ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MICHEL BONY
PHILIPPE COURRÈGE
PIERRE PRIOURET

Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 369-521
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_369_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 369-521.

SEMI-GROUPES DE FELLER SUR UNE VARIÉTÉ A BORD COMPACTE ET PROBLÈMES AUX LIMITES INTÉGRO-DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE DONNANT LIEU AU PRINCIPE DU MAXIMUM

par Jean-Michel BONY, Philippe COURRÈGE et Pierre PRIOURET

Étant donnée une variété à bord compacte M, l'objet du présent travail est l'étude des semi-groupes fortement continus d'opérateurs positifs contractants sur l'espace de Banach $C(M)$ (semi-groupes de Feller sur M; § 0.2) dont le domaine de définition $\mathfrak{D}_A$ du générateur infinitésimal A contient suffisamment de fonctions de classe C^2. Cette étude comporte naturellement :

— un problème direct : Étant donné un semi-groupe de Feller sur M, étudier, d'une part la forme W de A sur l'espace $\mathfrak{U} = C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$; et d'autre part la manière dont est limité $\mathfrak{U}$.

— un problème réciproque (ou de construction) : $\mathfrak{U} \subset C^2(M)$ et l'opérateur W étant donnés du type précédemment dégagé, construire un semi-groupe de Feller sur M tel que,

(i) $\quad \mathfrak{U} \subset C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A \quad$ et $\quad A = W \quad$ sur $\mathfrak{U}$.

En ce qui concerne le problème direct, le principe du maximum positif auquel satisfait le générateur $(\mathfrak{D}_A, A)$,

(ii) $\quad u \in \mathfrak{D}_A, \quad x \in M \quad$ et $\quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \implies Au(x) \leqslant 0,$

(n° 0.2.4) conduit à étudier la forme des opérateurs linéaires W de $C^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$ ($\mathring{M}$ désignant l'intérieur de M) tels que,

(iii) $\quad u \in C^2(M), x \in \mathring{M} \quad$ et $\quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \implies Wu(x) \leqslant 0.$

Dans le chapitre I, complétant les résultats obtenus par Waldenfels dans [24], on caractérise entièrement (théorème V, n° I.3.1) les opérateurs W vérifiant (iii) comme étant de la forme $W = P + S$ où P est un opérateur de diffusion sur $\mathring{M}$, et S un opérateur intégro-différentiel d'ordre 2 dont le symbole principal d'ordre 2 est nul (théorème IV, n° I.2.8). Les résultats obtenus sont valables sur une variété à bord paracompacte et sont présentés dans ce dernier cas.

Dans le chapitre II, d'une part on déduit des résultats du chapitre I la forme cherchée du générateur infinitésimal (Théorème IX, n° II.1.1, et Théorème XIV, n° II.4.1), complétant ainsi certains résultats d'Aisenstat [1], Feller [6], Hunt [9], Neveu [12], Waldenfels [23] et Yosida [25] dans le cas où M est sans bord. D'autre part, dans le cas où M a un bord non vide, $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ voit son étendue limitée par la condition frontière introduite par Ventcel' dans [21] : on introduit (n° II.2.4) et caractérise par le principe du maximum au bord (Théorème X, n° II.2.6, et Théorème XI, n° II-2-9), une classe d'opérateurs frontière Γ d'ordre 2 de type intégro-différentiel à coefficients mesurables bornés qui permet de préciser cette condition (Théorème XIII, n° II.3.1) en la mettant sous la forme,

$$\text{(iv)} \qquad u \in C^2(M) \cap \mathcal{D}_A \Longrightarrow \Gamma u - \delta\gamma^0 A u = 0.$$

Le problème réciproque concernant la construction de semi-groupes de Feller sur M est étudié dans le chapitre III : Utilisant une forme du théorème de Hille-Yosida tenant compte des propriétés de maximum en cause (« Théorème de Hille-Yosida-Ray ». n° 0.2.4), on se ramène à la résolution de problèmes aux limites du second ordre relatifs aux opérateurs W et Γ introduits aux chapitres I et II :

$$\text{(v)} \qquad \begin{aligned} Wu &= -f \quad \text{sur} \quad M \\ \Gamma u &= -\varphi \quad \text{sur} \quad \partial M. \end{aligned}$$

On résoud ces problèmes dans les espaces de fonctions Höldériennes $C^{p,\lambda}(M)$ lorsque, pour les opérateurs considérés, les données sont convenablement Höldériennes et le terme intégro-différentiel est compact [ce qui est une question de régularité des données, et non d'ordre des opérateurs considérés; Théorème XXI et XXII, n° III.3.4 et III.3.6] par rapport à une partie principale supposée elliptique (n° III.1.3 et III.2.1) : Traitant séparément les cas où Γ est d'ordre 0 (Problème de Dirichlet, Théorème XV, n° III.1.4), d'ordre 1 (Théorème XVII, n° III.2.2), et d'ordre 2 (Théorème XVIII, n° III.2.3), on se ramène aux problèmes elliptiques du second ordre classiques (Lemmes III.1.4 et III.2.2) par utilisation du Théorème de stabilité de l'indice par adjonction d'un opérateur compact (appendice 1) ([1]).

On obtient enfin les semi-groupes cherchés (Théorèmes XVI et XVI', n° III.1.7 et III.1.8; Théorèmes XIX et XX, n° III.2.8 et III.2.10) grâce à diverses propriétés de leurs résolvantes déjà utilisées par Sato et Ueno dans [20] (n° III.1.6, III.2.5 et III.2.7) dans le cas des opérateurs de diffusion.

Pour plus de détails sur le contenu de chacun des chapitres, on renvoie à leurs introductions respectives.

Le sujet concerné par ce travail touche à la fois à la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, à la théorie du potentiel, et à la théorie probabiliste de la diffusion (processus de Markov). Afin de rendre l'exposé plus accessible aux spécialistes de l'une ou l'autre de ces disciplines, on l'a présenté de façon indépendante de la littérature existante [exception faite de quelques résultats sur les semi-groupes de Feller (§ 0.2), les problèmes aux limites elliptiques du second ordre (Lemmes III.1.4 et III.2.2), l'indice des opérateurs linéaires (appendice 1) et l'interpolation entre les espaces C^m et $C^{p,\mu}$ (appendice 2) qui sont rappelés de façon précise]; en particulier, n'interviennent ni considérations probabilistes, ni développements relatifs aux équations paraboliques.

Chaque chapitre est divisé en paragraphes, eux-mêmes scandés par des numéros. On trouvera, d'une part un index des notations et un index des définitions pages 372 à 376 ci-dessous; d'autre part, au bas de chaque page l'indication du ou des numéros qu'elle contient.

Les auteurs tiennent à remercier ici MM. G. Choquet et J. Neveu pour leurs utiles suggestions au cours de ce travail.

([1]) On trouvera dans un prochain travail de J. M. Bony (voir [2]) une extension de ces résultats au cas où les données sont seulement continues obtenue en cherchant les solutions de (v) dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(M)$ et en utilisant une généralisation à ce cas du principe du maximum.

TABLE DES MATIÈRES

INDEX DES NOTATIONS

INDEX DES DÉFINITIONS

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES; SEMI-GROUPES DE FELLER

Dans le paragraphe 0.1, on précise les notations utilisées relativement aux variétés à bord, opérateurs différentiels et noyaux.

Dans le paragraphe 0.2, on rappelle d'abord les propriétés générales des semi-groupes de Feller qui interviendront dans la suite (nº 0.2.2). On établit ensuite un critère d'intégrabilité de ces semi-groupes (Lemme 0.2.3), et on introduit le principe du maximum positif auquel satisfait leur générateur infinitésimal, ainsi que la forme du Théorème de Hille-Yosida-Ray qui sera employée (nº 0.2.4).

§ 0.1. Notations : variétés à bord, opérateurs de diffusion, noyaux boréliens.

0.1.1. Variétés à bord. On désigne dans tout ce travail par M une variété à bord de classe C^∞ et de dimension $n \geqslant 1$ et par ∂M son bord. On suppose toujours que M est *dénombrable à l'infini* (en particulier, M est paracompacte). Le bord ∂M de M constitue une variété (sans bord) de classe C^∞ et de dimension $n-1$, et l'intérieur $\mathring{M} = M \setminus \partial M$ une variété de classe C^∞ et de dimension n, toutes deux également dénombrables à l'infini.

On ne suppose pas, sauf mention du contraire, que $\partial M \neq \emptyset$ (si $\partial M = \emptyset$, M est une variété sans bord), ni que M ou ∂M soit connexe ou orientable.

On ne considère que des cartes locales (U, χ) de M pour lesquelles $\chi(U)$ est un ouvert de $\overline{R^{n+}} = \{z | z = (z^i) \in R^n$ et $z^n \geqslant 0\}$, la coordonnée χ^n définissant le bord :

$$x \in U \cap \mathring{M} \Longleftrightarrow x \in U \text{ et } \chi^n(x) > 0$$
$$x \in U \cap \partial M \Longleftrightarrow x \in U \text{ et } \chi^n(x) = 0.$$

En particulier, tout ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$ est une variété à bord dont le bord $\partial\Omega$ est l'intersection de Ω avec l'hyperplan $R^n_0 = \{z | z \in R^n$ et $z^n = 0\}$ (1).

Si U est un ouvert de M, on notera $C^p(U)$ (p entier $\geqslant 0$) l'espace vectoriel (sur R) des fonctions numériques sur U p fois *continuement* différentiables (ceci évidemment y compris au bord). On pose, comme d'ordinaire,

$$C(U) = C^0(U) \qquad \text{et} \qquad C^\infty(U) = \bigcap_{p \geqslant 0} C^p(U).$$

Soit X un sous-ensemble de M. On notera $B_{Loc}(X)$ (resp. $B(X)$) l'espace des fonctions numériques sur X boréliennes (i.e. mesurables relativement à la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ de X) et bornées sur tout compact de X (resp. bornées sur X) (2). On dira qu'un champ de tenseurs θ sur X est *de classe* B si, pour toute carte locale (U, χ) de M ses composantes sont des fonctions de $B_{Loc}(U \cap X)$.

En chaque point $x' \in \partial M$, on considèrera l'espace tangent $T_{x'}(\partial M)$ à la variété ∂M comme un hyperplan de l'espace tangent $T_{x'}(M)$.

On dira qu'un champ de vecteurs ν sur ∂M est *strictement dirigé vers l'intérieur de* M (ou seulement *strictement intérieur*) si, pour tout $x' \in \partial M$, et toute carte locale (U, χ) de M telle que $x' \in U \cap \partial M$, $\langle d_{x'}\chi^n, \nu_{x'}\rangle > 0$.

Si Z est un champ de vecteurs sur un sous-ensemble X de M, et si $f \in C^1(M)$, on notera $\frac{\partial f}{\partial Z}$ la fonction numérique sur X définie par, $\frac{\partial f}{\partial Z}(x) = \langle d_x f, Z_x\rangle$ $(x \in X)$ où $d_x f$ désigne la différentielle de f au point x.

(1) Sauf si $\Omega = \overline{R^{n+}}$, $\partial\Omega$ n'est pas la frontière de Ω en temps que sous-ensemble de l'espace topologique R^n.

(2) $B_{Loc}(M)$ (resp $B(M)$) n'est pas à confondre avec $L_{Loc}(M)$ (resp $L^\infty(M)$) : les éléments de $B_{Loc}(M)$ sont des fonctions et non des classes de fonctions p.p. égales pour une mesure régulière sur M.

En particulier, si (U, χ) est une carte locale de M, et si $f \in C^1(U)$, on posera, $\frac{\partial f}{\partial \chi^j}(x) = D_j(f \circ \chi^{-1})(\chi(x))(x \in U, 1 \leqslant j \leqslant n)$ (1).

0.1.2. Espaces vectoriels topologiques $B_{Loc}(M)$, $C^p(M)$, $C_k^p(M)$. Les espaces $B_{Loc}(M)$ et $C(M)$ seront toujours munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de M qui en fait des espaces de Fréchet séparables.

Lorsque M est compacte, $B(M)$ et $C(M)$ sont toujours munis de la structure d'espaces de Banach associée à la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x \in M} |f(x)| \quad (f \in B(M)).$$

Si p est un entier $\geqslant 0$ ou ∞, et K un compact de M, on notera $C_k^p(M)$ (resp. $C_k^p(K)$) le sous-espace de $C^p(M)$ formé des fonctions f ayant leur support (supp f) compact (resp. leur support compact contenu dans K).

Si Ω est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ ou R^n, on pose, pour p entier $\geqslant 0$ et $\varphi \in C_k^p(\Omega)$,

$$(0.1.1) \qquad \|\varphi\|_{(p)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant p} \sup_{z \in \Omega} |D^\alpha \varphi(z)| \quad (2, 3).$$

Pour chaque compact K de Ω, l'espace $C_k^p(K)$ est muni de la topologie associée à la norme $\| \quad \|_{(p)}$, et l'espace $C_k^p(\Omega)$ de la topologie limite inductive de celles des $C_k^p(K)$.

Sur la variété M, l'espace $C^p(M)$ est muni de la topologie d'espace de Frechet séparable définie par l'ensemble des semi-normes $f \to \|\varphi \cdot f \circ \chi^{-1}\|_{(p)}$ où (U, χ) est une carte locale de M, et $\varphi \in C_k^p(\chi(U))$. L'espace $C_k^p(K)$ (K compact de M) est muni de la topologie induite par celle de $C^p(M)$, et l'espace $C_k^p(M)$ de la topologie limite inductive de celles des $C_k^p(K)$.

En particulier, lorsque M est compacte, $C^p(M)$ (p entier $\geqslant 0$) est un espace de Frechet Banachisable, dont on désignera par $\| \quad \|_{(p)}$ une norme définissant la topologie.

(1) $D_j\varphi(z) = \frac{\partial}{\partial z^j}\varphi(z)$ $(z \in \Omega, \varphi \in C^1(\Omega), \Omega$ ouvert de $\overline{R^{n+}})$.

(2) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha\varphi(z) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \ldots \partial z_j^{\alpha_j}}$.

(3) $\|\varphi\|_{(0)} = \|\varphi\| = \sup_{z \in \Omega} |\varphi(z)|$.

0.1.3. Opérateurs de diffusion. Étant donné un entier $p \geqslant 0$, on appellera *opérateur différentiel d'ordre p et de classe* B sur la variété M (n° 0.1.1) toute application linéaire de $C^p(M)$ dans $B_{Loc}(M)$ telle que, pour toute carte locale (U, χ) de M, on ait

(0.1.2)
$$Pu(x) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant p} a_\alpha^\chi(x) D^\alpha(u \circ \chi^{-1})(x) \quad (x \in U, \ u \in C^p(M)),$$

où les $a_\alpha^\chi (0 \leqslant |\alpha| \leqslant p)$ sont des fonctions de $B_{Loc}(U)$ qui seront appelées les *coefficients de* P *dans la carte* (U, X). Un tel opérateur P est continu de $C^p(M)$ dans $B_{Loc}(M)$ (n° 0.1.2). On dira que P est *de classe* C^0 s'il applique $C^p(M)$ dans $C(M)$; il faut et il suffit pour cela que ses coefficients soient continus.

La *partie principale d'ordre p* de l'opérateur différentiel P d'ordre p est l'unique champ de p-tenseurs contravariants symétrique π de classe B (n° 0.1.1) sur M dont les composantes, dans chaque carte locale (U, χ) sont définies par les coefficients a_α^χ avec $|\alpha| = p$, et π s'obtient à partir de P par la relation,

(0.1.3)
$$u(x)\pi_x(d_x v, d_x v, \ldots, d_x v) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-r} i^{-r} P(u e^{i\lambda v}) \ (x),$$

pour $x \in M$, $u \in C^p(M)$, $v \in C^p(M)$.

En ce qui concerne les opérateurs d'ordre 2, considérant les coefficients sous forme développée, on écrira, au lieu de (0.1.2),

(0.1.4)
$$Pu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x) + a(x)\, u(x).$$

$(x \in U, \ u \in C^2(M))$.

On appellera *opérateur de diffusion de classe* B *sur* M tout opérateur différentiel P du second ordre et de classe B sur M tel que, π désignant sa partie principale d'ordre 2,

$$(0.1.5) \qquad \pi_x(w, w) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in M \quad \text{et} \quad W \in T_x^*(M),$$

et

$$(0.1.6) \qquad P1(x) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in M.$$

On dira, en outre, que P est *elliptique*, si

(0.1.7) $\pi_x(w, w) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{M}$ et $w \in \mathrm{T}_x^*(\mathrm{M})$, $w \neq 0$.

Cela étant,

LEMME. — *Tout opérateur de diffusion* P *de classe* B *sur* M *possède les propriétés de maximum suivantes :*

(1) *Si* $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{M})$ *admet en* $x \in \mathring{\mathrm{M}}$ *un maximum relatif positif alors* $\mathrm{P}u(x) \leqslant 0$.

(2) *Soit* v *un champ de vecteurs sur* $\partial\mathrm{M}$ *strictement intérieur* (nº 0.1.1). *Si* $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{M})$ *admet en* $x' \in \partial\mathrm{M}$ *un maximum relatif* $\geqslant 0$, *et si* $\frac{\partial u}{\partial v}(x') = 0$, *alors* $\mathrm{P}u(x') \leqslant 0$ (1).

On établit ces propriétés de façon tout à fait classique par localisation et application de la formule de Taylor à l'ordre 2 (2), en remarquant, en ce qui concerne la deuxième, d'une part que l'hypothèse entraîne que $d_{x'}u = 0$ et d'autre part qu'une matrice $[a^{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est positive dès que $\sum_{i,j} a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ pour tout $\xi = (\xi_i) \in \mathrm{R}^n$ tel que $\xi_n \geqslant 0$.

0.1.4. Fonctions unité locales. On appellera fonction unité locale sur M toute application σ de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ dans $[0, 1]$ de classe C^∞ sur $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ telle que,

(i) $\sigma(x, y) = 1$ dans un voisinage de la diagonale $\Delta_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}}$ de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$.

(ii) Pour chaque compact K de M, il existe un compact K′ de M tel que les fonctions $\sigma_x = \sigma(x, .)$ $(x \in \mathrm{K})$ gardent leur support dans K′ (3).

On peut construire comme suit une fonction unité locale sur M ayant son support dans un voisinage arbitraire V de la diagonale $\Delta_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}}$ de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$: Soit (U_α) un recouvrement ouvert localement fini de M par des ouverts relativement

(1) Voir ci-dessous le corollaire du Théorème V (nº I.3.1) ainsi que les Théorèmes VII et VIII (nº I.4.1).

(2) Voir la relation (I.1.16) au nº I.1.4 ci-dessous.

(3) L'intérêt de cette notion apparaîtra au chapitre I dès le nº I.1.1. On notera que, lorsque M est compacte, la fonction constante égale à 1 est une fonction unité locale sur M.

compacts tel que $\bigcup_\alpha (U_\alpha \times U_\alpha) \subset V$. On considère une partition de l'unité $\{\varphi, (\varphi_\alpha)\}$ de classe C^∞ sur $M \times M$ subordonnée au recouvrement localement fini de $M \times M$ formé de $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ et des ouverts $U_\alpha \times U_\alpha$. Alors, $\sigma = \sum_\alpha \varphi_\alpha$ est une fonction unité locale sur M nulle hors de V.

0.1.5. Noyaux boréliens. Soient A et B des espaces localement compacts à base dénombrable d'ouverts, $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$ leurs tribus boréliennes.

On appellera *noyau positif borélien* de A dans B toute application $x \to N(x, .)$ de A dans l'espace des mesures positives sur la tribu $\mathcal{B}_B$ [1] telle que, pour tout ensemble $X \in \mathcal{B}_B$, la fonction $x \to N(x, X)$ soit $\mathcal{B}_A$-mesurable (i.e. borélienne) sur A. On notera couramment $N(x, dy)$ un tel noyau, et $\int_B N(x, dy)f(y)$ l'intégrale de la fonction borélienne *positive* f par rapport à la mesure $N(x, .)$.

On dira que le noyau $N(x, dy)$ est *borné* si

$$\sup_{x\in A} N(x, B) < +\infty.$$

Toute application linéaire positive Λ de $C_0(B)$ dans $C_0(A)$ [2] définit un noyau positif borélien borné $\Lambda(x, dy)$ de A dans B par la relation,

$$(0.1.8) \quad \Lambda f(x) = \int_B \Lambda(x, dy)f(y) \quad [x \in A, \ f \in C_0(B)].$$

§ 0.2. Semi-groupes de Feller et Théorème de Hille-Yosida-Ray.

0.2.1. Dans tout ce paragraphe, on désigne par E un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts (espace LCD), et par $C_0(E)$ l'espace des fonctions numériques conti-

(1) Une mesure positive sur $\mathcal{B}_B$ étant une application μ de $\mathcal{B}_B$ dans $[0, +\infty]$, dénombrablement additive et telle que $\mu(\emptyset) = 0$, mais pas nécessairement finie sur toute partie compacte de B (autrement dit, pas nécessairement de Radon; voir les nos I.1.1 et I.2.5 à ce sujet).

(2) Avec les notations du no 0.2.1 ci-dessous.

nues sur E tendant vers zéro à l'infini; en particulier, lorsque E est compact, $C_0(E)$ est identique à l'espace $C(E)$.

L'espace $C^0{}_0(E)$ est muni de la norme uniforme (notée $\| \;\|$) qui en fait un espace de Banach.

Si G est une application linéaire bornée et positive de $C_0(E)$ dans lui-même, on notera $G(x, dy)$ le noyau positif borélien borné (nº 0.1.5) associé à G par la relation,

$$Gf(x) = \int_E G(x, dy)f(y) \quad (x \in E, \; f \in C_0(E)).$$

On note que $\|G\| = \sup G1 = \sup\limits_{x \in E} G(x, E)$.

0.2.2. *Un semi-groupe de Feller sur* E est un semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach $C_0(E)$ ($N_t N_s = N_{t+s}$, $\forall s \geqslant 0, t \geqslant 0$; $N_0 = I$), fortement continu $\left(\lim\limits_{t \downarrow 0} \|N_t f - f\| = 0, \; \forall f \in C_0(E)\right)$ et tel que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$(0.2.1) \quad f \in C_0(E) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant N_t f \leqslant 1.$$

Ainsi, pour chaque t, il existe un noyau positif borélien (nº 0.1.4) $N_t(x, dy)$ de M dans M tel que $N_t(x, M) \leqslant 1$, et

$$(0.2.2) \quad N_t f(x) = \int_E N_t(x, dy)f(y) \quad (x \in M, \; f \in C_0(M)).$$

Le générateur infinitésimal $(\mathfrak{D}_A, A)$ du semi-groupe (N_t) sera toujours entendu *au sens fort*: $\mathfrak{D}_A$ est l'ensemble des $u \in C_0(E)$ tels que $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(N_t u - u)$ existe (fortement) dans $C_0(E)$, et pour $u \in \mathfrak{D}_A$,

$$(0.2.3) \qquad Au = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(N_t u - u).$$

$\mathfrak{D}_A$ est un sous-espace vectoriel dense dans $C_0(E)$, et le générateur infinitésimal $(\mathfrak{D}_A, A)$ détermine entièrement le semi-groupe (N_t).

La résolvante du semi-groupe (N_t) est, comme d'ordinaire la famille $(G_\alpha)_{\alpha > 0}$ d'opérateurs linéaires bornés et positifs de $C_0(E)$ dans lui-même définis par,

$$(0.2.4) \quad G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} N_t f(x)\, dt \quad (x \in E, \; f \in C_0(E)).$$

Cela étant (1), pour chaque $\alpha > 0$,

$$f \in C_0(E) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant G_\alpha f \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

$\left(\text{en particulier, } \|G_\alpha\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\right)$;

G_α applique injectivement $C_0(E)$ *sur* $\mathfrak{D}_A$,

$$(0.2.5) \quad (\alpha - A)G_\alpha f = f \qquad \text{pour tout} \qquad f \in C_0(E),$$

et

$$(0.2.6) \quad G_\alpha(\alpha - A)u = u \qquad \text{pour tout} \qquad u \in \mathfrak{D}_A \ (2).$$

En outre,

$$(0.2.7) \quad \lim_{\alpha \to \infty} \|\alpha G_\alpha f - f\| = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad f \in C_0(E),$$

et

$$(0.2.8) \quad G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta)G_\alpha G_\beta = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

(« équation résolvante »).

0.2.3. On dira que le semi-groupe de Feller (N_t) sur E est *intégrable* si, pour chaque fonction positive $f \in C_0(E)$, la fonction $x \to \int_0^\infty N_t f(x)\, dt$ appartient aussi à $C_0(E)$ (3).

On définit alors un opérateur linéaire borné et positif G_0 de $C_0(E)$ dans lui-même en posant,

$$(0.2.9) \quad G_0 f(x) = \int_0^\infty N_t f(x)\, dt \quad (x \in E, \ f \in C_0(E)).$$

G_0 sera appelé le *potentiel* du semi-groupe intégrable (N_t).

Lemme. — *Pour que le semi-groupe de Feller* (N_t) *soit intégrable, il suffit que son générateur infinitésimal* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *possède la propriété suivante* :

(I) *Il existe une suite* (u_n) *d'éléments de* $\mathfrak{D}_A$ *telle que,*

$$(0.2.10) \quad \sup_n \|u_n\| < +\infty \ \text{ et } \ \liminf_{n \to \infty} Au_n(x) \geqslant 1 \ \text{ pour tout } x \in E.$$

(1) Voir, par exemple, le livre de Dynkin [4], chapitres I et II.
(2) Autrement dit, $G_\alpha = (\alpha - A)^{-1}$.
(3) Voir la remarque ci-dessous.

En particulier, lorsque E *est compact, il suffit que* A *applique* $\mathfrak{D}_A$ *sur un sous-espace dense de* C(E) [1].

Inversement, si (N_t) *est intégrable,* A *applique injectivement* $\mathfrak{D}_A$ *sur* $C_0(E)$, *l'opérateur* $-A^{-1}$ *coïncide avec le potentiel* G_0 *de* (N_t), *et on a,*

$$(0.2.11)\qquad G_\alpha = G_0(I + \alpha G_0)^{-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{\|G_0\|}.$$

En effet, désignant par (u_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{D}_A$ vérifiant (0.2.10), et posant $m = \sup_n \|u_n\|$, on a, pour $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\|G_\alpha\| &= \sup_{x\in E} G_\alpha 1(x) \leqslant \sup_n \int_E G_\alpha(x,\ dy) \liminf_{n\to\infty} Au_n(y)\\ &\leqslant \sup_x \liminf_{n\to\infty} G_\alpha Au_n(x) \quad \text{d'après le lemme de Fatou,}\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|G_\alpha Au_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|\alpha G_\alpha u_n - u_n\| \leqslant 2m,\end{aligned}$$

en vertu de (0.2.6). Ainsi, $\|G_\alpha\| \leqslant 2m$ pour tout $\alpha > 0$. L'équation résolvante (0.2.8) entraîne alors, pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\|G_\alpha - G_\beta\| \leqslant \|(\beta - \alpha)G_\alpha G_\beta\| \leqslant 4m^2(\alpha + \beta)$; d'où il résulte l'existence d'un opérateur linéaire borné et positif G de $C_0(E)$ dans lui-même tel que $\lim_{\alpha\downarrow 0} \|G_\alpha f - Gf\| = 0$ pour tout $f \in C_0(E)$; et on a,

$$Gf(x) = \lim_{\alpha\downarrow 0} G_\alpha f(x) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha t} N_t f(x)\, dt = \int_0^\infty N_t f(x)\, dt,$$

pour toute fonction positive $f \in C_0(E)$, d'après le théorème de Beppo-Lévi, puisque $e^{-\alpha t}$ croît vers 1 lorsque $\alpha \downarrow 0$ $(t \geqslant 0)$.

Il en résulte que le semi-groupe (N_t) est intégrable et que son potentiel G_0 coïncide avec l'opérateur G.

Inversement, supposant que le semi-groupe (N_t) est intégrable, on établit, par un argument classique pour les opérateurs $G_\alpha(\alpha > 0)$ [2], que $G_0 f \in \mathfrak{D}_A$ et $-AG_0 f = f$ pour tout $f \in C_0(E)$ et que $G_0(-Au) = u$ pour tout $u \in \mathfrak{D}_A$; d'où la relation $G_0 = -A^{-1}$.

Enfin, la relation (0.2.11) peut aussi s'écrire

$$G_\alpha - G_0 - \alpha G_\alpha G_0 = 0$$

[1] Voir la remarque ci-dessous.
[2] Voir par exemple [4], chapitre I, § 2.

et résulte de l'équation résolvante (0.2.8) par passage à la limite lorsque β tend vers 0. c.q.f.d.

Remarque. — Lorsque E est un espace localement compact non compact, la définition adoptée ici d'un semi-groupe de Feller intégrable ne coïncide pas avec celle utilisée en Théorie du potentiel (voir [15], exposé n° 9, page 9.0.1) : cette dernière est moins restrictive ainsi que le montre l'exemple du semi-groupe de Wiener-Lévy sur $E = R^n (n \geqslant 3)$ dont le générateur infinitésimal est la fermeture, dans $C_0(R^n)$, de l'opérateur $(C_k^2(R^n), \Delta)$. Cet exemple montre aussi que la condition « $A(\mathfrak{D}_A)$ dense dans $C_0(E)$ » n'entraîne pas nécessairement l'intégrabilité du semi-groupe (N_t) lorsque E n'est pas compact. Par contre, la condition « $A(\mathfrak{D}_A) = C_0(E)$ » entraîne toujours l'intégrabilité du semi-groupe (N_t), ainsi qu'on le voit par une démonstration analogue à celle du lemme précédent.

0.2.4. Le générateur infinitésimal $(\mathfrak{D}_A, A)$ du semi-groupe de Feller (N_t) satisfait au *principe du maximum positif*:

$$(0.2.13) \quad u \in \mathfrak{D}_A,\ x \in E \quad \text{et} \quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Au(x) \leqslant 0.$$

En effet, il suffit d'écrire,

$$\frac{1}{t}(N_t u(x) - u(x)) = \frac{1}{t}\int_E N_t(x, dy)(u(y) - u(x)) + \frac{u(x)}{t}(N_t(x, E) - 1),$$

et d'utiliser la propriété (0.2.1) du semi-groupe (N_t).

Inversement, on utilisera ci-dessous le résultat suivant :

THÉORÈME de HILLE-YOSIDA-RAY. — *Soient* [1] $\mathfrak{D}$ *un sous-espace vectoriel de* $C_0(E)$ *et* D *une application linéaire de* $\mathfrak{D}$ *dans* $C_0(E)$. On *suppose que,*

(*a*) *Pour tout* $\beta > 0$, *l'opérateur* $\beta - D$ *applique* $\mathfrak{D}$ *sur un sous-espace dense de* $C_0(E)$.

(*b*) *Pour tout* $u \in \mathfrak{D}$ *tel que* $\sup u > 0$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $u(x) = \sup u$ *et* $Du(x) \leqslant 0$.

[1] Avec les notations du n° 0 2.1.

Dans ces conditions,

(1) *Pour tout* $\beta > 0$, *il existe un opérateur borné et positif* G_β *de* $C_0(E)$ *dans lui-même, et un seul, tel que,*

(0.2.14) $\quad G_\beta(\beta - D)u = u$ *pour tout* $u \in \mathcal{D}$.

De plus,

(0.2.15) $\quad \|G_\beta\| \leqslant \frac{1}{\beta}$ *pour tout* $\beta > 0$,

(0.2.16)
$$G_\beta - G_{\beta'} + (\beta - \beta')G_\beta G_{\beta'} = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \beta > 0,\ \beta' > 0.$$

(2) *On suppose, de plus, que* $\mathcal{D}$ *est dense dans* $C_0(E)$ *ou que* $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \|\beta G_\beta f - f\| = 0$ *pour tout* $f \in C_0(E)$. *Alors, l'opérateur* $(\mathcal{D}, D)$ *est préfermé dans* $C_0(E)$, *et sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller* (N_t) *sur* E *dont la famille d'opérateurs* $(G_\beta)_{\beta > 0}$ *constitue la résolvante.*

En effet, l'hypothèse (b) entraîne d'abord que

(0.2.17)
$$u \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad (\beta - D)u = f \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{\beta}\|f\|:$$

Soit $u \in \mathcal{D}$ tel que $(\beta - D)u = f \geqslant 0$. On a d'abord $\inf u \geqslant 0$, car dans le cas contraire il existerait, d'après (b), $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = \inf u < 0$ et $Du(x_0) \geqslant 0$; ce qui entraînerait $f(x_0) = \beta u(x_0) - Du(x_0) < 0$. On a ensuite $\sup u \leqslant \frac{1}{\beta}\|f\|$, car dans le cas contraire, il existerait, d'après (b), $x_1 \in E$ tel que $u(x_1) = \sup u > \frac{1}{\beta}\|f\|$ et $Du(x_1) \leqslant 0$; ce qui est absurde car on aurait alors, $f(x_1) > \|f\|$.

De la relation (0.2.17), et de l'hypothèse (a), on déduit l'existence de G_β et la relation (0.2.15); puis l'équation résolvante (0.2.16) en appliquant ses deux membres à une fonction de la forme $(\beta' - D)u$ $(u \in \mathcal{D})$. D'où la propriété (1).

La propriété (2) résulte alors du théorème de Hille-Yosida sous sa forme concernant les semi-groupes à contraction [1] en remarquant, d'une part que la densité de $\mathcal{D}$ entraîne que

[1] Voir, par exemple, Dynkin [4] chapitre I, Théorème 14.

$\lim\limits_{\beta\to+\infty} \|\beta G_\beta u - u\| = 0$ pour tout $u \in \mathcal{D}$ à cause de (0.2.14) et (0.2.15), donc aussi pour tout $u \in C_0(E)$; d'autre part que la positivité des opérateurs G_β entraîne celles des opérateurs N_t à cause de la relation $N_t f = \lim\limits_{\beta\to+\infty} e^{-\beta t} \exp(t\beta^2 G_\beta) f$ $(f \in C_0(E))$. cqfd.

Remarque. — La conclusion du théorème précédent [caractère préfermé de $(\mathcal{D}, D)$ dans $C_0(E)$ et existence d'un semi-groupe de Feller sur E dont le générateur infinitésimal est la fermeture de $(\mathcal{D}, D)$] subsiste si on postule seulement : la densité de $\mathcal{D}$ dans $C_0(E)$, la propriété (*b*) et l'existence d'un nombre $\beta \geqslant 0$ tel que $(\beta - D)(\mathcal{D})$ soit dense dans $C_0(E)$ (voir à ce sujet Sato et Ueno [20] Théorème 1.2, page 534].

CHAPITRE I

SUR LA FORME INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DES OPÉRATEURS SATISFAISANT AU PRINCIPE DU MAXIMUM

Dans ce premier chapitre, on étudie les opérateurs intégro-différentiels de $C_k^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$ (M désignant une variété à bord; n° 0.1.1) qui constitueront les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller étudiés aux chapitres II et III ci-dessous. Dans le paragraphe I.1, complétant les résultats obtenus par Waldenfels dans [24], on caractérise les opérateurs continus de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$ (Ω ouvert de $\overline{R^{n+}}$) qui ont un noyau positif (Théorème I, n° I.1.1); avec comme cas particulier les opérateurs satisfaisant au principe du maximum (Théorèmes II et III, n° I.1.1). Dans le paragraphe I.2, on étudie plus spécialement ceux de ces opérateurs « purement intégro-différentiels » en ce sens que leur partie principale d'ordre 2 est nulle [« opérateurs de Lévy »; Théorème IV, n° I.2.8]; et dans le paragraphe I.3, on précise la décomposition des opérateurs de $C_k^\infty(M)$ dans $C(\mathring{M})$ satisfaisant au principe du maximum (« opérateurs de Waldenfels ») en la somme d'un opérateur de diffusion et d'un opérateur de Lévy (Théorèmes V et VI, n^os^ I.3.1 et I.3.2; et proposition I.3.3).

Enfin, dans le paragraphe I.4, on étend aux opérateurs de Waldenfels elliptiques les propriétés des opérateurs de diffusion elliptiques du type « impossibilité d'un maximum sans constance au voisinage » (Théorèmes VII et VIII (n° I.4.1)).

§ I.1. Cas d'un ouvert de $\overline{R^{n+}}$: caractérisation des opérateurs ayant un noyau positif.

I.1.1. Énoncé des résultats. Désignant par Ω un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ ou de R^n, on va s'intéresser à des noyaux positifs boréliens $s(x, dy)$ de $\mathring{\Omega}$ dans Ω (1) ayant les deux propriétés suivantes :

(NS$_1$) $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathring{\Omega}$.

(NS$_2$) Pour toute fonction positive $f \in C_k(\Omega)$, la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)\,|y - x|^2 f(y)$ $(x \in \mathring{\Omega})$ appartient à $B_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ (2).

Désignant par σ une fonction unité locale sur Ω (n° 0.1.3), et par s un tel noyau, on définit, en vertu de la formule de Taylor (3), et de (NS$_2$), une application linéaire S de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ en posant,

(I.1.1)

$$Su(x) = \int_\Omega s(x, dy)[u(y) - \sigma(x, y)(u(x) + \sum_{i=1}^n D_i u(x)(y^i - x^i))]$$
$$(x \in \mathring{\Omega},\ u \in C_k^2(\Omega)).$$

Cela étant, on va établir dans les n° I.1.3 à I.1.7 ci-dessous les trois théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soit* A *une application linéaire de* $C_k^2(\Omega)$ *dans* $B_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(p_0) A *est continu de* $C_k^2(\Omega)$ *dans* $B_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ (4), *et,*

(I.1.2)

$$x \in \mathring{\Omega},\ u \in C_k^2(\Omega),\ u \geqslant 0 \quad et \quad x \notin \operatorname{supp} u \implies Au(x) \geqslant 0.$$

(w) *Il existe un noyau* $\geqslant 0$ *borélien* s *de* $\mathring{\Omega}$ *dans* Ω *ayant les propriétés* (NS$_1$) *et* (NS$_2$), *et un opérateur différentiel du second ordre* P *de classe* B *sur* Ω (n° 0.1.2) *tels que*

$$\text{(I.1.3)} \quad Au(x) = Pu(x) + Su(x) \quad (x \in \mathring{\Omega},\ u \in C_k^2(\Omega)),$$

où l'opérateur S *est défini par* (I.1.1).

(1) Voir le n° 0.1.4. On rappelle (n° 0.1.) que $\mathring{\Omega}$ désigne l'intérieur de Ω considéré comme variété à bord ($\mathring{\Omega} = \Omega$ si Ω est un ouvert de R^n). Voir à ce sujet la remarque à la fin de ce numéro.

(2) Voir le n° 0.1.1. En particulier, pour tout $x \in \mathring{\Omega}$, s $(x, .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $\Omega \setminus \{x\}$.

(3) Voir ci-dessous au n° I.1.4 la relation (I.1.16).

(4) Ces espaces étant munis des topologies précisées au n° 0.1.2.

On note que, si A possède la propriété $(\mathscr{w})$, le noyau s et la partie principale $(a^{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ de P sont déterminés de façon unique par A (indépendamment du choix de la fonction unité locale σ[1]) grâce aux relations,

(I.1.4)

$$\int_{\Omega} s(x, dy) u(y) = \mathrm{A}u(x) \qquad \text{si} \qquad x \notin \operatorname{supp} u \ (x \in \mathring{\Omega},\ u \in \mathrm{C}_k^2(\Omega)),$$

et,

(I.1.5)

$$2u(x) \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j = \mathrm{A}(\Phi_x^{\xi} u)(x) - \int_{\Omega} s(u, dy) \Phi_x^{\xi}(y) u(y)$$

$(x \in \mathring{\Omega},\ u \in \mathrm{C}_k^2(\Omega),\ \xi = (\xi_i) \in \mathrm{R}^n)$, où on a posé,

(I.1.6)

$$\Phi_x^{\xi}(y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i (y^i - x^i) \right)^2 \quad (x \in \Omega,\ y \in \Omega,\ \xi \in \mathrm{R}^n).$$

THÉORÈME II. — *Soient* $\mathcal{V}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{C}_k^2(\Omega)$ *contenant* $\mathrm{C}_k^{\infty}(\Omega)$, *et* A *une application* de $\mathcal{V}$ *dans* $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ *telle que, pour tout* $u \in \mathcal{V}$,

$$\text{(I.1.6)} \quad x \in \mathring{\Omega},\ u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}u(x) \geqslant 0.$$

Alors, A *se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de* $\mathrm{C}_k^2(\Omega)$ *dans* $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$, *et ce prolongement, encore noté* A, *vérifie la relation* (I.1.6) *pour tout* $u \in \mathrm{C}_k^2(\Omega)$ [2].

En particulier, si A est une application linéaire de $\mathrm{C}_k^2(\Omega)$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$, la propriété

$$(p_1)\ u \in \mathrm{C}_k^2(\Omega),\ x \in \mathring{\Omega},\ u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}u(x) \geqslant 0,$$

entraîne la continuité de A et la propriété (p_0), donc aussi $(\mathscr{w})$ (Théorème I).

THÉORÈME III. — *Soit* A *une application linéaire de* $\mathrm{C}_k^2(\Omega)$ *dans* $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ *de la forme* (I.1.3), *où* P *est un opérateur différentiel du second ordre de classe* B *sur* $\mathring{\Omega}$, *et* S *l'opérateur*

[1] Par contre, la partie du premier ordre de P dépend du choix de σ; voir à ce sujet le paragraphe I.2.

[2] Voir aussi Waldenfels [24] théorème 2.

défini par (I 1.1) *à partir d'un noyau* $\geqslant 0$ *borélien* s *vérifiant* (NS_1) *et* (NS_2). *Alors,*

(1) *Pour que* A *possède la propriété* (p_1), *il faut et il suffit que la partie principale de* P *soit positive* (n° 0.1.2).

(2) *Pour que* A *satisfasse au principe du maximum positif,*

(PM) $u \in C_k^2(\Omega), \quad x \in \mathring{\Omega}, \quad \text{et} \quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Au(x) \leqslant 0$ (1),

il faut et il suffit que P *soit un opérateur de diffusion* (n° 0.1.2), *et que,*

(I.1.7)

$$P1(x) + \int_\Omega s(x, dy)(1 - \sigma(x, y)) \leqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in \mathring{\Omega}.$$

Le noyau s *possède alors la propriété,*

(NS_3) *pour tout ouvert* Ω' *de* $\mathring{\Omega}$, *la fonction* $x \to s(x, \Omega \diagdown \mathring{\Omega})(x \in \Omega')$ *appartient à* B_{Loc} (Ω').

En particulier, si A est une application linéaire de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$ satisfaisant au principe du maximum (PM), il est de la forme (I.1.3), P et s ayant les propriétés énoncées en (2) ci-dessus [en effet, (PM) implique (p_1), et (p_1) implique (w) (Théorèmes I et II)]. Ce fait sera explicité au paragraphe I.3 dans le cas d'opérateurs sur la variété M (voir le Théorème V, n° I.3.1).

Remarque. — La considération d'opérateurs de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$, où Ω est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$, et non un ouvert de R^n, sera utile au chapitre II pour élucider la forme du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur une variété à bord (voir les paragraphes II.3 et II.4 ci-dessous).

I.1.2. Les Théorèmes I et II ci-dessus admettent comme corollaire les résultats suivants qui élucident *la structure des distributions d'ordre* 2 *qui sont positives en dehors d'un point :*

Proposition. — (1) *Soit* T *une forme linéaire sur* $C_k^2(\Omega)$. *Pour que* T *soit continue et vérifie,*

(I.1.8)

$$u \in C_k^2(R^n), \quad u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \notin \operatorname{supp} u \quad \Longrightarrow \quad T(u) \geqslant 0.$$

(1) Voir la remarque de la fin du n° I.3.1.

il faut et il suffit que T *soit de la forme,*

$$\text{(I.1.9)}\quad T(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_i D_j u(0) + \sum_{i=1}^{n} a^i D_i u(0) + a u(0) + \int_{R^n} \mu(dy)\left[u(y) - \varphi(y)(u(0) + \sum_{i=1}^{n} D_i u(0) y^i)\right]$$

($u \in C_k^2(R^n)$), a^{ij}, $a^i (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ *et* a *étant des nombres réels,* φ *une fonction de* $C_k^\infty(R^n)$ *égale à* 1 *au voisinage de* 0, *et* μ *une mesure de radon* $\geqslant 0$ *sur* $R^n \setminus \{0\}$ *telle que,*

$$\text{(I.1.10)}\qquad \int_{|y|\leqslant 1} |y|^2 \mu(dy) < +\infty$$

(2) *Soit* T *une forme linéaire sur* $C_k^\infty(R^n)$ *telle que*

(I.1.11)

$$u \in C_k^\infty(R^n),\quad u \geqslant 0 \quad et \quad u(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(u) \geqslant 0.$$

Alors T *se prolonge en une forme linéaire continue sur* $C_k^2(R^n)$ *de la forme* (I.1.9), *la condition* (I.1.10) *étant satisfaite et la matrice* (a^{ij}) *étant positive.*

(Démonstration immédiate à partir des Théorèmes I et II en prolongeant T en un opérateur de $C_k^2(R^n)$ dans $B_{Loc}(R^n)$ par 0 en dehors de l'origine; voir aussi le n° I.1.5.)

