du bord du cylindre, et deux cylindres plats maximaux qui contiennent des composantes cylindriques ne peuvent s'intersecter que le long de leur bord. On ne peut rien dire, a priori, de l'intersection des autres types de composantes.

Démonstration. — On fixe une métrique hyperbolique m (à bord totalement géodésique) sur Σ . On renvoie à la partie 4.2 pour les notations et la définition de lamination hyperbolique correspondant à une lamination plate. Soit Λ_m la lamination hyperbolique qui correspond à $\Lambda_{[q]}$. Puisque Σ est compacte, d'après par exemple [5, Th. 1.4.2.8 p. 83], la lamination Λ_m est la réunion disjointe d'un nombre fini de composantes minimales et d'un nombre fini de géodésiques isolées dont chacun des bouts spirale sur une composante minimale. D'après le corollaire 4.6, chaque composante minimale de Λ_m qui n'est pas une feuille fermée correspond à une unique composante minimale de $\Lambda_{[q]}$, qui est de type graphe fini si elle contient une géodésique d'image compacte, et de type récurrent sinon (d'après les lemmes 4.11 et 4.12). De plus, si une géodésique de Λ_m est périodique et si elle ne correspond pas à une unique feuille périodique de $\Lambda_{[q]}$, elle correspond à un ensemble maximal d'au moins deux feuilles de $\Lambda_{[q]}$, d'image contenue dans un cylindre plat d'après le lemme 4.5, qui est fermé pour la topologie des géodésiques, d'après le lemme 2.5. Cet ensemble est donc une composante cylindrique.

Enfin, si le bout d'une feuille de Λ_m spirale sur une composante minimale de Λ_m , le bout de la géodésique plate qui lui correspond aboutit sur la composante cylindrique ou la composante minimale de $\Lambda_{[q]}$ correspondante, d'après les lemmes 4.14, 4.15 et 4.16. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BESTVINA, M. FEIGN & M. HANDEL, « Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), n° 2, p. 215-244.
- [2] F. BONAHO, « Geodesic currents on negatively curved groups », in *Arboreal group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 19, Springer, 1991, p. 143-168.
- [3] ———, « Geodesic laminations on surfaces », in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology*, Contemp. Math., vol. 269, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, p. 1-37.
- [4] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, 1999.
- [5] R. CANARY, D. EPSTEIN & A. MARDEN (éds.), *Fundamentals of hyperbolic manifolds : Selected expositions*, Reprinted from the series London Mathematical Society Lecture Note Series 111(1986) and 112(1987), 2006.
- [6] T. COULBOIS, A. HILION & M. LUSTIG, « Non-unique ergodicity, observers' topology and the dual algebraic lamination for \mathbb{R} -trees », *Illinois J. Math.* **51** (2007), n° 3, p. 897-911.
- [7] K. DANKWART, *On the large-scale geometry of flat surfaces* (Diss. 2010), 2011.
- [8] M. DUCHIN, C. J. LEININGER & K. RAFI, « Length spectra and degeneration of flat metrics », *Invent. Math.* **182** (2010), n° 2, p. 231-277.
- [9] U. HAMENSTÄDT, « Geometry of the mapping class groups. I. Boundary amenability », *Invent. Math.* **175** (2009), n° 3, p. 545-609.
- [10] G. LEVITT, « Foliations and laminations on hyperbolic surfaces », *Topology* **22** (1983), n° 2, p. 119-135.
- [11] A. MARDEN & K. STREBEL, « On the ends of trajectories », in *Differential geometry and complex analysis*, Springer, 1985, p. 195-204.
- [12] T. MORZADÉC, Thèse de doctorat en préparation.
- [13] R. C. PENNER & J. L. HARER, *Combinatorics of train tracks*, Annals of Mathematics Studies, vol. 125, Princeton University Press, 1992.
- [14] J.-P. SERRE, *Arbres, amalgames, SL_2* , vol. 46, Astérisque, 1977.
- [15] K. STREBEL, *Quadratic differentials*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 5, Springer-Verlag, 1984.
- [16] M. WOLFF, « Connected components of the compactification of representation spaces of surface groups », *Geom. Topol.* **15** (2011), n° 3, p. 1225-1295.

Manuscrit reçu le 18 juillet 2013,
révisé le 27 janvier 2015,
accepté le 24 février 2015.

Thomas MORZADÉC
Université de Paris XI
Faculté des sciences d'Orsay
91405 Orsay cedex (France)
thomas.morzadec@math.u-psud.fr