I.1.3. La propriété de « bornitude » (NS_2) du noyau s [ou la majoration (I.1.10) de la mesure μ(n° I.1.2)] sera obtenue (voir les n° I.1.4 et I.1.5) grâce au lemme suivant :

LEMME. — *Soient* $B = B_r(0) = \{z | z \in R^n \text{ et } |z| < r\}$ $(r > 0)$, *et* g *une fonction positive et bornée sur* B *pour laquelle*

$$\text{(I.1.12)}\qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Alors, il existe une fonction $\geqslant 0$ *bornée* $k \in C^2(B)$ *telle que,*

(I.1.13) $|z|^2 g(z) \leqslant k(z)$ *pour tout* $z \in B$;
(I.1.14) $k(0) = D_i k(0) = D_i D_j(0) = 0$ *pour* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

On commence par traiter le cas $n = 1$: pour cela on remarque d'abord qu'il suffit de construire k sur l'intervalle $[0, r[$. On considère ensuite, sur $[0, r[$, l'enveloppe inférieure

$\tilde{g}$ de la famille des fonctions affines ($x \to ax + b$, avec $a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$) qui majorent g sur $[0, r[$. D'une part $\tilde{g}$ est *concave*, donc *continue* sur $]0, r[$; d'autre part, $\tilde{g}$ est positive et bornée comme g; $\tilde{g}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \downarrow 0} \tilde{g}(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x \downarrow 0} g(x) = 0$ par hypothèse. Enfin $g(x) \leqslant \tilde{g}(x)$ pour tout $x \in [0, r[$.

On va alors majorer $x^2 g(x)$ par la primitive seconde h de $\tilde{g}$ sur $[0, r[$: Pour chaque $\varphi \in C([0, r[)$ soit $P\varphi$ la primitive de φ nulle en 0,

$$P\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt \quad (0 \leqslant x < r).$$

En vertu de la concavité de $\tilde{g}$ et de ce que $\tilde{g}(0) = 0$, on a,

$$\text{(I.1.15)} \quad \tilde{g}(t) \geqslant \frac{t}{x}\, \tilde{g}(x) \qquad \text{pour} \qquad x > 0, 0 \leqslant t \leqslant x.$$

D'où, en appliquant deux fois P et la relation (I.1.15),

$$P\tilde{g}(x) = \int_0^x \frac{t}{x}\, g(x)\, dt = \frac{1}{2}\, x\tilde{g}(x);$$

et

$$\begin{aligned} P^2\tilde{g}(x) &= P(P\tilde{g})(x) \geqslant \frac{1}{2} \int_0^x t\tilde{g}(t)\, dt \\ &\geqslant \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{x}\, \tilde{g}(x)\, dt = \frac{1}{6}\, x^2\tilde{g}(x) \quad (0 < x < r). \end{aligned}$$

La fonction $\chi = 6P^2\tilde{g}$ répond ainsi à la question dans le cas $n = 1$.

On en déduit comme suit le résultat dans le cas $n > 1$: On pose, pour $0 \leqslant \rho < r$, $\gamma(\rho) = \sup\limits_{|z|=\rho} g(z)$, et on remarque, d'une part que

$$g(z) \leqslant \gamma(|z|) \qquad \text{pour tout} \qquad z \in B;$$

d'autre part que γ est bornée sur $[0, r[$ et que $\lim\limits_{\rho \downarrow 0} \gamma(\rho) = 0$ d'après l'hypothèse (I.1.12). On obtient alors une fonction h cherchée en posant $h(z) = \chi(|z|)$ $(z \in B)$, où $\chi = 6P^2\tilde{\gamma}$ est la fonction associée ci-dessus à γ.

cqfd.

I.1.3

I.1.4. Démonstration du Théorème I. *a*) On rappelle d'abord la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale : si $u \in C_k^2(\Omega)$,

$$\text{(I.1.16)} \quad u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{n} D_i u(x)(y^i - x^i) \\ = \sum_{i,j=1}^{n} (y^i - x^i)(y^j - x^j) R_{ij} u(x, y),$$

où $R_{ij}u(x, y) = \int_0^1 D_i D_j u(x + t(y - x))(1 - t)\, dt \; (x \in \Omega, y \in \Omega)$; en notant que la fonction $R_{ij}u$ est continue sur $\Omega \times \Omega$ et que,

$$\text{(I.1.17)} \qquad \|R_{ij}u\| \leqslant \|u\|_{(2)}.$$

Cela étant, on déduit d'abord de la formule de Taylor précédente et de (I.1.4) que $(w) \Longrightarrow (p_0)$.

b) Inversement, soit A une application linéaire de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$ ayant la propriété (p_0). On déduit de (I.1.2) l'existence d'un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de $\mathring{\Omega}$ dans Ω vérifiant (NS_1) et (I.1.4). On va montrer que ce noyau vérifie aussi (NS_2). Pour cela, il suffit d'établir que la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)\, |y - x|^2 f(y)$ est localement bornée sur $\mathring{\Omega}$ pour toute fonction positive $f \in C_k^\infty(\Omega)$. Désignant par f une telle fonction, on va procéder en trois étapes [voir l'alinéa *e*) ci-dessous] :

c) Soit $\Phi : (x, y) \to \Phi(x, y) = \Phi_x(y)$ une fonction positive continue sur $\Omega \times \Omega$ telle que,

(i) $\Phi_x \in C^2(\Omega)$ pour tout $x \in \Omega$.

(ii) Les fonctions $(x, y) \to D_i\Phi_x(y)$ et $(x, y) \to D_iD_j\Phi_x(y)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont continues sur Ω.

(iii) $\Phi_x(x) = D_i\Phi_x(x) = D_iD_j\Phi_x(x) = 0 \; (1 \leqslant i, j \leqslant n, x \in \Omega)$. Alors,

$$\text{(I.1.18)} \quad \int_\Omega s(x, dy)\Phi(x, y)f(y) = A(\Phi_x f)(x) \quad (x \in \mathring{\Omega}),$$

et la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)\Phi(x, y)f(y)$ est localement bornée sur $\mathring{\Omega}$.

En effet, d'abord, cette dernière propriété résulte de la relation (I.1.18) et de la continuité de A, puisque l'hypothèse (ii) sur Φ entraîne que l'application $x \to \Phi_x f$ est continue de Ω dans $C^2_k(\Omega)$. Pour établir (I.1.18), fixant $x \in \mathring{\Omega}$, on considère une suite croissante (θ_n) de fonctions positives de $C^\infty(\Omega)$ telles que, $\theta_n = 0$, au voisinage de x pour tout n, $\sup\limits_n \theta_n(y) = 1$ pour tout $y \neq x$, et $\lim\limits_{n \to \infty} ||\theta_n \Phi_x f - \Phi_x f||_2 = 0$ [on établit l'existence d'une telle suite, en construisant, pour chaque $\rho > 0$, une fonction positive α_ρ de $C^\infty(R^n)$ telle que $\alpha_\rho(z) = 0$ pour $|z| \leqslant \rho$, $\alpha_\rho(z) = 1$ pour $|z| \leqslant 2\rho$ et $||\alpha_\rho||_2 \leqslant C\rho^{-2}$ où C est une constante indépendante de ρ]. En vertu de (I.1.4), on a alors,

(I.1.19)
$$\int_\Omega s(x, dy)\theta_n(y)\Phi_x(y)f(y) = A(\theta_n \Phi_x f)(x) \text{ pour chaque } n;$$

d'où (I.1.18) en passant à la limite dans (I.1.19) lorsque n tend vers l'infini : par monotonie pour le membre de gauche [1] et par continuité de A pour celui de droite.

d) si g est une fonction positive continue sur R^n telle que $g(0) = 0$, la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 g(y - x)f(y)$ est localement bornée sur $\mathring{\Omega}$.

En effet, *en vertu du lemme* I.1.3 ci-dessus, il existe une fonction positive $k \in C^2(R^n)$ telle que $|z|^2 g(z) \leqslant k(z)$ pour tout $z \in R^n$, et $k(0) = D_i k(0) = D_i D_j k(0) = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, et il suffit d'appliquer le résultat de l'alinéa *c*) ci-dessus à la fonction $\Phi(x, y) = k(x - y) (x \in E, y \in \Omega)$.

e) Raisonnant alors par l'absurde, on suppose qu'il existe un compact K de $\mathring{\Omega}$ tel que $\sup\limits_{x \in K} \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 f(y) = +\infty$. On en déduit l'existence d'une suite (x_n) de points de K et d'une suite (g_n) de fonctions positives continues sur R^n telles que, pour chaque n, $g_n(0) = 0$, $\|g_n\| \leqslant 1$, et

$$\int_\Omega s(x_n, dy)|y - x_n|^2 g_n(y - x_n)f(y) \geqslant n!.$$

Dans ces conditions, en posant $g(z) = \sum\limits_n 2^{-n} g_n(z)$ $(z \in R^n)$, on définit une fonction g positive continue sur R^n telle que $g(0) = 0$ et $\sup\limits_n \int_\Omega s(x_n, dy)|y - x_n|^2 g(y - x_n)f(y) = +\infty$,

[1] Le fait que $s, (x, .)$ est une mesure *positive* est essentiel ici.

ce qui contredit le résultat obtenu à l'alinéa *d*). D'où la propriété (NS_2) pour le noyau s.

f) Pour achever la démonstration, on définit, à partir de s et d'une fonction unité locale σ, une application linéaire S de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$ par la relation (I.1.1); et S est continue (alinéa *a*) ci-dessus). Désignant alors par $\tilde{\Omega}$ un ouvert de R^n tel que $\tilde{\Omega} \cap \overline{R^{n+}} = \Omega$ ($\tilde{\Omega} = \Omega$ si Ω est un ouvert de R^n), $u \to Au(x) - Su(x)$ définit une distribution d'ordre 2 sur $\tilde{\Omega}$ dont le support est réduit à $\{x\}$ d'après (I.1.4); $A - S$ est donc un opérateur différentiel du second ordre P sur $\mathring{\Omega}$, qui est de classe B puisqu'il applique $C_k^2(\mathring{\Omega})$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$. c.q.f.d.

I.1.5. On peut établir directement la proposition I.1.2 par la méthode employée ci-dessus allégée des arguments qui fournissent l'uniformité locale en x. En particulier, on obtient (I.1.10) grâce à la proposition suivante :

Proposition. — *Soit* μ *une mesure de Radon positive sur l'espace localement compact* $R^n \setminus \{0\}$ *pour laquelle,*

$$\int_{0<|y|\leqslant 1} f(y)\mu(dy) < +\infty$$

pour toute fonction $f \in C_k^2(R^n)$ *telle que,*

$$f(0) = D_i f(0) = D_i D_j f(0) \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

Alors

$$\int_{0<|y|\leqslant 1} |y|^2 \mu(dy) < +\infty.$$

On déduit cette proposition du lemme I.1.3 et du résultat suivant :

Lemme. — *Soient* E *un espace localement compact non compact, et* μ *une mesure de Radon positive sur* E *telle que* $\int_E f d\mu < +\infty$ *pour toute fonction* $f \in C_0^+(E)$ [1]. *Alors* $\mu(E) < +\infty$.

Remarque. — Le théorème I, la propriété (1) de la proposition I.1.2, le lemme I.1.3, et la proposition ci-dessus restent

[1] $f \in C_0^+(E) \iff f \in C(E),\ f \geqslant 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

valables sans aucune modification lorsque l'ordre 2 est remplacé par l'ordre p (p entier $\geqslant 2$). Par contre, évidemment, c'est précisément l'ordre 2 qui intervient dans le Théorème II.

I.1.6. Démonstration du Théorème II. *a*) On commence par le cas où $\mathcal{V} = C_k^2(E)$: En vertu du Théorème du graphe fermé, pour établir que A est continu de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathring{\Omega}$ et tout compact K de Ω, il existe une constante $C(x, K)$ telle que,

$$(I.1.20) \qquad |Au(x)| \leqslant C(x, K)\|u\|_{(2)} \text{ pour tout } u \in C_k^2(\Omega).$$

Or, désignant par σ une fonction unité locale sur Ω, on pose d'une part, $\sigma_x^0(y) = \sigma(x, y)$, et $\sigma_x^i(y) = \sigma_x^0(y)(y^i - x^i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; d'autre part, pour $u \in C_k^2(\Omega)$

$$(I.1.21) \qquad u_x(y) = u(y) - u(x)\sigma_x^0(y) - \sum_{i=1}^{n} D_i u(x)\sigma_x^i(y) \qquad (x \in \Omega,\ y \in \Omega).$$

On a alors,

$$(I.1.12) \qquad u = u(x)\sigma_x^0 + \sum_{i=1}^{n} D_i u(x)\sigma_x^i + u_x, \qquad u_x \in C_k^2(\Omega)$$

et,

$$(I.1.23) \qquad u_x(x) = D_i u_x(x) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

D'où, pour $x \in \mathring{\Omega}$, en appliquant A aux deux membres de (I.1.22),

$$(I.1.24) \qquad Au(x) = u(x)A(\sigma_x^0)(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i u(x)A(\sigma_x^i)(x) + A(u_x)(x).$$

Par ailleurs, en vertu de la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4) appliquée à u_x et de (I.1.23), on a,

$$|u_x| \leqslant n\|u_x\|_{(2)}\Psi_x,$$

en désignant par Ψ_x une fonction positive de $C_k^\infty(\Omega)$ telle que

$$\Psi_x(y) = |y - x|^2 \qquad \text{pour tout} \qquad y \in K \subset \operatorname{supp} \sigma_x.$$

D'où, d'après la propriété (p_1) de A,

$$(I.1.25) \qquad |A(u_x)(x)| \leqslant n\|u_x\|_{(2)}A(\Psi_x)(x).$$

L'existence de $C(x, K)$ résulte alors de (I.1.24) et (I.1.25), puisque, d'après (I.1.21), il existe une constante $C'(x, K)$ telle que $||u_x||_{(2)} = C'(x, K)||u||_{(2)}$ pour tout $u \in C^2_K(\Omega)$.

b) Dans le cas général où $\mathcal{V}$ est seulement un sous-espace de $C^2_k(\Omega)$ contenant $C^\infty_k(\Omega)$ (1), on ne peut plus employer le théorème du graphe fermé, et il s'agit de rendre localement uniformes en x (sur $\mathring{\Omega}$) les majorations précédentes; pour cela, il suffit de substituer aux fonctions σ^i_x $(0 \leqslant i \leqslant n)$ et ψ_x utilisées ci-dessus les fonctions η^i_x et φ_x fournies par le lemme suivant :

LEMME. — *Sous l'hypothèse du Théorème* II, *pour tout* $x_0 \in \mathring{\Omega}$ *et tout compact* K *de* Ω *tel que* $x_0 \in \mathring{K}$, *il existe un compact* L *de* Ω, *un voisinage* V *de* x_0 $(V \subset \mathring{\Omega})$, *et pour chaque* $x \in V$ *des fonctions* η^0_x, $\eta^i_x (1 \leqslant i \leqslant n)$ *et* φ_x *de* $\mathcal{V}$ *à support dans* L *de telle sorte que,*
d'une part, pour chaque $x \in V$,

$$\eta^i_x(x) = \delta^i_0 \quad \textit{et} \quad D_k\eta^i_x(x) = \delta^i_k \quad (1 \leqslant i, k \leqslant n), \tag{I.1.26}$$

$$\varphi_x(x) = 0 \quad \textit{et} \quad |y - x|^2 \leqslant \varphi_x(y) \quad \textit{pour tout} \quad y \in K; \tag{I.1.27}$$

d'autre part,

$$\sup_{x \in V} \|\eta^i_x\|_{(2)} < +\infty, \qquad \sup_{x \in V} |A(\eta^i_x)(x)| < +\infty \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

et

$$\sup_{x \in V} |A(\varphi_x)(x)| < +\infty.$$

Pour établir ce lemme, on construit d'abord les fonctions $\eta^i_x (0 \leqslant i \leqslant n)$ sous la forme $\eta^i_x(y) = \sum_{j=0}^{n} \tau^i_j(x)\sigma^j_{x_0}(y)$ $(x \in V$, $y \in \Omega)$, où V est un voisinage compact de x_0 dans $\mathring{\Omega}$ sur lequel la matrice $[D_k\sigma^j_{x_0}(x)]_{0 \leqslant j, k \leqslant n}$ est inversible (pour $x = x_0$ cette matrice est l'identité), et où la matrice $[\tau^i_j(x)]$ est inverse de $[D_k\sigma^j_{x_0}(x)]$ pour chaque $x \in V$.

On construit ensuite les fonctions φ_x à partir des fonctions

(1) On peut affaiblir cette hypothèse; voir à ce sujet Waldenfels [23] auquel sont empruntées les idées de cette démonstration, ainsi que l'exposé n° 2 du séminaire [17].

$\eta_x^i (0 \leqslant i \leqslant n)$: Désignant par θ une fonction positive de $C_k^\infty(\Omega)$ égale à 1 sur $K \cup V$, on pose

$$\psi_x(y) = |y - x|^2 \theta(y),$$

et

$$\tilde{\varphi}_x(y) = \psi_{x_0}(y) - \psi_{x_0}(x)\eta_x^0(y) - \sum_{i=1}^{n} D_i \psi_{x_0}(x)\eta_x^i(y)$$

$(x \in V,\ y \in \Omega)$.

En vertu de la formule de Taylor (I.1.16), et de la relation (I.1.26) déjà établie, il existe une constante $C > 0$ telle que $\tilde{\varphi}_x(y) < C|y - x|^2$ $(x \in V,\ y \in \Omega)$; les fonctions $\varphi_x = C^{-1}\tilde{\varphi}_x$ $(x \in V)$ répondent alors à la question. D'où le lemme, et la continuité de A de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{\text{Loc}}(\mathring{\Omega})$.

c) Enfin on vérifie que le prolongement de A à $C_k^2(\Omega)$ possède la propriété (p_1) en considérant pour $x \in \mathring{\Omega}$ et $u \in C_k^2(\Omega)$ tels que $u \geqslant 0$ et $u(x) = 0$, une suite (u_n) de fonctions $\geqslant 0$ de $C_k^\infty(\Omega)$ telle que $u_n(x) = 0$ pour tout n, et $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{(2)} = 0$ [on construit de telles fonctions u_n sous la forme $y \to [1 - \alpha_\rho(x - y)]\tilde{u}_x(y) + \alpha_\rho v(y)$ (¹), $(\rho > 0)$, où $\tilde{u}_x$ est la forme quadratique tangente à u en x et où $v \in C_k^\infty(\Omega)$ approche u en norme $\| \quad \|_{(2)}$ pour $|y - x| \geqslant \rho$] (²).

c.q.f.d.

I.1.7. Démonstration du Théorème III. *a*) Il est clair que A possède la propriété (p_1) si la partie principale de P est positive. Inversement, compte tenu de (I.1.5) (nº I.1.1), il suffit de montrer que la propriété (p_1) entraîne que, si $h \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \mathring{\Omega}$ sont tels que $h \geqslant 0$ et

$$h(x) = D_i h(x) = 0 (1 \leqslant i \leqslant n),$$

on a

$$\text{(I.2.28)} \qquad Ah(x) - \int_\Omega s(x,\ dy)\ h(y) \geqslant 0 \ (^2).$$

Or, désignant par φ une fonction de $C_k^\infty(\Omega)$ comprise entre 0 et 1 et égale à 1 au voisinage de x, on a, d'après (p_1),

(¹) α_ρ est défini au nº I.1.5, alinéa *c*).
(²) Voir la remarque 1 du nº I.1.7.

$A(\varphi h)(x) = Ah(x) - A((1 - \varphi)h)(x) \geqslant 0$; donc,

$$Ah(x) - \int_\Omega s(x,\, dy)h(y) \geqslant -\int_\Omega s(x,\, dy)\varphi(y)h(y),$$

d'après (I.1.4), puisque $x \notin \operatorname{supp}\,(1 - \varphi)h$.

Mais l'hypothèse sur h et la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4) entraînent que, si $V \subset \Omega$ est un voisinage ouvert du support de φ, $\varphi h \leqslant n\|h\|_{(2)}1_V$; donc aussi

$$\int_\Omega s(x,\, dy)\varphi(y)h(y) \leqslant n\|h\|_{(2)}\int_V s(x,\, dy)|y - x|^2.$$

Le théorème de Lebesgue, joint à la propriété (NS_2) de s entraînent alors que l'on peut choisir φ à support assez voisin de x pour que $\int_\Omega s(x,\, dy)\varphi(y)h(y)$ soit arbitrairement petit; d'où (I.1.28) et la propriété (1) du théorème III.

b) Dans la propriété (2), il est clair sur la forme explicite (I.1.1) de S que la condition est suffisante. Inversement, si A possède le principe du maximum (PM), d'une part A satisfait (p_1), donc la partie principale de P est positive (alinéa *a*) ci-dessus). D'autre part, désignant par (θ_n) une suite croissante de fonctions de $C_k^\infty(\Omega)$ comprises entre 0 et 1, égales à 1 au voisinage de $x\,(x \in \mathring{\Omega})$ et telles que $\sup_n \theta_n = 1$, on a, d'après (PM)

$$\text{(I.1.29)} \quad A\theta_n(x) = P1(x) + \int_\Omega s(x,\, dy)(\theta_n(y) - \sigma(x,\, y)) \leqslant 0$$

D'où (I.1.7) (ainsi que la propriété (NS_3) de s) en faisant tendre n vers l'infini dans (I.1.29). c.q.f.d.

Remarque 1. — La relation (I.1.28) demeure valable, pour $h \in C_k^\infty(\Omega)$, si on suppose seulement que la relation (I.1.6) est satisfaite pour $u \in C_k^\infty(\Omega)$. On en déduit, grâce à (I.1.5), que la partie principale de P est positive, donc que A possède la propriété (p_1) : on obtient ainsi une autre démonstration de la dernière assertion du Théorème II ne faisant pas appel à l'approximation utilisée dans l'alinéa *c*) du n° I.1.6.

Remarque 2. — On notera que (I.1.29) est satisfaite, donc aussi (I.1.7), sous la seule hypothèse [plus faible que (PM)] que $Au(x) \leqslant 0$ pour tout $u \in C_k^2(\Omega)$ compris entre 0 et 1 et égal à 1 au voisinage de x ($x \in \mathring{\Omega}$) [voir la propriété (N) des opérateurs de Lévy (n° I.2.6) et les remarques 1 et 3 du n° I.2.10].

§ I.2. Opérateurs intégro-différentiels de Lévy.

Les résultats obtenus au paragraphe I.1 (Théorèmes I, II et III, n° I.1.1) conduisent, en ce qui concerne les opérateurs satisfaisant au principe du maximum, à essayer d'isoler la partie différentielle *du second ordre* qui constitue une *diffusion*, de la partie intégro-différentielle (*non locale*) qui constitue un *opérateur de Lévy.*

I.2.1. Noyaux et opérateurs de Lévy sur un ouvert de $\overline{\mathbf{R}^{n+}}$ ou $\mathbf{R}^n$. On appellera *noyau de Lévy sur* Ω (Ω ouvert de $\overline{\mathrm{R}^{n+}}$ ou R^n) un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de $\mathring{\Omega}$ dans Ω [1] ayant les propriétés suivantes [2] :

(NS_1) $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathring{\Omega}$.

(NS_2) pour toute fonction positive $f \in \mathrm{C}_k(\Omega)$, la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)|y-x|^2 f(y)$ ($x \in \mathring{\Omega}$) appartient à $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ [3]

(NS_3) pour tout ouvert Ω' de $\mathring{\Omega}$, la fonction

$$x \to s(x, \Omega \diagdown \Omega') \ (x \in \Omega')$$

est dans $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\Omega')$ [4].

Cela étant, on appellera *opérateur de Lévy sur* Ω toute application linéaire S de $\mathrm{C}^2_k(\Omega)$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathring{\Omega})$ de la forme

$$\text{(I.2.1)} \quad \mathrm{S}u(x) = a(x)u(x) + \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\mathrm{D}_i u(x) + \int_\Omega s(x, dy)\left[u(y) - \sigma(x, y)\left(u(x) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i u(x)(y^i - x^i)\right)\right]^{(5)}$$

[1] Voir le n° 0.1.4. On rappelle (n° 0.1.1) que $\mathring{\Omega}$ désigne l'intérieur de Ω considéré comme variété à bord ($\Omega = \mathring{\Omega}$ si Ω est un ouvert de R^n).

[2] Voir le n° I.1.1.

[3] Voir le n° 0.1.1. En particulier, pour tout $x \in \mathring{\Omega}$, $s(x, .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $\Omega \diagdown \{x\}$.

[4] Voir la remarque 3 du n° I.2.10.

[5] Cette intégrale est absolument convergente en vertu de la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4) et de (NS_2).

pour $x \in \mathring{\Omega}$ et $u \in C_k^2(\Omega)$, où a et $a^i(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des fonctions de $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$, σ une fonction unité locale sur Ω (nº 0.1.3) et s un noyau de Lévy sur Ω tels que, pour tout $x \in \mathring{\Omega}$,

$$\text{(I.2.2)} \qquad a(x) + \int_\Omega s(x, dy)(1 - \sigma(x, y)) \leqslant 0 \ (^1).$$

En vertu des Théorèmes I et III (nº I.1.1), l'application linéaire s définie par (I.2.1) et (I.2.2) est *continue* de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$, et satisfait au *principe du maximum:*

$$\text{(PM)} u \in C_k^2(\Omega),\ x \in \mathring{\Omega} \quad \text{et} \quad u(x) = \sup\ u \geqslant 0 \implies Su(x) = 0.$$

En outre, le noyau s est entièrement déterminé par S et par la relation,

(I.2.3)
$$Su(x) = \int_\Omega s(x, dy)u(y) \quad \text{dès que} \quad x \notin \operatorname{supp} u\ (x \in \mathring{\Omega},\ u \in C_k^2(\Omega)).$$

On dira que s *est le noyau singulier de* S, ou que S *admet* s *comme noyau.*

Par contre l'opérateur S étant donné, les coefficients a et a^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dépendent du choix de σ par les relations

$$\text{(I.2.4)} \qquad a(x) = S(\sigma_x)(x) \quad (x \in \mathring{\Omega})$$
$$\text{(I.2.5)} \qquad a^i(x) = S(\sigma_x^i)(x) \quad (x \in \mathring{\Omega},\ 1 \leqslant i \leqslant n)\ (^2)$$

[Cette dépendance conditionne la forme (I.2.1) adoptée pour S plutôt que (I.1.1) (nº I.1.1); voir aussi à ce sujet la propriété d'invariance par difféomorphisme au nº I.2.4.]

I.2.2. Opérateurs de Lévy de classe C^0 sur un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ ou R^n. On dira que *le noyau de Lévy* s *sur* Ω *est de classe* C^0 s'il peut être prolongé en un noyau de Ω dans Ω encore noté $s(x, dy)$ (³) de telle sorte que,

(NS_1') $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(¹) Voir la remarque 1 du nº I.2.10.
(²) $\sigma_x^i(y) = \sigma(x, y)\ (y^i - x^i)\ (1 \leqslant i \leqslant n,\ x \in \Omega,\ y \in \Omega)$.
(³) Les propriétés (NS_1') et (NS_2') de ce prolongement assurent son unicité.

(NS'_2) pour toute fonction positive $f \in C_k(\Omega)$, la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 f(y)$ $(x \in \Omega)$ appartient à $C(\Omega)$ (1).

(NS'_3) pour tout ouvert Ω' de Ω, la fonction $x \to s(x, \Omega \setminus \Omega')$ $(x \in \Omega')$ est dans $B_{Loc}(\Omega')$.

Cela étant,

Proposition. — *Soit* S *un opérateur de Lévy sur* Ω *donné sous la forme* (I.2.1). *Pour que* S *applique continûment* $C_k^p(\Omega)$ *dans* $C(\Omega)$, *où* p *est un entier* $\geqslant 2$, *il faut et il suffit que son noyau* s *soit de classe* C^0 *et que les coefficients* a *et* a^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *appartiennent à* $C(\Omega)$; *les relations* (I.2.1) *et* (I.2.2) *sont alors satisfaites pour tout* $x \in \Omega$.

On dira que *l'opérateur de Lévy* S *est de classe* C^0 s'il applique continûment $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ (2).

I.2.3. La démonstration de la proposition précédente repose sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soient* s *un noyau de Lévy de classe* C^0 *sur* Ω, Φ *une fonction de* $B_{Loc}(\Omega \times \Omega)$ *continue sur* $\Omega \times \Omega \setminus \Delta_{\Omega\times\Omega}$ (3), *et* $f \in C_k(\Omega)$. *Alors, la fonction*

$$x \to F(x) = \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 \Phi(x, y) f(y)$$

est continue sur Ω.

En particulier, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *la fonction*

$$x \to \int_\Omega s(x, dy)(y^i - x^i)(y^j - x^j)\Phi(x, y) f(y)$$

est continue sur Ω.

En effet, on déduit d'abord facilement de (NS'_2), que, si Φ est continue sur $\Omega' \times \Omega$ où Ω' est un ouvert de Ω, la fonction F est aussi continue sur Ω'. Pour traiter le cas général, $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ étant donnés, soit φ_ε une fonction de $C_k(\Omega)$ telle que $0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1$, $\varphi_\varepsilon = 1$ sur un voisinage ouvert W_ε de x_0, et $\int_\Omega s(x_0, dy)|y - x_0|^2 \varphi_\varepsilon(y) < \varepsilon$ [une telle fonction φ_ε existe en vertu de (NS'_2)]. Puisque la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 \varphi_\varepsilon(y)$ est continue d'après (NS'_2),

(1) Voir le n° 0.1.1. En particulier, pour tout $x \in \Omega$, $s(x, .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $\Omega \setminus \{x\}$.

(2) Voir la remarque 2 du n° I.2.10.

(3) $\Delta_{\Omega\times\Omega}$ est la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

il existe un voisinage V_ε de x_0 tel que,

$$\text{(I.2.6)} \quad \int_\Omega s(x, dy)|y-x|^2\varphi_\varepsilon(y) < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \qquad x \in V_\varepsilon,$$

et $V_\varepsilon \subset K$, où K est un compact de Ω indépendant de ε. On a alors,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int_\Omega & s(x, dy)|y - x|^2\varphi_\varepsilon(y)|\Phi(x, y)f(y)| \\ &+ \int_\Omega s(x_0, dy)|y - x_0|^2\varphi_\varepsilon(y)|\Phi(x_0, y)f(y)| \\ &+ \Big|\int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2(1 - \varphi_\varepsilon(y))\Phi(x, y)f(y) \\ &- \int_\Omega s(x_0, dy)|y - x_0|^2(1 - \varphi_\varepsilon(y))\Phi(x_0, y)f(y)\Big|.\end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$ puisque, d'une part $|\Phi(x, y)f(y)|$ étant borné pour $x \in K$, $y \in \Omega$ par $C = \sup_{x \in K,\, y \in \Omega} |\Phi(x, y)f(y)|$ $(C < +\infty)$, les deux premiers termes sont majorés, pour $x \in V_\varepsilon$, par εC d'après (I.2.6); et, d'autre part, pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonction $(x, y) \to (1 - \varphi_\varepsilon(y))\Phi(x, y)f(y)$ étant continue sur $W_\varepsilon \times \Omega$, le dernier terme tend vers zéro quand x tend vers x_0 ainsi qu'on l'a remarqué ci-dessus.

c.q.f.d.

On établit alors comme suit la proposition I.2.2 : La condition est d'abord suffisante en vertu de (NS_2'), du lemme ci-dessus et de la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4).

Elle est aussi nécessaire : supposant que S applique continûment $C_k^p(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, on montre d'abord que les coefficients a et a^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ appartiennent à $C(\Omega)$ en utilisant les relations (I.2.4) et (I.2.5) (n° I.2.1) et la continuité de S de $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$. On remarque ensuite que, pour $f \in C_k^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 f(y) = S(\psi_x f)(x), \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathring{\Omega},$$

où $\psi_x(y) = |y - x|^2 (x \in \Omega,\ y \in \Omega)$; On en déduit, grâce à la continuité de S, que la fonction $x \to \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2 f(y)$ se prolonge continûment à Ω pour tout $f \in C_k^p(\Omega)$, donc aussi pour tout $f \in C_k(\Omega)$. Il en résulte que s peut être prolongé en un noyau positif borélien de Ω dans Ω ayant la propriété (NS_2'); et, en vertu du lemme ci-dessus et de la formule de Taylor (I.1.16), (I.2.1) est alors satisfaite pour tout $x \in \Omega$.

I.2.3

Enfin, désignant par V un ouvert relativement compact de Ω, et par (θ_n) une suite croissante de fonctions de $C_k^\infty(\Omega)$ telle que $1_V \leqslant \theta_n \leqslant 1$ pour tout n, et $\sup_n \theta_n = 1$, on a,

$$\text{(I.2.7)} \quad a(x) = \int_\Omega s(x, dy)(\theta_n(y) - \sigma(x, y)) = S(\theta_n)(x)$$

pour tout $x \in V$ et tout n.

Faisant tendre alors n vers l'infini dans (I.2.7), il résulte de la continuité de $S(\theta_n)$ pour chaque n, et de ce que la suite (θ_n) croît vers 1, que la fonction $x \to a(x) + \int_\Omega s(x, dy)(1 - \sigma(x, y))$ est semi-continue inférieurement sur Ω; ce qui entraîne que (I.2.2) est satisfaite pour tout $x \in \Omega$ ainsi que (NS_3').

c.q.f.d.

I.2.4. Les notions introduites aux nº I.2.1 et I.2.2 sont *invariantes par difféormorphisme :*

Proposition. — *Soient* Ω *et* $\tilde{\Omega}$ *des ouverts de* $\overline{R^{n+}}$ *ou de* R^n, Φ *un* C^2*-difféomorphisme de* Ω *sur* $\tilde{\Omega}$, s *un noyau de Lévy sur* Ω *et* S *un opérateur de Lévy sur* Ω *admettant* s *comme noyau.*

(1) *Le noyau* $\tilde{s}$ *transporté de* s *par* Φ(1) *est un noyau de Lévy sur* $\tilde{\Omega}$. *Si* s *est de classe* C^0, *il en est de même de* $\tilde{s}$.

(2) *L'opérateur* $\tilde{S}$ *transporté de* S *par* Φ(2) *est un opérateur de Lévy sur* $\tilde{\Omega}$. *Si* S *est de classe* C^0, *il en est de même de* $\tilde{s}$.

Cette proposition réclame une simple vérification à partir des définitions, de la proposition I.2.2 et du lemme I.2.3, en utilisant la relation suivante, déduite de la formule de Taylor (I.1.16) (nº I.1.14) : posant $\psi = \Phi^{-1}$,

$$\text{(I.2.8)} \quad \begin{aligned} y^i - x^i = {} & \sum_h \tilde{D}_h \psi^i(\Phi(x))[\Phi^h(y) - \Phi^h(x)] \\ & + \sum_{h,l} [\Phi^h(y) - \Phi^h(x)][\Phi^l(y) - \Phi^l(x)] R^i_{h,l}(x, y) \end{aligned}$$

$(x \in \Omega, y \in \Omega)$ où $R^i_{h,l}$ est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$ $(1 \leqslant i, h, l \leqslant n)$.

(1) $\tilde{s}(\tilde{x}, \tilde{X}) = s(\Phi^{-1}(\tilde{x}), \Phi^{-1}(\tilde{X}))$ $(\tilde{x} \in \tilde{\Omega}, \tilde{X} \in \mathcal{B}_{\tilde{\Omega}})$.

(2) $\tilde{S}\tilde{f}(\tilde{x}) = S(\tilde{f} \circ \Phi)(\Phi^{-1}(x))$ $(\tilde{f} \in C_k^2(\tilde{\Omega}), \tilde{x} \in \tilde{\Omega})$.

I.2.5. On appellera *noyau de Lévy sur la variété à bord* M [1] un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de $\dot{M}$ dans M (n° 0.1.3) pour lequel, d'une part $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in \dot{M}$, et, d'autre part, la fonction $x \to \int_M s(x, dy)\Phi(x, y)f(y)$ $(x \in \dot{M})$ appartient à $B_{Loc}(\dot{M})$ pour toute fonction positive $f \in C_k(M)$ et toute fonction $\Phi \in C^2(M \times M)$ positive, bornée et telle que, $\Phi(x, x) = 0$ et $d_x\Phi(x, .) = 0$ pour tout $x \in \dot{M}$ [2].

On vérifie sans difficulté que, pour qu'un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de $\dot{M}$ dans M soit un noyau de Lévy sur M, il faut et il suffit qu'il ait les propriétés suivantes :

$[NS_1]$ $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in \dot{M}$.

$[NS_2]$ pour toute carte locale (U, χ) de M[1], le noyau s_χ induit par s sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$ [3] est un noyau de Lévy (n° I.2.1).

$[NS_3]$ Pour tout ouvert V de $\dot{M}$, la fonction

$$x \to s(x, M \setminus V) \quad (x \in V)$$

appartient à $B_{Loc}(V)$ [4].

En particulier, pour tout $x \in \dot{M}$, $s(x, .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $M \setminus \{x\}$.

On dira que *le noyau de Lévy* s *sur* M *est de classe* C^0 s'il peut être prolongé en un noyau positif de M dans M, encore noté $s(x, dy)$ [5], de telle sorte que,

$[NS_1']$ $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in M$.

$[NS_2']$ pour toute carte locale (U, χ) de M, le noyau s_χ induit par s sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$ est un noyau de Lévy de classe C^0 (n° I.2.2).

$[NS_3']$ pour tout ouvert V de M, la fonction

$$x \to s(x, M \setminus V)(x \in V)$$

appartient à $B_{Loc}(V)$ [6].

En considérant éventuellement des cartes locales de M

(1) Voir le n° 0.1.

(2) $d_x\Phi(x, .)$ désignant la différentielle en x de la fonction $y \to \Phi(x, y)$.

(3) $s_\chi(z, Z) = s(\chi^{-1}(z), \chi^{-1}(Z))$ $(z \in \chi(\mathring{U}), Z \in \mathcal{B}_{\chi(U)})$.

(4) Lorsque M est compacte, $[NS_2] \Longrightarrow [NS_3]$; voir la remarque 3 du n° I.2.10.

(5) Les propriétés $[NS_1']$ et $[NS_2']$ de ce prolongement assurent son unicité.

(6) Ces définitions coïncident avec celles des n° I.2.1 et I.2.2 lorsque M est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ ou R^n.

non connexes, on déduit de $[NS_2']$ que s vérifie aussi,

$[NS_4']$ pour tout $f \in C_k(M)$, la fonction $x \to \int_M s(x, dy) f(y)$ $(x \in M \setminus \operatorname{supp} f)$ est continue sur $M \setminus \operatorname{supp} f$.

On peut donner de la propriété $[NS_2']$ une expression intrinsèque analogue à celle figurant dans la définition d'un noyau de Lévy quelconque. Il est aussi commode de l'exprimer au moyen d'une distance sur M : Désignant par g une métrique Riemanienne sur M de classe C^0, par τ la mesure Riemanienne, et par $\overline{xy}$ la distance géodésique sur M associées à g, on déduit du lemme I.2.3 ci-dessus (en utilisant la propriété $[NS_4']$) que la propriété $[NS_2']$ équivaut à,

$[NS_2'']$ pour toute fonction positive $f \in C_k(M)$, la fonction $x \to \int_M s(x, dy) \overline{xy}^2 f(y)$ $(x \in M)$ appartient à $C(M)$.

Il en résulte le procédé de construction suivant : on définit un noyau de Lévy s de classe C^0 sur M en posant,

$$\text{(I.2.9)} \quad \int_M s(x, dy) f(y) = \int_M \overline{xy}^{\alpha-2-n} k(x, y) f(y) \tau(dy) \qquad (x \in M, \ f \in C_k(M), \ x \notin \operatorname{supp} f)$$

où α est un nombre réel > 0 et k une fonction positive continue sur $M \times M$.

I.2.6. Opérateurs de Lévy sur une variété. Étant donné un noyau de Lévy s sur la variété à bord M [1], on appellera *opérateur de Lévy sur* M *de noyau* s toute application linéaire continue S de $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(\mathring{M})$ telle que,

(L_1) pour $x \in \mathring{M}$ et $u \in C_k^2(M)$,

$$\text{(I.2.10)} \qquad Su(x) = \int_M s(x, dy) u(y) \qquad \text{dès que} \qquad x \notin \operatorname{supp} u.$$

(L_2) Pour chaque carte locale (U, χ) de M l'application linéaire S_χ de $C_k^2(\chi(U))$ dans $B_{Loc}(\chi(\mathring{U}))$ induite par S [2], est un opérateur de Lévy sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$ (nº I.1.1).

(N) $Su(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathring{M}$ et tout $u \in C_k^\infty(M)$ tels que $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $u(y) = 1$ pour y voisin de x [3].

[1] Voir le nº 0.1.1.

[2] $S_\chi \varphi(z) = S(\varphi \circ \chi)(\chi^{-1}(z))$ $[z \in \chi(\mathring{U}), \ \varphi \in C_k^2(\chi(U))]$; le noyau de S_χ étant le noyau s_χ induit par s sur $\chi(U)$.

[3] Voir les remarques 1 et 3 du nº I.2.10.

On notera que, lorsque la variété M est *compacte*, la propriété (N) équivaut [compte tenu de (L_1)] à la relation $S1 \leqslant 0$ [il suffit d'écrire $Su(x) = S1(x) - \int_\Omega s(x, dy)(1 - u(y))$; voir aussi à ce sujet la remarque 3 du n° I.2.10].

On dira que l'opérateur de Lévy S sur M est *de classe* C^0 s'il applique *continûment* $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ [1].

Compte tenu de $[NS_1]$, le noyau s est déterminé de façon unique par S et la propriété (L_1). On dira aussi que S *admet* s *pour noyau.*

En ce qui concerne la construction des opérateurs de Lévy à partir de leurs noyaux, on remarque d'abord que les opérateurs de Lévy sur M (resp. de classe C^0) dont le noyau est nul (autrement dit qui sont de *caractère local*) sont exactement les opérateurs différentiels linéaires du premier ordre Z sur $\mathring{M}$ de classe B (resp. sur M de classe C^0; n° 0.1.2) pour lesquels $Z1 \leqslant 0$. Dans le cas général, la construction est assurée par le lemme suivant :

Lemme. — (1) *Tout noyau de Lévy sur* M (*resp. de classe* C^0) *est le noyau d'un opérateur de Lévy sur* M (*resp. de classe* C^0).

(2) *Si deux opérateurs de Lévy sur* M *admettent le même noyau, leur différence est un opérateur différentiel du premier ordre sur* $\mathring{M}$ *de classe* B.

En outre,

Proposition. — *Tout opérateur de Lévy* S *sur* M *satisfait au principe du maximum positif :*

$$\text{(PM)} \quad u \in C_k^2(M),\ x \in \mathring{M} \quad \text{et} \quad u(x) = \operatorname{Sup} u \geqslant 0 \implies Su(x) \leqslant 0.$$

I.2.7. Afin d'établir les résultats précédents, on va introduire une forme « globale » des opérateurs de Lévy généralisant l'expression (I.2.1) (n° I.2.1).

Pour cela, reprenant le procédé de construction d'une fonction unité locale sur M (n° 0.1.3), on désigne par $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$ un recouvrement localement fini de M par des cartes

[1] Voir la remarque 2 du n° I.2.10.

locales relativement compactes et par $\{\sigma_\alpha\}$ une famille de fonctions de classe C^∞ sur $M \times M$ telle que,

(I.2.11) $\quad \operatorname{supp} \sigma_\alpha \subset U_\alpha \times U_\alpha \quad$ pour tout α,

et $\sum_\alpha \sigma_\alpha = 1$ au voisinage de $\Delta_{M\times M}$; et on pose, pour $u \in C^1(M)$, $x \in \mathring{M}$, $y \in M$,

(I.2.12)

$$\theta u(x, y) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x, y) \left[u(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^i}(x)(\chi_\alpha^i(y) - \chi_\alpha^i(x)) \right].$$

On note les propriétés suivantes du « développement de Taylor » θu :

(θ_1) $\theta 1$ est une fonction locale unité sur $\mathring{M}$.

(θ_2) Pour chaque $u \in C^1(M)$, θu est continue sur $\mathring{M} \times M$.

(θ_3) L'application $u \to \theta u$ est linéaire, et, pour chaque compact K de $\mathring{M}$, il existe une semi-norme continue p_K sur $C_k^2(M)$ telle que,

(I.2.13) $$|u(y) - \theta u(x, y)| \leqslant p_K(u)\{[1 - \theta 1(x, y)] + \sum_\alpha \sigma_\alpha(x, y)|\chi_\alpha(y) - \chi_\alpha(x)|^2\}$$

pour tout $u \in C_k^2(M)$, $x \in K$ et $y \in M$.

Cela étant,

Proposition. — (1) *Soient* s *un noyau de Lévy sur* M, *et* Z *un opérateur différentiel du premier ordre sur* $\mathring{M}$ *de classe* B (n° 0.1.3). *On définit une application linéaire continue* S *de* $C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\mathring{M})$ *en posant, pour* $u \in C_k^2(M)$ *et* $x \in \mathring{M}$,

(I.2.14) $$Su(x) = Zu(x) + \int_M s(x, dy)[u(y) - \theta u(x, y)] \quad (^1);$$

et, S *est un opérateur de Lévy sur* M *de noyau* s *si et seulement si, pour tout* $x \in \mathring{M}$,

(I.2.15) $$Z1(x) + \int_M s(x, dy)[1 - \theta 1(x, y)] = 0.$$

[1] Cette intégrale est absolument convergente en vertu de la propriété (θ_3) de θu et des propriétés $[NS_2']$ et $[NS_3']$ de s.

(2) *Pour que* S *applique continûment* $C_k^p(M)$ *dans* C(M), *où* p *est un entier* $\geqslant 2$, *il faut et il suffit que* s *et* Z *soient de classe* C^0 *sur* M. S *est alors de classe* C^0 *et les relations* (I.2.14) *et* (I.2.15) *sont satisfaites pour tout* $x \in M$.

(3) *Inversement, tout opérateur de Lévy* S *sur* M *peut être mis, et ceci de façon unique* [1], *sous la forme* (I.2.14), s *et* Z *étant liés par* (I.2.15) (*pour* $x \in \mathring{M}$).

Les propriétés (1) et (3) réclament une simple vérification à partir des propriétés (θ_1), (θ_2), (θ_3) du développement de Taylor θu, et des propriétés $[NS_1]$, $[NS_2]$ et $[NS_3]$ de s; et on établit la propriété (2) en se ramenant par localisation à la proposition (I.2.2).

On en déduit immédiatement, d'une part le lemme I.2.6; d'autre part la proposition qui le suit : le principe du maximum (PM) pour S est tout à fait visible sur la forme (I.2.14) de S, compte tenu de (I.2.15). c.q.f.d.

I.2.8. Le symbole principal d'ordre 2 d'un opérateur de Lévy est nul ainsi que l'exprime le Théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit* S *une application linéaire de* $C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\mathring{M})$. *Alors, pour que* S *soit un opérateur de Lévy sur* M, *il faut et il suffit qu'il possède les propriétés suivantes :*

(l_0) S *est continu de* $C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\mathring{M})$.

(l_1) $Su(x) \geqslant 0$ *dès que* $u \geqslant 0$ *et* $x \notin \operatorname{supp} u$ $(x \in \mathring{M}, u \in C_k^2(M))$.

(l_2) *pour tout* $x \in \mathring{M}$, $u \in C_k^2(M)$ *et* $v \in C^2(M)$,

$$\text{(I.2.16)} \qquad \lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ (\lambda \text{ réel})}} -\frac{1}{\lambda^2} e^{-i\lambda v(x)} S(ue^{i\lambda v})(x) = 0$$

(N) $Su(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathring{M}$ *et* $u \in C_k^\infty(M)$ *tels que* $0 \leqslant u \leqslant 1$ *et* $u(y) = 1$ *pour* y *voisin de* x.

De plus, si S *est un opérateur de Lévy de classe* C^0, *la relation* (I.2.16) *a lieu aussi pour tout* $x \in \partial M$ [2].

En effet, par localisation, il suffit d'établir la propriété lorsque M est un ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$.

[1] Une fois donné le développement de taylor θ.
[2] Voir le corollaire du Théorème XXI (n° III.3.4).

D'abord, la condition est nécessaire : Désignant par S un opérateur de Lévy sur Ω, les propriétés (l_0), (l_1) et (N) étant satisfaites par définition, il reste à établir (l_2). Pour cela, soient σ une fonction unité locale sur Ω, et η un nombre réel > 1; Calculant $S(ue^{i\lambda v})\,(x)$ en utilisant la forme (I.2.1) de S et la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4), et en groupant les termes ne contenant pas λ^2 en facteur, on obtient,

$$(\mathrm{I}.2.17)\quad \frac{1}{\lambda^\eta}\, e^{-i\lambda v(x)} S(ue^{i\lambda v})(x) = \Phi_\sigma^\lambda(x)$$
$$- \lambda^{2-\eta} \sum_{j,k=1}^{n} \int_\Omega s(x,\, dy)\sigma(x,\, y)(y^j - x^j)(y^k - x^k)v_{j,k}^\lambda(x,\, y)$$

où $v_{j,k}^\lambda(x,\, y) = \int_0^1 (1-t)u D_j v D_k v(x + t(y-x))e^{i\lambda[v(x+t(y-x))-v(x)]}\, dt$ est borné indépendamment de λ et de y, et où, en vertu de la propriété (NS_2) de s, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \Phi_\sigma^\lambda(x) = 0$ pour chaque fonction unité locale σ.

Étant donné alors $\varepsilon > 0$, on choisit d'abord une fonction unité locale σ_ε telle que $\sigma_\varepsilon(x,\, .)$ ait son support assez voisin de x pour que,

$$\left|\int_\Omega s(x,\, dy)\sigma_\varepsilon(x,\, y)(y^j - x^j)(y^k - x^k)v_{j,k}^\lambda(x,\, y)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n^2}$$

pour $1 \leqslant j,\, k \leqslant n$ [ceci est possible à cause de la propriété (NS_2) de s]. On choisit ensuite λ_ε assez grand pour que $|\Phi_{\sigma_\varepsilon}^\lambda(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$. D'où, en faisant $\eta = 2$ dans (I.2.17), $\left|\frac{1}{\lambda^2}\, e^{-i\lambda v(x)} S(ue^{i\lambda v})(x)\right| \leqslant \varepsilon$ dès que $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$, et (I.2.16).

Inversement, la condition est suffisante : En vertu des Théorèmes I et III ci-dessus (n° I.1.1), et compte tenu de la remarque 2 du n° I.1.7, (l_0) (l_1) et (N) entraînent que S est de la forme (I. 1.3) (n° I.1.1), la relation (I.1.7) étant satisfaite. La propriété (l_2) entraîne alors (voir le n° 0.1.3) que P est un opérateur différentiel du premier ordre, donc que S est un opérateur de Lévy. c.q.f.d.

Remarque 1. — La propriété (l_2) entraîne que S est d'ordre $\leqslant 2$. En fait, il existe des opérateurs de Lévy qui ne sont d'ordre η [1] pour aucun $\eta < 2$ ainsi que le montre l'exemple suivant : On prend $M = R$ et on pose,

$$\int_R s(x, dy)f(y) = \int_0^1 \varphi(\rho)\, d\rho \int_R \frac{f(y)}{|x-y|^{2+\rho}}\, dy \qquad (f \in C_k(R),\ x \notin \operatorname{supp} f),$$

où φ est une fonction numérique borélienne $\geqslant 0$ sur $[0, 1[$ telle que $\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{1-\rho}\, d\rho < +\infty$ [il suffit de reprendre la relation (I.2.17) ci-dessus, et de vérifier que, pour $\eta < 2$, on peut choisir u et φ de sorte que le deuxième terme du second membre tende vers $+\infty$ avec λ].

Remarque 2. — La propriété (l_2) pose naturellement la question de la compacité des opérateurs de Lévy de classe C^0 de $C^2(M)$ dans $C(M)$ (La variété M étant compacte), et aussi de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$ $(0 < \lambda < 1)$: Voir à ce sujet le paragraphe III-3 ci-dessous (Théorèmes XXI et XXII, n° III.3.4 et III.3.6).

Remarque 3. — La propriété (l_2) appelle une classe d'opérateurs d'ordre 2 ayant un symbole principal d'ordre 2 non nul, et admettant un noyau de Lévy comme noyau [propriété (L_1) n° I.2.6]. On étudiera une telle classe au paragraphe I.3 (voir en particulier le n° I.3.2).

I.2.9. Opérateurs de Lévy d'ordre 1. Supposant, par exemple, que M est une variété à bord compacte, un noyau de Lévy s de classe C^0 sur M sera dit *d'ordre* 1 s'il vérifie (avec les notations de la fin du n° I.2.5) :

$[N_1S_2'']$ pour toute fonction positive $f \in C(M)$, la fonction $x \to \int_M s(x, dy)\overline{xy}\, f(y)$ appartient à $C(M)$.

Si s est un tel noyau, et si a est une fonction négative de $C(M)$, on définit un opérateur de Lévy de classe C^0 sur M en posant,

(I.2.18)

$$Su(x) = a(x)u(x) + \int_M s(x, dy)[u(y) - u(x)] \quad (x \in M,\ u \in C^2(M)).$$

[1] Voir la remarque 1 du n° III.3.9.

Un tel opérateur se prolonge continûment à $C^1(M)$ par la même relation (I.2.18) ([1]); Il sera dit *d'ordre* 1.

I.2.10. Quelques remarques sur la définition des opérateurs de Lévy.

Remarque 1. — On pourrait étudier comme ci-dessus la classe des opérateurs de $C^2_k(M)$ dans $B_{Loc}(\mathring{M})$ qui sont localement de la forme (I.2.1) sans la relation (I.2.2), ni la propriété $[NS_3]$ du noyau s, ni la propriété (N) (nº I.2.1 et I.2.6). La classe plus restreinte considérée ici l'est en vue du principe du maximum (PM) [dont la propriété (N) n'est que l'expression pour les fonctions particulières qui y figurent].

La terminologie « noyau de Lévy » « opérateur de Lévy » a été introduite eu égard aux travaux de Paul Lévy sur le cas des opérateurs de convolution dans R^n (formule de Lévy Khinchine; voir à ce sujet [3], ainsi que le paragraphe 3 de l'exposé nº 2 du séminaire [17]).

Remarque 2. — La classe C^0 pour un opérateur de Lévy introduit en fait la régularité à l'intérieur d'une part, et la régularité au bord d'autre part (lorsque $\partial M \neq \emptyset$); la première pourrait être considérée sans la deuxième (voir à ce sujet le nº I.3.3 ci-dessous).

Remarque 3. — La condition $[NS_3]$ entraîne que l'opérateur S peut être défini au moyen de (I.2.1) [ou de (I.2.14)] sur le sous-espace de $C^2(M)$ formé des fonctions bornées; et la relation (I.2.2) [ou (I.2.15)] s'écrit alors simplement $S1(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathring{\Omega}$ [cette relation étant équivalente à (N)]. D'ailleurs, avec les notations du nº I.2.5, la conjonction de $[NS_2]$ et $[NS_3]$ équivaut à :

$[NS_4]$ pour toute fonction $f \in C(M)$ positive et bornée, la fonction

$$x \to \int_M s(x, dy)\overline{xy}^2 f(y)$$

est dans $B_{Loc}(\mathring{M})$.

On notera que la classe C^0 pour S n'entraîne pas nécessairement (lorsque M n'est pas compacte) la continuité de la

([1]) Son symbole principal d'ordre 1 étant nul.

fonction $S1$ sur $\dot{M}$ ainsi que le montre l'exemple suivant: On prend $M = R$ et on pose,

$$s(x, .) = \varepsilon_{1/x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \neq x,$$

$$s(-1, .) = s(1, .) = s(0, .) = 0,$$

et $Su(x) = -1_{\{0\}}(x)u(x) + \int_R s(x, dy)[u(y) - u(x)]$

$$(x \in R, \ u \in C_k^2(R)).$$

S applique $C_k^2(R)$ dans $C(R)$ (si σ est une fonction unité locale sur R, le coefficient

$$a(x) = S(\sigma_x)(x) = 1_{R\setminus\{0\}}\sigma\left(x, \frac{1}{x}\right) - 1$$

est fonction continue de x) et satisfait au principe du maximum positif; mais $S1 = -1_{\{0\}}$ n'est pas continue.

§ I.3. Opérateurs intégro-différentiels de Waldenfels.

I.3.1. Principe du maximum positif et opérateurs de Waldenfels.

THÉORÈME V. — *Soient, sur la variété à bord* M (1), $\mathfrak{V}$ *un sous-espace vectoriel de* $C_k^2(M)$ *contenant* $C_k^\infty(M)$ (2) *et* W *une application linéaire de* $\mathfrak{V}$ *dans* $B_{Loc}(\dot{M})$ (2).

Pour que W *satisfasse au principe du maximum positif sur* $\mathfrak{V}$:

(I.3.1)
$$x \in \dot{M} \quad et \quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad Wu(x) \leqslant 0 \quad (u \in \mathfrak{V}),$$

il faut et il suffit que W *soit de la forme,*

$$Wu = Pu + Su \quad (u \in \mathfrak{V}) \tag{I.3.2}$$

où P *est un opérateur de diffusion sur* $\dot{M}$ *de classe* B (n° 0.1.2), *et* S *un opérateur de Lévy sur* M (n° I.2.6). *Sous ces conditions,* W *se prolonge en une application linéaire continue de*

(1) Voir le n° 0.1.1.
(2) Voir la remarque 2 du n° II.1.2.

$C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\dot{M})$ [*encore exprimée par* (I.3.2) *pour* $u \in C_k^2(M)$] *satisfaisant aussi* (I.3.1) *pour* $u \in C_k^2(M)$ (1).

On appellera *opérateur de Waldenfels sur la variété à bord* M toute application linéaire W de $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(\dot{M})$ de la forme $Wu = Pu + Su$ ($u \in C_k^2(M)$) où P est un opérateur de diffusion sur M (nº 0.1.2) et S un opérateur de Lévy sur M (nº I.2.6).

En vertu du Théorème V ci-dessus, il revient au même de dire que W satisfait au *principe du maximum positif:*

(PM) $u \in C_k^2(M)$, $x \in \dot{M}$ et $u(x) = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Wu(x) = 0$ (2)

La démonstration du théorème précédent va reposer sur les Théorèmes I, II et III (nº I.1.1) et sur les propriétés des opérateurs de Lévy sur M (nº I.2.6) :

D'abord, la condition suffisante et la possibilité de prolonger continûment W à $C_k^2(M)$ résultent des propriétés correspondantes des opérateurs de diffusion (nº 0.1.2) et des opérateurs de Lévy (nº I.2.6).

Inversement, soit W une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $B_{Loc}(M)$ vérifiant (I.3.1) pour tout $u \in \mathcal{V}$.

De (I.3.1), il résulte d'abord que $Wu(x) \geqslant 0$ dès que $u \geqslant 0$ et $x \notin \operatorname{supp} u$ ($x \in \dot{M}$, $u \in V$). Utilisant le fait que $C_k^\infty(M \setminus \{x\})$ est positivement riche dans l'espace localement compact $M \setminus \{x\}$ ($x \in \dot{M}$), on en déduit l'existence d'un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de $\dot{M}$ dans M (nº 0.1.4) vérifiant [NS_1] (nº I.2.5) et tel que, pour $x \in \dot{M}$ et $u \in \mathcal{V}$,

$$\text{(I.3.3)} \quad \int_M s(x, dy)u(y) = Wu(x) \quad \text{dès que} \quad x \notin \operatorname{supp} u$$

On va voir que s est un noyau de Lévy sur M (nº I.2.5) : D'une part, si (U, χ) est une carte locale de M, il résulte des théorèmes I, II et III que l'opérateur W_χ induit par W sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$ est de la forme $W_\chi = P_{(\chi)} + S_{(\chi)}$ où $P_{(\chi)}$ est un opérateur de diffusion de classe B sur $\chi(U)$ et $S_{(\chi)}$ un opérateur de Lévy sur $\chi(U)$ ayant pour noyau le noyau s_χ induit par s sur $\chi(U)$; Autrement dit, s_χ est un noyau de Lévy sur $\chi(U)$ et s vérifie [NS_2].

(1) Ce théorème complète le résultat obtenu par Waldenfels dans [24].

(2) Voir la remarque à la fin de ce numéro.

D'autre part, s vérifie $[\mathrm{NS}_3]$: il suffit de montrer que la fonction $x \to \int_{\mathrm{M}}^{\bullet} s(x, dy)(1 - \sigma(x, y))$ est bornée au voisinage de chaque point de M pour au moins une fonction unité locale σ sur M (nº 0.1.3). Or, si (θ_n) est une suite croissante de fonctions de $\mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{M})$ telle que $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$ pour tout n et $1_{\mathrm{K}} \leqslant \theta_n$ pour tout compact K de M et $n \geqslant n_{\mathrm{K}}$, on a, pour $x \in \mathring{\mathrm{M}}$ et pour n assez grand, d'après (I.3.3),

$$\int_{\mathrm{M}}^{\bullet} s(x, dy)(\theta_n(y) - \sigma(x, y)) = \mathrm{W}(\theta_n - \sigma_x)(x)$$
$$= \mathrm{W}\theta_n(x) - \mathrm{W}\sigma_x(x) \leqslant - \mathrm{W}\sigma_x(x),$$

puisque $\mathrm{W}\theta_n(x) \leqslant 0$ d'après (I.3.1) si $\theta_n = 1$ au voisinage de x. D'où, par passage à la limite en n,

$$\int_{\mathrm{M}} s(x, dy)(1 - \sigma(x, y)) \leqslant - \mathrm{W}\sigma_x(x).$$

On en déduit la bornitude cherchée au voisinage de $x_0 \in \mathring{\mathrm{M}}$, car, en choisissant σ de telle sorte que, pour x appartenant à un voisinage V de x_0, σ_x garde son support dans une carte locale (U, χ) de M (avec $x_0 \in \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$), on a (avec les notations ci-dessus), $\mathrm{W}\sigma_x(x) = \mathrm{P}_{(\chi)}1(\chi(x)) + \mathrm{S}_{(\chi)}(\sigma_x \circ \chi^{-1})(\chi(x))$ pour tout $x \in \mathrm{V}$.

Ainsi, s étant un noyau de Lévy sur M, il existe, d'après le lemme I.2.6, un opérateur de Lévy $\tilde{\mathrm{S}}$ sur M admettant s comme noyau. Posant $\tilde{\mathrm{P}} = \mathrm{W} - \tilde{\mathrm{S}}$, on voit que, sur chaque carte locale (U, χ), le noyau de $\tilde{\mathrm{P}}_\chi = \mathrm{P}_{(\chi)} + \mathrm{S}_{(\chi)} - \tilde{\mathrm{S}}_\chi$ étant nul, $\tilde{\mathrm{P}}_\chi$ est un opérateur différentiel du second ordre de classe B de partie principale positive; il en est donc de même de $\tilde{\mathrm{P}}$, et il suffit de poser,

$$\mathrm{P}u = \tilde{\mathrm{P}}u - \tilde{\mathrm{P}}1 . u \quad \text{et} \qquad \mathrm{S}u = \tilde{\mathrm{S}}u + \tilde{\mathrm{P}}1 . u \quad (u \in \mathcal{V})$$

pour obtenir la décomposition. $\mathrm{W} = \mathrm{P} + \mathrm{S}$ cherchée [en effet, $\mathrm{S}u(x) = \mathrm{W}u(x)$ pour tout $u \in \mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{M}) \subset \mathcal{V}$ égale à 1 au voisinage de x; d'où la propriété (N) de S en vertu de (I.3.1)].

c.q.f.d.

Corollaire (Théorème d'Aisenstat). — *Soit, sur la variété* M *supposée sans bord,* W *une application linéaire de* $\mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{C}(\mathrm{M})$ *satisfaisant au principe du maximum positif local: si* $u \in \mathrm{C}_k^\infty(\mathrm{M})$, $\mathrm{W}u(x) \leqslant 0$ *en tout point* $x \in \mathrm{M}$ *en lequel* u

atteint un maximum relatif positif. Alors, W *est un opérateur de diffusion sur* M *de classe* C^0 (n° 0.1.2).

Ce résultat figure en substance dans le mémoire d'Aisenstat [1]. Il découle immédiatement du Théorème V ci-dessous et du lemme I.2.6.

Remarque. — Dans le cas où M a un bord non vide, les opérateurs de Waldenfels sur M sont caractérisés par le principe du maximum positif (PM) en tant qu'opérateurs appliquant $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(\dot{M})$ et *non pas* $B_{Loc}(M)$. Cette limitation est éclairée par le fait que, si, par exemple, W est un opérateur de diffusion sur M (et pas seulement sur $\dot{M}$), la relation

$$\text{(I.3.4)} \quad x' \in \partial M \quad \text{et} \quad u(x') = \sup u \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad Wu(x') \leqslant 0,$$

n'est pas satisfaite, en général, pour toutes les fonctions $u \in C_k^2(M)$. Étant donné un opérateur de diffusion W sur M [ou plus généralement un opérateur de Waldenfels se prolongeant de $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(M)$; voir les n° I.3.3 et I.3.5] on peut se proposer de chercher les sous espaces vectoriels $\mathfrak{U}$ de $C_k^2(M)$ tels que (I.3.4) soit satisfaite pour tout $u \in \mathfrak{U}$. Une telle recherche est étroitement liée à celle des « conditions frontière » limitant les domaines de définition des générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller [voir le § II-3 ci-dessous].

I.3.2. Symbole principal et noyau d'un opérateur de Waldenfels.

THÉORÈME VI. — *Soit* W *une application linéaire de* $C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\dot{M})$.

(1) *Pour que* W *soit un opérateur de Waldenfels sur* M *il faut et il suffit qu'il possède les propriétés suivantes :*

(w_0) W *est continu de* $C_k^2(M)$ *dans* $B_{Loc}(\dot{M})$.

(w_1) $Wu(x) \geqslant 0$ *dès que* $u \geqslant 0$ *et* $x \notin \operatorname{supp} u$ $(x \in \dot{M}, u \in C_k^2(M))$ [1].

[1] Voir la remarque 2 ci-dessous.

(w_2) *pour tout* $x \in \mathring{M}$, $u \in C_k^2(M)$ *et* $v \in C^2(M)$,

$$\lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ (\lambda \text{ réel})}} -\frac{1}{\lambda^2} e^{-i\lambda v(x)} W(ue^{i\lambda v})(x) \geqslant 0$$

dès que $u(x) \geqslant 0$ [1].

(N) $Wu(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathring{M}$ *et tout* $u \in C_k^\infty(M)$ *tel que* $0 \leqslant u \leqslant 1$ *et* $u(y) = 1$ *pour* y *voisin de* x [2].

(2) *Si* W *est un opérateur de Waldenfels sur* M, *il existe un noyau de Lévy* s *sur* M (n° I.2.5) *et un champ de 2 Tenseurs symétriques contravariants* π *sur* M *de classe* B (n° 0.1.1) *tels que,*

(I.3.5)

$$\int_M s(x, dy)u(y) = Wu(x) \text{ dès que } x \notin \operatorname{supp} u \quad (x \in \mathring{M}, u \in C_k^2(M)).$$

(I.3.6) $$\lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ (\lambda \text{ réel})}} -\frac{1}{\lambda^2} e^{-i\lambda v(x)} W(ue^{i\lambda v})(x) = u(x)\pi_x(d_x v, d_x v)$$

pour tout $x \in \mathring{M}$, $u \in C_k^2(M)$ *et* $v \in C^2(M)$. *En outre,* s *et* π *sont déterminés de façon unique par ces relations, et,*

(I.2.7) $\pi_x(w, w) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathring{M}$ *et* $w \in T_x^*(M)$.

s et π seront appelés respectivement *le noyau, et la partie principale d'ordre* 2 *de l'opérateur de Waldenfels* W [3].

Considérant la décomposition $W = P + S$ de l'opérateur de Waldenfels W, s est le noyau de l'opérateur de Lévy S [d'après le caractère local de P et la propriété (L_1) de S (n° I.2.6)], et π est la partie principale de l'opérateur de diffusion P [par définition de π (n° 0.1.3) et d'après le théorème V (n° I.2.8); propriété (l_2)) qui assure que le symbole d'ordre 2 de S est nul].

Ainsi, dans la décomposition $W = P + S$, P et S sont déterminés à un opérateur différentiel du premier ordre près. En particulier, on peut choisir P et S de telle sorte que

(I.3.7) $$P1 = 0.$$

[1] Les propriétés (w_0) et (w_1) entraînent que cette limite existe ainsi qu'il résulte des Théorèmes I et IV (n° I.1.1 et I.2.8).

[2] Lorsque la variété M est compacte, (N) équivaut, compte tenu de (w_1), à la relation $w_1 \leqslant 0$.

[3] Voir la remarque 1 ci-dessous.

Sauf mention du contraire, on supposera cette condition réalisée dans la suite.

En ce qui concerne la propriété (1) du théorème VI, la condition est nécessaire en vertu de la propriété (2), et du théorème V. On établit qu'elle est suffisante comme dans la démonstration du Théorème V : (w_1) assure l'existence d'un noyau borélien $\geqslant 0$ s satisfaisant (I.3.5); (N) sa propriété $[NS_3]$; (w_0) et (w_1) sa propriété $[NS_2]$ en même temps que la forme locale adéquate de w; enfin (W_2) le caractère positif de la partie principale de P.

Remarque 1. — Les théorèmes V et VI entraînent, en particulier, que tout opérateur linéaire W de $C_k^\infty(M)$ dans $B_{Loc}(M)$ satisfaisant au principe du maximum *est d'ordre* 2 $\Big[$en ce sens que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{\lambda^\eta} e^{-i\lambda v(x)} W(ue^{i\lambda v})(x) = 0$ pour $x \in \mathring{M}$, $u \in C_k^2(M)$, $v \in C^2(M)$ et $\eta > 2\Big]$ et admet un symbole principal d'opérateur de diffusion [donné par (I.3.6)]; les opérateurs de Lévy étant ceux de ces opérateurs dont le symbole d'ordre 2 est nul [Théorème IV; voir aussi le corollaire du Théorème XXI, n° III.3.4].

Remarque 2. — On pourrait étudier plus généralement la classe des opérateurs W de $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(M)$ ayant les propriétés (w_0) et (w_1) ci-dessus (renonçant à la positivité de π et au principe du maximum positif). On obtient, pour de tels opérateurs sur une variété une décomposition analogue à celle des opérateurs de Waldenfels [voir le théorème I (n° I.1.1) dans le cas où M est un ouvert de $\overline{R^{n+}}$, et la remarque 3 du n° I.2.10].

I.3.3. Opérateurs de Waldenfels de classe C^0; opérateurs de Waldenfels décomposables et non décomposables. Soit W un opérateur de Waldenfels sur M (n° I.3.1).

On dira que W *est de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$ s'il applique $C_k^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$.

On dira que W *est de classe* C^0 s'il applique continûment $C_k^2(M)$ dans $C(M)$.

On dira enfin que W *est décomposable de classe* C^0 s'il est de la forme $W = P + S$ où P est un opérateur de diffusion de classe C^0 sur M [1] et S un opérateur de Lévy sur M de classe . C^0 (n° I.2.6).

Ainsi que le montre le contre exemple étudié dans le n° I.3.4 ci-dessous, un opérateur de Waldenfels peut *être de classe* C^0 *sans être décomposable.* On peut préciser comme suit les propriétés du noyau et de la partie principale de tels opérateurs :

Proposition. — (1) *Soit* W *un opérateur de Waldenfels de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$. *Le noyau* s *et la partie principale* π *de* W *possèdent les propriétés suivantes :*

(a) *La fonction* $\pi(w, w)$ $[x \to \pi_x(w_x, w_x),\ x \in \mathring{M}]$ *est semi-continue supérieurement sur* $\mathring{M}$ *pour toute* 1*-forme* w *sur* M *de classe* C^0.

(b) *Pour chaque fonction* $\Phi \in C^2(M \times M)$ *positive et telle que* $\Phi(x, x) = 0$ *et* $d_x\Phi(x, .) = 0$ *pour tout* $x \in \mathring{M}$ [2], *il existe une fonction* $v_\Phi \in B_{Loc}(M)$ *semi-continue supérieurement telle que la fonction* $x \to \int_M s(x, dy)\Phi(x, y)f(y) + v_\Phi(x)f(x)$ *soit continue pour chaque fonction positive* $f \in C_k(M)$ [3].

(2) *Inversement, si* s *est un noyau de Lévy sur* M *ayant la propriété* (b) *ci-dessus,* s *est le noyau d'un opérateur de Waldenfels sur* M *de classe* C^0 *sur* M.

En effet, supposant d'abord que W applique $C_k^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$, on vérifie que s possède la propriété (b) comme suit : la fonction $\Phi \in C^2(M \times M)$ étant donnée, on pose, pour $u \in C_k^2(M)$ et $x \in \mathring{M}$,

$$\text{(I.3.8)} \qquad Nu(x) = W(\Phi_x u)(x) \quad [\Phi_x = \Phi(x, \ .)].$$

On définit ainsi un noyau positif $N(x, dy)$ de $\mathring{M}$ dans M tel que

$$\text{(I.3.9)} \qquad Nf \in C(\mathring{M}) \qquad \text{pour tout} \qquad f \in C_k(M),$$

(I.3.10)

$$\int_M s(x, dy)\Phi(x, y)f(y) = \int_{M\setminus\{x\}} N(x, dy)f(y) \quad (x \in \mathring{M},\ f \in C_k(M))$$

[la relation $Nf \in C(\mathring{M})$ est satisfaite pour $f \in C_k^2(M)$ en vertu de (I.3.8), de la continuité de W de $C_k^2(M)$ dans $B_{Loc}(\mathring{M})$

[1] et pas seulement sur $\mathring{M}$ (n° 0.1.3).
[2] $d_x\Phi(x, 0)$ désignant la différentielle en x de la fonction $y \to \Phi(x, y)$.
[3] Voir la remarque ci-dessous.

et de la classe C^0 sur $\mathring{M}$ postulée pour W; d'où (I.3.9) puisque $f \to Nf$ est continue (par positivité) de $C_k(M)$ dans $C(\mathring{M})$; de même, (I.3.10), satisfaite pour $f \in C_k^2(M)$ et $x \notin \operatorname{supp} f$ d'après (I.3.8) et (I.3.5), l'est aussi pour $f \in C_k^+(M)$ par « passage à la limite croissante dans les deux membres »]. On en déduit que, pour $f \in C_k(M)$,

$$x \to \int_{\mathring{M}} s(x, dy)\Phi(x, y)f(y) + N(x, \{x\})f(x) = Nf(x)$$

est continue; d'où (b) avec $\nu_\Phi(x) = N(x, \{x\})$ $(x \in \mathring{M})$.

On déduit alors (a) de (b) : par localisation au moyen d'une carte locale de M, on se ramène au cas où M est un ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$; cas où il suffit d'établir que, pour tout $\xi = (\xi_i) \in R^n$, la fonction $x \to \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ est semi-continue supérieurement sur $\mathring{\Omega}$ (où $[a^{ij}]$ désigne la matrice des composantes de la partie principale π). Or cette semi-continuité résulte, compte tenu de l'hypothèse sur W et de (b), de la relation (I.1.5) (nº I.1.1).

En ce qui concerne la propriété (2), on se ramène d'abord au cas où M est un ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$. On définit, dans ce cas, une application linéaire W_0 de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\mathring{\Omega})$ en posant,

$$W_0u(x) = \int_\Omega s(x, dy)|y - x|^2\tilde{u}(x, y) \quad (x \in \mathring{\Omega},\ u \in C_k^2(\Omega)),$$

où la fonction $\tilde{u}$ est définie par $\tilde{u}(x, x) = 0$ $(x \in \Omega)$, et

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{|y - x|^2}\{u(y) - \sigma(x, y)\,[u(x) + \sum_{i=1}^n D_iu(x)(y^i - x^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_iD_ju(x)(y^i - x^i)(y^j - x^j)]\} \quad (y \neq x)$$

(σ désignant une fonction unité locale sur Ω).

Utilisant l'hypothèse (b) faite sur s (pour la fonction $\Phi(x, y) = |y - x|^2$) et remarquant que $\tilde{u}(x, x) = 0$, et que la fonction $\tilde{u}$ est continue sur $M \times M$ en vertu de la formule de Taylor (I.1.6) (nº I.1.4), on vérifie que W applique en fait $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ [1]. Il reste alors à ajouter à W_0 un opé-

[1] Voir aussi le séminaire [17] exposé nº 2, paragraphe 2, nº 2.7.

rateur de diffusion $\tilde{P}$ de classe C^0 sur $\mathring{\Omega}$ de telle sorte que $W_0 + \tilde{P}$ soit un opérateur de Waldenfels. Il suffit, pour cela, de choisir $\tilde{P}$ de la forme,

$$\tilde{P}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(x) D_i D_j u(u) + \tilde{a}(x) u(x) \quad (x \in \Omega,\ u \in C_k^2(\mathring{\Omega})),$$

où les fonctions $\tilde{a}^{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ et a sont *continues* sur $\mathring{\Omega}$, et où, pour tout $x \in \mathring{\Omega}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \{\tilde{a}^{ij}(x) - \frac{1}{2}\int_{\Omega} s(x, dy)\sigma(x, y)(y^i - x^i)(y^j - x^j)\}\xi_i\xi_j = 0$$

pour tout $\xi = (\xi_i) \in R^n$, et $a(x) = \int_{\Omega} s(x, dy)(1 - \sigma(x, y)) \leqslant 0$; ce qui est possible car les fonctions

$$x \to \int_{\Omega} s(x, dy)\sigma(x, y)(y^i - x^i)(y^j - x^j) \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$$

et $x \to \int_{\Omega} s(x, dy)(1 - \sigma(x, y))$ sont localement bornées sur Ω.

c.q.f.d.

Remarque. — Ainsi que le montre la démonstration ci-dessus, lorsque M est un ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$, la propriété (*b*) est satisfaite pour toute fonction Φ du type considéré, dès qu'elle l'est pour la fonction $\Phi(x, y) = |y - x|^2$ (voir à ce sujet le séminaire [17] exposé nº 2).

I.3.4. Un exemple d'opérateur de Waldenfels de classe C^0 et non décomposable (¹) : On prend $n = 1$, $M = R$, on désigne par Φ une fonction de $C(R)$ et on pose, pour $x \in R$, $u \in C_k^2(R)$,

$$Wu(x) = \frac{1}{[\Phi(x)]^2}[u(x + \Phi(x)) + u(x - \Phi(x)) - 2u(x)]$$

si $\Phi(x) \neq 0$ et,

$$Wu(x) = u''(x) = D^2u(x) \qquad \text{si} \qquad \Phi(x) = 0.$$

W ainsi défini satisfait au principe du maximum positif,

(¹) Ce contre exemple est dû à J. Neveu.

applique $C_k^2(R)$ dans $C(R)$ et son noyau s est donné par,

$$s(x, .) = 1_{\{\Phi \neq 0\}}(x) \frac{1}{[\Phi(x)]^2} (\varepsilon_{x+\Phi(x)} + \varepsilon_{x-\Phi(x)}) \quad (x \in R);$$

D'où la décomposition,

$$\begin{aligned} Wu(x) &= 1_{\{\Phi = 0\}}(x) D^2 u(x) + \int_R s(x, dy)\, [u(y) - u(x)] \\ &= Pu(x) + Su(x) \quad (x \in R, \quad u \in C_k^2(R)); \end{aligned}$$

et P et S ne sont pas de classe C^0 si Φ s'annule sans être identiquement nulle.

Remarque. — La non continuité soulignée par ce contre exemple est liée au fait que, dans la formule de Lévy-Khinchine de décomposition d'une fonction continue Ψ de type négatif, la mesure intervenant ne varie pas continûment en fonction de la donnée Ψ.

I.3.5. Symbole principal et noyau d'un opérateur de Waldenfels décomposable de classe C^0.

Proposition. — *Soient* W *un opérateur de Waldenfels sur la variété à bord* M, s *son noyau et* π *sa partie principale d'ordre* 2 (n° I.3.2).

Pour que W *soit décomposable de classe* C^0, *il faut et il suffit que* W *applique continûment* $C_k^2(M)$ *dans* $C^0(M)$ *et que* s *ou* π *soient de classe* C^0 *sur* M; s *et* π *sont alors de classe* C^0 *sur* M *et les relations* (I.3.5) *et* (I.3.6) (n° I.3.2) *sont valables pour tout* $x \in M$.

[Vérification immédiate à partir des définitions et du Théorème IV (n° I.2.8).]

§ I.4. Propriétés de Maximum des opérateurs de Waldenfels elliptiques.

On établit, dans ce paragraphe, les propriétés « strictes » de maximum des opérateurs de Waldenfels elliptiques sur lesquelles est fondée l'unicité des problèmes aux limites satisfaisant au principe du maximum (voir le n° II.2.10 ci-dessous) ainsi que la positivité des opérateurs résolvant ces problèmes (voir les nº III.1.5 et III.2.5 ci-dessous).

I.4.1. Opérateurs de Waldenfels elliptiques; énoncé des résultats. Soit W un opérateur de Waldenfels sur la variété à bord M [1]. On dira que W *est elliptique de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$ s'il applique $C_k^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$ et si, π désignant sa partie principale d'ordre 2 (nº I.3.2), pour tout $x \in \mathring{M}$,

$$\text{(I.4.1)} \quad \pi_x(w, w) > 0 \qquad \text{pour} \qquad w \in T_x^*(M), \quad w \neq 0.$$

On dira que W *est elliptique décomposable de classe* C^0 si W est décomposable de classe C^0 (nº I.3.3 et I.3.5) et si la relation (I.4.1) est satisfaite pour tout $x \in M$.

Cela étant, voici les deux théorèmes qui font l'objet de ce paragraphe :

THÉORÈME VII. — *Soit, sur la variété à bord* M, W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$ [2], *et soit* $u \in C_k^2(M)$ *telle que,*

$$\text{(I.4.2)} \qquad Wu(x) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in \mathring{M}.$$

Alors, si u *atteint en* $x \in \mathring{M}$ *son maximum* $m = \sup\limits_{y \in M} u(y)$ *et si* $m \geqslant 0$, u *est constante dans la composante connexe de* x [3].

(Voir la démonstration ci-dessous au nº I.4.3).

THÉORÈME VIII. — *Soit* W *un opérateur de Waldenfels elliptique décomposable de classe* C^0 *sur la variété à bord* M (*avec* $\partial M \neq \emptyset$); *et soit* $u \in C_k^2(M)$ *telle que,*

$$\text{(I.4.3)} \qquad Wu(x) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in M.$$

Alors, si u *atteint en* $x' \in \partial M$ *son maximum* $m = \sup\limits_{y \in M} u(y)$, *et si* $m \geqslant 0$, *on a :*

— *ou bien* u *est constante dans la composante connexe de* x' [3],

[1] Nº 0.1.1 et nº I.3.1.

[2] Pas nécessairement décomposable : seul importe, en plus de l'ellipticité, le fait que W applique $C_k^2(M)$ dans $C(\mathring{M})$.

[3] On ne suppose pas que M est connexe.

— *ou bien, pour tout champ de vecteurs* v *sur* ∂M *au voisinage de* x' *strictement dirigé vers l'intérieur de* M,

$$\text{(I.4.4)} \qquad \frac{\partial u}{\partial v}(x') < 0 \quad (^1).$$

(Voir la démonstration ci-dessous au n° I.4.4).

COROLLAIRE 1. — *Avec les notations et sous les hypothèses sur* M *et* W *intervenant dans le théorème* VII *ou le théorème* VIII, *on suppose que la variété* M *est compacte et que la fonction* W1 *est identiquement nulle. Alors, les conclusions subsistent sans l'hypothèse* $m \geqslant 0$.

En effet, il suffit d'appliquer les théorèmes VII et VIII à la fonction $v = u - \sup u$.

COROLLAIRE 2. — *En plus des hypothèses sur* M *et* W *faites dans le théorème* VII, *on suppose que* M *est compacte, et que sur chacune de ses composantes connexes dont le bord est vide, la fonction* W1 *n'est pas identiquement nulle. Alors,*

$$\text{(I.4.5)} \qquad u \in C^2(M),\ Wu \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \gamma^0 u \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad u \leqslant 0 \ (^2).$$

En effet, supposant que $u \in C^2(M)$ est telle que $Wu \geqslant 0$, $\gamma^0 u \leqslant 0$ et $m = \sup u > 0$, u ne peut atteindre son maximum m qu'en un point $x \in \mathring{M}$; et, en vertu du théorème VII, $u(y) = m$ pour tout y appartenant à la composante connexe C de x. On a alors, $\partial C = \emptyset$ puisque $\gamma^0 u \leqslant 0$, et, en vertu du principe du maximum (PM) et de l'expression (I.2.14) (n° I.2.7), $0 \leqslant Wu(y) \leqslant m W1\,(y)$ pour tout $y \in C$; ce qui contredit, m étant supposé > 0, l'hypothèse faite sur W. D'où la relation (I.4.5).

I.4.2. La démonstration des théorèmes VII et VIII ci-dessus repose sur le lemme suivant qui va permettre de se ramener au principe du maximum positif auquel satisfait W (n° I.3.1) :

LEMME. — *Soient, sur la variété à bord* M, W *un opérateur de Waldenfels de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$ (*resp. décomposable de classe*

(1) Autrement dit (n° 0.1.1), $\dfrac{\partial u}{\partial \chi^n}(x') < 0$ pour toute carte locale (U, χ) de M au voisinage de x'.

(2) Voir le théorème XII au n° II.2.10.

C^0; n° I.3.3), (U, χ) *une carte locale de* M, V *un ouvert de* $U \cap \mathring{M}$ *pour lequel* $\overline{V} \subset U$ *et* $B = \chi(V)$ *est une boule euclidienne de* R^n, *et* x_1 *un point de* ∂V. *On désigne par* s *le noyau et par* π *la partie principale d'ordre* 2 *de* W *et on suppose que,*

(a) $x_1 \in \mathring{M}$ (resp $x_1 \in \partial M$ [1]))

(b) W *est elliptique en* x_1 :

$$\pi_{x_1}(\omega, \omega) > 0 \qquad \textit{pour} \qquad \omega \in T_x^*(M), \quad \omega \neq 0.$$

(c) $s(x_1, \overline{V}) = 0$.

Alors, il existe une fonction $v \in C_k^\infty(M)$ *telle que,*

(α) $v \geqslant 0$ *sur* V, $v \leqslant 0$ *sur* $M \setminus V$ *et* $Wv(x_1) > 0$,

(β) $\dfrac{\partial v}{\partial \chi^n}(x_1) > 0$ *dans le cas où* $x_1 \in \partial M$.

En effet, soit

$$B = \chi(V) = \{z | z \in R^n \quad \text{et} \quad |z - z_0| < \rho\} \; (\rho > 0\}.$$

Désignant par φ une fonction de $C_k^\infty(M)$ comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $\overline{V}$, et à support dans U, on pose, pour k réel > 0,

(I.4.6)
$$v_k(x) = [e^{-k|\tilde{x}-z_0|^2} - e^{-k\rho^2}]\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in U \; (\tilde{x} = \chi(x)),$$

et

$$v_k(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in M \setminus V.$$

On va montrer que, pour k assez grand, v_k répond à la question. Tout d'abord, $Pv_k(x_1)$ est de la forme,

$$\text{(I.4.7)} \qquad Pv_k(x_1) = e^{-k\rho^2}(C_1 k^2 + C_2 k),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles indépendantes de k, avec $C_1 > 0$ *en vertu de l'ellipticité de* P *au point* x_1 [condition (b)].

Ensuite, v_k ayant son support dans U, $Sv_k(x_1)$ est de la

[1]) Ou bien $x_1 \in \mathring{M}$, ou bien $x_1 \in \partial M$ et W est supposé décomposable.

forme (I.2.1) (n° I.2.1); c'est-à-dire,

$$\text{(I.4.8)}\quad \begin{aligned} S\varphi_k(x_1) = & \sum_{i=1}^{n} a_\sigma^i D_i \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1) \\ & + \int_{\Omega\setminus\overline{B}} s_\chi(\tilde{x}_1, dz)(1 - \sigma(\tilde{x}_1, z))\tilde{\varphi}_k(z) \\ & + \int_{\Omega\setminus\overline{B}} s_\chi(\tilde{x}_1, dz)\sigma(\tilde{x}_1, z) \\ & \qquad \left[\tilde{\varphi}_k(z) - \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1) - \sum_{i=1}^{n} (z^i - \tilde{x}_1^i) D_i \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1)\right], \end{aligned}$$

où σ désigne une fonction unité locale sur $\Omega = \chi(U)$, et où on a posé $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k \circ \chi^{-1}$; l'intégration se faisant sur $\Omega\setminus\overline{B}$ à cause de la condition (C).

Cela étant, on déduit de (I.4.6) et de la formule de Taylor I.1.16 (n° I.1.4) l'existence d'une constante $C_3 > 0$ (indépendante de k) (telle que, pour tout k et $z \in \Omega\setminus\overline{B}$ on ait,

$$\text{(I.4.9)}\qquad |D_i\tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1)| \leqslant C_3 k e^{-k\rho^2}$$

$$\text{(I.4.10)}\qquad |\varphi_k(z)| \leqslant C_3 e^{-k\rho^2}$$

$$\text{(I.4.11)}\qquad \left|\tilde{\varphi}_k(z) - \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1) - \sum_{i=1}^{n} (z^i - \tilde{x}_1^i) D_i \tilde{\varphi}_k(z)\right| \leqslant C_3 k^2 e^{-k\rho^2} |z - \tilde{x}_1|^2.$$

Choisissant alors $\sigma(\tilde{x}_1, .)$ à support assez voisin de $\tilde{x}_1$ pour que,

$$\text{(I.4.12)}\qquad \int_{\Omega\setminus\overline{B}} s_\chi(\tilde{x}_1, dz)\sigma(\tilde{x}_1, z)|z - \tilde{x}_1|^2 \leqslant \frac{C_1}{2C_3},$$

[ce qui est possible à cause de la propriété (NS_2) de s_χ], on obtient, en vertu des relations (I.4.7) à (I.4.12), l'existence de constantes réelles C_4 et C_5 (indépendantes de k) telles que,

$$\text{(I.4.13)}\qquad W\varphi_k(x_1) \geqslant P\varphi_k(x_1) - |S\varphi_k(x_1)| \geqslant e^{-k\rho^2}\left[\frac{C_1}{2}k^2 + C_4 k + C_5\right]$$

pour tout k.

D'où le lemme en prenant $\varphi = \varphi_k$ avec k assez grand pour que le second membre de (I.4.13) soit > 0. c.q.f.d.

I.4.3. Démonstration du Théorème VII. Raisonnant par l'absurde, on suppose que $u \in C_k^2(M)$ et $x \in \mathring{M}$ sont tels que

$Wu \geqslant 0$, $u(x) = \sup u = m \geqslant 0$ et que, C étant la composante connexe de x, $X = \{y | y \in C \text{ et } u(y) = m\} \neq C$.

Dans ces conditions, il existe un point $x_1 \in X \cap \mathring{M}$, une carte locale (U, χ) de $\mathring{M}$ au voisinage de x_1 et un ouvert V de $U \cap \mathring{M}$ pour lequel $B = \chi(U)$ est une boule euclidienne de R^n et tel que $\overline{V} \subset U$, $x_1 \in \partial V$ et $\overline{V} \cap X = \{x_1\}$ (1).

En outre, $u(x_1) = \sup u \geqslant 0$ entraîne que $Pu(x_1) \leqslant 0$ (nº 0.1.2), donc aussi, puisque $Wu(x_1) \geqslant 0$, que

$$\int_M s(x_1, dy)[u(y) - u(x_1)] = 0$$

[ceci, par exemple, en vertu de la forme (I.2.14) de S, compte tenu de la relation (I.2.15) (nº I.2.7)]; donc, puisque

$$u(y) < u(x_1)$$

pour $y \in \overline{V} \setminus \{x_1\}$ et $s(x_1, \{x_1\}) = 0$, $s(x_1, \overline{V}) = 0$. On est ainsi dans les conditions d'application du lemme I.4.2 qui fournit une fonction $\varphi \in C_k^\infty(M)$ telle que, $\varphi \geqslant 0$ sur V, $\varphi \leqslant 0$ sur $M \setminus V$ et $W\varphi(x_1) > 0$; et, *puisque* $W\varphi$ *est une fonction continue sur* $\mathring{M}$ par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V' de x_1 tel que

$$W\varphi(y) > 0 \qquad \text{pour tout} \qquad y \in V'.$$

Posant alors, pour $\lambda > 0$, $u_\lambda = u + \lambda\varphi$, on a,

$$\text{(I.4.14)} \qquad Wu_\lambda(y) > 0 \qquad \text{pour} \qquad y \in V',$$
$$\text{et} \qquad u_\lambda(y) \leqslant m \qquad \text{pour} \qquad y \in M \setminus V.$$

(1) En effet, C étant connexe, $\mathring{M} \cap C$ est aussi connexe (en temps qu'intérieur de la variété à bord connexe que constitue C); par ailleurs, l'hypothèse entraîne que $X \cap C \cap \mathring{M} \neq \emptyset$ et $X \cap C \cap \mathring{M} \neq C \cap \mathring{M}$; donc, X étant fermé, $X \cap \mathring{M}$ n'est pas ouvert dans $C \cap \mathring{M}$; autrement dit, posant, pour $z \in R^n$ et

$$\rho > 0, \qquad B_\rho(z) = \{z' | z' \in R^n \qquad \text{et} \qquad |z' - z| < \rho\},$$

il existe un point x_0 de $X \cap \mathring{M}$, une carte locale (U, χ) de $\mathring{M}$ au voisinage de x_0 est un nombre $\rho_0 > 0$ de telle sorte que,

$$\chi(U) \supset B_{2\rho_0}(\tilde{x}_0) \qquad \text{et} \qquad B_{\rho_0}(\tilde{x}_0) \cap \chi(U \setminus X) \neq \emptyset \ (\tilde{x}_0 = \chi(x_0).)$$

Considérant alors un point $z_0 \in B_{\rho_0}(\tilde{x}_0) \cap \chi(U \setminus X)$ et posant $r = \operatorname{Sup} \{\rho | \rho > 0$ et $B_\rho(z_0) \cap \chi(U \cap X) = \emptyset\}$, on a $0 < r < \rho$, et $B_r(z_0)$ coupe $\chi(U \cap X)$ en un point z_1. Il suffit alors de poser

$$B = B_{r/2}\left(\frac{1}{2}(z_0 + z_1)\right), \qquad x_1 = \chi^{-1}(z_1) \qquad \text{et} \qquad V = \chi^{-1}(B).$$

En outre, le compact $\overline{V}\setminus V'$ étant contenu dans $\mathring{M}\setminus X$, on peut choisir λ assez petit pour que,

$$u_\lambda(y) \leqslant m \qquad \text{pour} \qquad y \in \overline{V}\setminus V'.$$

Enfin, $u_\lambda(x_1) = m$.

Ainsi, u_λ devrait atteindre un maximum $\geqslant 0$ en au moins un point de V', ce qui est absurde en vertu du principe du maximum positif que vérifie W (nº I.3.1) et de (I.4.14).
c.q.f.d.

I.4.4 Démonstration du Théorème VIII. Raisonnant par l'absurde, on suppose que $u \in C^2_k(M)$ et $x' \in \partial M$ sont tels que $Wu \geqslant 0$, $u(x') = \sup u = m \geqslant 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \chi^n}(x') = 0$ et que u n'est pas constante dans la composante connexe C de x'.

On désigne par (U, χ) une carte locale connexe de M au voisinage de x', et par V un ouvert de $U \cap \mathring{M}$ pour lequel $\overline{V} \subset U$ et $B = \chi(V)$ est une boule euclidienne tangente en $\chi(x')$ à R^{n-1}, bord de $\overline{R^{n+}}$ [on a évidemment $x' \in \partial V$ et $\overline{V} \cap \partial M = \{x_1\}$]. Cela étant, on note que $u(x') = \sup u \geqslant 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \chi^n}(x') = 0$ entraînent que $Pu(x') \leqslant 0$ (nº 0.1.2), donc aussi, puisque $Wu(x') \geqslant 0$, que

$$\text{(I.4.15)} \qquad \int_M s(x', dy)[u(y) - u(x')] = 0.$$

[Ceci, par exemple, en vertu de la forme (I.2.14) de S, compte tenu de la relation (I.2.15) (nº I.2.7)].

Par ailleurs, en vertu du théorème VII, on a,

$$\text{(I.4.16)} \quad u(y) < m = u(x') \qquad \text{pour tout} \qquad y \in C \cap \mathring{M};$$

donc, d'après (I.4.15), $s(x', C \cap \mathring{M}) = 0$, et en particulier, compte tenu de ce que $s(x', \{x'\}) = 0$, on a, $s(x', \overline{V}) = 0$. On est ainsi dans les conditions d'application du lemme I.4.2 qui fournit une fonction $\varphi \in C^\infty_k(M)$ telle que,

$$\text{(I.4.17)} \qquad \varphi \geqslant 0 \ \text{sur} \ V, \qquad \varphi \leqslant 0 \ \text{sur} \ M\setminus V,$$
$$W\varphi(x') > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \chi^n}(x') > 0.$$

De plus, puisque $W\varphi$ est une fonction continue, il existe un voisinage ouvert V' de x' dans M tel que

$$W\varphi(y) > 0 \qquad \text{pour tout} \qquad y \in V'.$$

Posant alors comme au nº I.4.3, pour $\lambda = 0$, $u_\lambda = u + \lambda\varphi$, on a,

$$\text{(I.4.18)} \qquad Wu_\lambda(y) = 0 \qquad \text{pour} \qquad y \in V',$$

et

$$\text{(I.4.19)} \qquad u_\lambda(y) \leqslant m \qquad \text{pour} \qquad y \in M \setminus V.$$

En outre, le compact $\overline{V} \setminus V'$ étant contenu dans $C \cap \dot{M}$, d'après (I.4.16) on peut choisir λ assez petit pour que,

$$\text{(I.4.20)} \qquad u_\lambda(y) \leqslant m \qquad \text{pour} \qquad y \in \overline{V} \setminus V'.$$

Enfin,

$$\text{(I.4.21)} \qquad u_\lambda(x') = m.$$

Cela étant, en vertu de (I.4.19), (I.4.20) et (I.4.21) u_λ atteint on maximum $\sup u_\lambda \geqslant m \geqslant 0$ sur V'; donc, d'après (I.4.18) et le principe du maximum positif, sur $V' \cap \partial M$; et comme $u_\lambda(y) \leqslant m$ pour $y \in \partial M \subset M \setminus V$ d'après (I.4.19), on a $\sup u_\lambda = m$. Ainsi,

$$u(x) - u(x') \leqslant -\lambda[\varphi(x) - \varphi(x')] \qquad \text{pour tout} \qquad x \in M;$$

d'où $\dfrac{\partial u}{\partial \chi^n}(x') \leqslant -\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial \chi^n}(x') < 0$ et le théorème VIII.

c.q.f.d.

CHAPITRE II

GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL D'UN SEMI-GROUPE DE FELLER : FORME INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE ET CONDITION FRONTIÈRE DE VENTCEL'

Désignant par $(\mathfrak{D}_A, A)$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller (n° 0.2.1) sur la variété à bord compacte M (n° 0.1.1), on se propose, dans ce second chapitre, d'étudier certaines limitations de $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ ainsi que la restriction de A à cet espace.

Dans le paragraphe II.1, on déduit du Théorème V (chap. I, n° I.3.1) que, *lorsque* M *est sans bord* et que $C^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$, A coïncide sur $C^2(M)$ avec un opérateur de Waldenfels (Théorèmes IX et IX', n° II.1.1 et II.1.2).

Lorsque M *a un bord non vide*, on introduit dans le paragraphe II.2 (n° II.2.4), et on caractérise par le principe du maximum positif au bord (Théorème X, n° II.2.6), une classe d'opérateurs frontière à coefficients mesurables bornés qui permet de préciser la condition frontière de Ventcel' (Théorème XIII, n° II.3.1) et d'étudier ses liens avec le principe du maximum positif au bord pour les opérateurs de Waldenfels réguliers au bord (Théorèmes XI et XII, n° II.2.9 et II.2.10).

Dans le paragraphe II.3, on reprend entièrement la démonstration de la condition frontière de Ventcel' afin de l'exprimer au moyen des opérateurs frontière introduits au paragraphe II.2.

Enfin, dans le paragraphe II.4, on montre que, lorsque $\mathfrak{D}_A$ contient suffisamment de fonctions de classe C^2, A coïncide sur $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ avec un opérateur de Waldenfels (Théorème XIV, n° II.4.1).

§ II-1. Forme du générateur infinitésimal : cas d'une variété sans bord (1).

II.1.1 Cas d'une variété sans bord compacte.

THÉORÈME IX. — *On suppose que* M *est une variété sans bord compacte* (n° 0.1.1) *et on désigne par* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller* (N_t) *sur* M (n° 0.2.2). *Alors, si* $C^\infty(M) \subset \mathfrak{D}_A$, *on a aussi* $C^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$ *et* A *coïncide sur* $C^2(M)$ *avec un opérateur de Waldenfels de classe* C^0 *sur* M (*avec la propriété de semi-continuité étudiée au n°* I.3.3) (2).

En effet, la restriction de A à $\mathcal{V} = C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ satisfait au principe du maximum positif (n° 0.2.4); donc, $C^\infty(M)$ étant contenu dans $\mathcal{V}$ par hypothèse, A coïncide sur V avec un opérateur de Waldenfels W sur M d'après le Théorème V (n° I.3.1). Il en résulte que $\mathcal{V} = C^2(M)$: si $u \in C^2(M)$, il existe une suite (u_n) de fonctions de $C^\infty(M)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ dans $C^2(M)$; et on a,

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} Wu_n = Wu \quad \text{dans} \quad C(M),$$

puisque W est continu de $C^2(M)$ dans $C(M)$ (Théorème V); d'où $u \in \mathfrak{D}_A$ et $\mathcal{V} = C^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$, puisque $(\mathfrak{D}_A, A)$ est un opérateur fermé dans $C(M)$.

c.q.f.d.

Remarque. — On étudiera au chapitre III une classe assez large de semi-groupes de Feller sur M pour lesquels $C^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$ (voir le Théorème XVI′, n° III.1.8; voir aussi le livre de Yosida [25] p. 400). Toutefois cette situation est loin d'être la plus générale : prenant pour M le tore à une dimension T, et pour (N_t) le semi-groupe de Feller sur T image du semi-groupe de Wiener-Lévy sur R par l'application $x \to e^{ix}$ $(x \in R)$, on sait que le domaine de définition $\mathfrak{D}_A$ du générateur

(1) Le cas d'une variété à bord sera étudié au paragraphe II.4 ci-dessous après la condition frontière de Ventcel' (paragraphe II.3).

(2) Ce théorème complète le résultat obtenu par Waldenfels dans [23] ainsi que ceux de Feller, Neveu et Yosida.

infinitésimal de (N_t) est exactement $C^2(T)$ (voir Dynkin [7] chap. 2 § 3 nº 2.16 et chap. 10, § 6, nº 10.26). Il suffit alors de transformer (N_t) par un homéomorphisme de T sur T non différentiable pour obtenir un semi-groupe de Feller sur T dont le domaine de définition du générateur infinitésimal ne contient pas $C^\infty(T)$.

II.1.2 Cas d'une variété sans bord non compacte.

THÉORÈME IX′. — *On suppose que* M *est une variété sans bord non compacte* (nº 0.1.1) *et on désigne par* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller* (N_t) *sur* M (nº 0.2.2).

Alors, si $C_k^\infty(M) \subset \mathfrak{D}_A$, *on a aussi* $C_k^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$, A *coïncide sur* $C_k^2(M)$ *avec un opérateur de Waldenfels de classe* C^0 *sur* M (nº I.3.3), *et* A *applique continûment* $C_k^2(M)$ *dans* $C_0(M)$ (¹).

On établit ce théorème comme le précédent en s'appuyant sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soient* M *une variété sans bord non compacte, et* W *un opérateur de Waldenfels sur* M *appliquant* $C_k^2(M)$ *dans* C(M). *Pour que* W *applique* $C_k^2(M)$ *dans* $C_0(M)$, *il faut et il suffit que, désignant par* s *son noyau* (nº I.3.2), *on ait,*

$$\text{(II.1.1)} \quad \lim_{x \to \infty} s(x, K) = 0 \quad \textit{pour tout compact } K \textit{ de } M.$$

W *est alors continu de* $C_k^2(M)$ *dans* $C_0(M)$.

En effet, la première partie résulte de la relation (I.3.5) qui lie W et s (nº I.3.2); et la continuité de W de $C_k^2(M)$ dans $C_0(M)$ du théorème du graphe fermé et de sa continuité de $C_k^2(M)$ dans C(M) (Théorème V, nº I.3.1). c.q.f.d.

Remarque 1. — Soit Ω un ouvert de R^n. Tout opérateur de Waldenfels W sur M est continu de $C_k^2(\Omega)$ dans $B_{Loc}(\Omega)$ lorsque $C_k^2(\Omega)$ est muni de la topologie définie par la norme $\| \ \|_2$. [Ceci résulte de la formule de Taylor (I.1.16) (nº I.1.4)

(¹) $C_0(M)$ désigne le sous-espace de C(M) formé des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini (nº 0.1.2).

et de la relation (I.1.7) (n° I.1.1)]. En particulier, si W applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C_0(\Omega)$. W se prolonge en une application continue de $C_0^2(\Omega)$ dans $C_0(\Omega)$ où $C_0^2(\Omega)$ est le sous-espace de $C^2(\Omega)$ formé des fonctions tendant vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 muni de la norme $\| \quad \|_2$. On en déduit que, si $(\mathfrak{D}_A, A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur M, $C_0^2(\Omega) \subset \mathfrak{D}_A$ dès que $C_k^\infty(\Omega) \subset \mathfrak{D}_A$.

Remarque 2. — Sans altérer la conclusion, on peut remplacer l'hypothèse $C_k^\infty(M) \subset \mathfrak{D}_A$ intervenant dans le théorème IX′ (ou le théorème IX) par une hypothèse de la forme $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{D}_A$ où $\mathfrak{V}$ est un sous-espace de $C_k^2(M)$ riche dans $C_k^2(M)$ en ce sens que toute fonction de $C_k^2(M)$ est limite, dans $C_k^2(M)$, d'une suite de fonctions de $\mathfrak{V}$ gardant leurs supports dans un même compact. Il suffit, à cette fin, de reprendre, pour un tel sous-espace $\mathfrak{V}$, la démonstration du Théorème V (voir à ce sujet Waldenfels [24], Théorème 2 et le séminaire [17] exposé n° 2, Théorème 1.5).

§ II.2. Opérateurs Frontière de Ventcel', et principe du maximum au bord.

On introduit, dans ce paragraphe, les opérateurs frontière qui interviennent dans la condition frontière de Ventcel' (voir le paragraphe II.3); on les caractérise par le principe du maximum positif au bord (Théorème X, n° II.2.6) et on étudie leur lien avec le principe du maximum positif au bord pour les opérateurs de Waldenfels réguliers au bord (Théorèmes XI et XII, n° II.2.9 et II.2.10).

II.2.1. Dans tout le paragraphe II.2, on supposera que la variété à bord M (n° 0.1.1) est *compacte* et que son bord ∂M est *non vide.*

On appellera ici *opérateur frontière sur* M toute application linéaire de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ (n° 0.1.2).

Si Γ est un tel opérateur, et si $x' \in \partial M$, on notera $\Gamma_{x'}$ la forme linéaire $u \to \Gamma u(x')$ sur $C^2(M)$.

On dira que Γ *est local* si, pour tout $u \in C^2(M)$, $v \in C^2(M)$ et $x' \in \partial M$, $\Gamma u(x') = \Gamma v(x')$ dès que $u = v$ au voisinage de x' dans M.

On dira que Γ *est quasi-local* si, pour tout $u \in C^2(M)$ et $v \in C^2(M)$, $\Gamma u = \Gamma v$ dès que $u = v$ au voisinage de ∂M.

On dira que Γ *est de classe* C^0 s'il applique $C^2(M)$ dans $C(M)$.

L'opérateur γ^0 de *restriction au bord* constitue un premier exemple d'opérateur frontière.

II.2.2. On appellera ici *opérateur frontière de Ventcel'-Višik* (¹) toute application linéaire Λ de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ de la forme,

$$\text{(II.2.1)} \qquad \Lambda u = \alpha \frac{\partial u}{\partial v} + Q(\gamma^0 u) \quad (u \in C^2(M)),$$

où

— v est un champ de vecteurs sur ∂M de classe C^0 *strictement dirigé vers l'intérieur de* M en tout point de ∂M (²).

— α est une fonction positive de $B(\partial M)$.

— Q est un *opérateur de diffusion* sur la variété ∂M de classe B (nº 0.1.2).

On dira que Λ *est transversal* si,

$$\text{(II.2.2)} \qquad \alpha(x') > 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in \partial M \text{ (³)}$$

Tout opérateur frontière de Ventcel'-Višik est continu de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$.

Tout opérateur frontière Λ de Ventcel'-Višik est *local*, et satisfait au *principe du maximum positif au bord:*

$$\text{(PMB)} \quad u \in C^2(M),\, x' \in \partial M \quad \text{et} \quad u(x') = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow \Lambda u(x') \leqslant 0.$$

On caractérise au nº II.2.7 ci-dessous les opérateurs frontière de Ventcel-Višik par ces propriétés (proposition II.2.7).

II.2.3. Noyaux de Ventcel'. On appellera *noyau de Ventcel' sur la variété compacte* M (nº II.2.1) tout noyau borélien positif $t(x', dy)$ de ∂M dans M ($x' \in \partial M$, $dy \in \mathcal{B}_M$; nº 0.1.3) pour lequel, d'une part $t(x', \{x'\}) = 0$ pour tout $x' \in \partial M$, et d'autre part, la fonction $x' \to \int_M t(x', dy)\Phi(x', y)$ $(x' \in \partial M)$

(¹) Višik a considéré des opérateurs frontière de ce type dans [22].

(²) $\langle d_{x'}\chi^n, v_{x'}\rangle > 0$ pour toute carte locale (U, χ) de M et tout $x' \in U \cap \partial M$ (nº 0.1.1).

(³) Lorsque Q est du premier ordre, on retrouve l'opérateur frontière intervenant dans le problème aux dérivées obliques.

appartient à $B(\partial M)$ pour toute fonction $\Phi \in C^2(\partial M \times M)$ positive et telle que

$$\text{(II.2.3)} \qquad \Phi(x', x') = 0 \qquad \text{et} \qquad d_{x'}(\gamma^0\Phi_{x'}) = 0$$

pour tout $x' \in \partial M$ [1].

On vérifie sans difficulté en utilisant la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4) que, pour qu'un noyau positif borélien $t(x', dy)$ de ∂M dans M soit un noyau de Ventcel' sur M, il faut et il suffit qu'il possède les trois propriétés suivantes :

(NV_1) $t(x', \{x'\}) = 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

(NV_2) Pour toute carte locale (U, χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, et toute fonction positive $f \in C(M)$ à support dans U, la fonction

$$\text{(II.2.4)} \qquad x' \to \int_U t(x', dy) f(y) \left[\chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2\right]$$

$(x' \in U \cap \partial M)$ appartient à $B_{\mathrm{Loc}}(U \cap \partial M)$ [2].

(NV_3) Pour chaque fonction unité locale σ sur M (n° 0.1.3) et chaque fonction positive $f \in C(M)$, la fonction

$$\text{(II.2.5)} \qquad x' \to \int_M t(x', dy)(1 - \sigma(x', y)) f(y) \qquad (x' \in \partial M)$$

appartient à $B(\partial M)$.

En particulier, pour chaque $x' \in \partial M$, $t(x', .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $M \setminus \{x'\}$.

En ce qui concerne la propriété (NV_2), on remarque que, si (U, χ) et $(\hat{U}, \hat{\chi})$ sont deux cartes locales de M, et si K est un compact de $U \cap \hat{U}$, il existe $C > 0$ tel que,

$$\text{(II.3.6)} \qquad \chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2 \leqslant C \left\{ \hat{\chi}^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\chi}^j(y) - \hat{\chi}^j(x'))^2 \right\}$$

pour

$$x' \in K \cap \partial M \qquad \text{et} \qquad y \in K.$$

[1] $\Phi_{x'} = \Phi(x', .)$ et $d_{x'}(\gamma^0\Phi_{x'})$ désigne la différentielle (sur ∂M) de la restriction $\gamma^0\Phi_{x'}$ à ∂M de la fonction $\Phi_{x'}$.

[2] On rappelle (n° 0.1.1) que c'est la coordonnée χ^n qui définit le bord de M : $\chi^n(y) \geqslant 0$ pour $y \in M$ et $\chi^n(y) = 0 \Longleftrightarrow y \in \partial M$.

[on le voit en appliquant la formule de Taylor (I.1.16) (nº I.1.4) aux fonctions $\chi^k \circ \hat{\chi}^{-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.] Il en résulte que l'on obtient une propriété équivalente à (NV_2) en postulant la propriété (II.2.4) seulement pour un ensemble de cartes locales recouvrant $\partial \mathrm{M}$.

On peut aussi donner comme suit une forme plus globale à la propriété (NV_2) : soient $\{(\mathrm{U}_\alpha, \chi^\alpha)\}$ un recouvrement fini de M par des cartes locales, et $\{\sigma_\alpha\}$ une famille de fonctions de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$ telle que,

$$\operatorname{supp} \sigma_\alpha \subset \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}_\alpha \qquad \text{et} \qquad \sum_\alpha \sigma_\alpha = 1$$

au voisinage de $\Delta_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}}$; Si on pose

$$\widetilde{x'y} = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x', y)\left\{\chi_\alpha^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_\alpha^j(y) - \chi_\alpha^j(x'))^2\right\}$$

$(x' \in \partial \mathrm{M}, y \in \mathrm{M})$, on définit une fonction positive $(x', y) \to \widetilde{x'y}$ de classe C^∞ sur $\partial \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ telle que, pour toute carte locale (U, χ) de M pour laquelle $\mathrm{U} \cap \partial \mathrm{M} \neq \emptyset$, et tout compact K de U, il existe une constante $\mathrm{C}_\mathrm{K} > 0$ de sorte que,

$$\text{(II.2.7)} \quad \frac{1}{\mathrm{C}_\mathrm{K}} \widetilde{x'y} \leqslant \chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2 \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{K} \widetilde{x'y}$$
$$(x' \in \mathrm{K} \cap \partial \mathrm{M}, \qquad y \in \mathrm{K}).$$

Cela étant, la conjonction de (NV_2) et (NV_3) équivaut à,

(NV_4) La fonction $x' \to \int_\mathrm{M} t(x', dy) f(y) \widetilde{x'y}$ appartient à $\mathrm{B}(\partial \mathrm{M})$ pout toute fonction positive $f \in \mathrm{C}(\mathrm{M})$.

La considération de la fonction $\widetilde{x'y}$ fournit un procédé de construction de noyaux de Ventcel' réguliers [1] : désignant par g une métrique Riemanienne sur M, par $\overline{xy}$ la distance géodésique et par τ la mesure Riemanienne sur M associées à g, on définit un noyau de Ventcel' sur M en posant :

$$\text{(II.2.8)} \quad t(x', \mathrm{X}) = \int_\mathrm{X} k(x', y) \overline{x'y}^{\alpha-n} \widetilde{x'y} \; \tau(dy) \quad (x' \in \partial \mathrm{M}, \ \mathrm{X} \in \mathscr{B}_\mathrm{M}),$$

où k est une fonction de $\mathrm{B}(\partial \mathrm{M} \times \mathrm{M})$ et où $\alpha > 0$ [en effet (II.2.8) définit un noyau positif borélien qui satisfait (NV_1) et (NV_4)].

[1] Voir aussi les nº III.3.2, III.3.8 et III.3.10 ci-dessous.

II.2.4. Opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy. Étant donné un noyau de Ventcel't sur la variété compacte M (nº II.2.3), on appellera *opérateur frontière de Ventcel'-Lévy sur* M *de noyau* t toute application linéaire T de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ telle que,

(V_1) Pour $x' \in \partial M$ et $u \in C^2(M)$,

$$\text{(II.2.9)} \quad Tu(x') = \int_M t(x', dy)u(y) \quad \text{dès que} \quad x' \notin \operatorname{supp} u.$$

(V_2) Pour chaque carte locale (U, χ) de M pour laquelle $U \cap \partial M \neq \emptyset$ et $\chi(U)$ est borné dans R^n, il existe des fonctions $\eta, \eta^1, \ldots, \eta^{n-1}$ de $B(U \cap \partial M)$ telles que, pour $u \in C^2(M)$ à support dans U et $x' \in U \cap \partial M$,

$$\text{(II.2.10)} \quad Tu(x') = \eta(x')u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} \eta^j(x') \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x')$$
$$+ \int_U t(x', dy)\left[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x')(\chi^j(y) - \chi^j(x'))\right].$$

(V_3) $T1(x') \leqslant 0$ pour tout $x' \in \partial M$ (¹).

On note, d'une part, que l'intégrale au second membre de (II.2.8) est absolument convergente en vertu des propriétés (NV_2) et (NV_3) du noyau t et de la formule de Taylor (I.1.16) (nº I.1.4); d'autre part, que la conjonction de (V_1), (V_2) et (V_3) est équivalente à la conjonction de (V_1) et de la propriété (V_2') obtenue en adjoignant à (II.2.10) la relation,

$$\text{(II.2.11)} \qquad \eta(x') + t(x', M \setminus U) \leqslant 0$$

En particulier, la fonction η est $\leqslant 0$.

On note enfin que, en vertu de la formule de Taylor (I.1.16), un changement de carte locale altère les coefficients η, η^j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ sans altérer la forme de (II.2.10); ce qui fait que (V_2) est satisfaite dès que T est de la forme (II.2.10) pour toutes les cartes locales d'un recouvrement de ∂M.

Le noyau de Ventcel' t, qui est entièrement déterminé par T et les propriétés (V_1) et (NV_1), sera appelé *le noyau de l'opérateur frontière* T.

(¹) Cette définition sera justifiée par les propriétés obtenues aux nº II.2.6, II.2.8 et II.3.1 ci-dessous.

II.2.5. En ce qui concerne la *construction des opérateurs de Ventcel'-Lévy à partir de leurs noyaux,* on remarque d'abord que les opérateurs de Ventcel'-Lévy sur M dont le noyau est nul (autrement dit qui sont locaux) sont exactement de la forme $u \to Q(\gamma^0 u)$ où Q est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre et de classe B sur la variété ∂M tel que $Q1 \leqslant 0$. Dans le cas général, la construction est assurée par le lemme suivant :

LEMME. — *Tout noyau de Ventcel' sur* M *est le noyau d'un opérateur de Ventcel'-Lévy sur* M.

Pour établir ce résultat, on peut introduire (de façon analogue à ce qui a été fait pour les opérateurs de Lévy au nº I.2.7) une forme « globale » des opérateurs de Ventcel'-Lévy : soient $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$ un recouvrement fini de M par des cartes locales, et $\{\sigma_\alpha\}$ une famille de fonctions de $C^\infty(M \times M)$ telles que, $\operatorname{supp} \sigma_\alpha \subset U_\alpha \times U_\alpha$ et $\sum_\alpha \sigma_\alpha = 1$ au voisinage de $\Delta_{M\times M}$. On pose, pour $u \in C^1(M)$, $x' \in \partial M$, $y \in M$,

$$(\text{II.2.12}) \quad \theta^* u(x', y) = \sum_\alpha \sigma(x', y) \left\{ u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x')(\chi^j(y) - \chi^j(x')) \right\}.$$

Le « développement de Taylor » $\theta^* u$ ainsi obtenu possède les propriétés suivantes :

(θ_1^*) $\theta^* 1$ est la restriction à $\partial M \times M$ d'une fonction unité locale.

(θ_2^*) pour chaque $u \in C^1(M)$, $\theta^* u \in C(\partial M \times M)$.

(θ_3^*) L'application $u \to \theta^* u$ est linéaire et il existe $C > 0$ telle que, $|u(y) - \theta^* u(x', y)| = C \|u\|_{(2)} \{1 - \theta^* 1(x', y) + \widetilde{x'y}\}$, pour tout $u \in C^2(M)$, $x' \in \partial M$ et $y \in M$, où $\| \ \|_{(2)}$ est une norme définissant la topologie de $C^2(M)$ (nº 0.1.2) et où $\widetilde{x'y}$ est défini comme au nº II.2.3 par,

$$(\text{II.2.13}) \quad \widetilde{x'y} = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x', y) \left\{ \chi_\alpha^n(y) + \sum_{j=1}^{n} (\chi_\alpha^j(y) - \chi_\alpha^j(x'))^2 \right\} \quad (x' \in \partial M, \quad y \in M).$$

Cela étant, on vérifie sans difficulté que, t étant un noyau de Ventcel' sur M, on définit un opérateur de Ventcel'-Lévy sur M de noyau t en posant,

$$\text{(II.2.14)}\quad \mathrm{T}u(x') = \eta(x')u(x') + \frac{\partial u}{\partial \zeta}(x') + \int_{\mathrm{M}}^{\bullet} t(x', dy)(u(y) - \theta^{*}u(x', y)) \quad (x' \in \partial\mathrm{M},\ u \in \mathrm{C}^{2}(\mathrm{M})),$$

où ζ est un champs de vecteurs de classe B sur la variété ∂M (ou encore « tangent à ∂M) et η une fonction de B(M) telle que,

$$\text{(II.2.15)}\quad \eta(x') + \int_{\mathrm{M}} t(x', dy)(1 - \theta^{*}1(x', y)) \leqslant 0$$

pour tout $x' \in \partial\mathrm{M}$.

De plus, puisque la différence de deux opérateurs de Ventcel'-Lévy de même noyau est un opérateur différentiel du premier ordre sur la variété ∂M, il résulte de ce qui précède que tout opérateur de Ventcel'-Lévy sur M de noyau t est de la forme (II.2.14), η et t étant liés par (II.2.15).

On en déduit immédiatement que tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy T sur M satisfait au *principe du maximum positif au bord:*

$$\text{(PMB)}\quad u \in \mathrm{C}^{2}(\mathrm{M}),\ x' \in \partial\mathrm{M} \quad \text{et} \quad u(x') = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{T}u(x') \leqslant 0$$

[en effet, cette propriété est tout à fait claire sur (II.2.14), compte tenu de la définition de $\theta^{*}u$ (relation (II.2.12)) et de ce que le champ de vecteurs ζ est tangent à ∂M].

On en déduit aussi, compte tenu de la propriété (θ_3^{*}) ci-dessus, que *tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy est continu de* $\mathrm{C}^{2}(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{B}(\partial\mathrm{M})$.

Remarque. — Introduisant le symbole principal [1] des opérateurs frontière, on pourrait énoncer pour les opérateurs de Ventcel'-Lévy un résultat analogue au Théorème IV (n° I.2.8) caractérisant ces opérateurs par la nullité de leur symbole.

II.2.6. Caractérisation des opérateurs Frontière satisfaisant au principe du maximum au bord.

THÉORÈME X. — *Soit* Γ *un opérateur frontière sur la variété à bord compacte* M (n° II.2.1).

[1] « D'ordre 2 tangentiellement et 1 transversalement ».

Pour que Γ *satisfasse au principe du maximum positif au bord,*

(PMB) $u \in C^2(M)$, $x' \in \partial M$ et $u(x') = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow \Gamma u(x') \leqslant 0$,

il faut et il suffit que Γ *soit de la forme,*

$$\Gamma u = \Lambda u + Tu \quad (u \in C^2(M)), \tag{II.2.16}$$

où Λ *est un opérateur frontière de Ventcel'-Višik sur* M (nº II.2.2) *et* T *un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy sur* M (nº II.2.4).

On appellera *opérateur frontière de Ventcel' sur* M tout opérateur frontière Γ sur M (nº II.2.1) de la forme

$$\Gamma u = \Lambda u + Tu \quad (u \in C^2(M)),$$

où Λ est un opérateur frontière de Ventcel'-Višik sur M (nº II.2.2) et T un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy sur M (nº II.2.4).

Tout opérateur frontière de Ventcel' sur M est *continu* de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ (nº II.2.2 et II.2.4).

Dans le théorème précédent, la condition est suffisante, puisque le principe du maximum positif au bord est vérifié aussi bien par les opérateurs de Ventcel'-Višik (nº II.2.2) que de Ventcel'-Lévy (nº II.2.5). Pour établir qu'elle est nécessaire, on va utiliser les résultats obtenus au chapitre précédent. Soit donc Γ une application linéaire de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ ayant la propriété (PMB).

De (PMB), il résulte que $\Gamma u(x') \geqslant 0$ dès que $u \geqslant 0$ et $x' \notin \operatorname{supp} u$ ($x' \in \partial M$, $u \in C^2(M)$). Utilisant le fait que $C^2_k(M \setminus \{x'\})$ est positivement riche dans l'espace localement compact $M \setminus \{x'\}$, on en déduit l'existence d'un noyau positif borélien $t(x', dy)$ de ∂M dans M (nº 0.1.4). vérifiant (NV_1) (nº II.2.3) et tel que, pour $x' \in \partial M$ et $u \in C^2(M)$,

(II.2.17)
$$\int_M t(x', dy)u(y) = \Gamma u(x') \qquad \text{dès que} \qquad x' \notin \operatorname{supp} u.$$

On note d'abord que le noyau t ainsi construit possède la propriété (NV_3) : en effet, soient f une fonction positive de $C(M)$, σ une fonction unité locale sur M, et $x'_0 \in \partial M$. Il existe un voisinage ouvert V de x'_0 et une fonction positive $u \in C^2(M)$ nulle sur V et telle que $(1-\sigma(x', y))f(y) \leqslant u(y)$ pour tout $y \in M$ et tout $x' \in V$; et on a, pour $x' \in V$, d'après (II.2.17),

$$\int_M t(x', dy)(1-\sigma(x, y))f(y) \leqslant \int_M t(x', dy)u(y) = \Gamma u(x'),$$

d'où la relation (II.2.5) puisque Γu est bornée.

On va ensuite montrer que t possède la propriété (NV_2). Plus précisément, désignant par (U, χ) une carte locale de M pour laquelle $U \cap \partial M \neq \emptyset$ et $\chi(U)$ est borné dans R^n, on va établir que la relation (II.2.4) (n° II.2.3) est satisfaite pour toute fonction positive $f \in C(M)$ à support dans U, et qu'il existe des fonctions $b^{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $b^i(1 \leqslant i, \leqslant n-1)$, α et b de $B_{Loc}(U \cap \partial M)$ de telle sorte que, pour $x' \in U \cap \partial M$, d'une part,

$$\text{(II.2.18)}\quad \Gamma u(x') = \alpha(x')\frac{\partial u}{\partial \chi^n}(x') + \sum_{i,j=1}^{n-1} b^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j}(x') + \sum_{i=1}^{n-1} b^i(x')\frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x') + b(x')u(x') + \int_U t(x', dy)\left[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x')(\chi^j(y) - \chi^j(x'))\right]$$

pour $u \in C^2(M)$ à support dans U; et d'autre part,

$$\text{(II.2.19)}\quad \sum_{j=1}^{n-1} b^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad \xi = (\xi_i) \in R^{n-1},$$

et

$$\text{(II.2.20)}\qquad \alpha(x') \geqslant 0.$$

Il en résultera d'abord que t est un noyau de Ventcel' sur M; ensuite la décomposition $\Gamma = \Lambda + T$ cherchée en considérant un opérateur de Ventcel'-Lévy $\tilde{T}$ de noyau t fourni par le lemme II.2.5, et en posant, pour $u \in C^2(M)$,

$$\Lambda u = \Gamma u - \tilde{T}u - (\Gamma 1 - \tilde{T}1)u \quad \text{et} \quad Tu = \tilde{T}u + (\Gamma 1 - \tilde{T}1)u.$$

Afin d'établir (II.2.18), on pose $\Omega = \chi(U)$ et on désigne par $\tilde{\Omega}$ un ouvert de R^n tel que $\tilde{\Omega} \cap \overline{R^{n+}} = \Omega$, et par $\tilde{\Gamma}$ l'application linéaire de $C_k^2(\tilde{\Omega})$ dans $B(\tilde{\Omega})$ définie, pour $\varphi \in C_k^2(\tilde{\Omega})$, par

$$\tilde{\Gamma}\varphi(z) = \Gamma(\tilde{\varphi} \circ \chi)(\chi^{-1}(z)) \qquad \text{si} \qquad z \in \partial\Omega$$

où $\tilde{\varphi}$ désigne la restriction de φ à $\Omega = \chi(U)$, et

$$\tilde{\Gamma}\varphi(z) = 0 \qquad \text{si} \qquad z \in \tilde{\Omega} \setminus \partial\Omega.$$

Il est clair, en vertu de l'hypothèse sur Γ, que $\tilde{\Gamma}$ satisfait au principe du maximum positif (PM) sur Ω; donc, en vertu du Théorème III, propriété (2) (n° I.1.1), $\tilde{\Gamma}$ est de la forme,

$$\text{(II.2.21)}$$
$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}\varphi(z) = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}^{ij}(z)D_iD_j\varphi(z) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^{i}(z)D_i\varphi(z) + \tilde{b}(z)\varphi(z) \\ + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\left\{\varphi(y) - \sigma(z, y)\left[\varphi(z) + \sum_{i=1}^{n} D_i\varphi(z)(y^i - z^i)\right]\right\}. \\ (\varphi \in C_k^2(\tilde{\Omega}), \qquad z \in \tilde{\Omega}),\end{aligned}$$

où $\tilde{b}^{ij}$, $\tilde{b}^i$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ et $\tilde{b}$ sont des fonctions de $B_{Loc}(\tilde{\Omega})$, σ une fonction unité locale sur $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{t}$ un noyau de Lévy sur $\tilde{\Omega}$ (n° I.2.1), avec la relation,

$$\text{(II.2.22)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}^{ij}(z)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad z \in \tilde{\Omega},\ \xi = (\xi_i) \in R^n.$$

Cela étant, on remarque d'abord que, d'après (II.2.17) et (I.1.4), $\tilde{t}$ est le noyau transporté de t par χ; en particulier, pour $z \in \partial\Omega$, la mesure $\tilde{t}(z, .)$ est portée par Ω; d'où il résulte, puisque $\tilde{t}$ est un noyau de Lévy, que les fonctions $x' \to \int_U t(x', dy)(\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2$ sont dans $B_{Loc}(U \cap \partial M)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n - 1$. On va alors obtenir les propriétés annoncées en substituant à φ dans (II.2.12) diverses fonctions convenablement choisies :

α) Prenant, pour $z \in \partial\tilde{\Omega}$, $\varphi_1(y) = \sigma(z, y)y^n$ $(y \in \tilde{\Omega})$, on obtient, $\tilde{\Gamma}\varphi_1(z) = \tilde{b}^n(z)$. D'où $\tilde{b}^n(z) \geqslant 0$, puisque $\tilde{\Gamma}\varphi(z) \geqslant 0$ en vertu de la propriété (PMB) de Γ.

β) Prenant, pour $z \in \partial\tilde{\Omega}$, $\varphi_2(y) = \sigma_1(z, y)y^n$ $(y \in \tilde{\Omega})$, où σ_1 est une fonction unité locale sur $\tilde{\Omega}$, on obtient,

$$\text{(II.2.23)} \quad \tilde{\Gamma}\varphi_2(z) = \tilde{b}^n(z) + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)[\sigma_1(z, y) - \sigma(z, y)]y^n;$$

d'où, puisque $\tilde{b}^n(z) \geqslant 0$, d'après α),

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)[\sigma_1(z, y) - \sigma(z, y)]y^n \leqslant \tilde{\Gamma}\varphi_2(z);$$

et aussi, $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\sigma_1(z, y)y^n \leqslant \tilde{\Gamma}\varphi_2(z)$, en faisant décroître vers $\Delta_{\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}}$ le support de la fonction unité locale σ choisie pour exprimer $\tilde{\Gamma}$ par (II.2.21). Il en résulte d'une part que le noyau t possède la propriété (NV_2) puisqu'il possède la propriété (NV_3) (n° II.2.3) ainsi qu'on l'a déjà établi. Il en résulte d'autre part que, dans l'expression (II.2.21) de $\tilde{\Gamma}$, on peut isoler le terme $\left\{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\sigma(z, y)y^n\right\} D_n\varphi(z)$, et écrire,

$$\begin{aligned} \text{(II.2.24)} \quad \tilde{\Gamma}\varphi(z) = {} & \tilde{\alpha}(z)D\varphi_n(z) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{b}^{ij}D_iD_j\varphi(z) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{b}^i(z)D_i\varphi(z) + \tilde{b}(z)\varphi(z) \\ & + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\left\{\varphi(y) - \sigma(z, y)\left[\varphi(z) + \sum_{i=1}^{n-1} D_i\varphi(z)(y^i - z^i)\right]\right\}. \\ & (\varphi \in C_k^2(\Omega), \qquad z \in \partial\tilde{\Omega}), \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\alpha}(z) = \tilde{b}^n(z) - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\sigma(z, y)y^n \quad (z \in \partial\tilde{\Omega}).$$

En outre, pour chaque $z \in \partial\tilde{\Omega}$, on a $\tilde{\alpha}(z) \geqslant 0$: la relation (II.2.23) entraîne en effet, puisque $\tilde{\Gamma}\varphi_2(z) \geqslant 0$ en vertu de la propriété (PMB) de $\tilde{\Gamma}$, que

$$\tilde{\alpha}(z) \geqslant - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{t}(z, dy)\sigma_1(z, y)y^n;$$

d'où $\tilde{\alpha}(z) \geqslant 0$ d'après la propriété (NV_2) de t, en faisant décroître vers $\Delta_{\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}}$ le support de la fonction unité locale σ_1.

γ) Pour montrer que $\tilde{b}^{nn}(z) = 0$ $(z \in \partial\Omega)$, on prend

$$\varphi_3(y) = \sigma_1(z, y)\theta(y^n) \quad (y \in \tilde{\Omega})$$

où θ est une fonction positive de $C^2([0, +\infty[)$; portant dans (II.2.24), on obtient,

$$(\text{II}.2.25)\quad \tilde{\Gamma}\varphi_3(z) = \tilde{\alpha}(z)\theta'(0) + \tilde{b}^{nn}(z)\theta''(0) + \tilde{b}(z)\theta(0) + \int_\Omega \tilde{t}(z, dy)\sigma_1(z, y)[\theta(y^n) - \theta(0)].$$

Raisonnant alors par l'absurde, on suppose que $\tilde{b}^{nn}(z) \neq 0$. Ceci entraînerait, en vertu de (II.2.22), que $\tilde{b}^{nn}(z) > 0$, et (II.2.25) fournirait une contradiction en choisissant θ, d'une part, telle que $\theta \geqslant 0$ et $\theta(0) = \sup \theta > 0$ (ce qui entraîne que $\tilde{\Gamma}\varphi_3(z) \leqslant 0$ en vertu de la propriété (PMB) de Γ) et, d'autre part, telle que $\theta(0)$ et $\theta'(0)$ soient suffisamment petits, $\theta''(0)$ suffisamment grand, et le support de σ_1 assez voisin de $\Delta_{\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}}$ pour qu'au second membre de (II.2.25) le second terme l'emporte sur les trois autres.

δ) Enfin, pour montrer que $\tilde{b}^{nj}(z) = 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ ($z \in \partial\Omega$), on prend $\varphi_4(y) = \sigma_1(z, y)\theta(y^j)y^n$, où θ est une fonction positive de $C^2([0, +\infty[)$; portant dans (II.2.24) on obtient,

$$(\text{II}.2.26)\quad \tilde{\Gamma}\varphi_4(z) = \tilde{b}^{nj}(z)\theta'(z^j) + \tilde{\alpha}(z)\theta(z^j) + \int_\Omega \tilde{t}(z, dy)\sigma_1(z, y)\theta(y^j)y^n;$$

et on remarque que la propriété (PMB) de Γ entraîne que $\tilde{\Gamma}\varphi_4(z) \geqslant 0$, puisque φ_4 est positive et nulle en $z \in \partial\Omega$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $\tilde{b}^{nj}(z) \neq 0$. La relation (II.2.26) fournirait alors une contradiction en choisissant $\theta \geqslant 0$ de telle sorte que $\theta(z^j)$ soit assez petit et $\theta'(z^j)$ assez grand en valeur absolue et de signe contraire à $\tilde{b}^{nj}(z)$ pour que le second membre de (II.2.26) soit < 0.

Relevant alors (II.2.24) par χ^{-1} et utilisant la propriété (NV_3) de t, on obtient (II.2.18) ainsi que (II.2.19) et (II.2.20) comme conséquences de (II.2.22) et de ce que $\tilde{\alpha} \geqslant 0$ (alinéa β) ci-dessus). c.q.f.d.

Remarque. — Le théorème X ci-dessus subsiste pour des opérateurs frontière sur une variété à bord M non compacte.

II.2.7. Noyau et partie principale d'ordre 2 d'un opérateur frontière de Ventcel'. Soit $\Gamma = \Lambda + T$ un opérateur frontière de Ventcel' sur la variété à bord compacte M (n° II.2.6), avec

$$\text{(II.2.27)} \quad \Lambda u = \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u) \quad (u \in C^2(M);\ \text{n° II.2.2}).$$

Le noyau t de T et la partie principale d'ordre 2 ϖ de Q sont déterminés de façon unique par Γ au moyen des relations,

$$\text{(II.2.28)} \qquad \int_M t(x', dy)u(y) = \Gamma u(y)$$

dès que

$$x' \notin \operatorname{supp} u \quad (x' \in \partial M,\ u \in C^2(M)),$$

$$\text{(II.2.29)}$$
$$u(x')\varpi_{x'}(d_{x'}\gamma^0\nu,\ d_{x'}\gamma^0\nu) = \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{1}{\lambda^2}e^{-i\lambda\nu(x')}\Gamma(ue^{i\lambda\nu})(x') \text{ [1]}$$
$$(x' \in \partial M,\ u \in C^2(M),\ \nu \in C^2(M)).$$

La relation (II.2.28) résulte immédiatement de (II.2.9), compte tenu du caractère local de Λ; et la relation (II.2.29) résulte de la relation (0.1.3) qui définit la partie principale d'ordre 2 de Q (n° 0.1.2) et du théorème IV (n° I.2.8) dont on déduit, par localisation, que

$$\text{(II.2.30)} \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda^2}e^{-i\lambda\nu(x')}T(ue^{i\lambda\nu})(x') = 0$$
$$(x' \in M,\ u \in C^2(M),\ \nu \in C^2(M)).$$

Les quantités t et ϖ définies par (II.2.28) et (II.2.29) seront appelées respectivement *le noyau et la partie principale* (*d'ordre* 2) *de l'opérateur frontière de Ventcel'* Γ.

Pour qu'un opérateur frontière de Ventcel' Γ soit *local* (n° II.2.1) il faut et il suffit que son noyau soit nul, et Γ est alors un opérateur frontière de Ventcel'-Višik. De plus, le théorème X entraîne,

Proposition. — *Soit* Γ *un opérateur frontière sur* M. *Pour que* Γ *soit local et satisfasse au principe du maximum positif au bord* (PMB) (n° II.2.6), *il faut et il suffit que* Γ *soit un opérateur frontière de Ventcel'-Višik* (n° II.2.2).

[1] En étendant Γ aux fonctions complexes par la relation $\Gamma(u + i\nu) = \Gamma u + i\Gamma\nu$ $(u \in C^2(M),\ \nu \in C^2(M))$.

On notera que, pour que Γ soit local et satisfasse (PMB), il faut et il suffit qu'il satisfasse *au principe du maximum positif local* au bord :

(PMBL) Si $u \in C^2(M)$ admet au point $x' \in \partial M$ un maximum relatif positif, $\Gamma u(x') \leqslant 0$.

II.2.8. Transversalité des opérateurs frontière de Ventcel'. Soient $\Gamma = \Lambda + T$ un opérateur frontière de Ventcel' sur M [Λ étant donné par (II.2.1) (n° II.2.2)] et t son noyau (n° II.2.7). On dira que Γ *est transversal* en $x' \in \partial M$ si,

— soit $\alpha(x') > 0$ [1],

— soit $t(x', \dot{M} \cap V) > 0$ pour tout voisinage V de x' dans M.

On dira que Γ est *faiblement transversal* en $x' \in \partial M$ si,

— soit $\alpha(x') > 0$,

— soit $t(x', \dot{M}) > 0$.

L'intérêt de ces notions réside dans les résultats suivants qui établissent un lien, essentiel pour la suite, entre les opérateurs frontière de Ventcel' et le principe du maximum positif au bord pour les opérateurs de Waldenfels réguliers au bord :

Lemme. — *Sur la variété à bord compact* M, *soient* Γ *un opérateur frontière de Ventcel'* (n° II.2.6), *W un opérateur de Waldenfels décomposable de classe* C^0 (n° I.3.1 et I.3.3) [2], u *une fonction de* $C^2(M)$ *et* $x' \in \partial M$.

(1) *Si* Γ *est transversal en* x',

(II.2.31)
$$\Gamma u(x') = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x') = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Wu(x') \leqslant 0 \text{ [3]}.$$

(2) *Si* Γ *est faiblement transversal en* $x' \in \partial M$.

$$\text{(II.2.32)} \quad \left.\begin{matrix} \Gamma u(x') = 0,\, u(x') = \sup u \geqslant 0 \\ \text{et} \quad u(y) < u(x') \text{ pour tout } y \in \dot{M} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Wu(x') \leqslant 0$$

En effet, soit $W = P + S$ la décomposition de W en un

[1] On rappelle que dans la décomposition (II.2.1) de Λ, le champ de vecteurs ν est strictement dirigé vers l'intérieur de M (n° II.2.2).

[2] Voir la remarque 1 ci-dessous.

[3] En vertu du principe du maximum (PMB), on peut remplacer dans (II.2.31) $\Gamma u(x') = 0$ par $\Gamma u(x') \geqslant 0$.

opérateur de diffusion P et un opérateur de Lévy S sur M tous deux de classe C^0 (nº I.3.3).

La relation $u(x') = \sup u \geqslant 0$ entraîne $Su(x') = 0$ ainsi qu'il résulte des relations (I.2.14) et (I.2.15) qui sont valables aussi pour $x \in \partial M$ puisque S est supposé de classe C^0 (proposition I.2.7). Par ailleurs, $u(x') = \sup u \geqslant 0$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0$ entraîne que $Pu(x') \leqslant 0$ (lemme 0.1.3). Il suffit donc d'établir que,

$$\Gamma u(x') = 0 \quad \text{et} \quad u(x') = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0.$$

Supposant donc que $\Gamma u(x') = 0$ et $u(x') = \sup u \geqslant 0$, on a, d'après la deuxième de ces relations,

$$\alpha(x')\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \leqslant 0, \quad Q(\gamma^0 u)(x') \leqslant 0 \quad \text{et} \quad Tu(x') \leqslant 0;$$

donc, en vertu de la première,

$$\alpha(x')\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = Q(\gamma^0 u)(x') = Tu(x') = 0; \tag{II.2.33}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0$$

dans le cas où $\alpha(x') > 0$.

Pour traiter l'autre cas, on écrit, en utilisant l'expression (II.2.14) (nº II.2.5) de T et en tenant compte de ce que

$$\theta^* u(x', y) = u(x')\theta^* 1(x', y) \tag{II.2.34}$$

et $\frac{\partial u}{\partial \zeta}(x') = 0$ puisque $u(x') = \sup u$,

$$\begin{aligned} 0 = Tu(x') = \eta(x')u(x') &+ \int_M t(x', dy)u(y)(1 - \theta^* 1(x', y)) \\ &+ \int_M t(x', dy)[u(y) - u(x')]\theta^* 1(x', y); \end{aligned}$$

puisque la somme des deux premiers termes est $\leqslant 0$ en vertu de (II.2.15) et de la relation $u(x') = \sup u \geqslant 0$ ainsi que le troisième terme, il en résulte que,

$$\int_M t(x', dy)[u(y) - u(x')]\theta^* 1(x', y) = 0.$$

Or, cette relation est incompatible avec $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0$, lorsque $t(x', \mathring{M} \cap V) > 0$ pour tout voisinage V de x'. La transversalité de Γ en x' entraîne donc que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0$; d'où la propriété (1)

En ce qui concerne la propriété (2), on remarque, compte tenu de (II.2.33) et (II.2.34), que

$$T1(x') = -\int_M t(x', dy)[u(y) - u(x')].$$

Or cette relation entraîne, puisque $T1(x') \leqslant 0$, que $t(x, \mathring{M}) = 0$ si $u(y) < u(x')$ pour tout $y \in \mathring{M}$. Ainsi, la faible transversabilité de Γ et l'hypothèse de (II.2.32) entraînent que $\alpha(x') > 0$; donc aussi que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0$ d'après (II.2.33). D'où la propriété (2). c.q.f.d.

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition. — *Sur la variété à bord compacte* M, *soient* W *un opérateur de Waldenfels décomposable de classe* C^0 (n° I.3.3), Γ *un opérateur frontière de Ventcel'* (n° II.2.6), *et* δ *une fonction positive de* $B(\partial M)$.

(1) *On suppose que* Γ *est transversal en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$. *Alors, pour tout* $u \in C^2(M)$,

$$\text{(II.2.35)} \qquad \left.\begin{array}{l} \Gamma u - \delta\gamma^0 W u = 0, \quad x \in M \\ et \quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow Wu(x) \leqslant 0.$$

(2) *On suppose que* Γ *est faiblement transversal en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$. *Alors, si* $u \in C^2(M)$ *est telle que,*

$$\text{(II.2.36)} \qquad \Gamma u - \delta\gamma^0 W u = 0 \qquad \text{et} \qquad \sup u \geqslant 0,$$

(II.2.37)

il existe $x \in M$ *tel que* $u(x) = \sup u$ *et* $Wu(x) \leqslant 0$.

En effet, (II.2.35) résulte du principe du maximum (PM) que satisfait W si $x \in \mathring{M}$, de la propriété (1) du lemme précédent si $x \in \partial M$ et $\delta(x) = 0$, et du principe du maximum (PMB) que satisfait Γ (n° II.2.6) si $x \in \partial M$ et $\delta(x) > 0$; d'où la propriété (1). La propriété (2) peut être établie de façon analogue (voir la démonstration du théorème XI au nº II.2.9).

Remarque 1. — On peut affaiblir l'hypothèse faite sur W : seul compte ici le fait que P et S sont prolongeables au bord (éventuellement seulement de façon borélienne).

Remarque 2. — Dans la proposition ci-dessus, on peut considérer le sous espace vectoriel $\mathcal{U}$ de $C^2(M)$ défini par,

$$\text{(II.2.38)} \quad \mathcal{U} = \{u | u \in C^2(M) \quad \text{et} \quad \Gamma u - \delta\gamma^0 W u = 0\},$$

ce qui permet d'écrire la relation (II.2.35) sous la forme,

(II.2.39)
$$u \in \mathcal{U}, \ x \in M \quad \text{et} \quad u(x) = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Wu(x) \leqslant 0.$$

Cela conduit à la question suivante : Étant donnés un opérateur de Waldenfels décomposable de classe C^0 sur M, et un sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ de $C^2(M)$ tels que (II.2.39) soit satisfaite, sous quelles conditions sur W et $\mathcal{U}$ existe-t-il une fonction positive δ de $B(\partial M)$ et un opérateur frontière de Ventcel' Γ sur M, transversal en tout point $x' \in \partial M$ en lequel $\delta(x') = 0$, de sorte que

$$\text{(II.2.40)} \qquad u \in \mathcal{U} \Longrightarrow \Gamma u - \delta\gamma^0 W u = 0?$$

L'obtention de la condition frontière de Ventcel' (voir le Théorème XII au nº II.3.1 et la proposition II.3.6) constitue une réponse partielle à cette question; réponse partielle car on n'obtient pas exactement le caractère transversal requis pour (Γ, δ). Ce caractère transversal est très vraisemblablement lié à la densité de $\mathcal{U}$ dans C(M) (voir à ce sujet les remarques 2 et 4 du nº II.3.5 ainsi que les nº III.2.8 et III.2.9 ci-dessous).

II.2.9. Opérateurs frontière de Ventcel' semi-transversaux. On dira que l'opérateur frontière de Ventcel' Γ sur M (nº II.2.6) est *semi-transversal* en $x' \in \partial M$ si,

— soit $\Gamma 1(x') < 0$;

— soit Γ est faiblement transversal en x' (nº II.2.8). Cela étant,

Théorème XI. — *Sur la variété à bord compacte* M, *soient* W *un opérateur de Waldenfels décomposable de classe* C^0, Γ

un opérateur frontière de Ventcel' et δ *une fonction positive de* $B(\partial M)$. *On suppose que* Γ *est semi-transversal en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$. *Alors, si* $u \in C^2(M)$ *est telle que,*

(II.2.41) $\Gamma u - \delta\gamma^0 W u \geqslant 0$ *et* $\sup u > 0$,

(II.2.42)

il existe $x \in M$ *tel que* $u(x) = \sup u$ *et* $Wu(x) \leqslant 0$.

En effet, (II.2.42) résulte du principe du maximum (PM) auquel satisfait W si u atteint son maximum à l'intérieur de M. Dans le cas contraire, il existe $x' \in \partial M$ tel que

(II.2.43)

$$u(x') = \sup u \quad \text{et} \quad u(y) < u(x') \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathring{M}.$$

Si $\delta(x') > 0$, on a $Wu(x') \leqslant \dfrac{1}{\delta(x')} \Gamma u(x') \leqslant 0$ en vertu de (II.2.41) et du principe du maximum (PMB) que satisfait Γ.

Si $\delta(x') = 0$, on a $\Gamma u(x') = 0$ d'après (II.2.41) et (PMB); donc $Wu(x') \leqslant 0$ d'après (II.2.43) et la propriété (2) du lemme II.2.8 si Γ est faiblement transversal en x'; or ceci a toujours lieu (en vertu de la semi-transversabilité de Γ en x'), car $u(x') = \sup u > 0$ entraîne [compte tenu de (PMB), (II.2.34) et (II.2.14) (n° II.2.5)] que

$$0 \leqslant \Gamma u(x') \leqslant \sup u . \Gamma 1(x') \leqslant 0;$$

donc aussi $\Gamma 1(x') = 0$, puisque $\sup u > 0$.

c.q.f.d.

Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème XI, pour chaque* $\beta > 0$,

(II.2.44)

$$u \in C^2(M),\ \Gamma u - \delta\gamma^0 W u \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad (W - \beta)u \geqslant 0 \Longrightarrow u \leqslant 0.$$

En effet, raisonnant par l'absurde, on suppose que,

$$\Gamma u - \delta\gamma^0 W u \geqslant 0, \quad (W - \beta)u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sup u > 0.$$

En vertu du théorème, il existerait alors un point $x \in M$

tel que $u(x) = \sup u > 0$ et $\mathrm{W}u(x) \leqslant 0$; donc aussi

$$(\mathrm{W} - \beta)u(x) < 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $(\mathrm{W} - \beta)u \geqslant 0$. c.q.f.d.

II.2.10. Cas des opérateurs de Waldenfels elliptiques.

THÉORÈME XII. — *Avec les notations du Théorème* XI, *on suppose que* W *est elliptique décomposable de classe* C^0 (n° I.4.1) *que* Γ *est semi-transversal en tout point de* ∂M, *et que, dans chaque composante connexe* C *de* M, *l'une des deux fonctions* W1 *sur* C, $\Gamma 1$ *sur* $C \cap \partial M$ *n'est pas identiquement nulle. Alors,*

(II.2.45)

$$u \in C^2(M),\ \Gamma u - \delta\gamma^0 \mathrm{W}u \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{W}u \geqslant 0 \Longrightarrow u \leqslant 0$$

En effet, supposant que $u \in C^2(M)$, est telle que,

$$\Gamma u - \delta\gamma^0 \mathrm{W}u \geqslant 0, \quad \mathrm{W}u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sup u = m > 0,$$

on va montrer que u est constante sur toute composante connexe de M où elle atteint son maximum : D'une part si u atteint son maximum en un point $x \in \dot{M}$, u est constante sur la composante connexe de x en vertu du Théorème VII (n° I.4.1) et de l'ellipticité de W. D'autre part, si u n'atteignait son maximum en aucun point intérieur mais en $x' \in \partial M$, on aurait,

(II.2.46)

$$u(y) < u(x') \qquad \text{pour tout} \qquad y \in \dot{M} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0,$$

en vertu du Théorème VIII (n° I.4.1). Par ailleurs, l'expression (II.2.14) de T (n° II.2.5), jointe aux relations (II.2.15) et (II.2.34) (n° II.2.8), donne ici,

(II.2.47)

$$\Gamma u(x') \leqslant \alpha(x')\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + m\Gamma 1(x') + \int_M t(x', dy)\,[u(y) - u(x')];$$

d'où, compte tenu de (II.2.46), de la semi-transversalité de Γ

en x' et de ce que $m > 0$, $\Gamma u(x') < 0$; ce qui contredirait les hypothèses $Wu(x') \geqslant 0$ et $\Gamma u(x') - \delta(x')Wu(x') \geqslant 0$.

Ainsi, il existe une composante connexe C de M telle que,

$$u(x) = \sup u = m \qquad \text{pour} \qquad \text{tout} \quad x \in C.$$

Il résulte de cette relation, de l'expression (I.2.14) (n° I.2.7), de (II.2.47) ci-dessus, et des principes du maximum (PM) et (PMB) que $0 \leqslant Wu(x) \leqslant mW1(x)$ pour tout $x \in C$ et $0 \leqslant \Gamma u(x') \leqslant m\Gamma 1(x')$ pour tout $x' \in C \cap \partial M$; relations qui contredisent, m étant supposé > 0, l'hypothèse faite sur W et Γ; d'où la relation (II.2.45).

c.q.f.d.

II.2.11. Opérateurs frontière de Ventcel' quasi locaux. — Soient $\Gamma = \Lambda + T$ un opérateur frontière de Ventcel' sur M, et t son noyau (n° II.2.7). En vertu de (II.2.28) (n° II.2.7), pour que Γ soit quasi local (n° II.2.1), il faut et il suffit que,

$$\text{(II.2.48)} \qquad t(x', \dot{M}) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in \partial M.$$

La restriction du noyau t à $\partial M \times \mathcal{B}_{\partial M}$ est alors un noyau de Lévy sur la variété ∂M (n° I.2.5), et l'opérateur de Ventcel'-Lévy T est de la forme,

$$\text{(II.2.49)} \qquad Tu = T_0(\gamma^0 u) \quad (u \in C^2(M)),$$

où T_0 est un opérateur de Lévy sur la variété ∂M (n° I.2.6).

Inversement, si T_0 est un tel opérateur, la relation (II.2.49) définit un opérateur de Ventcel'-Lévy sur M.

II.2.12. Opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy d'ordre 1. Un noyau de Ventcel' t sur M sera dit *d'ordre* 1 s'il vérifie,

(NV'_2) pour toute carte locale (U, χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, et toute fonction positive $f \in C(M)$ à support dans U,

$$\text{(II.2.50)} \quad \text{la fonction} \quad x' \to \int_M t(x', dy)f(y)|\chi(y) - \chi(x)|$$

appartient à $B(\partial M)$.

Si t est un tel noyau, et si η est une fonction négative de $B(\partial M)$, on définit un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy

T sur M en posant,

(II.2.51)
$$Tu(x') = \eta(x')u(x) + \int_M t(x', dy)(u(y) - u(x'))$$
$$(x' \in \partial M, \qquad u \in C^2(M)).$$

Un tel opérateur se prolonge continûment à $C^1(M)$ par la même relation (II.2.51). Il sera dit *d'ordre* 1.

§ II.3. Condition frontière de Ventcel'.

II.3.1. Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe II.2. (nº II.2.1); en particulier M désigne une *variété compacte de* classe C^∞ et de dimension $n \geqslant 1$ dont le bord ∂M est *non vide.*

Cela étant, on peut énoncer comme suit la condition frontière introduite par Ventcel' dans [21] :

THÉORÈME XIII. — *Soient* (N_t) *un semi-groupe de Feller* (nº 0.2.2) *sur la variété à bord compacte* M *et* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *son générateur infinitésimal. Il existe un opérateur frontière de Ventcel'* Γ *sur* M (nº II.2.6) *et une fonction positive* δ *de* $B(\partial M)$ *tels que,*

(A) *Pout tout* $x' \in \partial M$, *ou bien* $\delta(x') > 0$, *ou bien il existe* $u \in C^2(M)$ *telle que* $\Gamma u(x') \neq 0$.

(B) *Pour tout* $u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$,

(II.3.1) $$\Gamma u - \delta . \gamma^0 A u = 0 \quad (^1).$$

La relation (II.3.1) sera appelée ci-dessous *la condition frontière de Ventcel'*. On notera l'importance de la propriété (A) du théorème qui assure une certaine consistance à cette condition (voir la remarque 3 du nº II.3.5 ci-dessous).

Le théorème XIII est une conséquence immédiate du lemme suivant qui serre de plus près la nature de ce résultat :

LEMME (Ventcel'). — *Soit* $(N_s)_{s>0}$ *un semi-groupe de noyaux positifs boréliens et sous markoviens* (²) *sur* M. *Il existe un*

(¹) $\Gamma u(x') = \delta(x') A u(x')$ pour tout $x' \in \partial M$.
(²) $0 \leqslant N_t(x, X) \leqslant 1$ $(t > 0,\ x \in M,\ X \in \mathcal{B}_M)$.

opérateur frontière de Ventcel' Γ *sur* M *et une fonction positive* δ *de* $B(\partial M)$ *tels que, pour tout* $x' \in \partial M$,

(*a*) *ou bien* $\delta(x') > 0$, *ou bien il existe* $u \in C^2(M)$ *telle que* $\Gamma u(x') \neq 0$.

(*b*) *Pour tout* $u \in C^2(M)$ *tel que* $\lim\limits_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x'))$ *existe, on a,*

$$\text{(II.3.2)} \quad \delta(x') \left\{ \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x')) \right\} = \Gamma u(x') \ \text{(1)}.$$

Ce lemme sera établi aux n° II.3.3 et II.3.4 ci-dessous.

II.3.2. Pour obtenir le caractère borélien de δ et des coefficients de Γ, on s'appuiera sur le résultat auxiliaire suivant :

Lemme de mesurabilité. — *Soient* $(X, \underline{X})$ *un espace mesurable,* K *un espace compact métrisable,* $\mathcal{B}_K$ *sa tribu borélienne, et* $(\Phi_n)_{n \in N}$ *une suite d'applications mesurables de* $(X, \underline{X})$ *dans* $(K, \mathcal{B}_K)$.

Alors, il existe une application $\sigma : (p, x) \to \sigma_p(x)$ *de* $N \times X$ *dans* N, *et une application mesurable* Φ *de* $(X, \underline{X})$ *dans* $(K, \mathcal{B}_K)$ *telles que,*

(1) *pour chaque* $p \in N$, *et* $n \in N$, $\{x | x \in X \text{ et } \sigma_p(x) = n\} \in \underline{X}$ (2).

(2) *pour chaque* $x \in X$, $(\sigma_p(x))_{p \in N}$ *est une suite d'entiers strictement croissante, et* $\lim \Phi_{\sigma_p(x)}(x) = \Phi(x)$ *dans* K.

(On construit σ en vérifiant que le procédé diagonal d'extraction de sous-suites peut être « rendu mesurable », ce qui est bien clair vu son caractère purement dénombrable.)

II.3.3. Démonstration du lemme de Ventcel' : mise en place de la situation. α) On désigne par (E_k) une partition *finie* de ∂M formée d'ensembles boréliens, et, pour chaque k, par χ_k une application de classe C^∞ de M dans $\overline{R^{n+}}$ de telle sorte qu'il existe un ouvert U_k de M contenant E_k tel que (U_k, χ_k) soit une carte locale de M et que,

$$\text{(II.3.3)} \quad D_k(x', y) = \chi_k^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x'))^2 > 0,$$

(1) Voir la remarque 6 du n° II.3.5.

(2) Autrement dit, σ_p est mesurable de $(X, \underline{X})$ dans N muni de la tribu discrète.

pour

$$x' \in \mathrm{E}_k \qquad \text{et} \qquad y \in \mathrm{M} \setminus \{x'\}.$$

On va déterminer l'opérateur frontière Γ cherché sous la forme suivante : pour chaque k, $x' \in \mathrm{E}_k$ et $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{M})$,

$$\text{(II.3.4)} \quad \Gamma u(x') = \alpha(x') \frac{\partial u}{\partial \chi_k^n}(x') + \sum_{i,j=1}^{n-1} b^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial \chi_k^i \partial \chi_k^j}(x') + \sum_{i=1}^{n-1} b^i(x') \frac{\partial u}{\partial \chi_k^i}(x') - b(x')u(x') + \int_{\mathrm{M}} t(x', dy)\Big[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x')(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x'))\Big],$$

où t est un noyau de Ventcel' sur M (n° II.2.3), et où α, b^{ij}, $b^i (1 \leqslant i, j \leqslant n-1)$ et b sont des fonctions de $\mathrm{B}(\partial \mathrm{M})$ de telle sorte que,

$$\alpha \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ b^{ij} = b^{ji} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n-1),$$

et

$$\text{(II.3.5)} \quad \sum_{i,j=1}^{n-1} b^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x' \in \partial\mathrm{M} \quad \text{et} \quad \xi = (\xi_i) \in \mathrm{R}^{n-1}$$

(Il est clair, d'après les définitions des n° II.2.2, II.2.4 et II.2.6 que l'on définit ainsi un opérateur frontière de Ventcel' sur M).

β) *Fixant désormais* k, on écrit, pour $x' \in \mathrm{E}_k$, $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{M})$ et $s > 0$,

$$\text{(II.3.6)} \quad \frac{1}{s}(\mathrm{N}_s u(x') - u(x')) = -b_s(x')u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} b_s^j(x') \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x') + l_s(x') \int_{\mathrm{M}\setminus\{x\}} \mathrm{R}_s(x', dy)\tilde{u}_k(x', y) \text{ [1]},$$

où on a posé,

$$b_s(x') = \frac{1}{s}(1 - \mathrm{N}_s(x', \mathrm{M}))\ b_s^j = \frac{1}{s}\int_{\mathrm{M}} \mathrm{R}_s(x', dy)(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x')),$$

$$l_s(x') = \frac{1}{s}\int_{\mathrm{M}\setminus\{x'\}} \mathrm{N}_s(x', dy)\ \mathrm{D}_k(x', y)$$

[1] Voir la remarque 6 du n° II.3.5

et

$$\tilde{u}_k(x', y) = \frac{u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x')(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))}{D_k(x', y)} \quad (y \in M \setminus \{x'\});$$

et où $R_s(x', .)$ désigne *la mesure* $\geqslant 0$ *de masse* 1 sur M et *ne chargeant pas le point* x' définie par,

$$R_s(x', X) = \frac{1}{s l_s(x')} \int_X N_s(x', dy) D_k(x', y) \quad (X \in \mathcal{B}_M),$$

si $l_s(x') \neq 0$, et $R_s(x', .) = \varepsilon_{x_0}$ (où x_0 est un point fixé de $\mathring{M}$) si $l_s(x') = 0$ [dans ce dernier cas, on a,

$$N_s(x', M \setminus \{x'\}) = 0$$

d'après (II.3.3), donc $b_s^j(x') = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, et la relation (II.3.6) se réduit à l'identité

$$\frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x')) = \frac{1}{s}(N_s(x', \{x'\}) - 1)u(x')] \text{ (}^1\text{)}.$$

On note que les fonctions b_s, b_s^j, l_s sont boréliennes sur E_k et que R_s est un noyau positif borélien de E_k dans M.

γ) On va maintenant transporter la mesure $R_s(x', .)$ $(x' \in E_k)$ sur un compactifié de $M \setminus \{x'\}$ auquel la fonction $\tilde{u}(x', .)$ peut être prolongée continûment. Pour cela, on pose,

$$w(x', y) = \frac{\chi_k^n(y)}{D_k(x', y)}$$

et

$$\xi^{ij}(x', y) = \frac{(\chi_k^i(y) - \chi_k^i(x'))(\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x'))}{D_k(x', y)}$$

$(x' \in E_k,\ y \in M \setminus \{x'\},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n-1)$, et on note que $w(x', y) \in [0, 1]$, $\xi^{ij}(x', y) \in [-1, 1]$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n-1)$,

(II.3.7)
$$w(x', y) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi^{ii}(x', y) = 1 \quad (x' \in E_k,\ y \in M \setminus \{x'\})$$

[1] L'indice k étant fixé dans la suite, on ne le fait pas figurer dans b_s, b_s^j, l_s, R_s qui cependant en dépendent.

et que la matrice $\xi(x', y) = [\xi^{ij}(x', y)]_{1 \leqslant i, j \leqslant n-1}$ est symétrique et positive.

Cela étant, on désigne par $\mathfrak{M}$ l'espace compact des matrices carrées $(n-1) \times (n-1)$ symétriques positives et à coefficients dans $[-1, 1]$, et on considère, pour chaque $x' \in E_k$, l'injection $\Phi_{x'}: y \to (y, w(x', y), \xi(x', y))$ de $M \setminus \{x'\}$ dans le sous-espace compact H du produit $M \times [0, 1] \times \mathfrak{M}$ formé des $h = (y, w, \xi)$ tels que,

$$w + \sum_{i=1}^{n-1} \xi^{ii} = 1. \tag{II.3.8}$$

La fonction $\tilde{u}(x', \Phi_{x'}^{-1}(.))$ sur $\Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})$ transportée par $\Phi_{x'}$ de la fonction $\tilde{u}_k(x', .)$ se prolonge en une fonction continue $\hat{u}_k(x', .)$. sur l'adhérence $H_{x'}$ de $\Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})$ dans H : en effet, en vertu de la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4), lorsque $\Phi_{x'}(y)$ tend vers le point $h = (x', w, \xi)$ de $H_{x'} \setminus \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})$, $\tilde{u}_k(x', y)$ a une limite qui vaut,

(II.3.9)
$$\hat{u}_k(x', h) = w \frac{\partial u}{\partial \chi_k^n}(x') + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \xi^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi_k^i \partial \chi_k^j}(x') \quad (x' \in E'_k).$$

Désignant alors, pour $x' \in E_k$ et $s > 0$, par $\hat{R}_s(x', .)$ la mesure $\geqslant 0$ sur l'espace compact H image de $R_s(x', .)$ par $\Phi_{x'}$, et notant encore $\hat{u}_k(x', .)$ un prolongement continu de $\tilde{u}(x', \Phi_{x'}^{-1}(.))$ à H (et plus seulement à $H_{x'}$), la relation (II.3.6) entraîne,

$$\begin{aligned}(\text{II.3.10}) \quad \frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x')) = &- b_s(x')u(x') \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} b_s^j(x') \frac{\partial u}{\partial \chi_k^j}(x') + l_s(x') \int_M \hat{R}_s(x', dh)\hat{u}_k(x', h).\end{aligned}$$

En outre, pour $s > 0$, $\hat{R}_s(x', dh)$ est un *noyau borélien* de E_k dans H ainsi qu'il résulte de ce que, pour chaque $\psi \in C(H)$, la fonction $(x', y) \to \psi(\Phi_{x'}(y))$ est borélienne sur $\{(x', y) | x' \in \partial M,\ y \in M \setminus \{x'\}\}$, et, pour chaque $x' \in E_k$, $\hat{R}_s(x', .)$ est une mesure $\geqslant 0$ sur H de *masse* 1 comme $R_s(x', .)$.

(1) L'indice k étant toujours fixé.

II.3.4. Démonstration du lemme de Ventcel' : passage à la limite dans la relation (II.3.10). α) On pose (1),

$$\text{(II.3.11)}\quad \theta_m(x') = b_{1/m}(x') + \sum_{j=1}^{n-1} |b^j_{1/m}(x')| + l_{1/m}(x') \qquad (x' \in \mathrm{E}_k,\ m \text{ entier} > 0)\ (^2),$$

$$\mathrm{E}'_k = \{x' | x' \in \mathrm{E}_k \quad \text{et} \quad \liminf_{m\to\infty} \theta_m(x') > 0\}$$

[E'_k est un sous-ensemble borélien de $\partial\mathrm{M}$], et on distingue le cas $x' \in \mathrm{E}_k \diagdown \mathrm{E}'_k$ et le cas $x' \notin \mathrm{E}_k \diagdown \mathrm{E}'_k$.

Pour $x' \in \mathrm{E}_k \diagdown \mathrm{E}'_k$, on pose $\delta(x') = 1$ et $\Gamma_{x'} = 0$ (3); et la relation (II.3.2) est ainsi satisfaite pour $x' \in \mathrm{E}_k \diagdown \mathrm{E}'_k$ (et $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{M})$ tel que $\lim\limits_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}(\mathrm{N}_s u(x') - u(x'))$ existe) en vertu de (II.3.10), puisqu'il existe alors une sous-suite $(\theta_{m_p}(x'))$ de $(\theta_m(x'))$ telle que $\lim\limits_{p\to\infty} \theta_{m_p}(x') = 0$.

γ) Afin d'étudier le cas où $x \in \mathrm{E}'_k$, on commence par extraire au moyen du lemme de mesurabilité (nº II.3.2) une sous-suite mesurable $(\theta_{m_p(x')}(x'))_{p\in\mathrm{N}}$ telle que,

$$\text{(II.3.12)}\quad \lim_{p\to\infty} \theta_{m_p(x')}(x') = \theta(x') \quad \text{et} \quad 0 < \theta(x') \leqslant +\infty$$

pour $x' \in \mathrm{E}'_k$.

Divisant alors les deux membres de (II.3.10) (écrite pour $m = m_p(x')$) par $\theta_{m_p}(x')$ (que l'on peut supposer > 0 d'après (II.3.12)), on obtient une relation de la forme,

$$\text{(II.3.13)}\quad \bar{\delta}_p(x') \frac{1}{s_p(x')} (\mathrm{N}_{s_p(x')} u(x') - u(x'))$$
$$= -\bar{b}_p(x') u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{b}^j_p(x') \frac{\partial u}{\partial \chi^j_k}(x') + \bar{l}_p(x') \int_{\mathrm{M}} \overline{\mathrm{R}}_p(x', dh) \hat{u}_k(x', h),$$

où $s_p(x') = 1/m_p(x')$, $\bar{\delta}_p(x') = 1/\theta_{m_p(x')}(x')$ et

$$\overline{\mathrm{R}}_p(x', .) = \hat{\mathrm{R}}_{s_p(x')}(x', .) \qquad (p \text{ entier} \geqslant 0,\quad x' \in \mathrm{E}'_k);$$

où les fonctions $\bar{\delta}_p$, $\bar{b}_p$, $\bar{b}^j_p$ et $\bar{l}_p$ sont boréliennes sur E'_k et

(1) L'indice k étant toujours fixé.

(2) On rappelle que b_s et l_s sont $\geqslant 0$.

(3) $\Gamma_{x'}$ désignant la forme linéaire $u \to \Gamma u(x')$ (nº II. 2.1).

en vertu de (II.3.11) vérifient la relation,

$$(\text{II}.3.14)\quad 1 = \overline{b}_p(x') + \sum_{j=1}^{n-1} \overline{b}_p^j(x') + \overline{l}_p(x') \qquad (p \text{ entier} \geqslant 0,\ x' \in E'_k);$$

et où $\overline{R}_p$ est un noyau borélien de E'_k dans H.

γ) Appliquant alors le lemme de mesurabilité aux suites de fonctions $(\overline{\delta}_p)$, $(\overline{b}_p)$, $(\overline{b}_p^j)$, $(\overline{l}_p)$ et $(\overline{R}_p)$ à valeurs respectivement dans les espaces compacts métrisables $[0, +\infty]$, $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $[0, 1]$ et $M^1(H)$ (1), et passant à la limite lorsque p tend vers l'infini dans (II.3.13) (2) et (II.3.14) on obtient des fonctions numériques $\delta'_k \geqslant 0$ (δ'_k est finie d'après (II.3.12)), $b'_k \geqslant 0$, b'^j_k $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et l'_k *boréliennes* sur E'_k et un noyau positif borélien R'_k de E'_k dans H de telle sorte que si $x' \in E'_k$ et si $u \in C^2(M)$ est telle que $\lim\limits_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x'))$ existe,

$$(\text{II}.3.15)\quad \delta'_k(x') \left\{ \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x')) \right\} = -\, b'_k(x')u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} b'^j_k(x') \frac{\partial u}{\partial \chi^j_k}(x') + l'_k(x') \int_M R'_k(x', dh)\hat{u}_k(x', h),$$

avec

$$(\text{II}.3.16)\quad 1 = b'_k(x') + \sum_{j=1}^{n-1} |b'^j_k(x')| + l'_k(x') \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \delta'_k(x') < +\infty$$

et la mesure $R'_k(x', .)$ étant de masse 1 comme les mesures $\overline{R}_p(x')$ $(x' \in E'_k)$.

δ) Afin d'expliciter l'intégrale au second membre de (II.3.15), on pose, pour $x' \in E'_k$,

$$(\text{II}.3.17)\quad \alpha_k(x') = l'_k(x') \int_{H \setminus \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})} R'_k(x', dh) W(h),$$

et

$$(\text{II}.3.18)\quad b^{ij}_k(x') = \frac{l'_k(x')}{2} \int_{H \setminus \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})} R'_k(x', dh) Z^{ij}(h) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n-1),$$

(1) Muni de la topologie vague.
(2) Passage à la limite possible puisque $\hat{u}_k(x, .) \in C(H)$.

où W (resp. Z) désigne la projection de $M \times [0, 1] \times \mathfrak{M}$ sur $[0, 1]$ (resp. $\mathfrak{M}$); et on désigne par $t_k(x', .)$ la mesure $\geqslant 0$ sur M définie par,

$$\text{(II.3.19)} \qquad t_k(x', \{x'\}) = 0$$

et

$$t_k(x', X) = l'_k(x') \int_{X \setminus \{x'\}} \tilde{t}_k(x', dy) \frac{1}{D_k(x', y)} \quad (X \in \mathcal{B}_M),$$

où $\tilde{t}_k(x', .)$ est la mesure $\geqslant 0$ sur $M \setminus \{x'\}$ image par $\Phi_{x'}^{-1}$ de la mesure induite par $R'_k(x', .)$ sur $\Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})$.

Les fonctions α_k et b_k^{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n-1)$ définies par (II.3.17) et (II.3.18) sont bornées et boréliennes sur E'_k en vertu de ce que l'ensemble $\{(x', h) | h \in \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})\}$ est borélien dans le produit $E'_k \times H$; et t_k, défini par (II.3.19), est un noyau borélien puisque, pour $X \in \mathcal{B}_M$, l'ensemble $\{(x', h) | h \in \Phi_{x'}(X)\}$ est borélien dans $E'_k \times H$. Enfin, par définition de t, et puisque $\tilde{t}_k$ est borné comme R'_k, la fonction

$$x' \to \int_M t_k(x', dy) D_k(x', y) = l'_k(x') \tilde{t}_k(x', M \setminus \{x'\})$$

est bornée sur E'_k, ainsi que la fonction

$$x' \to \int_M t_k(x', dy)(1 - \sigma(x', y)) f(y)$$

(propriété (NV_3) d'un noyau de Ventcel', nº II.2.3).

Faisant alors varier k, et juxtaposant les fonctions α_k, b_k^{ij}, $b_k'^{i} (1 \leqslant i, j \leqslant n-1)$, b'_k, et les noyaux t_k définis sur les ensembles E'_k avec zéro sur les ensembles $E_k \setminus E'_k$ (alinéa α) ci-dessus), on met, d'après (II.3.9), le second membre de (II.3.15) sous la forme (II.3.4) avec les propriétés (II.3.5); et (II.3.15) fournit la relation (II.3.2), en divisant toutefois les deux membres par $\delta'_k(x')$ sur l'ensemble $\{x' | \delta'_k(x') \geqslant 1\}$ pour s'assurer de la bornitude de δ.

ε) Enfin, la consistance de la condition (II.3.2) (propriété (a)) peut être obtenue ainsi : D'abord, si $x' \in E_k \setminus E'_k$, $\delta(x') = 1$ par définition. Ensuite, si $x' \in E'_k$, et si $b_k(x') = b_k^j(x') = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et $t_k(x', .) = 0$, on a $l_k(x') = 1$ d'après (II.3.16), et $R'_k(x', \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})) = 0$; donc $R'_k(x', .)$ étant de masse 1, $R'_k(x', H \setminus \Phi_{x'}(M \setminus \{x'\})) = 1$; d'où, en vertu de (II.3.17), (II.3.18) et (II.3.8) (nº II.3.3),

$$\text{(II.3.20)} \qquad \alpha_k(x') + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_k^{ii}(x') = l_k(x') = 1.$$

On en déduit facilement, compte tenu de (II.3.5), la propriété (*a*). c.q.f.d.

II.3.5. Quelques remarques sur la condition frontière de Ventcel'.

1) Le caractère « borélien et borné » obtenu ci-dessus (en rendant « mesurable » la méthode employée par Ventcel' dans [21]) pour les coefficients intervenant dans la condition frontière de Ventcel', conduit naturellement à introduire les opérateurs frontière de Ventcel' ainsi qu'on l'a fait au paragraphe II.2, et à exprimer la condition frontière en termes de ces opérateurs, ce qui est un premier pas important vers la construction de semi-groupes correspondant à une condition frontière donnée (voir le chapitre III ci-dessous et l'article de Sato et Ueno [20]).

2) Le problème est actuellement ouvert de savoir à quelle condition sur le semi-groupe (N_t) dont on part, il est possible de choisir δ et Γ plus réguliers que boréliens et bornés, par exemple, de classe C^0 ou $C^{0,\lambda}$.

Ce problème rejoint celui consistant à préciser la nature de l'indétermination du couple (δ, Γ) intervenant dans la condition frontière (II.3.1) [il est clair que si φ est une fonction de $B(\partial M)$ partout > 0, le couple $(\varphi\delta, \varphi\Gamma)$ est équivalent au couple (δ, Γ)].

3) Le caractère non dégénéré de la condition frontière obtenue (propriété (A) du Théorème XIII) entraîne que $\mathfrak{D}_A$ ne peut contenir $C^2(M)$ tout entier si la fonction δ est identiquement nulle. Toutefois, dans l'état actuel de la question, rien n'élimine le cas où, ayant au contraire $\delta(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$, et $\Gamma = 0$, la condition frontière (II.3.1) serait satisfaite pour tout $u \in C^2(M)$ grâce à une dégénérescence totale de A sur ∂M (cas susceptible de se présenter, par

exemple, lorsque A coïncide sur $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ avec un opérateur de diffusion, elliptique à l'intérieur et nul sur le bord).

4) Toujours en ce qui concerne la propriété (A) de la condition frontière (II.3.1), on peut se demander dans quels cas on peut choisir le couple (δ, Γ) vérifiant l'une ou l'autre des conditions de transversalité introduites aux n° II.2.8 et II.2.9. Une situation raisonnable (dans le cadre différentiable adopté ici) pour étudier cette question est celle où sont vérifiées les deux conditions suivantes :

(D_1) $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ est dense dans $C(M)$ [1].

(D_2) Le générateur infinitésimal $(\mathfrak{D}_A, A)$ est identique à la fermeture (dans $C(M)$) de l'opérateur $(C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A, A)$.

Cette situation sera réalisée pour les semi-groupes construits ci-dessous au chapitre III (voir la remarque 1 du n° III.2.8); voir aussi à ce sujet le Théorème XIV (n° II.4.1) et la remarque 1 du n° II.4.3 ci-dessous).

5) On notera toutefois que la situation régulière précédente est loin d'être la plus générale : Prenant, par exemple, pour M le segment $[0, 1]$, et pour (N_t) le semi-groupe de Feller sur $[0, 1]$, image du semi-groupe de Wiener-Lévy sur $R =]-\infty, +\infty[$ par l'application $x \to \gamma(x)$ définie par $\gamma(x) = |x - 2k|$ (ou k est l'unique entier tel que $|x - 2k| \leqslant 1$), on sait que le domaine de définition du générateur infinitésimal de (N_t) est exactement l'espace des fonctions $f \in C^2([0, 1])$ telles que $f'(0) = f'(1) = 0$ (voir Dynkin [4] chap. 2, § 3, n° 2.16, et chap. 10, § 6, n° 10.25 et 10.26). Il suffit alors de transformer (N_t) par un homéomorphisme $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ nulle part différentiable, pour obtenir un semi-groupe de Feller sur $[0, 1]$ pour lequel (D_1) n'est pas satisfaite.

On renvoie à ce sujet aux travaux de Feller (voir [7]) et aux chapitres 15 et 17 du livre de Dynkin [4].

6) Dans le lemme de Ventcel' on peut, d'une part, sans modifier la conclusion, supprimer le caractère de semi-groupe des hypothèses faites sur la famille $(N_s)_{s>0}$, et même ne considérer qu'une famille $(N_{s_n})_{n \in N}$ où (s_n) est une suite décroissant vers 0. D'autre part, dans la conclusion (b) n'imposer

[1] On notera l'absence d'hypothèse, dans le Théorème XII, concernant l'étendue de $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$.

à $u \in C(M)$ la classe C^2 qu'au voisinage de x' ($\Gamma_{x'}$ opère naturellement sur de telles fonctions).

II.3.6. Le théorème XIII (n° II.3.1), joint au théorème de Hille-Yosida-Ray (n° 0.2.4) entraîne le résultat suivant qui peut être considéré comme une réciproque du Théorème XI (n° II.2.8) et fournit une réponse partielle à la question de la remarque 2 du n° II.2.8 :

PROPOSITION. — *Soient* $\mathfrak{U}$ *un sous-espace vectoriel de* $C^2(M)$ *et* W *une application linéaire de* $\mathfrak{U}$ *dans* $C(M)$ *tels que,*

(1) $\mathfrak{U}$ *est dense dans* $C(M)$,

(2) *Il existe un nombre* $\beta \geqslant 0$ *tel que l'espace* $(\beta - W)(\mathfrak{U})$ *soit dense dans* $C(M)$.

(3) $u \in \mathfrak{U}$, $x \in M$ *et* $u(x) = \sup u \geqslant 0 \Longrightarrow Wu(x) \leqslant 0$.

Alors, il existe une fonction positive δ *de* $B(\partial M)$ *et un opérateur frontière de Ventcel'* Γ *sur* M *tels que,*

(A) *pour tout* $x' \in \partial M$, *ou bien* $\delta(x') > 0$, *ou bien il existe* $u \in C^2(M)$ *telle que* $\Gamma u(x') \neq 0$.

(B) *pour tout* $u \in \mathfrak{U}$, $\Gamma u - \delta . \gamma^0 W u = 0$.

§ II.4. Forme du générateur infinitésimal : cas d'une variété à bord.

II.4.1. Dans tout ce paragraphe II.4, M désignera une variété à bord compacte de classe C^∞ et de dimension $n \geqslant 1$; le bord ∂M pouvant éventuellement être vide.

Le théorème suivant étend au cas « avec bord » le Théorème IX (n° II.1.1) du cas « sans bord » :

THÉORÈME XIV. — *Soient* (N_t) *un semi-groupe de Feller sur la variété à bord compacte* M, *et* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *son générateur infinitésimal. On suppose que,*

(D_1') *Pour tout* $x \in \mathring{M}$, *il existe un voisinage* V *de* x *tel que, pour toute fonction* $\varphi \in C^\infty(M)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $u \in \mathfrak{D}_A$ *pour laquelle,*

$$\text{(II.4.1)} \quad \|u - \varphi\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{et} \quad u = \varphi \quad \textit{sur} \quad V.$$

Alors, il existe un opérateur de Waldenfels W *sur* M *de classe* C^0 *sur* $\mathring{M}$ (nº I.3.3) *tel que,*

(II.4.2)
$$Au(x) = Wu(x) \qquad pour \qquad x \in \mathring{M} \qquad et \qquad u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A.$$

On note que la propriété (D'_1) est satisfaite lorsque, M étant une variété sans bord, $C^\infty(M)$ est contenu dans $\mathfrak{D}_A$ (hypothèse du Théorème IX (nº II.1.1; voir à ce sujet les remarques 1 et 2 du nº II.4.3 ci-dessous).

II.4.2. La démonstration du Théorème XIV va reposer sur le lemme suivant :

Lemme. — *Avec les notations et sous l'hypothèse* (D'_1) *du théorème* XIII, *pour chaque* $x \in \mathring{M}$ *on désigne par* $\tilde{\mathfrak{U}}_x$ *le sous-espace vectoriel de* C(M) *formé des fonctions* $\varphi \in C(M)$ *pour lesquelles il existe une suite* (u_n) *de fonctions de* $\mathfrak{D}_A$ *telle que,*

(P_x) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \varphi\| = 0$ *et il existe un voisinage* V *de* x *tel que* $u_n = \varphi$ *sur* V *pour tout* n.

On pose de plus $\tilde{\mathfrak{U}} = \bigcap\limits_{x\in\mathring{M}} \tilde{\mathfrak{U}}_x$. *Alors,*

(1) $\mathfrak{D}_A \subset \tilde{\mathfrak{U}}$ *et* $C^\infty(M) \subset \tilde{\mathfrak{U}}$.

(2) *Il existe une application linéaire* $\tilde{A}$ *de* $\tilde{\mathfrak{U}}$ *dans* $C(\mathring{M})$ *et une seule telle que, pour tout* $x \in \mathring{M}$,

(II.4.3) $\tilde{A}u(x) = Au(x)$ *pour tout* $u \in \mathfrak{D}_A$

(II.4.4) $\tilde{A}\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n(x)$ *pour tout* $\varphi \in \tilde{\mathfrak{U}}$

et toute suite (u_n) *de fonctions de* $\mathfrak{D}_A$ *ayant la propriété* (P_x).

3) $\tilde{A}$ *satisfait au principe du maximum positif,*

(II.4.5)
$$\varphi \in \tilde{\mathfrak{U}},\ x \in \mathring{M} \qquad et \qquad \varphi(x) = \sup \varphi \geqslant 0 \Longrightarrow \tilde{A}\varphi(x) \leqslant 0.$$

Voici une démonstration de ce lemme :

α) La relation $\mathfrak{D}_A \in \tilde{\mathfrak{U}}$ résulte immédiatement de la définition de $\tilde{\mathfrak{U}}$ puisque, pour $\varphi \in \mathfrak{D}_A$, on peut prendre $u_n = \varphi$

pour tout n; et la relation $C^\infty(M) \subset \mathfrak{U}$ est conséquence directe de l'hypothèse (D'_1).

β) Pour chaque $x \in \mathring{M}$ et chaque voisinage ouvert U de x dans $\mathring{M}$, il existe des ouverts relativement compacts U_1 et U_2 de $\mathring{M}$ tels que $x \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U$, et une constante $C > 0$ de telle sorte que, pour toute fonction $u \in \mathfrak{D}_A$ nulle sur U_2 on ait,

$$\text{(II.4.6)} \quad |Au(y)| \leqslant C\|u\| \qquad \text{pour tout} \qquad y \in U_1.$$

En effet, x et U étant donnés, il existe, en vertu de (D'_1) des ouverts U_1 et U_2 de $\mathring{M}$ tels que

$$x \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U,$$

et une fonction $\psi \in \mathfrak{D}_A$, positive, nulle sur U_1 et $\geqslant 1$ sur $M \setminus U_2$. Alors, si $u \in \mathfrak{D}_A$ est nulle sur U_2, on a,

$$-\|u\|\psi \leqslant u \leqslant \|u\|\psi;$$

donc, puisque A satisfait au principe du maximum positif sur $\mathfrak{D}_A$ (n° 0.2.3), on a, pour $y \in U_1$,

$$-\|u\|A\psi(y) \leqslant Au(y) \leqslant \|u\|A\psi(y);$$

d'où (II.4.6) et la propriété annoncée en prenant $C = \|A\psi\|$.

γ) Cela étant, $\varphi \in \mathfrak{U}$ étant donné, on définit, pour $x \in \mathring{M}$, $\tilde{A}\varphi(x)$ par la relation (II.4.4), où (u_n) est une suite de fonctions de $\mathfrak{D}_A$ liée à φ par la propriété (P_x), après avoir remarqué que la propriété établie en β) ci-dessus assure que $\lim_{n\to\infty} Au_n(x)$ est indépendant de la suite choisie (liée à φ par la propriété (P_x)); la relation (II.4.3) est ainsi satisfaite pour tout $x \in \mathring{M}$. De plus, on note que, $x_0 \in \mathring{M}$ étant donné, si (u_n) est une suite de fonctions de $\mathfrak{D}_A$ liée à φ par la propriété (P_{x_0}), il existe un voisinage V de x_0 tel que (u_n) soit aussi liée à φ par la propriété (P_x) pour tout $x \in V$; ce qui permet de poser $\tilde{A}\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} Au_n(x)$ pour tout $x \in V$, et entraîne la *continuité de* $\tilde{A}\varphi$ en x_0 puisque, en vertu de la propriété établie en β, la convergence de la suite (Au_n) a lieu uniformément au voisinage de x_0. La propriété (2) est ainsi établie.

δ) Afin d'établir (3), soit $\varphi \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et $x \in \dot{M}$ tels que

$$\varphi(x) = \sup \varphi \geqslant 0.$$

Par définition de $\tilde{A}$, il existe un voisinage V de x et une suite (u_n) de fonctions de $\mathfrak{D}_A$ tels que, pour chaque entier n,

(II.4.7)

$$\|u_n - \varphi\| \leqslant \frac{1}{n}, \; u_n = \varphi \quad \text{sur} \quad V \quad \text{et} \quad |\tilde{A}\varphi(x) - Au_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, en vertu de (D_1'), il existe une fonction $\psi \in \mathfrak{D}_A$, et un voisinage V_1 de x tels que $V_1 \subset V$, $\psi \leqslant 1$, $\psi(x) = 1$ et $\psi(y) \leqslant 0$ pour tout $y \notin V_1$. Posant alors, pour chaque n, $v_n = u_n + \frac{1}{n}\psi$, on a,

$$v_n \in \mathfrak{D}_A \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \sup v_n = \varphi(x) + \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

Donc, d'après le principe du maximum positif de A,

(II.4.8) $$Av_n(x) \leqslant 0.$$

On en déduit $\tilde{A}\varphi(x) \leqslant 0$ en faisant tendre n vers l'infini dans la relation,

$$\tilde{A}\varphi(x) = \tilde{A}\varphi(x) - Au_n(x) + Av_n(x) - \frac{1}{n}A\psi(x)$$
$$\leqslant \frac{1}{n}(1 + |A\psi(x)|),$$

elle-même conséquence de (II.4.7) et (II.4.8).

c.q.f.d.

Le théorème XIV résulte alors du Théorème V (nº I.3.1) : en effet, posant $\mathfrak{V} = C^2(M) \cap \tilde{\mathfrak{U}}$, on a $C^\infty(M) \subset \mathfrak{V}$ d'après la propriété (1) du lemme; donc, en vertu de la propriété (3) et du Théorème V, $\tilde{A}$ coïncide sur $\mathfrak{V}$ avec un opérateur de Waldenfels W sur M; et W applique $C^\infty(M)$ dans $C(\dot{M})$ comme $\tilde{A}$; donc W, étant continu de $C^2(M)$ dans $B_{Loc}(\dot{M})$ (Théorème V), W applique aussi $C^2(M)$ dans $C(\dot{M})$; autrement dit, W est de classe C^0 sur $\dot{M}$ (nº I.3.3).

II.4.2

Enfin, on a, pour $x \in \mathring{M}$,

$$Au(x) = \tilde{A}u(x) \quad \text{si} \quad u \in \mathfrak{D}_A \quad \text{(relation (II.4.3))},$$

et

$$\tilde{A}u(x) = Wu(x) \quad \text{si} \quad u \in C^2(M) \cap \tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{V}.$$

D'où (II.4.2) et le théorème XIV. c.q.f.d.

II.4.3. Quelques remarques sur le théorème XIV.

1) Les semi-groupes qui sont construits au chapitre III possèdent la propriété (D_1') intervenant dans le Théorème XIV, et même la propriété (D_1'') ci-dessous qui l'implique :

(D_1'') Pour tout compact K contenu dans $\mathring{M}$, tout $\varphi \in C^\infty(M)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction

$$u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$$

telle que,

$$\text{(II.4.9)} \quad \|u - \varphi\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad u = \varphi \quad \text{sur} \quad K.$$

(voir le n° III.2.9).

On notera que la propriété (D_1'') implique que $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ est dense dans $C(M)$ (propriété (D_1), n° II.3.5 remarque 4), mais qu'il n'en est pas de même de (D_1').

Tenant compte de la forme de la condition frontière de Ventcel' (II.3.1) (n° II.3.1), on peut dire de façon heuristique que la propriété (D_1'') tient au fait que Γ est de *degré* 0 *à l'intérieur de* M *et de degré* 1 *au moins au bord* ce qui permet, partant d'une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ et la modifiant uniquement au voisinage du bord et de moins de ε en norme uniforme d'obtenir une fonction u satisfaisant la condition frontière $\Gamma u = \delta . \gamma^0 A u$, donc présumée être dans $\mathfrak{D}_A$.

En particulier, lorsque Γ est quasi local et A local, (D_1'') peut être obtenue comme conséquence de (D_1) et de la relation $C_k^\infty(\mathring{M}) \subset \mathfrak{D}_A$.

2) La situation envisagée dans le Théorème XIV concerne le cas des semi-groupes de Feller dont le domaine du générateur infinitésimal contient « suffisamment » de fonctions de classe C^2, cas qui n'est pas le plus général ainsi que le montre l'exemple introduit dans la remarque 5 du n° II.3.5 ci-dessus.

3) Le théorème XIV ne fournit aucune indication sur la régularité au bord de l'opérateur de Waldenfels W obtenu. On peut seulement affirmer que la fonction Wu se prolonge continûment au bord pour chaque fonction u appartenant à $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$ c'est-à-dire vérifiant la condition frontière de Ventcel'. La manière dont un tel prolongement peut avoir lieu est illustrée par l'exemple suivant : on prend pour M le segment $[0, 1]$ et on définit W par,

$$Wu(x) = u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) \quad (x \in \mathring{M} =]0, 1[, \ u \in C^2(M));$$

avec la condition frontière de Neumann :

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Un développement de Taylor montre alors que,

$$u'(0) = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad \lim_{x \downarrow 0} Wu(x) = 2u''(0).$$

(voir à ce sujet Feller [5] et le chapitre 15 du livre de Dynkin [4]).

4) Le Théorème XIV s'étend sans difficulté au cas d'un semi-groupe de Feller sur une variété à bord non compacte.

CHAPITRE III

SOLUTIONS HÖLDÉRIENNES DE PROBLÈMES AUX LIMITES INTÉGRO-DIFFÉRENTIELS ELLIPTIQUES ET CONSTRUCTION DE SEMI-GROUPES DE FELLER

Dans ce troisième chapitre, on considère, sur la variété à bord compacte M, des opérateurs de Waldenfels elliptiques de classe $C^{p,\lambda}$ en ce sens que, dans leur décomposition $W = P + S$, P est elliptique de classe $C^{p,\lambda}$ sur M et S est compact de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ (n° III.1.3).

Dans le paragraphe III.1, on résout, pour ces opérateurs, le problème de Dirichlet dans l'espace $C^{p+2,\lambda}(M)$ (Théorème XV (n° III.1.4), on introduit l'opérateur de Green et l'opérateur harmonique correspondants, et on construit le semi-groupe de Feller associé sur $\mathring{M}$ (Théorèmes XVI et XVI', n° III.1.7 et III.1.8) après avoir établi diverses propriétés de sa résolvante (n° III.1.6).

Dans le paragraphe III.2, on résout d'abord, dans l'espace $C^{p,\lambda}(M)$, les problèmes aux limites $Wu = -f$, $\Gamma u = -\varphi$ associés à un opérateur frontière de Ventcel' elliptique Γ, d'ordre 1 (Théorème XVII, n° III.2.2) et d'ordre 2 (Théorème XVIII, n° III.2.3) On construit ensuite, d'une part un semi-groupe de Feller sur M correspondant à l'opérateur de Waldenfels W et à la condition frontière de Ventcel' $Lu = \Gamma u - \delta\gamma^o Wu = 0$ (relation (*i*) de l'introduction avec $\mathfrak{U} = \{u | u \in C^2(M)$ et $Lu = 0\}$; Théorème XIX, n° III.2.8) et d'autre part un semi-groupe de Feller sur ∂M dont le générateur infinitésimal coïncide avec l'opérateur LH_β sur $C^{2,\lambda}(\partial M)$, où H_β $(\beta \geqslant 0)$ est l'opérateur harmonique de $W - \beta$ (Théorème XX, n° III.2.10). Le Théorème de Hille-

Yosida-Ray et les propriétés de maximum établies au paragraphe II.2 ramènent ces constructions à celles des résolvantes des semi-groupes en question; c'est-à-dire à l'étude des opérateurs G_β et $\bar{J}_\beta$ résolvant les problèmes aux limites:

$$(\beta - W)u = f, \qquad Lu = 0$$
$$(\beta - W)u = 0, \qquad Lu = -\varphi \quad (\text{n}^\text{o}\ \text{III.2.5});$$

et, plus particulièrement en ce qui concerne la densité dans $C(M)$ du domaine $\mathcal{U}$, aux liens introduits par Sato et Ueno dans [20] entre la transversalité de l'opérateur frontière L et la relation $\lim_{\beta \to +\infty} \|\beta G_\beta f - f\| = 0$ (nº III.2.7).

Dans le paragraphe III.3, on établit que les opérateurs de Lévy et les opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy de classe C^0 sont compacts de C^2 dans C (Théorèmes XXI et XXI′, nº III.3.4 et III.3.5); et on en déduit, par interpolation entre les espaces C et $C^{p,\lambda}$ (appendice 2) que ces opérateurs sont compacts de $C^{p+2,\lambda}$ dans $C^{p,\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$ dès qu'ils appliquent $C^{p+2,\mu}$ dans $C^{p,\mu}$ pour un nombre $\mu > \lambda$ (Théorème XXII, nº III.3.6). On décrit enfin diverses classes de noyaux donnant naissance à de tels opérateurs, dont certains ne sont d'ordre η pour aucun $\eta < 2$ (Théorèmes XXIII et XXIV nº III.3.9 et III.3.10, et remarque 1 du nº III.3.9).

§ III.1. Résolution du Problème de Dirichlet pour les opérateurs de Waldenfels elliptiques de classe $C^{p,\lambda}$.

III.1.1. Fonctions Höldériennes. Si Ω est un ouvert de R^n ou de $\overline{R^{n+}}$ (nº 0.1.1), et si $0 < \lambda \leqslant 1$, on désignera par $C_k^{0,\lambda}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $C_k(\Omega)$ (nº 0.1.1) formé des fonctions f telles que,

$$(\text{III.1.1}) \qquad [f]_\lambda = \sup_{\substack{x\in\Omega,\, y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\lambda} < +\infty.$$

Si p est un entier $\geqslant 0$, on désignera par $C_k^{p,\lambda}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $C_k^p(\Omega)$ formé des fonctions $f \in C_k^p(\Omega)$ telles que, les dérivées $D^\alpha f$ appartiennent à $C_k^{0,\lambda}(\Omega)$ pour $0 \leqslant |\alpha| \leqslant p$.

Pour $f \in C_k^{p,\lambda}(\Omega)$, on posera,

(III.1.2) $$\|f\|_{p,\lambda,\Omega} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant p} \|D^\alpha f\| + [D^\alpha f]_{0,\lambda}.$$

On désignera par $C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(\Omega)$ le sous-espace de $C^p(\Omega)$ formé des fonctions f telles que $f\varphi \in C_k^{p,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\varphi \in C_k^\infty(\Omega)$.

Sur la variété à bord M (nº 0.1.1), on désignera par $C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(M)$ (p entier $\geqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$) le sous-espace vectoriel de $C^p(M)$ formé des fonctions $f \in C^p(M)$ telles que, pour toute carte locale (U, χ) de M, la fonction $f \circ \chi^{-1}$ appartienne à $C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(\chi(U))$. Si $f \in C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(M)$, on dira que f *est de classe* $C^{p,\lambda}$. On posera $C_k^{p,\lambda}(M) = C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(M) \cap C_k(M)$. $C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(M)$ et $C_k^{p,\lambda}(M)$ sont des sous-algèbres de $C(M)$.

III.1.2. Espace de Banach $C^{p,\lambda}(M)$. Dans tout le chapitre III, la variété à bord M (nº 0.1.1) est supposée *compacte.* On notera alors $C^{p,\lambda}(M)$ au lieu de $C_{\mathrm{Loc}}^{p,\lambda}(M)$; et, désignant par $(U_s, \chi_s)_{s \in S}$ un recouvrement *fini* de M par des cartes locales, et par $(\varphi_s)_{s \in S}$ une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à ce recouvrement, on posera, pour $f \in C^{p,\lambda}(M)$,

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sum_{s \in S} \|f\varphi_s\|_{p,\lambda,\chi_s(U_s)}.$$

On définit ainsi une norme $\| \ \|_{p,\lambda}$ sur $C^{p,\lambda}(M)$ qui en fait un espace de Banach. L'espace vectoriel $C^{p,\lambda}(M)$ sera toujours muni de la topologie d'espace de Fréchet « Banachisable » définie par la norme $\| \ \|_{p,\lambda}$. On note que cette topologie ne dépend pas du système (U_s, χ_s, φ_s) choisi, et que, sur $C^{0,\lambda}(M)$, elle est aussi définie par la norme

$$f \to \|f\| + \sup_{\substack{x \in M,\, y \in M \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\overline{xy}^\lambda},$$

où $\overline{xy}$ désigne la distance géodésique associée à une métrique Riemanienne sur M.

L'espace $C^{p,\lambda}(\partial M)$ étant traité de la même manière, la restriction au bord $u \to \gamma^0 u$ est une application linéaire continue de $C^{p,\lambda}(M)$ sur $C^{p,\lambda}(\partial M)$. En outre,

LEMME. — *Soient* p *un entier* $\geqslant 0$ *et* λ, μ *deux nombres réels tels que* $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$.

(1) $C^{p+1}(M) \subset C^{p,\mu}(M) \subset C^{p,\lambda}(M) \subset C^{p}(M)$.

(2) *La boule unité fermée de* $C^{p,\mu}(M)$ *est compacte dans* $C^{p,\lambda}(M)$ *et dans* $C^{p}(M)$.

(3) *La boule unité fermée de* $C^{p+1}(M)$ *est relativement compacte dans* $C^{p,\lambda}(M)$.

(Les propriétés (2) et (3) sont des conséquences élémentaires du Théorème d'Ascoli).

On dira qu'un opérateur différentiel Q sur M d'ordre q (nº 0.1.3) est *de classe* $C^{p,\lambda}$ s'il applique $C^{p+q,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$; il faut et il suffit pour cela que, dans chaque carte locale (U, χ) de M ses coefficients appartiennent à $C^{p,\lambda}_{\mathrm{Loc}}(U)$. L'opérateur Q est alors continu de $C^{p+q,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$; et, en vertu du lemme ci-dessus, il est compact de $C^{p+q+1,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ et de $C^{p+q,\lambda}(M)$ dans $C^{p-1,\lambda}(M)$ si $p \geqslant 1$.

III.1.3. Opérateurs de Waldenfels elliptiques de classe $C^{0,\lambda}$. On dira qu'un opérateur de Waldenfels (nº I.3.1) sur la variété à bord compacte M est *elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ (p entier $\geqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$) s'il est de la forme $W = P + S$, où

(E_1) P est un opérateur de diffusion sur M elliptique [1] de classe $C^{p,\lambda}$ (nº 0.1.3 et III.1.2).

(E_2) S est un opérateur de Lévy sur M (nº I.2.6) appliquant $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ et compact de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$.

L'opérateur de Lévy S est alors de classe C^0 (proposition I.2.7 propriété (2)), et W est elliptique décomposable de classe C^0 (nº I.4.1) et applique continûment $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$.

On établira au nº III.3.6 ci-dessous que tout opérateur de Lévy sur M appliquant continûment $C^{p+2,\mu}(M)$ dans $C^{p,\mu}(M)$ $(0 < \mu < 1)$ est compact de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ pour tout λ tel que $0 < \lambda < \mu$. Il en résulte, en particulier, que tout opérateur de Waldenfels sur M elliptique décomposable de classe C^0 appliquant $C^{p+2,\mu}(M)$ dans $C^{p,\mu}(M)$ est elliptique de classe $C^{p,\lambda}$ (au sens précédent) pour tout λ tel que $0 < \lambda < \mu$ [le problème est ouvert de savoir s'il l'est aussi pour $\lambda = \mu$] [1].

[1] En vertu du théorème du graphe fermé, un tel opérateur est continu de $C^{p+2,\mu}(M)$ dans $C^{p,\mu}(M)$.

III.1.4. Problème de Dirichlet pour les opérateurs de Waldenfels elliptiques de classe $C^{0,\lambda}$.

THÉORÈME XV. — *Soit* W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ *(p entier* $\geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$) *sur la variété à bord compacte* M [1]. *On suppose que, sur chaque composante connexe de* M *dont le bord est vide, la fonction* W1 *n'est pas identiquement nulle. Alors, l'application*

$$u \to (\mathrm{W}u,\ \gamma^0 u)$$

est un isomorphisme de $C^{p+2,\lambda}(M)$ *sur* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+2,\lambda}(\partial M)$.

COROLLAIRE 1. — *On suppose que chaque composante connexe de* M *a un bord non vide. Alors, pour tout opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ *sur* M, *l'application*

$$u \to (\mathrm{W}u,\ \gamma^0 u)$$

est un isomorphisme de $C^{p+2,\lambda}(M)$ *sur* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+2,\lambda}(\partial M)$.

COROLLAIRE 2. — *Pour tout opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ *sur* M, *et pour tout* $\beta > 0$, *l'application* $u \to (\mathrm{W}u - \beta u,\ \gamma^0 u)$ *est un isomorphisme de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *sur* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+2,\lambda}(\partial M)$.

Les corollaires découlent immédiatement du Théorème. On va établir celui-ci à partir du résultat classique suivant :

LEMME. — *Si* P *est un opérateur différentiel elliptique du second ordre et de classe* $C^{p,\lambda}$ *sur la variété à bord compacte* M, *l'application* $u \to (\mathrm{P}u,\ \gamma^0 u)$ *est d'indice zéro de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+2,\lambda}(\partial M)$.

(Voir, par exemple, Miranda [11] pour le cas où M est un ouvert de R^n ($n \geqslant 2$) et les exposés n° 3 et 4 du séminaire [18] pour le cas général).

On en déduit comme suit le Théorème XV : soit $\mathrm{W} = \mathrm{P} + \mathrm{S}$ une décomposition de W où P et S ont les propriétés (E_1) et (E_2) du n° III.1.3. L'application $u \to (\mathrm{P}u,\ \gamma^0 u)$ est d'indice zéro dans les espaces considérés en vertu du lemme, et

[1] La dimension n de M est quelconque ($n \geqslant 1$) ; ∂M peut être vide, et ni M ni ∂M ne sont supposées connexes ou orientables (n° 0.1.1).

l'application $u \to (Su, 0)$ est compacte en vertu de l'hypothèse (E_2). Donc, en vertu du Théorème de stabilité de l'indice (appendice 1), l'application

$$u \to (Wu, \gamma^0 u) = (Pu, \gamma^0 u) + (Su, 0)$$

est d'indice zéro. D'où le théorème XV, puisque cette application est injective d'après le corollaire 2 du Théorème VII (nº I.4.1). c.q.f.d.

III.1.5. Opérateur de Green et opérateur harmonique. Soit W un opérateur de Waldenfels elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ [1] sur la variété à bord compacte M (nº III.1.1 et III.1.3)[2]. Pour un tel opérateur, on a à considérer la propriété :

(U^0) Sur chaque composante connexe de M dont le bord est vide la fonction W1 n'est pas identiquement nulle.

a) On suppose que la propriété (U^0) est satisfaite [3].

En vertu du théorème XV, on définit alors des opérateurs linéaires continus G^0 et H respectivement de $C^{0,\lambda}(M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ et de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ par les relations,

pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, on a,

$$\begin{array}{ll} \text{(III.1.3)} \\ \text{(III.1.4)} \end{array} \quad G^0 f \in C^{2,\lambda}(M) \quad \text{et} \quad \begin{cases} -WG^0 f = f \\ \gamma^0 G^0 f = 0; \end{cases}$$

pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, on a,

$$\begin{array}{ll} \text{(III.1.5)} \\ \text{(III.1.6)} \end{array} \quad H\varphi \in C^{2,\lambda}(M) \quad \text{et} \quad \begin{cases} WH\varphi = 0 \\ \gamma^0 H\varphi = \varphi. \end{cases}$$

De plus, en vertu du corollaire 2 du Théorème VII (nº I.4.1) :

$$\begin{array}{lll} f \in C^{0,\lambda}(M) & \text{et} & f \geqslant 0 \Longrightarrow G^0 f \geqslant 0; \\ \varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M) & \text{et} & \varphi \geqslant 0 \Longrightarrow H\varphi \geqslant 0. \end{array}$$

D'où il résulte sur G^0 et H se prolongent en des opérateurs linéaires *bornés et positifs*, encore notés G^0 et H, de C(M) dans C(M) et de C(∂M) dans C(M) respectivement qui seront appelés *opérateur de Green* et *opérateur harmonique* de

[1] Voir la remarque 3 du nº III.2.8.

[2] Nº 0.1.; ∂M peut être vide.

[3] Il en est ainsi, en particulier, si chaque composante connexe de M a un bord non vide.

l'opérateur W [ayant la propriété (U^o)]; les noyaux correspondants (n° 0.1.5) $G^o(x, dy)$ et $H(x, dy')$ de M dans M et de M dans ∂M étant appelés *noyau de Green* et *noyau harmonique* de W.

On notera aussi couramment G_0^o et H_0 au lieu de G^o et H. On remarque que l'on a, en plus de (III.1.4) et (III.1.6),

(III.1.7) $\quad \gamma^o G_0^o f = 0 \quad$ pour $\quad f \in C(M)$,
(III.1.8) $\quad \gamma^o H_0 \varphi = \varphi \quad$ pour $\quad \varphi \in C(\partial M)$.

b) Dans le cas général [l'opérateur W ne possédant pas nécessairement la propriété (U^o)], pour chaque $\beta > 0$, l'opérateur $W - \beta$ possède la propriété (U^o); on notera G_β^o et H_β respectivement l'opérateur de Green et l'opérateur harmonique de $W - \beta$. G_β^o et H_β appliquent respectivement $C^{0,\lambda}(M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$ et $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$, et on a,

(III.1.9)
pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\quad G_\beta^o f \in C^{2,\lambda}(M) \quad$ et $\quad (\beta - W)G_\beta^o f = f$.
(III.1.10) pour $f \in C(M)$, $\quad G_\beta^o f \in C(M) \quad$ et $\quad \gamma^o G_\beta^o f = 0$.

(III.1.11)
pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, $\quad H_\beta \varphi \in C^{2,\lambda}(M) \quad$ et $\quad (\beta - W)H_\beta \varphi = 0$.
(III.1.12) pour $\varphi \in C(\partial M)$, $\quad H_\beta \varphi \in C(M) \quad$ et $\quad \gamma^o H_\beta \varphi = \varphi$.

III.1.6. Voici diverses propriétés des familles d'opérateurs $(G_\beta^o)_{\beta \geqslant 0}$ et $(H_\beta)_{\beta \geqslant 0}$ qui interviendront dans la suite. Lorsque W est un opérateur de diffusion, les trois premières sont classiques; les autres sont établies par Sato et Ueno dans [20] (paragraphes 2 et 4) [1] :

PROPOSITION [2]. — (1) *Pour chaque* $\beta > 0$, $\|G_\beta^o\| \leqslant \dfrac{1}{\beta}$.

(1') *Pour chaque* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *si* (U^o) *est satisfaite*, $\|H_\beta\| \leqslant 1$.

(2) *pour* $f \in C(M)$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *ou* $\beta' = 0$ *si l'hypothèse* (U^o) *est satisfaite*,

(III.1.13) $\quad G_\beta^o f - G_{\beta'}^o f + (\beta - \beta')G_\beta^o G_{\beta'}^o f = 0$

[1] Voir aussi l'exposé n° 6 du séminaire [17].
[2] Avec les notations et hypothèses du n° III.1.5 (alinéa *b*)).

(3) *Pour* $u \in C(M)$ *telle que* $\gamma^0 u = 0$, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \|\beta G^0_\beta u - u\| = 0$.

(4) *Pour* $u \in C(M)$ *et* $x \in \mathring{M}$, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \beta G^0_\beta u(x) - u(x) = 0$.

(5) *Pour* $\varphi \in C(\partial M)$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$ *et pour* $\beta = 0$ *ou* $\beta' = 0$ *si l'hypothèse* (U^0) *est satisfaite,*

$$\text{(III.1.14)} \quad H_\beta \varphi - H_{\beta'} \varphi + (\beta - \beta') G^0_\beta H_{\beta'} \varphi = 0.$$

(6) *Pour* $\beta > 0$, $\beta' > 0$ *et* $\varphi \in C(\partial M)$.

$$\beta \leqslant \beta' \quad \text{et} \quad \varphi \geqslant 0 \Longrightarrow H_\beta \varphi \geqslant H_{\beta'} \varphi.$$

(7) *pour* $\varphi \in C(\partial M)$ *et* $x \in \mathring{M}$, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} H_\beta \varphi(x) = 0$.

(8) *Désignant par* ν *un champ de vecteurs de classe* C^0 *sur* ∂M *strictement dirigé vers l'intérieur de* M (n° 0.1.1), *lorsque* β *tend vers* $+\infty$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu} H_\beta 1$ *décroit vers* $-\infty$ *uniformément sur* ∂M.

(9) *pour* $u \in C(M)$, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \|\beta G^0_\beta u + H_\beta(\gamma^0 u) - u\| = 0$.

En effet :

a) La propriété (1) résulte de ce que les relations $G^0_\beta 1 = 0$ et $\gamma^0 G^0_\beta 1 = 0$ entraînent que $G^0_\beta 1$, n'étant pas identiquement nulle, atteint son maximum > 0 en un point $x \in \mathring{M}$; d'où, d'après (III.1.9) et le principe du maximum (PM) de W (n° I.3.1),

$$\beta \|G^0_\beta\| = \sup \beta G^0_\beta 1 = \beta G^0_\beta 1(x) = 1 + W G^0_\beta 1(x) \leqslant 1;$$

et la propriété (1') résulte de ce que la fonction $H_\beta 1$ atteint son maximum sur ∂M en vertu de (III.1.11) et du théorème VII (n° I.4.1).

b) On obtient l'équation résolvante (III.1.13) [pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, donc aussi pour $f \in C(M)$ par continuité dans $C(M)$] en appliquant $\beta - W$ aux deux membres et en utilisant (III.1.9) et (III.1.10) [1].

c) Par définition de $G^0_{\beta'}$ $(\beta' > 0)$ toute fonction $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 u = 0$ est de la forme $u = G^0_{\beta'} f$ avec $f \in C^{0,\lambda}(M)$;

[1] On peut aussi déduire les propriétés (1) et (2) de la propriété (1) du théorème du n° 0.2.4 appliquée à l'opérateur $(\mathfrak{U}^0, W)$, où $\mathfrak{U}^0$ est l'ensemble des $u \in C^2(M) \cap C_0(\mathring{M})$ tels que $\gamma^0 W u = 0$ (voir le n° III.1.7).

et pour de telles fonctions u, on a $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \|\beta G^0_\beta u - u\| = 0$ d'après (1) et l'équation résolvante (III.1.13). D'où la propriété (3), encore d'après (1), puisque toute fonction $u \in C(M)$ nulle au bord est approchable uniformément par des fonctions de $C^{2,\lambda}(M)$ nulles au bord.

d) La propriété (4) résulte de (1) et (3) en considérant une fonction $\psi \in C(M)$ telle que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi = 1$ au voisinage de ∂M et $\psi = 0$ au voisinage de $x (x \in \mathring{M})$, en écrivant

$$\beta G^0_\beta u(x) = \beta G^0_\beta(u\psi)(x) + \beta G^0_\beta((1-\psi)u)(x),$$

puis

$$\text{(III.1.15)} \quad 1 \geqslant \beta G^0_\beta 1(x) = \beta G^0_\beta \psi(x) + \beta G^0_\beta(1-\psi)(x),$$

et en remarquant que, lorsque β tend vers $+\infty$, $\beta G^0_\beta(1-\psi)(x)$ tend vers 1 d'après (3), donc $\beta G^0_\beta\psi(x)$ vers 0 d'après (III.1.15); d'où

$$\lim_{\beta\to+\infty} |\beta G^0_\beta(u\psi)(x)| \leqslant \|u\| \lim_{\beta\to\infty} \beta G^0_\beta\psi(x) = 0,$$

et la relation cherchée, puisque $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \beta G^0_\beta((1-\psi)u)(x) = u(x)$ d'après (3).

e) On obtient (III.1.14) comme (III.1.13) [pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, donc aussi pour $\varphi \in C(\partial M)$ par continuité de $C(\partial M)$ dans $C(M)$] en appliquant $\beta - W$ aux deux membres et en utilisant les relations (III.1.9) à (III.1.12); et (6) résulte immédiatement de (5) et de la positivité de G^0_β et H_β.

f) On obtient (7) comme conséquence de (4) en fixant $\beta' > 0$ dans (III.1.14) et en faisant tendre β vers $+\infty$.

g) Pour établir (8), on remarque d'abord que (6) entraîne que $\dfrac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1$ décroît lorsque β croît. Soient ensuite k un nombre > 0 et $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $u \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\gamma^0 u = 1$ et $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} \leqslant -K$.

On a, $(W-\beta)(H_\beta 1 - u) = \beta u - Wu \geqslant \dfrac{\beta}{2} - \|Wu\| \geqslant 0$ dès que $\beta \geqslant 2\|Wu\|$, et $\gamma^0(H_\beta 1 - u) = 0$; d'où, pour β assez grand, $H_\beta 1 \leqslant u$ d'après le corollaire 2 du Théorème VII (n° I.4.1), et, par conséquent, $\dfrac{\partial}{\partial\nu} H_\beta 1 \leqslant \dfrac{\partial u}{\partial\nu} \leqslant -K$.

h) Enfin, pour établir (9), on fixe $\beta' > 0$, et, posant $v = u - H_{\beta'}(\gamma^0 u)$, on a, compte tenu de (III.1.14)

$$\begin{aligned}\beta G^0_\beta v - v &= \beta G^0_\beta u - \beta G^0_\beta H_{\beta'}(\gamma^0 u) - u + H_{\beta'}(\gamma^0 u)\\ &= \{\beta G^0_\beta u - H_\beta(\gamma^0 u) - u\} - \beta' G^0_\beta H_{\beta'}(\gamma^0 u).\end{aligned}$$

mais, d'une part, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \|\beta' G^0_\beta H_{\beta'}(\gamma^0 u)\| = 0$ d'après (1); d'autre part, $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \|\beta G^0_\beta v - v\| = 0$ d'après (3), puisque $\gamma^0 v = 0$. D'où (9) et la proposition.

c.q.f.d.

III.1.7. Construction d'un semi-groupe de Feller sur $\mathring{M}$.

THÉORÈME XVI. — *Soit* W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{0,\lambda}(0 < \lambda < 1)$ *sur la variété à bord compacte* M [1]. *On désigne par* $\mathfrak{U}^0$ *le sous-espace de* $C_0(\mathring{M})$ *formé des fonctions* $u \in C^2(M)$ *telles que*

$$\gamma^0 u = 0 \qquad \textit{et} \qquad \gamma^0 W u = 0 \text{ [2]}.$$

(1) *L'opérateur* $(\mathfrak{U}^0, W)$ *est préfermé dans* $C_0(\mathring{M})$, *et sa fermeture est le générateur infinitésimal* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *d'un semi-groupe de Feller* (N_t) *sur l'espace localement compact* $\mathring{M}$ (n° 0.2.1) *dont la résolvante est la famille des restrictions à* $C_0(\mathring{M})$ *des opérateurs* $G^0_\beta(\beta > 0)$ *associés à* W (n° III.1.5, alinéa *b*)) [3].

(2) *De plus, sous l'hypothèse* (U^0) *sur* W (n° III.1.5), *le semi-groupe* (N_t) *est intégrable* (n° 0.2.3) *et admet pour potentiel l'opérateur de Green de* W (n° III.1.5).

En effet, la propriété (1) résulte du théorème de Hille-Yosida-Ray (n° 0.2.4) appliqué à l'opérateur $(\mathfrak{U}^0, W)$ sur l'espace localement compact $\mathring{M}$: d'une part, pour chaque $\beta > 0$, $(\beta - W)(\mathfrak{U}^0)$ est dense dans $C_0(\mathring{M})$ puisqu'il contient, d'après (III.1.9) et (III.1.10) toutes les fonctions $f \in C^{0,\lambda}(M)$ nulles sur ∂M. D'autre part, la propriété (*b*) requise est conséquence du principe du maximum (PM) que satisfait W

[1] Certaines composantes connexes de M peuvent avoir un bord vide; pour le cas où $\partial M = \emptyset$, voir le n° III.1.8. Voir aussi la remarque 3 du n° III.2.8.

[2] On identifie les fonctions de $C_0(\mathring{M})$ avec les fonctions de C(M) nulles au bord.

[3] Voir la remarque ci-dessous.

(nº I.3.1). Enfin, $\lim_{\beta \to +\infty} \|\beta G^0_\beta f - f\| = 0$ pour tout $f \in C_0(\dot{M})$ [proposition III.1.6, propriété (3)].

En outre, sous l'hypothèse (U^0), l'intégrabilité du semi-groupe obtenu résulte du lemme 0.2.3 en considérant une suite (f_n) de fonctions positives de $C_k^\infty(\dot{M})$ croissant vers la fonction 1, en posant $u_n = - G^0 f_n$ (où G^0 est l'opérateur de Green de W) et en utilisant (III.1.3) et (III.1.4). De plus, d'après ces relations et la seconde partie du lemme 0.2.3, on a, $G^0 f = G_0 f$ pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M) \cap C_0(\dot{M})$, donc aussi pour tout $f \in C_0(\dot{M})$ (où G_0 désigne le potentiel du semi-groupe construit). D'où la propriété (2). c.q.f.d.

Remarque. — On peut choisir W « suffisamment non local » pour que l'espace $\mathcal{U}^0$ ne contienne pas $C_k^\infty(\dot{M})$. Cependant $\mathcal{U}^0$ est dense dans $C_0(\dot{M})$ en vertu de la propriété (3) de la proposition III.1.6 puisqu'il contient, d'après (III.1.9) et (III.1.10) toutes le fonctions $G^0_\beta f$ où $\beta > 0$, $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et $\gamma^0 f = 0$.

III.1.8. Cas où M est une variété compacte sans bord.

THÉORÈME XVI'. — *On suppose que* M *est une variété compacte sans bord et on désigne par* W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{0,\lambda}(0 < \lambda < 1)$ *sur* M [1]. *Alors, l'opérateur* $(C^2(M), W)$ *est préfermé dans* C(M) *et sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur* M. *Ce semi-groupe est intégrable si la propriété* (U^0) *est satisfaite.*

(Cet énoncé ne fait que reprendre le théorème XVI dans le cas où $\partial M = \emptyset$.)

§ III.2. Systèmes frontière de Ventcel' elliptiques d'ordre 1 et 2 : Problèmes aux limites et semi-groupes de Feller associés.

III.2.1 Opérateurs Frontière de Ventcel' elliptiques. Dans tout ce paragraphe, on désigne par M une variété *à bord*

[1] Voir la remarque 3 du nº III.2.8.

compacte (n° 0.1.1) *dont le bord* ∂M *est non vide* (on note que ni M ni ∂M ne sont supposées connexes et que, lorsque M n'est pas connexe, certaines de ses composantes connexes peuvent avoir un bord vide).

On considère un opérateur frontière de Ventcel' Γ sur M (n° II.2.6) : Γ est de la forme,

$$\text{(III.2.1)} \quad \Gamma u = \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u) + Tu \quad (u \in C^2(M)),$$

où α, ν et Q ont les propriétés introduites au n° II.2.2 et où T est un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy sur M (n° II.2.4) dont on désignera toujours par t le noyau (n° II.2.7)

On dira que Γ *est elliptique d'ordre* 1 *et de classe* $C^{p,\lambda}$ (p entier $\geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$) si,

— ν est de classe $C^{p+1,\lambda}$ sur ∂M, $\alpha \in C^{p+1,\lambda}(\partial M)$, et

$$\alpha(x') > 0 \qquad \text{pout tout} \qquad x' \in \partial M.$$

— Q est un opérateur différentiel *d'ordre* 1 et de classe $C^{p+1,\lambda}$ sur la varitéé ∂M (n° III.1.2).

— T est un opérateur Ventcel'-Lévy *d'ordre* 1 (n° II.2.12) appliquant $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p+1,\lambda}(M)$ et *compact* de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p+1,\lambda}(\partial M)$.

On dira que Γ *est elliptique d'ordre* 2 *et de classe* $C^{p,\lambda}$ (p entier $\geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$) si,

— ν est de classe $C^{p,\lambda}$ sur ∂M et $\alpha \in C^{p,\lambda}(\partial M)$,

— Q est un opérateur de diffusion *elliptique* de classe $C^{p,\lambda}$ sur la variété ∂M (n°0.1.3 et III.1.2).

— T applique $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(\partial M)$ et T est *compact* de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(\partial M)$.

On établira au n° III.3.6 ci-dessous que tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy (resp. d'ordre 1) sur M appliquant continûment $C^{p+2,\mu}(M)$ dans $C^{p,\mu}(\partial M)$ (resp. $C^{p+1,\mu}(\partial M)$; $0 < \mu < 1$) est compact de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{p+1,\lambda}(\partial M)$) pour tout λ tel que $0 < \lambda < \mu$.

Exemples. — Les opérateurs frontière intervenant dans le problème aux dérivées obliques classiques sont locaux $(t = 0)$ et elliptiques d'ordre 1; et ceux intervenant dans le Problème de Višik (voir [22]) locaux et elliptiques d'ordre 2.

III.2.2. Problèmes aux limites elliptiques d'ordre 1 pour les opérateurs de Waldenfels.

THÉORÈME XVII. — *Soient, sur* M, W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ *(p entier* $\geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$, n° III.1.3), *et* Γ *un opérateur frontière de Ventcel' elliptique d'ordre* 1 *et de classe* $C^{p,\lambda}$ (n° III.2.1).

(1) *L'application* $u \to (Wu, \Gamma u)$ *est d'indice zéro de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans*

$$C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+1,\lambda}(\partial M).$$

(2) *Si, de plus, dans chaque composante connexe* C *de* M, *l'une des deux fonctions* W1 *sur* C, $\Gamma 1$ *sur* $C \cap \partial M$ *n'est pas identiquement nulle, l'application* $u \to (Wu, \Gamma u)$ *est un isomorphisme de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *sur*

$$C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+1,\lambda}(\partial M).$$

On va s'appuyer sur le résultat classique suivant :

LEMME. — *Si* P *est un opérateur différentiel elliptique du second ordre de classe* $C^{p,\lambda}$ *sur la variété à bord compacte* M, *et si* Γ *est un opérateur frontière de Ventcel' sur* M *local* $(T = 0)$, *elliptique d'ordre* 1 *et de classe* $C^{p,\lambda}$, *l'application* $u \to (Pu, \Gamma u)$ *est d'indice zéro de* $C^{p+2,\lambda}$ (M) *dans*

$$C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+1,\lambda}(\partial M).$$

(voir Fiorenza [20] pour le cas où M est un ouvert de R^n $(n \geqslant 2)$, et les exposés n° 3 et 4 du séminaire [18] pour le cas général.

On en déduit comme suit le Théorème XVII : soit $W=P+S$ une décomposition de W où P et S ont les propriétés (E_1) et (E_2) du n° III.1.3. L'application $u \to \left(Pu, \alpha \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u)\right)$ est d'indice zéro dans les espaces considérés en vertu du lemme, et l'application $u \to (Su, Tu)$ est compacte en vertu des hypothèses faites sur S et T. D'où la propriété (1) en vertu du Théorème de stabilité de l'indice (appendice 1), et aussi la propriété (2), puisque, sous l'hypothèse qui y est faite, l'application $u \to (Wu, \Gamma u)$ est injective d'après le Théorème XII (n° II.2.10). c.q.f.d.

III.2.3. Problèmes aux limites elliptiques d'ordre 2 pour les opérateurs de Waldenfels.

THÉORÈME XVIII. — *Soient, sur* M, W *un opérateur de Waldenfels elliptique de classe* $C^{p,\lambda}$ (*p entier* $\geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$; n° III.1.3), *et* Γ *un opérateur frontière de Ventcel' elliptique d'ordre* 2 *et de classe* $C^{p,\lambda}$ (n° III.2.1).

(1) *L'application* $u \to (Wu, \Gamma u)$ *est d'indice zéro de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p,\lambda}(\partial M)$.

(2) *On suppose, de plus, que* Γ *est semi-transversal en chaque point de* ∂M (n° II.2.9) *et que, dans chaque composante connexe* C *de* M, *l'une des deux fonctions* W1 *sur* C, $\Gamma 1$ *sur* $C \cap \partial M$, *n'est pas identiquement nulle. Alors, l'application* $y \to (Wu, \Gamma u)$ *est un isomorphisme de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *sur* $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p,\lambda}(\partial M)$.

En effet, d'abord, la propriété (2) résulte de la propriété (1) et du Théorème XII (n° II.2.10).

Pour établir la propriété (1), on remarque que l'application $u \to (Wu - u,\ Q(\gamma^0 u) - \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^{p+2,\lambda}(M)$ sur $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p,\lambda}(M)$ car elle est composée de l'application $\varphi \to (W\varphi - \varphi, \gamma^0\varphi)$ qui est un isomorphisme de $C^{p+2,\lambda}(M)$ sur $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p+2,\lambda}(\partial M)$ d'après le corollaire 2 du Théorème XV (n° III-1.4) et de l'application $\varphi \to Q\varphi - \varphi$ qui est un isomorphisme de $C^{p+2,\lambda}(\partial M)$ sur $C^{p,\lambda}(\partial M)$ en vertu du lemme III.1.4 appliqué à l'opérateur de diffusion elliptique $Q - 1$ sur ∂M. Par ailleurs, l'application

$$u \to \left(u,\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} + Tu - \gamma^0 u\right)$$

est compacte de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M) \times C^{p,\lambda}(\partial M)$ en vertu de l'hypothèse de compacité faite sur T et du lemme III.1.2. La propriété (1) cherchée résulte alors du théorème de stabilité de l'indice (appendice 1).

c.q.f.d.

III.2.4. Systèmes frontière de Ventcel' elliptiques de classe $C^{0,\lambda}$. On appellera *système frontière de Ventcel' sur* M *elliptique d'ordre* 1 (resp. *d'ordre* 2) *et de classe* $C^{0,\lambda}(0 < \lambda < 1)$ un triplet (W, Γ, δ) où, W est un opérateur de Waldenfels sur M elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ (n° III.1.3), Γ un opérateur frontière de Ventcel' sur M elliptique d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) et de classe $C^{0,\lambda}$ (n° III.2.1), et δ une fonction *positive* de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. de $C^{0,\lambda}(\partial M)$).

Pour un tel système (W, Γ, δ), on a à considérer la propriété [1] :

(U) Γ est semi-transversal (n° II.2.9) en chaque point de ∂M, et sur chaque composante connexe C de M, l'une des deux fonctions $W1$ sur C, $\Gamma 1$ sur $C \cap \partial M$, n'est pas identiquement nulle.

Au système (W, Γ, δ), on associe l'opérateur frontière L par la relation,

$$\text{(III.2.2)} \qquad Lu = \Gamma u - \delta\gamma^0 W u \quad (u \in C^2(M)).$$

L applique continûment $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$. En outre,

Lemme. — *Pour chaque* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$, *si* W *possède la propriété* (U°) (n° III.1.5), *l'opérateur*

$$f \to LG^0_\beta f \; (f \in C^{0,\lambda}(M)) \; [2]$$

se prolonge en un opérateur linéaire borné et positif de C(M) *dans* $C(\partial M)$.

On notera $\overline{LG^0_\beta}$ l'opérateur de C(M) dans $C(\partial M)$ ainsi introduit.

Son existence résulte de ce que, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$ $f \geqslant 0$, d'après l'expression (II.2.14) de T (n° II.2.5) et compte tenu des relations $WG^0_\beta f = \beta G^0_\beta f - f$, $G^0_\beta f \geqslant 0$ et $\gamma^0 G^0_\beta f = 0$ (n° III.1.5), on a, pour $x' \in \partial M$,

$$LG^0_\beta f(x') = \alpha(x') \frac{\partial}{\partial \nu} G^0_\beta f(x') + \int_M t(x', dy) G^0_\beta f(y) + \delta(x') f(x') \geqslant 0$$

III.2.5. Résolvante associée à un système frontière de Ventcel'.

Proposition. — *Soient* (W, Γ, δ) *un système frontière de Ventcel' elliptique d'ordre* 1 (resp. *d'ordre* 2) *et de classe* $C^{0,\lambda}(0 < \lambda < 1)$ [3] *et* L *l'opérateur frontière qui lui est associé*

[1] Voir les n° II.2.10, III.2.2, III.2.3 ci-dessus ainsi que les n° III.2.5 et III.2.8 ci-dessous où intervient cette propriété.

[2] G^0_β désignant l'opérateur de Green de $W - \beta$ relatif au problème de Dirichlet (n° III.1.5).

[3] Voir la remarque 3 du n° III.2.8.

par la relation (II.2.2) (n° III.2.4). *On suppose que* Γ *est semi-transversal* (n° II.2.9) *en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$.

(1) *Pour chaque* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *si la propriété* (U) *est satisfaite, il existe des opérateurs linéaires bornés et positifs* G_β *et* J_β *respectivement de* $C(M)$ *dans* $C(M)$ *et de* $C(\partial M)$ *dans* $C(M)$ *caractérisés par les relations,*
pour $f \in C^{1,\lambda}(M)$ (resp. $f \in C^{0,\lambda}(M)$), $G_\beta f \in C^{2,\lambda}(M)$,

$$\text{(III.2.3)} \quad (\beta - W)G_\beta f = f \qquad \text{et} \qquad LG_\beta f = 0,$$

pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$), $J_\beta\varphi \in C^{2,\lambda}(M)$,

$$\text{(III.2.4)} \quad (\beta - W)J_\beta\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad -LJ_\beta\varphi = \varphi.$$

(2) *Pour chaque* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *si les propriétés* (U^0) (n° III.1.5) *et* (U) *sont satisfaites,*

$$\text{(III.2.5)} \quad G_\beta f = G_\beta^0 f + J_\beta \overline{L G_\beta^0} f \quad (f \in C(M))\ (^1)$$

Corollaire 1. — *Pour chaque* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *si la propriété* (U) *est satisfaite, le problème aux limites*

$$\text{(III.2.6)} \quad (\beta - W)u = f, \qquad -Lu = \varphi \quad (u \in C^2(M)),$$

admet une solution $u \in C^{2,\lambda}(M)$ *et une seule pour tout* $(f, \varphi) \in C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $(f, \varphi) \in C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$); *et cette solution est donnée par,*

$$\text{(III.2.7)} \qquad u = G_\beta f + J_\beta\varphi.$$

Corollaire 2. — (1) *Pour chaque* $\beta > 0$,

$$\text{(III.2.8)} \qquad \|G_\beta\| \leqslant \frac{1}{\beta}$$

(2) *Pour chaque* $\beta > 0$, $\beta' > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *ou* $\beta' = 0$ *si la propriété* (U) *est satisfaite,*

$$\text{(III.2.9)} \quad G_\beta f - G_{\beta'} f + (\beta - \beta')G_\beta G_{\beta'} f = 0 \quad (f \in C(M)).$$

La famille d'opérateurs $(G_\beta)_{\beta>0}$ sera appelée *la résolvante* associée au système frontière de Ventcel' (W, Γ, δ).

[1] G_β^0 désignant l'opérateur de Green de $W - \beta$ relatif au problème de Dirichlet (*n°* III.1.5).

III.2.5

Lorsque la propriété (U) est satisfaite, les opérateurs G_0 et J_0 seront appelés respectivement *opérateur de Green et opérateur harmonique* du système frontière (W, Γ, δ).

Pour chaque $\beta > 0$, et pour $\beta = 0$ si les propriétés (U^0) (n° III.1.5) et (U) sont satisfaites, on notera K_β l'opérateur linéaire borné et positif de $C(\partial M)$ dans $C(\partial M)$ défini par

$$\text{(III.2.10)} \qquad K_\beta \varphi = \gamma^0 J_\beta \varphi \quad (\varphi \in C(M)).$$

D'après (III.2.4), (III.2.11) et (III.1.12), on a,

$$\text{(III.2.11)} \qquad J_\beta \varphi = H_\beta K_\beta \varphi \quad (\varphi \in C(M))$$ [1],

ce qui permet d'écrire (III.2.5) sous la forme,

$$\text{(III.2.12)} \quad G_\beta f = G^0_\beta f + H_\beta K_\beta \overline{L G^0_\beta} f \quad (f \in C(M))$$ [2].

En outre, K_β est caractérisé par la relation [3], pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$),

$$\text{(III.2.13)} \quad K_\beta \varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M), \qquad \text{et} \qquad - L H_\beta K_\beta \varphi = \varphi$$ [2].

Enfin, cette relation et l'injectivité de LH_β (corollaire 1) entraînent que, pour $\psi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$,

$$\text{(III.2.14)} \qquad - K_\beta L H_\beta \psi = \psi.$$

III.2.6. La proposition précédente va résulter des théorèmes XVII et XVIII et des propriétés de maximum du paragraphe II.2. On établit d'abord le corollaire 1 : le problème aux limites (III.2.6), s'écrit aussi, par définition de L (relation (III.2.2)),

$$(\beta - W)u = f, \qquad - \Gamma u = \varphi - \delta\gamma^0 f \quad (u \in C^2(M))$$

Dans le cas où (W, Γ, δ) est d'ordre 1, ce problème admet une solution $u \in C^{2,\lambda}(M)$ et une seule pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ d'après le théorème XVII.

Pour traiter le cas où (W, Γ, δ) est d'ordre 2, on remarque que l'application $\Phi : (f, \varphi) \to (f, \varphi - \delta\gamma^0 f)$ étant un isomorphisme de $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ sur lui-même, le Théorème XVIII entraîne que l'application $u \to (Wu, Lu)$ est

[1] H_β désignant l'opérateur harmonique de $W - \beta$ relatif au problème de Dirichlet (n° III.1.5).

[2] Voir la remarque du n° III.2.10 ci-dessous.

[3] Si (W, Γ, δ) est d'ordre 1 (resp d'ordre 2).

d'indice zéro (appendice 1) de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ comme composée de $u \to (Wu, \Gamma u)$ et de Φ; et le corollaire du Théorème XI (n° II.2.9), ou le Théorème XII (n° II.2.10) dans le cas $\beta = 0$, entraîne alors, compte tenu de l'hypothèse de semi-transversalité faite sur Γ que le problème (III.2.6) admet une solution $u \in C^{2,\lambda}(M)$ et une seule pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et $\varphi \in C^{0,\lambda}(M)$.

En outre, ces mêmes résultats du paragraphe II.2 entraînent la positivité de la solution u obtenue en même temps que les données f et φ; d'où le corollaire 1 et la propriété (1) de la proposition.

Cela étant, on obtient la relation (III.2.5) ainsi que l'équation résolvante (III.2.9) [pour $f \in C^{1,\lambda}(M)$ donc aussi pour $f \in C(M)$ par continuité dans C(M)] en appliquant l'opérateur $\beta - W$ aux deux membres et en utilisant (III.2.3), (III.2.4) et l'unicité de la solution du problème (III.2.6).

Enfin, la relation (III.2.8) résulte de ce que les relations $G_\beta 1 \geqslant 0$ et $LG_\beta 1 = 0$ entraînent, en vertu du Théorème XI (n° II.2.9), que $G_\beta 1$, n'étant pas identiquement nulle, atteint son maximum > 0 en un point $x \in M$ en lequel $WG_\beta 1(x) \leqslant 0$; d'où, d'après (III.2.3),

$$\beta \| G_\beta \| = \sup \beta G_\beta 1 = \beta G_\beta 1(x) \leqslant 1 \quad (^1).$$

c.q.f.d.

III.2.7. Transversalité forte d'un système frontière de Ventcel' et continuité forte de la résolvante associée. On dira que l'opérateur frontière de Ventcel' Γ donné par (III.2.1) (n° III.2.1) est *fortement transversal* en $x' \in \partial M$, si

— soit $\alpha(x') > 0$

— soit $t(x', \mathring{M}) = +\infty$.

On note que, si Γ est fortement transversal en $x' \in \partial M$, Γ est aussi transversal (n° III.2.8) et à fortiori semi-transversal (n° II.2.9) en x'.

L'importance de cette notion réside dans la proposition suivante :

[1] On peut aussi déduire le corollaire 2 de la propriété (1) du Théorème du n° 0.2.4 appliqué à l'opérateur $(\mathfrak{U}, W)$ où $\mathfrak{U}$ est l'ensemble des $u \in C^2(M)$ tels que $\Gamma u - \delta\gamma^0 Wu = 0$ (voir le n° III.2.8).

PROPOSITION. — *Les notations et hypothèses relatives au système frontière de Ventcel'* (W, Γ, δ) *sont les mêmes que dans la proposition* III.2.5.

(1) *Pour que* $\lim_{\beta \to +\infty} \|\beta G_\beta f - f\| = 0$ *pour tout* $f \in C(M)$, *il est nécessaire et suffisant que* $\lim_{\beta \to +\infty} \|K_\beta\| = 0$.

(2) *Pour tout* $\beta > 0$, $LH_\beta 1 \leqslant 0$, *et pour que* $\lim_{\beta \to +\infty} \|K_\beta\| = 0$, *il est nécessaire que* $\lim_{\beta \to +\infty} \|LH_\beta 1\| = +\infty$ *et suffisant que* $\lim_{\beta \to +\infty} (\sup LH_\beta 1) = -\infty$.

(3) *Pour que* $\lim_{\beta \to +\infty} (\sup LH_\beta 1) = -\infty$, *il est nécessaire et suffisant que* Γ *soit fortement transversal en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$ (1).

Le contenu de cette proposition est essentiellement dû à Sato et Ueno dans [20] (Démonstration du Théorème 5.2′ et remarque 5.2, pages 563-565.) On reprend ici leur démonstration (2) fondée sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si* $\lim_{\beta \to +\infty} \|K_\beta\| = 0$, *alors,*

(III.2.15)
$$\lim_{\beta \to +\infty} \|\beta K_\beta L G^0_\beta f - \gamma^0 f\| = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad f \in C^{2,\lambda}(M).$$

En effet, fixant $\beta' > 0$ et $f \in C^{2,\lambda}(M)$, et posant $g = (\beta - W)f$, on a, par définition de l'opérateur $G^0_{\beta'}$ [relations (III.1.9) et (III.1.10)], $f - H_{\beta'}(\gamma^0 f) = G^0_{\beta'} g$. On en déduit, grâce aux équations résolvantes (III.1.13) et (III.1.14) (proposition III.1.6).

$$\begin{aligned} G^0_\beta f &= G^0_\beta G^0_{\beta'} g + G^0_\beta H_{\beta'}(\gamma^0 f) \\ &= \frac{1}{\beta - \beta'}[G^0_{\beta'} g - G^0_\beta g + H_{\beta'}(\gamma^0 f) - H_\beta(\gamma^0 f)]. \end{aligned}$$

Cela étant, posant $\rho(\beta) = \|\beta K_\beta L G^0_\beta f - \gamma^0 f\|$, on a,

$$\rho(\beta) = \left\| \frac{\beta}{\beta - \beta'} K_\beta L(G^0_{\beta'} g - G^0_\beta g + H_{\beta'}(\gamma^0 f) + \frac{\beta}{\beta - \beta'} \gamma^0 f - \gamma^0 f \right\|,$$

(1) Voir les remarques 2 et 3 du n° III.2.8.
(2) Voir aussi l'exposé n° 6 du séminaire [17] pages 6.07-6.10.

d'après (III.2.14), puisque $\gamma^0 f \in C^{2,\lambda}(\partial M)$. D'où, pour $\beta \geqslant \beta'$,

$$\rho(\beta) \leqslant \frac{\beta}{\beta-\beta'}\|K_\beta\|(\|LG^0_{\beta'}g\| + \|LG^0_\beta g\| + \|LH_{\beta'}(\gamma^0 f)\|) + \left\|\frac{\beta}{\beta-\beta'}\gamma^0 f - \gamma^0 f\right\|.$$

Et aussi,

(III.2.16)

$$\rho(\beta) \leqslant \frac{\beta}{\beta-\beta'}\|K_\beta\|(2\|LG^0_{\beta'}1\|\,\|g\| + \|LH_{\beta'}(\gamma^0 f)\|) + \left\|\frac{\beta}{\beta-\beta'}\gamma^0 f - \gamma^0 f\right\|,$$

puisque la positivité de LG^0_β et $LG^0_{\beta'}$ (lemme III.2.4) entraîne que $\|LG^0_\beta g\| \leqslant (\sup LG^0_\beta 1)\|g\|$ ainsi que,

$$LG^0_\beta 1 = LG^0_{\beta'}1 - (\beta-\beta')LG^0_\beta G^0_{\beta'}1 \leqslant LG^0_{\beta'}1 \quad (\beta \geqslant \beta').$$

On obtient alors le lemme en faisant tendre β vers $+\infty$ dans (III.2.16).

On en déduit que, dans la propriété (1) de la proposition, la condition est suffisante : supposant que $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\|K_\beta\| = 0$, il suffit, d'après (III.2.8), de montrer que $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\|\beta G_\beta f - f\| = 0$ pour $f \in C^{2,\lambda}(M)$. Or, pour une telle fonction, on a, d'après (III.2.12),

$$\begin{aligned}\|\beta G_\beta f - f\| &= \|\beta G^0_\beta f + \beta H_\beta K_\beta L G^0_\beta f - f\| \\ &\leqslant \|\beta G^0_\beta f + H_\beta(\gamma^0 f) - f\| \\ &\qquad + \|H_\beta\|\,.\,\|\beta K_\beta L G^0_\beta f - \gamma^0 f\|,\end{aligned}$$

où le premier terme au second membre tend vers zéro, lorsque β tend vers $+\infty$, d'après la propriété (9) de la proposition III.1.6, et le second terme d'après le lemme, compte tenu de ce que $\|H_\beta\| = 1$.

Inversement, dans la propriété (1), la condition est nécessaire : fixant $\beta' > 0$ et posant $\varphi = K_{\beta'}1$, on a, d'après (III.1.14) (proposition III.1.6),

$$\beta K_\beta L G^0_\beta H_{\beta'}\varphi = \frac{\beta}{\beta-\beta'}K_\beta(LH_{\beta'}\varphi - LH_\beta\varphi);$$

d'où, puisque $LH_{\beta'}\varphi = -1$ et $K_\beta LH_\beta\varphi = -\varphi$ d'après (III.2.13) et (III.2.14), et $\beta K_\beta LG_\beta^0 H_{\beta'}\varphi = \gamma^0(\beta G_\beta H_{\beta'}\varphi)$ d'après (III.2.12) et (III.1.10) (n° III.1.5),

$$\text{(III.2.17)} \quad K_\beta 1 = K_{\beta'}1 - \frac{\beta - \beta'}{\beta}\gamma^0(\beta G_\beta H_{\beta'}K_{\beta'}1).$$

Supposant alors que $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \|\beta G_\beta f - f\| = 0$ pour tout $f \in C(M)$, et faisant tendre β vers $+\infty$, $\beta G_\beta H_{\beta'}K_{\beta'}1$ converge uniformément sur ∂M vers $K_{\beta'}1$; donc, d'après (III.2.17), $K_\beta 1$ converge uniformément vers 0; d'où la propriété (1).

Pour établir les propriétés (2) et (3), on commence par calculer $LH_\beta 1$ en exprimant T sous la forme (II.2.14) (n° II.2.5) et en tenant compte de ce que $(\beta - W)H_\beta 1 = 0$ et $\gamma^0 H_\beta 1 = 1$ entraînent que $\gamma^0 WH_\beta 1 = \beta$ et $\theta^* H_\beta 1 = \theta^* 1$ ($\theta^* u$ ne dépend que de $\gamma^0 u$), ce qui donne, pour $\beta > 0$ et $x' \in \partial M$,

(III.2.18)

$$LH_\beta 1(x') = \alpha(x')\frac{\partial}{\partial\nu}H_\beta 1(x') - \beta\delta(x') + Q1(x')$$
$$+ \left[\eta(x') + \int_M t(x', dy)(1 - \theta^* 1(x', y))\right] + \int_{\mathring{M}} t(x', dy)(H_\beta 1(y) - 1).$$

On en déduit d'abord que $LH_\beta 1(x') \leqslant 0$ car tous les termes au second membre sont $\leqslant 0$ [le premier et le dernier puisque $H_\beta 1 \leqslant 1$ et le quatrième d'après (II.2.15)].

Cela étant, posant $m_\beta = -\sup LH_\beta 1$ et $M_\beta = \|LH_\beta 1\|$, la propriété (2) résulte des inégalités suivantes, elles-mêmes conséquences de la positivité de K_β et $-LH_\beta 1$ et de (III.2.14),

$$\|K_\beta\| = K_\beta 1 \geqslant K_\beta\left(-\frac{1}{M_\beta}LH_\beta 1\right) = \frac{1}{M_\beta},$$

et

$$\|K_\beta\| = K_\beta 1 \leqslant K_\beta\left(-\frac{1}{m_\beta}LH_\beta 1\right) = \frac{1}{m_\beta}.$$

En ce qui concerne, la propriété (3), on déduit de (III.2.18) et des propriétés (1), (6), (7) et (8) de la proposition (III.1.6), d'une part que $LH_\beta 1$ est fonction décroissante de β, d'autre part que $\lim\limits_{\beta\to+\infty} LH_\beta 1(x') = -\infty$ si $\alpha(x') > 0$ ou $\delta(x') > 0$;

enfin que $\lim_{\beta \to +\infty} \int_{\overset{\circ}{M}} t(x', dy)(H_\beta 1(y) - 1) = -\infty$ si et seulement si $t(x', \overset{\circ}{M}) = +\infty$ (ceci en vertu du lemme de Beppo-Lévi pour la propriété directe et en vertu de ce que $-2 \leqslant H_\beta 1 - 1 \leqslant 0$ pour la propriété inverse). Ainsi, pour que $\lim_{\beta \to +\infty} LH_\beta 1(x') = -\infty$, il faut et il suffit que soit $\alpha(x') > 0$, soit $\delta(x') > 0$, soit $t(x', \overset{\circ}{M}) = +\infty$. D'où la propriété (3), puisque, d'après le théorème de Dini, $\lim_{\beta \to +\infty} LH_\beta 1(x') = -\infty$ pour tout $x' \in \partial M$ entraîne que $\lim_{\beta \to +\infty} \sup LH_\beta 1 = -\infty$. c.q.f.d.

III.2.8. Construction d'un semi-groupe de Feller correspondant à une condition frontière de Ventcel' donnée.

Théorème XIX. — *Sur la variété à bord compacte* M (n° III.2.1), *soit* (W, Γ, δ) *un système frontière de Ventcel' elliptique d'ordre* 1 *ou d'ordre* 2 *et de classe* $C^{0,\lambda}(0 < \lambda < 1$, n° III.2.4) (1).

On suppose que Γ *est fortement transversal en tout point* $x' \in \partial M$ *en lequel* $\delta(x') = 0$ (n° III.2.7) (2), *et on pose,*

$$\mathfrak{U} = \{u \mid u \in C^2(M) \text{ et } \Gamma u - \delta . \gamma^0 W u = 0\}.$$

Alors,

(1) $\mathfrak{U}$ *est dense dans* $C(M)$.

(2) *L'opérateur* $(\mathfrak{U}, W)$ *est préfermé dans* $C(M)$ *et sa fermeture est le générateur infinitésimal* $(\mathfrak{D}_A, A)$ *d'un semi-groupe de Feller* (N_t) *sur* M *dont la résolvante coïncide avec la famille d'opérateurs* $(G_\beta)_{\beta>0}$ *associée à* (W, Γ, δ) (n° III.2.5) (3).

(3) *Lorsque la propriété* (U) *est satisfaite* (n° III.2.4) *le semi-groupe* (N_t) *est intégrable et son potentiel coïncide avec l'opérateur de Green du système frontière* (W, Γ, δ) (n° III.2.5).

En effet, la propriété (1) résulte, d'une part de ce que $\mathfrak{U}$ contient les fonctions $G_\beta f (\beta > 0, f \in C^{0,\lambda})$ d'après (III.2.3) (proposition III.2.5), et d'autre part de ce que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \|\beta G_\beta f - f\| = 0$$

(1) Voir la remarque 3 ci-dessous.
(2) Voir la remarque 2 ci-dessous.
(3) Voir la remarque du n° III.2.10.

pour tout $f \in C(M)$ d'après la proposition III.2.7 et l'hypothèse de transversalité faite sur Γ [1].

La propriété (2) résulte alors du théorème de Hille-Yosida-Ray (n° 0.2.4) appliqué à l'opérateur $(\mathcal{U}, W)$ sur l'espace compact M : D'une part, pour $\beta > 0$, $(\beta - W)(\mathcal{U})$ est dense dans C(M) puisqu'il contient $C^{0,\lambda}(M)$ d'après le corollaire 1 de la proposition III.2.5. D'autre part la propriété de maximum (*b*) requise est conséquence du théorème XI (n° II.2.9) et de l'hypothèse de transversalité faite sur Γ. Enfin, $\mathcal{U}$ est dense dans C(M) (propriété (1)).

En outre, lorsque la propriété (U) est satisfaite, on a, $G_0 f \in C^{2,\lambda}(M)$, $-WG_0 f = f$ et $LG_0 f = 0$ pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M)$ (n° III.2.5); on en déduit d'abord que $W(\mathcal{U})$, contenant $C^{0,\lambda}(M)$, est dense dans C(M), donc que le semi-groupe (N_t) construit est intégrable d'après le lemme 0.2.3; ensuite, d'après la seconde partie du même lemme que $\underline{G}_0 f = G_0 f$ pour tout $f \in C^{0,\lambda}(M)$, donc pour tout $f \in C(M)$ (où $\underline{G}_0$ désigne le potentiel de (N_t)). D'où la propriété (3). c.q.f.d.

Remarque 1. — *Par construction du semi-groupe* (N_t), on a

$$\mathcal{U} \subset C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A.$$

On en déduit, compte tenu des propriétés (1) et (2) du Théorème, que le semi-groupe (N_t) possède les propriétés (D_1) et (D_2) introduites dans la remarque 4 du n° II.3.5.

On peut déduire des résultats de [2] que $\mathcal{U} = C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$.

Remarque 2. — On peut se demander si l'on ne pourrait pas remplacer l'hypothèse « Γ est fortement transversal en tout point $x' \in \partial M$ en lequel $\delta(x') = 0$ » par l'hypothèse plus faible de la proposition III.2.5 qui assure l'existence des opérateurs $G_\beta (\beta > 0)$ et intervient également dans le Théorème XI [2]. Il n'en est rien ainsi que le montrent les propriétés (1) et (2) de la proposition III.2.7 : Si $(G_\beta)_{\beta>0}$ est la résolvante d'un semi-groupe de Feller, il est nécessaire que

$$\lim_{\beta \to +\infty} ||\beta G_\beta f - f|| = 0$$

pour tout $f \in C(M)$, donc (propriété (1)) que $\lim_{\beta \to +\infty} ||K_\beta|| = 0$;

[1] Voir la remarque 2 ci-dessous.
[2] Voir aussi le n° III.2.10 ci-dessous.

et aussi (propriété (2)) que $\lim_{\beta\to+\infty} \|LH_\beta 1\| = +\infty$. Or, en prenant $\delta = 0$ et Γ elliptique d'ordre 2 tel que $\alpha(x') = 0$ et $0 < t(x', \mathring{M}) \leqslant 1$ pour tout $x' \in \partial M$, on vérifie que $\sup \|LH_\beta 1\| < +\infty$, bien que le couple (Γ, δ) vérifie l'hypothèse de la proposition III.2.5.

Ainsi, une hypothèse plus forte du genre de celle faite dans le Théorème précédent est nécessaire pour que $(G_\beta)_{\beta>0}$ soit la résolvante d'un semi-groupe de Feller.

Remarque 3. — Les conclusions du Théorème XIX et des propositions III.2.5 et III.2.7 subsistent [1] si on postule, pour le système frontière (W, Γ, δ), la classe C^0 au lieu de la classe $C^{0,\lambda}$ tout en maintenant les hypothèses d'ellipticité de manière à pouvoir résoudre le problème aux limites (III.2.6) (n° III.2.5) dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(M)$ avec p assez grand. De plus, on obtient ainsi le fait que les opérateurs G_β se prolongent continûment de $L^p(M)$ dans $W^{2,p}(M)$ pour p assez grand, ce qui entraîne, en particulier, que les noyaux G_β appliquent $L^\infty(M)$ dans $C^1(M)$, et admettent des noyaux-fonction par rapport à une mesure régulière sur M (voir à ce sujet Bony [2]).

III.2.9. Le semi-groupe introduit par le Théorème XIX possède la propriété (D_1') intervenant dans l'hypothèse du Théorème XIV (n° II.4.1) :

Proposition. — *Avec les notations et l'hypothèse du Théorème XIX, pour tout compact* $K \subset \mathring{M}$, *toute fonction* $f \in C^{3,\lambda}(M)$ (resp. $f \in C^{2,\lambda}(M)$ *si* Γ *est d'ordre* 1 *et* $\delta \equiv 0$ *ou si* Γ *est d'ordre* 2) *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $u \in C^{2,\lambda}(M)$ *telle que,*

$$(\text{III.2.19}) \quad u = f \ \textit{sur} \ K, \quad \|u - f\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad Lu = 0.$$

On va utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme A. — *Soient* [2] $\varepsilon > 0$ *et* $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $\psi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ *si* (W, Γ, δ) *est d'ordre* 2). *Alors, il existe*

(1) Le problème de Dirichlet pour les opérateurs de Waldenfels (paragraphe III.1) donne lieu à une extension analogue.

(2) Avec les notations et hypothèses du théorème XIX.

$u \in C^{2,\lambda}(M)$ *telle que*

$$\text{(III.2.20)} \qquad Lu = \psi \qquad \textit{et} \qquad \|u\| \leqslant \varepsilon$$

En effet, fixant $\beta > 0$, il existe (corollaire 1 de la proposition III.2.5) $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ telle que $- LH_\beta\varphi = \psi$. Il suffit alors de poser $u = \beta' G_{\beta'} H_\beta \varphi - H_\beta \varphi$ avec $\beta' > 0$ assez grand grand pour que (III.2.20) soit satisfaite.

Lemme B. — *Soient* [1] $\varepsilon > 0$, K *un compact de* $\dot{M}$ *et* $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $\psi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ *si* (W, Γ, δ) *est d'ordre* 2). *Alors, il existe* $h \in C^{2,\lambda}(M)$ *telle que,*

$$\text{(III.2.21)} \quad h = 0 \quad \textit{sur} \quad K, \qquad \|h\| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad Lh = \psi.$$

En effet, soient ξ une fonction de $C^\infty(M)$ telle que $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi = 0$ sur K et $\xi = 1$ au voisinage de ∂M, et $W = P + S$ une décomposition de W où P et S ont les propriétés (E_1) et (E_2) (n° III.1.3). On note que la fonction $S\xi$ est $\leqslant 0$ au voisinage de ∂M d'après la propriété (N) de S (n° I.2.6); et on désigne par $\tilde{\xi}$ une fonction $\leqslant 0$ de $C^{0,\lambda}(M)$ coïncidant avec $S\xi$ sur ∂M.

Cela étant, on pose, pour $u \in C^2(M)$,

$$W_\xi u = Pu + S(\xi u) + (\tilde{\xi} - S\xi)u,$$

et

$$\Gamma_\xi u = \Gamma(\xi u).$$

Utilisant l'expression I.2.14 (n° I.2.7) de S et l'expression (II.2.14) (n° II.2.5) de T, on vérifie que l'on définit ainsi un opérateur de Waldenfels W_ξ elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ sur M et un opérateur frontière de Ventcel' Γ_ξ elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) en même temps que Γ et fortement transversal en tout point $x' \in \partial M$ en lequel $\delta(x') = 0$. De plus, on a,

$$L_\xi u = \Gamma_\xi u - \delta\gamma^0 W_\xi u = L(\xi u) \quad (u \in C^2(M)).$$

Appliquant alors le lemme A au système frontière (W_ξ, Γ_ξ, δ), on obtient une fonction $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $L(\xi u) = \psi$ et $||u|| \leqslant \varepsilon$; et il suffit de poser $h = \xi u$. D'où le lemme B.

Pour établir la proposition, il suffit de poser $u = f + h$,

[1] Avec les notations et hypothèses du théorème XIX.

où h est la fonction que fournit le lemme B appliqué à la fonction $\psi = -\mathrm{L}f$ [lorsque $(\mathrm{W}, \Gamma, \delta)$ est d'ordre 1, $\psi \in \mathrm{C}^{1,\lambda}(\partial\mathrm{M})$ si $f \in \mathrm{C}^{3,\lambda}(\mathrm{M})$ ou si $f \in \mathrm{C}^{2,\lambda}(\mathrm{M})$ et $\delta = 0$; lorsque $(\mathrm{W}, \Gamma, \delta)$ est d'ordre 2, $\psi \in \mathrm{C}^{0,\lambda}(\partial\mathrm{M})$ si $f \in \mathrm{C}^{2,\lambda}(\mathrm{M})$].

c.q.f.d.

Dans le cas où $\delta = 0$, la proposition précédente entraîne le résultat intéressant suivant :

COROLLAIRE. — *Sur la variété à bord compacte* M, *soit* Γ *un opérateur frontière de Ventcel' elliptique d'ordre* 1 *ou* 2, *de classe* $\mathrm{C}^{0,\lambda}$ *et fortement transversal en tout point de* $\partial\mathrm{M}$. *Alors, pour tout compact* K *de* $\mathring{\mathrm{M}}$, *toute fonction* $f \in \mathrm{C}^{2,\lambda}(\mathrm{M})$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $u \in \mathrm{C}^{2,\lambda}(\mathrm{M})$ *telle que*

$$u = f \quad \textit{sur} \quad \mathrm{K}, \qquad \|u - f\| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \Gamma u = 0.$$

III.2.10. Semi-groupe de Feller sur $\partial\mathrm{M}$ de générateur infinitésimal LH_β.

THÉORÈME XX. — *Les notations et hypothèses relatives au système frontière de Ventcel'* $(\mathrm{W}, \Gamma, \delta)$ *sont les mêmes que dans la proposition* III.2.5. *Alors, pour tout* $\beta > 0$, *et pour* $\beta = 0$ *si la propriété* (U^0) (n^o III.1.5) *est satisfaite :*

(1) *L'opérateur* $(\mathrm{C}^{2,\lambda}(\partial\mathrm{M}), \mathrm{LH}_\beta)$ *se prolonge en un opérateur de Waldenfels de classe* C^0 *sur la variété* $\partial\mathrm{M}$.

(2) *L'opérateur* $(\mathrm{C}^{2,\lambda}(\partial\mathrm{M}), \mathrm{LH}_\beta)$ *est préfermé dans* $\mathrm{C}(\partial\mathrm{M})$ *et sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur* $\partial\mathrm{M}$. *De plus, pour* $\beta > 0$ *ou pour* $\beta = 0$, *si les propriétés* (U^0) *et* (U) *sont satisfaites, ce semi-groupe est intégrable et admet l'opérateur* K_β (n^o III.2.5) *comme potentiel.*

En effet, la propriété (1) résulte du Théorème V (n^o I.3.1) et de ce que l'opérateur LH_β satisfait au principe du maximum positif (sur l'espace $\mathrm{C}^{2,\lambda}(\partial\mathrm{M})$) en vertu du Théorème X (n^o II.2.6) puisque, pour $\varphi \geqslant 0$ ($\varphi \in \mathrm{C}^{2,\lambda}(\partial\mathrm{M})$) la fonction $\mathrm{H}_\beta\varphi$ atteint son maximum sur $\partial\mathrm{M}$ (proposition III.1.6, propriété (1')).

La propriété (2) est alors conséquence, d'une part du Théorème de Hille-Yosida-Ray (n^o 0.2.4) joint au corollaire 1 de la proposition III.2.5 qui, appliqué aux systèmes frontières $(\mathrm{W}, \Gamma_\rho, \delta)$, où $\Gamma_\rho u = \Gamma u - \rho\gamma^0 u$, permet d'inverser les applications $\varphi \to \rho\varphi - LH_\beta\varphi$ ($\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$; $\rho > 0$); d'autre part, du lemme 0.2.3 en ce qui concerne l'intégrabilité du semi-groupe obtenu. c.q.f.d.

Remarque. — La relation (III.2.12) a été introduite par Sato et Ueno dans [20] (Théorème 5.2, p. 563) afin de déduire l'existence du semi-groupe sur M associé au système frontière (W, Γ, δ) (dans [20] W est seulement un opérateur de diffusion), de celle des semi-groupes sur ∂M ayant pour générateurs infinitésimaux les opérateurs LH_β ($\beta > 0$). Lorsque le système (W, Γ, δ) est d'ordre 2, LH_β est un opérateur de Waldenfels elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ sur la variété sans bord ∂M, de telle sorte que la proposition III.2.10 (propriété (2)) [et donc aussi le Théorème XIX, grâce à (III.2.12) et à la proposition III.2.7 selon la démarche de Sato et Ueno] est conséquence du Théorème XVI′ (nº III.1.8). Par contre, lorsque (W, Γ, δ) est d'ordre 1, l'opérateur LH_β est seulement d'ordre 1 et son caractère inversible [par exemple, pour $\beta > 0$, $\frac{\partial}{\partial\nu} H_\beta$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ sur $C^{1,\lambda}(\partial M)$] paraît ne résulter que de la résolution du problème aux limites (III.2.6) (nº III.2.5) qui fournit aussi la résolvante du semi-groupe cherché sur M.

On trouvera dans [20], dans l'exposé nº 6 du séminaire [17] ainsi que dans [19] divers développements de nature probabiliste relatifs aux liens entre les semi-groupes sur M et sur ∂M.

§ III.3. Propriétés de compacité des opérateurs de Lévy et des opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy.

III.3.1. Dans tout ce paragraphe, on suppose que la variété M est compacte; son bord ∂M pouvant être éventuellement vide. On désigne par g une métrique Riemanienne sur M de classe C^0, par τ_g la mesure Riemannienne sur M, et par $\overline{xy}$ la distance géodésique de x à y ($x \in M$, $y \in M$) associées à g.

III.3.2. Opérateurs de Lévy et de Ventcel'-Lévy de classe C^0. On rappelle (nº I.2.5) qu'*un noyau de Lévy de classe* C^0 *sur*

M est un noyau positif borélien $s(x, dy)$ de M dans M (n° 0.1.5) tel que,

[NS_1'] $s(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in M$.

[NS_2''] pour toute fonction positive $f \in C(M)$, la fonction

$$x \to \int_M s(x, dy)\overline{xy}^2 f(y) \qquad \text{appartient à} \qquad C(M).$$

De plus, pour un tel noyau s,

([NS_2'''] la fonction $x \to \int_M s(x, dy)\overline{xy}^2\Phi(x, y)$ appartient à C(M) pour toute fonction $\Phi \in B(M \times M)$ continue sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ (Lemme I.2.3).

De la même manière, on appellera *noyau de Ventcel' de classe* C^0 *sur* M tout noyau positif borélien $t(x', dy)$ de ∂M dans M (n° 0.1.5) tel que (voir le n° II.2.3),

(NV_1) $t(x', \{x'\}) = 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

(NV_2'') pour toute fonction positive $f \in C(M)$, la fonction

$$x' \to \int_M t(x', dy)\widetilde{x'y}\, f(y) \qquad \text{appartient à} \qquad C(\partial M)\ (^1).$$

On dira, par ailleurs, qu'*un opérateur frontière sur* M *est de classe* C^0 s'il applique $C^2(M)$ dans C(M).

Ceci étant :

Proposition. — (1) *Soient* η *une fonction de* $B(\partial M)$, ξ *un champ de vecteurs sur la variété* ∂M (« *tangent* » à ∂M), *et* t *un noyau de Ventcel' sur* M; η *et* t *étant liés par la relation* (II.2.15) (n° II.2.5). *Pour que l'opérateur frontière de Ventcel'-Lévy* T *défini par* (II.2.14). *applique* $C^p(M)$ *dans* C(M), *où* p *est un entier* $\geqslant 2$, *il faut et il suffit que* η, ζ *et* t *soient de classe* C^0.

(2) *En particulier, le noyau* (n° II.2.4), *d'un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy de classe* C^0 *sur* M *est aussi de classe* C^0.

(3) *Soient* t *un noyau de Ventcel' de classe* C^0 *sur* M, K *un compact de* M, *et* $\Phi \in C(K \times M)$. *La fonction,* $(x', x) \to \int_M t(x', dy)\overline{x'y}^2\Phi(x, y)$ (²) *appartient à* $C(\partial M \times K)$.

(¹) La quantité $\widetilde{x'y}$ est introduite au n° III.2.3.

(²) Cette intégrale est absolument convergente en vertu de [NV_2''] car il existe une constante $C > 0$ telle que $\overline{x'y}^2 \leqslant C\widetilde{x'y}$ ($x' \in \partial M$, $y \in M$).

On établit cette proposition comme la proposition I.2.7 en utilisant un lemme analogue au lemme I.2.3.

III.3.3 Prolongement d'un noyau de Ventcel' de classe C^0 en un noyau de Lévy de classe C^0. Le résultat suivant sera utile pour ramener l'étude des opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy à celui des opérateurs de Lévy :

Proposition. — (1) *Si* t *est un noyau de Ventcel' de classe* C^0 *sur* M (nº III.3.1), *il existe un noyau de Lévy* $\tilde{t}$ *de classe* C^0 *sur* M *prolongeant* t*; c'est-à-dire tel que*

$$\text{(III.3.1)} \quad t(x', X) = \tilde{t}(x', X) \qquad \text{pour} \qquad x' \in \partial M, \ X \in \mathcal{B}_M.$$

(2) *Pour tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy* T *de classe* C^0 *sur* M, *il existe un opérateur de Lévy* $\tilde{T}$ *de classe* C^0 *sur* M *tel que,*

$$\text{(III.3.2)} \quad Tu = \gamma^0(\tilde{T}u) \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in C^2(M).$$

Afin d'établir la propriété (1), on désigne par ρ une application continue d'un ouvert V de M dans ∂M telle que,

$$\text{(III.3.3)} \quad \partial M \subset V \quad \text{et} \quad \rho(x') = x' \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in \partial M;$$

et on note $\bar{x} = \rho(x)$ pour tout $x \in V$. On désigne, d'autre part, par Φ une fonction de $B(M \times M)$ telle que $0 \leqslant \Phi \leqslant 1$, et,

$$\text{(III.3.4)} \quad \Phi(x, x) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \mathring{M};$$
$$\text{(III.3.5)} \quad \Phi(x', y) = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in \partial M, y \in M;$$
(III.3.5')
$$\Phi(\,.\,, y) = 1 \qquad \text{a son support dans V pour tout} \qquad y \in M;$$
$$\text{(III.3.6)} \quad \Phi \qquad \text{est continue sur} \qquad M \times M \setminus \Delta_{\partial M \times \partial M}\ (^1).$$

(on montre l'existence d'une telle fonction Φ en se ramenant au moyen d'une partition de l'unité au cas d'une demi-boule). Cela étant, si t est un noyau de Ventcel' de classe C^0, on pose

$$\tilde{t}(x, X) = \int_{X \setminus \{x\}} t(\bar{x}, dy) \Phi(x, y) \frac{\overline{\bar{x}y}^2}{\overline{xy}^2} \quad (x \in M, X \in \mathcal{B}_M).$$

On définit ainsi un noyau $\tilde{t}$ qui répond à la question : tout d'abord les relations $[NS_1']$ et (III.3.1) sont satisfaites

(1) $M \times M \setminus \Delta_{\partial M \times \partial M} = \{(x, y) | x \in \mathring{M},\ y \in M \ \text{ou}\ x \in \partial M,\ y \in M \setminus \{x\}\}$.

en vertu de (III.3.3) et (III.3.5). Ensuite, en ce qui concerne $[NS''_2]$, si f est une fonction positive de $C(M)$, on a, pour $x \in M$,

$$\int_M \tilde{t}(x,\ dy)\ \overline{xy}^2 f(y) = \int_{M\setminus\{x\}} t(\overline{x},\ dy)\Phi(x,\ y)\overline{\overline{x}y}^2\ f(y)$$
$$= \int_M t(\overline{x},\ dy)\Phi(x,\ y)\overline{\overline{x}y}^2\ f(y),$$

en vertu de (NV_1) pour $x \in \partial M$ et de (III.3.4) pour $x \in \mathring{M}$. Il reste donc à établir que la fonction F :

$$x \to F(x) = \int_M t(\overline{x},\ dy)\Phi(x,\ y)\ \overline{\overline{x}y}^2 f(y)$$

est continue en tout point $x_0 \in M$. Pour $x_0 \in \mathring{M}$, cela résulte immédiatement de (III.3.6) (qui entraîne la continuité de Φ sur $\mathring{M} \times M$) et de la propriété (3) de la proposition III.3.1; et, pour $x_0 \in \partial M$, on obtient le résultat cherché, en vertu des mêmes propriétés, par la méthode employée pour établir le lemme I.2.3. D'où la propriété (1).

On en déduit la propriété (2) comme suit : on commence par exprimer T sous la forme (II.2.14) (nº II.2.5), les termes η, ζ et t étant de classe C^0 comme T en vertu de la proposition III.3.1. On considère ensuite l'opérateur de Lévy S de classe C^0 sur M défini par

$$\text{(III.3.7)}\quad Su(x) = \overline{\eta}(x)u(x) + \int_M \tilde{t}(x, dy)[u(y) - \theta u(x, y)]$$

($u \in C^2(M)$, $x \in M$; nº I.2.7) où le développement de Taylor θu est construit à partir du même système $(U_\alpha,\ \chi_\alpha,\ \sigma_\alpha)$ que le développement de Taylor $\theta^* u$ figurant dans (II.2.14), et où $\overline{\eta} \in C(M)$ est choisi de telle sorte que, d'une part,

$$\overline{\eta}(x') = \eta(x') \qquad \text{pour} \qquad x' \in \partial M,$$

et d'autre part,

$$\overline{\eta}(x) + \int_M \tilde{t}(x, dy)(1 - \theta 1(x, y)) \leqslant 0 \ \text{ pour tout } \ x \in M$$

(ce qui est possible, d'après (III.3.1) et (II.2.15), puisque $\theta^* 1(x',\ y) = \theta 1(x',\ y)$ pour $x' \in \partial M$, $y \in M$).

Cela étant, en « sortant du signe somme » dans (III.3.7) grâce à (NV''_2) (nº III.3.2), les termes qui figurent, pour

$x' \in \partial M$, dans $\theta u(x', y)$ et non dans $\theta^* u(x', y)$, on établit l'existence d'un champ de vecteurs X de classe C^0 sur M tel que,

$$Tu(x') = Su(x') + \frac{\partial}{\partial X} u(x') \quad (x' \in \partial M, \ u \in C^2(M)).$$

D'où la propriété (2) en posant $\tilde{T} = S + \frac{\partial}{\partial X}$.

c.q.f.d.

III.3.4. Compacité de C^2 dans C.

Théorème XXI. — *Sur la variété à bord compacte* M,

(1) *Tout opérateur de Lévy de classe* C^0 *est compact de* $C^2(M)$ *dans* $C(M)$.

(2) *Tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy de classe* C^0 *est compact de* $C^2(M)$ *dans* $C(\partial M)$.

Corollaire. — *Soit* W *un opérateur de Waldenfels décomposable de classe* C^0 *sur* M. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) W *est un opérateur de Lévy.*

(*b*) W *est compact de* $C^2(M)$ *dans* $C(M)$.

(*c*) *La partie principale d'ordre* 2 *de* W (n° I.3.2) *est nulle.*

Le corollaire résulte immédiatement de la propriété (1) du Théorème, des Théorèmes IV et V (n° I.2.8 et I.3.2), et du fait qu'un opérateur différentiel d'ordre 2 ne peut être compact de $C^2(M)$ dans $C(M)$ que si sa partie principale d'ordre 2 est nulle.

La propriété (2) résultant de la proposition III.3.2 et de la propriété (1), il reste à établir cette dernière. Pour cela, on va se ramener, par un procédé de troncature, au fait que toute limite d'opérateurs compacts (limite en norme d'opérateurs) est aussi compacte : soit donc S un opérateur de Lévy de classe C^0 sur M. Exprimant S sous la forme (I.2.14) où Z et s sont de classe C^0 (proposition I.2.7), on pose, pour chaque fonction positive $\Phi \in C(M \times M)$,

$$\text{(III.3.8)} \quad S_\Phi u(x) = Zu(x) + \int_M s(x, dy)\Phi(x, y)[u(y) - \theta u(x, y)] \quad (x \in M, \quad u \in C^2(M)).$$

Le noyau $\Phi(x, y)s(x, dy)$ étant un noyau de Lévy de classe C^0 en même temps que S d'après $[NS_2''']$ (n° III.3.2), (III.3.8) définit une application linéaire continue S_Φ de $C^2(M)$ dans $C(M)$ d'après la proposition I.2.7 (propriété (2)).

De plus, *lorsque la fonction* Φ *est nulle au voisinage de la diagonale* $\Delta_{M\times M}$, S_Φ *est un opérateur compact de* $C^2(M)$ *dans* $C(M)$: en effet, on peut alors écrire,

$$S_\Phi u = Zu - Z_\Phi u + K_\Phi u \quad (u \in C^2(M)),$$

où Z_Φ est l'opérateur différentiel du premier ordre et de classe C^0 (d'après $[NS_2''']$) sur M défini par

$$Z_\Phi u(x) = \int_M s(x, dy)\Phi(x, y)\theta u(x, y) \quad (x \in M, \ u \in C^1(M)),$$

et K_Φ l'opérateur intégral, continu de $C(M)$ dans $C(M)$ en vertu de $[NS_2''']$, défini par

$$K_\Phi f(x) = \int_M s(x, dy)\Phi(x, y)f(y) \quad (x \in M, \ f \in C(M)).$$

D'où la compacité de S_Φ en vertu de celle de l'injection canonique de $C^2(M)$ dans $C^1(M)$ et de la continuité de Z, Z_Φ et K de $C^1(M)$ dans $C(M)$.

Cela étant, soit (σ_n) une suite de fonctions unité locales sur M telle que, pour tout n,

$$\text{(III.3.9)} \qquad \sigma_{n+1} \leqslant \sigma_n$$

et

$$\text{(III.3.10)} \qquad \sigma_n(x, y) = 0 \quad \text{dès que} \quad \overline{xy} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \|Su - S_{1-\sigma_n}u\| = 0$, et ceci uniformément lorsque $\|u\|_{(2)} \leqslant 1$ [où $\| \ \ \|_{(2)}$ est une norme définissant la topologie de $C^2(M)$ (n° 0.1.2)]. Or, on a, d'après (III.3.8), pour $x \in M$, $u \in C^2(M)$,

$$Su(x) - S_{1-\sigma_n}u(x) = \int_M s(x, dy)\sigma_n(x, y)[u(y) - \theta u(x, y)];$$

d'où, en vertu de la propriété (θ_3) de θ (n° I.2.7), l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in M$, tout $u \in C^2(M)$ et tout n,

$$|Su(x) - S_{1-\sigma_n}u(x)| \leqslant C\psi_n(x)\|u\|_{(2)},$$

où

$$\psi_n(x) = \int_M s(x, dy)\sigma_n(x, y)\, \overline{xy}^2.$$

On en déduit le résultat cherché grâce au théorème de Dini, car, d'une part, $\psi_n \in C(M)$ pour tout n d'après [NS$_2'''$], et d'autre part, pour chaque $x \in M$, la suite $\psi_n(x)$ tend vers 0 en décroissant d'après les hypothèses (III.3.9) et (III.3.10) sur (σ_n) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

c.q.f.d.

III.3.5. Compacité de C^1 dans C pour les opérateurs d'ordre 1.

Théorème XXI′. — *Sur la variété à bord compacte* M,

(1) *Tout opérateur de Lévy de classe* C^0 *et d'ordre* 1 (n° I.2.9) *est compact de* $C^1(M)$ *dans* $C(M)$.

(2) *Tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy de classe* C^0 *et d'ordre* 1 (n° II.2.12) *est compact de* $C^1(M)$ *dans* $C(\partial M)$.

(Démonstration en tous points analogue à celle du Théorème XXI).

III.3.6. Cas des opérateurs appliquant continûment $C^{p+2,\mu}$ dans $C^{p,\mu}$ ou $C^{p+1,\mu}$ pour $\mu > \lambda$. Les Théorèmes XXI et XXI′ ci-dessus et les propriétés d'interpolation entre les espaces de Banach C^q et $C^{p,\lambda}$ $(p \geqslant q)$ rappelées dans l'appendice 2 entraînent :

Théorème XXII. — *Soient* λ *et* μ *des nombres réels tels que* $0 < \lambda < \mu < 1$, et p *un nombre entier* $\geqslant 0$. *Alors, sur la variété à bord compacte* M,

(1) *Tout opérateur de Lévy* (resp. *d'ordre* 1) *sur* M *appliquant continûment* $C^{p+2,\mu}(M)$ *dans* $C^{p,\mu}(M)$ (resp. $C^{p+1,\mu}(M)$) *est compact de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{p,\lambda}(M)$ (resp. $C^{p+1,\lambda}(M)$) (1).

(2) *Tout opérateur frontière de Ventcel'-Lévy* (resp. *d'ordre* 1) *sur* M *appliquant continûment* $C^{p+2,\mu}(M)$ *dans* $C^{p,\mu}(\partial M)$ (resp. $C^{p+1,\mu}(\partial M)$) *est compact de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{p,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{p+1,\lambda}(\partial M)$) (1).

(1) « est compact de F dans G » signifiant évidemment « applique F dans G et est compact de F dans G ».

Ce théorème ramène raisonnablement l'étude de la compacité des opérateurs de Lévy ou de Ventcel'-Lévy de $C^{p+2,\lambda}$ dans $C^{p,\lambda}$ ou $C^{p+1,\lambda}$ requise dans les paragraphes III.1 et III.2 ci-dessus, à celle de la continuité de ces opérateurs de $C^{p+2,\mu}$ dans $C^{p,\mu}$ ou $C^{p+1,\mu}$ pour un nombre $\mu > \lambda$. On décrira aux nº III.3.7 à III.3.9 ci-dessous une classe de noyaux donnant des opérateurs possédant cette continuité (Théorème XXIII, nº III.3.10).

La question demeure actuellement ouverte de savoir si tout opérateur de Lévy (resp. de Ventcel'-Lévy) appliquant continûment $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ (resp. $C^{p,\lambda}(\partial M)$) est compact dans ces espaces.

III.3.7. Une classe de noyaux-fonction intégrables appliquant $C^{p,\mu}$ dans $C^{p,\mu}$. Soient Ω un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ et $0 < \mu < 1$.

On désigne par $\underline{N}^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}'^{0,\mu}(\Omega)$) l'ensemble des fonctions numériques boréliennes N: $(x, z) \to N(x, z)$ sur $\Omega \times R^n$ (resp. $\partial\Omega \times R^n$(1))) telles que,

(A_1) Pour chaque compact K de Ω (resp. $\partial\Omega$), et chaque $R > 0$,

$$\text{(III.3.11)} \qquad \sup_{x\in K} \int_{|z|\leqslant R} |N(x, z)|\, dz < +\infty$$

et

$$\text{(III.3.12)} \qquad \sup_{\substack{x_1\in K,\, x_2\in K \\ x_1\neq x_2}} |x_2 - x_1|^{-\mu} \int_{|z|\leqslant R} |N(x_2, z) - N(x_1, z)|\, dz < +\infty.$$

(B) En ce qui concerne $\underline{N}^{0,\mu}(\Omega)$ lorsque $\partial\Omega \neq \emptyset$, pour chaque compact K de Ω et chaque $R > 0$,

$$\text{(III.3.13)} \qquad \sup_{\substack{x\in K \\ 0\leqslant t_1\leqslant x^n\leqslant t_2\leqslant R}} |t_2 - t_1|^{-\mu} \int_{\substack{|z|\leqslant R \\ t_1\leqslant z^n\leqslant t_2}} |N(x, z)|\, dz < +\infty.$$

On désigne de plus, pour chaque entier $p \geqslant 0$, par $\underline{N}^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}'^{p,\mu}(\Omega)$) le sous-ensemble de $\underline{N}^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}'^{0,\mu}(\Omega)$) formé des fonctions N telles que,

— la fonction $N(.,z)$ est de classe C^p pour tout $z \in R^n$.

(1) $\partial\Omega = \{z | z = (z^i) \in \Omega \text{ et } z^n = 0\}$ (nº 0.1.1).

— les fonctions $D^\beta N : (x, z) \to \dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} N(x, z)$ appartiennent à $\underline{N}^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}'^{0,\mu}(\Omega)$) pour tout indice de dérivation β tel que $0 \leqslant |\beta| \leqslant p$.

Cela étant,

Lemme. — (1) *Soient* [1] $N \in \underline{N}^{p,\mu}(\Omega)$, $\Phi \in C^{p,\mu}_{\mathrm{Loc}}(\Omega \times \Omega)$, *et* $\varphi \in C^{p,\mu}_k(\Omega)$. *Alors, la fonction* $x \to \int_\Omega N(x, x-y)\Phi(x, y)\varphi(y)\,dy$ *appartient à* $C^{p,\mu}_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$.

(2) *Soient* $N \in \underline{N}'^{p,\mu}(\Omega)$, $\Phi \in C^{p,\mu}_{\mathrm{Loc}}(\partial\Omega \times \Omega)$ *et* $\varphi \in C^{p,\mu}_k(\Omega)$. *Alors la fonction* $x' \to \int_\Omega N(x', x'-y)\Phi(x', y)\psi(y)\,dy$ *appartient à* $C^{p,\mu}_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$.

En effet, posant, pour $x \in \Omega$ (resp. $\partial\Omega$),

$$\Phi_0(x, y) = \Phi(x, y)\varphi(y) \qquad \text{pour} \qquad y \in \Omega \quad \text{et} \quad \Phi_0(x, y) = 0$$

pour $y \in R^n \setminus \Omega$, on a, pour $x \in \Omega$ (resp. $\partial\Omega$),

(III.3.14)
$$F(x) = \int_\Omega N(x, x-y)\Phi(x, y)\varphi(y)\,dy = \int_{R^n} N(x, z)\Phi_0(x, x-z)\,dz.$$

Par dérivation sous le signe somme dans la dernière intégrale, on ramène d'abord le cas $p > 0$ au cas $p = 0$.

Pour traiter le cas $p = 0$, soient K un compact de Ω (resp. $\partial\Omega$), $x_1 \in K$, $x_2 \in K$, et $d = |x_2 - x_1|$. Il s'agit de montrer que $|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant \text{cte}\, d^\mu$ où le mot « cte » désigne une constante > 0 dépendant de N, Φ, φ et K mais pas de (x_1, x_2). Lorsque $x_1^n = x_2^n$ ou bien lorsque Ω est un ouvert de R^n ($\partial\Omega = \emptyset$), la démonstration est très simple : Utilisant (III.3.14), il suffit d'écrire,

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant \int_{R^n} |N(x_2, z)|\,|\Phi_0(x_2, x_2 - z) - \Phi_0(x_1, x_1 - z)|\,dz$$
$$+ \int_{R^n} |N(x_2, z) - N(x_1, z)|\,|\Phi_0(x_1, x_1 - z)|\,dz,$$

Les deux termes au second membre étant majorés par cte d^μ, le premier en vertu de (III.3.11) et de la classe $C^{0,\mu}$ de Φ_0 sur les hyperplans $z^n = \text{cte}$, et le second en vertu de (III.3.12). Lorsque $x_1^n < x_2^n$, la procédure précédente est en défaut

[1] Avec les notations introduites au n° III.1.1.

(Φ_0 n'étant pas de classe $C^{0,\mu}$ au voisinage de l'hyperplan R^n_0). On écrit alors,

$$\begin{aligned}|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant \int_\Omega |N(x_2, x_2 - y) - N(x_1, x_2 - y)|\, |\Phi_0(x_2, y)|\, dy \\ + \int_\Omega |N(x_1, x_2 - y)|\, |\Phi_0(x_2, y) - \Phi_0(x_1, y)|\, dy \\ + \Big| \int_\Omega N(x_1, x_2 - y)\Phi_0(x_1, y)\, dy \\ - \int_\Omega N(x_1, x_1 - y)\Phi_0(x_1, y)\, dy \Big|.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont majorés par cte d^μ, en vertu de la classe $C^{0,\mu}$ de Φ_0 sur Ω et de (III.3.11) et (III.3.12). Soit D le troisième terme.

Posant, pour chaque $y = (y^i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in R^n$, $y' = (y^i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, et notant $N(x, z', z^n)$, $\Phi(x, y', y^n)$ au lieu de $N(x, z)$, $\Phi(x, y)$, on a, $D \leqslant D'$ avec,

(III.3.15)

$$\begin{aligned}D = \Big| \int_{R^{n-1}} dy' \int_0^\infty N(x_1, x'_2 - y', x^n_2 - t)\Phi_0(x_1, y', t)\, dt \\ - \int_{R^{n-1}} dy' \int_0^\infty N(x_1, x'_1 - y', x^n_1 - t)\Phi_0(x_1, y', t)\, dt \Big|,\end{aligned}$$

(III.3.16)

$$\begin{aligned}D' = \Big| \int_{R^{n-1}} dz' \int_{-x^n_2}^\infty N(x_1, z', -u)\Phi_0(x_1, x_1 - z', x^n_2 + u)\, du \\ - \int_{R^{n-1}} dz' \int_{-x^n_1}^\infty N(x_1, z', -u)\Phi_0(x_1, x_1 - z', x^n_1 + u)\, du \Big| \\ + \int_{R^{n-1}} dz' \int_0^\infty |N(x_1, z', x^n_2 - t)|\, |\Phi_0(x_1, x_2 - z', t) \\ - \Phi(x_1, x_1 - z', t)|\, dt,\end{aligned}$$

en faisant les deux changements de variable $z' = x'_2 - y'$, $t = x^n_2 + u$ dans la première intégrale de (III.3.15) et $z' = x'_1 - y'$, $t = x^n_1 + u$ dans la seconde, et en faisant apparaître le second terme de (III.3.16) entre les deux.

Ce second terme est majoré par Cte d^μ en vertu de (III.3.11) et de la classe $C^{0,\mu}$ de Φ_0 sur $\overline{R^{n+}}$. Quant au premier terme, il est majoré par $D' + D''$, où,

$$\begin{aligned}D' = \int_{R^{n-1}} dz' \int_{-x^n_1}^\infty |N(x_1, z', -u)|\, |\Phi(x_1, x_1 - z', x^n_2 + u) \\ - \Phi(x_1, x_1 - z', x^n_1 + u)|\, du, \\ D'' = \int_{R^{n-1}} dz' \int_{-x^n_2}^{-x^n_1} |N(x_1, z', -u)|\, |\Phi(x_1, x_1 - z', x^n_2 + u)|\, du.\end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque D' et D'' sont majorés par cte d^μ, en vertu de (III.3.11) et de la classe $C^{0,\mu}$ de Φ_0 sur $\overline{R^{n+}}$ pour D', et en vertu de (III.3.13) pour D''.

c.q.f.d.

Remarque. — Lorsque la fonction N est positive et possède la propriété (A_1), la démonstration précédente montre que la propriété (B) est nécessaire (ainsi que suffisante) pour que la conclusion du lemme subsiste.

III.3.8. Une classe d'opérateurs de Lévy et de Ventcel'-Lévy appliquant continûment $C^{p+2,\mu}$ dans $C^{p,\mu}$. On va considérer sur l'ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$ (afin de procéder ensuite par recollement sur la variété M) des noyaux de Lévy (resp. de Ventcel'-Lévy) de la forme $s(x, y)\,dy$ (resp. $t(x', y)\,dy$) où $s(x, y)$ (resp. $t(x', y)$ est un noyau-fonction convenable.

Pour cela, on commence par introduire des sous-classes $\underline{N}_0^{p,\mu}$ et $\underline{N}_0'^{p,\mu}$ de $\underline{N}^{p,\mu}$ et $\underline{N}'^{p,\mu}$ respectivement (n° III.3.7) telles que les classes de noyaux-fonction associés [1] soient invariantes par difféomorphisme (ce qui n'est pas le cas pour $\underline{N}^{0,\mu}$ et $\underline{N}'^{0,\mu}$) : On désigne par $\underline{N}_0^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_0'^{0,\mu}(\Omega)$; $0 < \mu < 1$) le sous ensemble de $C(\Omega \times R^n \setminus \{0\})$ (resp. $C(\partial\Omega \times R^n \setminus \{0\})$) formé des fonctions $N : (x, z) \to N(x, z)$ appartenant à $\underline{N}^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}'^{0,\mu}(\Omega)$) [2] et telles que,

(A_2) Pour chaque compact K de Ω (resp. $\partial\Omega$), il existe une fonction borélienne positive ψ sur $\Omega \times R^n$ telle que,

$$\text{(III.3.17)} \qquad \sup_{x \in K} \int_{|z| \leqslant R} \psi(x, z)\,dz < +\infty \quad \text{pour tout} \quad R > 0,$$

et

$$\text{(III.3.18)} \qquad |N(x, z + v) - N(x, z)| \leqslant |v|^{\mu} |z|^{-\mu} \psi(x, z),$$

pour tout $x \in K$, tout $z \in R^n \setminus \{0\}$, et tout $v \in R^n$ (resp. $v \in R_0^n$ [2]) tels que,

$$\text{(III.3.19)} \qquad |v| \leqslant \frac{1}{2} |z|.$$

On désigne, de plus, pour q réel, par $\underline{N}_q^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_q'^{0,\mu}(\Omega)$) l'ensemble des fonctions $N \in C(\Omega \times R^n \setminus \{0\})$

(1) A $N \in N^{0,\mu}(\Omega)$ est associé le noyau $N(x, x - y)\,dy$ (voir ci-dessous).
(2) Ou pose, par exemple, $N(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(resp. $C(\partial\Omega \times R^n\setminus\{0\})$) telles que la fonction $(x, z) \rightarrow N(x, z)|z|^q$ appartienne à $\underline{N}_0^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_0'^{0,\mu}(\Omega)$).

On désigne ensuite, pour p entier $\geqslant 0$, par $\underline{N}_q^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $(\underline{N}_q'^{p,\mu}(\Omega))$ l'ensemble des fonctions $N \in C^p(\Omega \times R^n\setminus\{0\})$ (resp. $(C^p(\partial\Omega \times R^n\setminus\{0\}))$ telles que, si β et γ sont des indices de dérivation tels que $|\beta| + |\gamma| \leqslant p$, la fonction $D^\beta\partial^\gamma N$ (1) appartient à $\underline{N}_{q+|\gamma|}^{0,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_{q+|\gamma|}'^{0,\mu}(\Omega)$).

Par exemple, lorsque Ω est un ouvert de R^n, appartiennent à $\underline{N}_q^{p,\mu}(\Omega)$ toutes les fonctions $N \in C^\infty(\Omega \times R^n\setminus\{0\})$ telles que $N(x, .)$ soit positivement homogène de degré $\varepsilon - q - n$ (avec $\varepsilon > 0$) pour chaque $x \in \Omega$.

On note que, si $N \in \underline{N}_q^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_q'^{p,\mu}(\Omega)$) et si

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n,$$

la fonction $(x, z) \rightarrow N(x, z)z^\alpha$ (2) appartient à $\underline{N}_{q-|\alpha|}^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_{q-|\alpha|}'^{p,\mu}(\Omega)$).

On désigne, en outre, par $\underline{N}_{1,2}'^{p,\mu}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $N \in C^p(\partial\Omega \times R^n\setminus\{0\})$ telles que la fonction $(x, z) \rightarrow N(x, z)$ $\left(z^n + \sum_{i=1}^{n-1} |z^i|^2\right)$ appartienne à $\underline{N}_0'^{p,\mu}(\Omega)$.

Cela étant, on désigne par $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(\Omega)$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(\Omega)$) l'ensemble des fonctions numériques *continues* Λ sur $\Omega \times \Omega\setminus\Delta_{\Omega\times\Omega}$ (resp. $\partial\Omega \times \Omega\setminus\Delta_{\Omega\times\Omega}$) (3) telles que, pour tout compact K de Ω, il existe une fonction N_K appartenant à $\underline{N}_q^{p,\mu}(\Omega)$ (resp. $\underline{N}_q'^{p,\mu}(\Omega)$, $\underline{N}_{1,2}'^{p,\mu}(\Omega)$) de sorte que,

$$\text{(III.3.20)} \quad \Lambda(x, y) = N_K(x, x - y) \qquad \text{pour} \qquad x \in K$$

(resp. $x \in K \cap \partial\Omega$) et $y \in K\setminus\{x\}$.

Les classes de noyaux-fonction $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}$, $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}$ et $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}$ ainsi définies sont *invariantes par difféomorphisme* (4), ce qui permet de définir les classes correspondantes sur la variété M : On désigne par $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}$ (M) (resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(M)$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(M)$] l'ensemble

(1) $D^\beta\partial^\gamma N(x, z) = \dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\dfrac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} N(x, z)$.

(2) $z^\alpha = \prod_{i=1}^{n} (z^i)^{\alpha_i}$.

(3) De telles fonctions, éventuellement prolongées à $\Omega\times\Omega$ ou $\partial\Omega\times\Omega$ par 0 sur la diagonale, seront appelées « noyaux-fonction ».

(4) Vérification longue mais sans difficulté reposant essentiellement sur l'emploi de la formule de Taylor.

des fonctions numériques continues Λ sur $M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$ (resp. $\partial M \times M \setminus \Delta_{M\times M}$) telles que, pour toute carte locale (U, χ) de M (U étant éventuellement non connexe) la fonction $(x, y) \to \Lambda(\chi(x), \chi(y))$ appartienne à $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}(\chi(U))$ [resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(\chi(U))$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(\chi(U))$]. Les éléments de $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}(M)$ [resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(M)$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(M)$] seront appelés *noyaux-fonction* de classe $\mathfrak{N}_q^{p,\mu}$ [resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}$] sur M.

On peut construire de tels noyaux-fonction comme suit par recollement : Soient $\{(U_j)\}$ un recouvrement ouvert fini de M tel que, pour tout couple (j, k) il existe une carte locale (U_{jk}, χ_{jk}) de M (éventuellement non connexe) telle que $U_j \cup U_k \subset U_{jk}$, et $\{\varphi_{jk}\}$ une partition de l'unité de classe C^∞ sur $M \times M$ subordonnée au recouvrement $\{U_j \times U_k\}$. Alors, on définit un noyau-fonction $\Lambda \in \mathfrak{N}_q^{p,\mu}(M)$ (resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(M)$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(M)$] en posant,

$$\text{(III.3.21)} \quad \Lambda(x, y) = \sum_{j,k} \varphi_{jk}(x, y)\Lambda_{jk}(\chi_{j,k}(x), \chi_{j,k}(y)) \quad (x \in M \text{ (resp. } x \in \partial M), \quad y \in M\setminus\{x\}),$$

où, pour chaque j, k, $\Lambda_{jk} \in \mathfrak{N}_q^{p,\mu}(\chi_{jk}(U_{jk}))$ [resp. $\mathfrak{N}_q'^{p,\mu}(\chi_{jk}(U_{jk}))$, $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}(\chi_{jk}(U_{jk}))$] (1).

III.3.9. THÉORÈME XXIII. — *Soit* $\underline{s}$ *un noyau-fonction positif de classe* $\mathfrak{N}_2^{p,\mu}$ *sur* M (p entier $\geqslant 0$, $0 < \mu < 1$; n° III.3.8). *Alors,*

(1) *On définit un noyau de Lévy* $s(x, dy)$ *de classe* C^0 *sur* M *en posant* (*avec les notations du n°* III.3.1),

$$\text{(III.3.22)} \quad s(x, X) = \int_X \underline{s}(x, y)\tau_g(dy) \quad (x \in M, X \in \mathcal{B}_M).$$

(2) *Si la métrique Riemanienne* g (n° III.3.1) *est de classe* $C^{p,\mu}$ *et si* Z *est un opérateur différentiel du premier ordre et de classe* $C^{p,\mu}$ *sur* M *tel que la relation* (I.2.15) (n° I.2.7) *soit satisfaite, alors l'opérateur de Lévy* S *sur* M *défini par* (I.2.14) (n° I.2.7) *applique continûment* $C^{p+2,\mu}(M)$ *dans* $C^{p,\mu}(M)$ *et* (Théorème XXII) *est compact de* $C^{p+2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{p,\lambda}(M)$ *pour* $0 < \lambda < \mu$.

(1) Cet énoncé inclut la propriété d'invariance par difféomorphisme des classes de noyaux-fonction en question.

[On peut énoncer des théorèmes analogues relatifs aux opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy d'ordre 1 ou 2, en considérant des noyaux-fonction positifs de classe $\mathfrak{N}_2'^{p,\mu}$ ou $\mathfrak{N}_{1,2}'^{p,\mu}$ sur M.]

En effet d'abord le noyau $s(x, dy)$ défini par (III.3.22) est un noyau de Lévy de classe C^0 (n° I.2.5) : [NS$_1'$] est évidemment vérifiée, ainsi que [NS$_4'$] à cause de la continuité de $\underline{s}$ hors de la diagonale de $M \times M$; et [NS$_2'$] résulte, par localisation au moyen d'une carte locale (U, χ), de la relation (III.3.12) (n° III.3.7) appliquée au noyau-fonction

$$(x, y) \to \underline{s}(\chi(x), \chi(y)|y - x|^2.$$

En ce qui concerne la propriété (2), l'opérateur de Lévy S considéré applique continûment $C^2(M)$ dans $C^0(M)$ (proposition I.2.7) ; donc, en vertu du théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que $Su \in C^{p,\mu}(M)$ dès que $u \in C^{p+2,\mu}(M)$; ou encore, en reprenant l'expression (I.2.12) (n° I.2.7) de θu, que, pour $u \in C^{p+2,\mu}(M)$, les fonctions,

$$\text{(III.3.23)} \qquad x \to \int_M \underline{s}(x, y)[1 - \sigma_\alpha(x, y)]u(y)\,\tau_g(dy)$$

et

(III.3.24)

$$x \to \int_M \underline{s}(x, y)\sigma_\alpha(x, y) \left[u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^i}(x)(\chi_\alpha^i(y) - \chi_\alpha^i(x))\right]\tau_g(dy),$$

sont de classe $C^{p,\mu}$ sur M, ce qui résulte du lemme III.3.7 : En ce qui concerne la fonction (III.3.24), on peut supposer que u a son support dans U_α, et par localisation au moyen de la carte locale (U_α, χ_α) et utilisation de la formule de Taylor (I.1.16) (n° I.1.4), on est ramené à étudier, sur l'ouvert $\Omega = \chi_\alpha(U_\alpha)$ de $\overline{R^{n+}}$, une fonction de la forme

(III.3.25)

$$x \to \int_\Omega s_{\chi_\alpha}(x, x - y)(y^i - x^i)(y^j - x^j)R_{ij}\tilde{u}(x, y)\tilde{\sigma}_\alpha(x, y)\,dy \text{ (}^1\text{)},$$

(1) $\tilde{u}(y) = u(\chi_\alpha(y))$, $\tilde{\sigma}_\alpha(x, y) = \sigma_\alpha(\chi_\alpha(x), \chi_\alpha(y))$ $(n \in \Omega,\ y \in \Omega)$.

où, par définition de $\mathfrak{N}_2^{p,\mu}(M)$, la fonction $(x, z) \to s_{\chi_\alpha}(x, z)$ appartient à $\underline{N}_2^{p,\mu}(\Omega)$, ce qui entraîne que la fonction $(x, z) \to s_{\chi_\alpha}(x, z)z^i z^j$ appartient à $\underline{N}_0^{p,\mu}(\Omega)$, donc aussi à $\underline{N}^{p,\mu}(\Omega)$. Le lemme III.3.7 entraîne alors que (III.3.25), donc aussi (III.3.24) est de classe $C^{p,\mu}$, puisque, u étant de classe $C^{p+2,\mu}$, $R_{ij}\tilde{u}$ est de classe $C^{p,\mu}$ ainsi que $\tilde{\sigma}_\alpha$.

On traite de façon analogue le cas de la fonction (III.3.23) : utilisant des cartes locales (U, χ) de M éventuellement non connexes, on se ramène à étudier la fonction (III.3.23) sur U lorsque u a son support dans U; c'est-à-dire, par localisation sur $\Omega = \chi(U)$ à étudier une fonction de la forme,

$$x \to \int_\Omega s_\chi(x, x-y)[1-\tilde{\sigma}_\alpha(x, y)]\tilde{u}(y)\,dy = \int_\Omega s_\chi(x, x-y)|x-y|^2\Phi(x, y)\,dy,$$

où $\Phi(x, y) = |x-y|^{-2}[1-\tilde{\sigma}_\alpha(x, y)]\tilde{u}(y)$ (¹) définit une fonction de classe $C^{p,\mu}$ sur $\Omega \times \Omega$ puisque $1-\tilde{\sigma}_\alpha$ est nulle au voisinage de la diagonale de $\Omega \times \Omega$ et que $\tilde{u}$ est de classe $C^{p,\mu}$, ce qui permet encore de conclure grâce au lemme III.3.7.

c.q.f.d.

Remarque 1. — Il existe des noyaux-fonction positifs $\underline{s} \in \mathfrak{N}_2^{p,\mu}(M)$ tels que l'opérateur de Lévy S associé à $\underline{s}$ par le théorème précédent ne soit d'ordre η (²) pour aucun $\eta < 2$ [on peut construire de tels noyaux à partir de l'exemple donné dans la remarque 1 du nº I.2.8]. Ceci montre, en particulier, que la compacité de $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ (comme celle de $C^2(M)$ dans $C(M)$) n'est pas l'apanage des opérateurs de Lévy appliquant continûment $C^{p+2,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda+\varepsilon}(M)$ avec $\varepsilon > 0$ (opérateurs « ε-régularisants » qui, eux sont très généralement d'ordre $2-\varepsilon$; voir la remarque 2 ci-dessous).

Une remarque analogue est valable pour les opérateurs frontière de Ventcel'-Lévy.

Remarque 2. — On peut introduire, pour $0 < \varepsilon < \mu$, certaines sous-classes de $\mathfrak{N}_{2-\varepsilon}^{p,\mu}$ (donc de $\mathfrak{N}_2^{p,\mu}$) pour les élé-

(¹) $\tilde{u}(y) = u(\chi(y))$, $\tilde{\sigma}_\alpha(x, y) = \sigma_\alpha(\chi(x), \chi(y))$ $(x \in \Omega,\ y \in \Omega)$.

(²) En ce sens que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\eta'}} e^{-ikv(x)}\, S(ue^{ikv})(x) = 0$ pour tout $x \in M$, $u \in C^\infty(M)$, $v \in C^\infty(M)$ et tout $\eta' > \eta$.

ments $\underline{s}$ desquelles l'opérateur de Lévy S associé par le Théorème XXII applique continûment $C^{p+2,\mu-\varepsilon}(M)$ dans $C^{p,\mu}(M)$, et apparaît donc comme compact de $C^{p+2,\mu}(M)$ dans $C^{p,\mu}(M)$ [1]. La question est ouverte de savoir si tous les opérateurs de Lévy obtenus dans le Théorème XXII (propriété (2)) possèdent cette dernière propriété.

III.3.10. Voici enfin un résultat appliquable à des noyaux peu réguliers :

Théorème XXIV. — *Soit* t *un noyau de Ventcel' sur* M. *On suppose qu'il existe des nombres* $\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$, N *réel et* $C > 0$ *tels que* (*avec les notations des* n° II.2.3 et II.2.5),

$$\text{(III.3.26)} \qquad \int_{\overline{yx'} \leqslant r} t(x', dy)[1 - \theta^* 1(x', y) + \widetilde{x'y}] \leqslant Cr^{\alpha}$$

pour tout $r > 0$ *et* $x' \in \partial M$;

$$\text{(III.3.27)} \qquad \left| \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant r} t(x'', dy) f(y) - \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant r} t(x', dy) f(y) \right| \leqslant C \overline{x'x''}^{\mu} \frac{1}{r^{N}} \|f\|$$

pour tout $r > 0$, $x' \in \partial M$, $x'' \in \partial M$ *et* $f \in C(M)$.

On suppose, de plus, qu'il existe $\mu'(0 < \mu' < 1)$ *tel que les termes* η *et* ζ *intervenant dans* (II.2.14) (n° II.2.5) *soient de classe* $C^{0,\mu'}$ *sur* ∂M.

Alors, il existe $\lambda(0 < \lambda < 1)$ *tel que l'opérateur frontière de Ventcel'-Lévy défini par* (II.2.14) (n° II.2.5) *applique continûment* $C^2(M)$ *dans* $C^{0,\lambda}(\partial M)$, *donc soit compact de* $C^{2,\lambda}(M)$ *dans* $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

[On peut énoncer un théorème analogue relatif aux opérateurs de Lévy; voir à ce sujet [17], page 4.13.]

En effet, soient x', x'' des points de ∂M, $d = \overline{x'x''}$, et $u \in C^2(M)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que,

$$A = \left| \int_M t(x'', dy)[u(y) - \theta^* u(x'', y)] - \int_M t(x', dy)[u(y) - \theta^* u(x', y)] \right|$$

[1] Voir le n° III.3.10 à ce sujet.

soit majoré par $\text{cte}\|u\|_{(2)}\, d^{\lambda}$ où le mot « cte » désigne une constante > 0 indépendante de x', x'' et u. Pour cela, on se ramène d'abord au cas où $d < 1$, et, désignant par δ un nombre tel que $0 < \delta < 1$, on majore A par $A' + A'' + B$, où

$$A' = \int_{\overline{yx'} \leqslant 2d^{\delta}} t(x', dy)|u(y) - \theta^* u(x', y)| \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, 2d^{\delta\alpha},$$
$$A'' = \int_{\overline{yx''} \leqslant 2d^{\delta}} t(x'', dy)|u(y) - \theta^* u(x'', y)| \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, 2d^{\delta\alpha},$$

d'après (III.3.26) et la propriété (θ_3^*) de $\theta^* u$ (n° II.2.5); et

$$B = \Big| \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x'', dy)[u(y) - \theta^* u(x'', y)] \\ - \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy)[u(y) - \theta^* u(x', y)] \Big|.$$

On majore ensuite B par $B_1 + B_2 + B_3$, où,

$$B_1 = \Big| \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x'', dy) u(y) - \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy) u(y) \Big| \\ \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, d^{\mu - N\delta},$$

d'après (III.3.27);

$$B_2 = \int_{\overline{yx'} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy)|\theta^* u(x'', y) - \theta^* u(x', y)| \\ \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, d \int_{\overline{yx'} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy) \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, d^{1-2\delta} \int_{\overline{yx'} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy)\, \overline{x'y}^2 \\ \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, d^{1-2\delta},$$

en vertu, d'une part de la relation

$$|\theta^* u(x'', y) - \theta^* u(x', y)| \leqslant \text{cte}\, \|u\|_{(2)}\, d,$$

et d'autre part de $[NV_2'']$ (n° III.3.1), puisque $\overline{x'y}^2 \leqslant \text{cte}\, \widetilde{x'y}$ $(y \in M)$;

$$B_3 = \Big| \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x'', dy)\, \theta^* u(x'', y) \\ - \int_{\overline{yx'} \wedge \overline{yx''} \geqslant d^{\delta}} t(x', dy) \theta^* u(x'', y) \Big| \\ \leqslant \text{cte}\|u\|_{(2)} d^{\mu - \delta N}, \text{ d'après (III.3.27).}$$

D'où le résultat cherché en choisissant d'abord δ tel que $1 - 2\delta > 0$ et $\mu - \delta N > 0$, puis $\lambda \leqslant \inf(\mu - \delta N, 1 - 2\delta, \delta\alpha)$.
c.q.f.d.

III.3.10

Remarque. — Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites (avec $N = 2 + \mu - \alpha$) par les noyaux t de la forme,

$$t(x', X) = \int_X k(x', y)\overline{x'y}^{\alpha-n}\widetilde{x'y}^{-1}\ \tau_g(dy)$$
$$(x' \in \partial M, \qquad X \in \mathcal{B}_M),$$

où k est une fonction positive de $B(\partial M \times M)$ telle que

$$\sup_{\substack{x' \in \partial M,\ x'' \in \partial M \\ y \in M}} \overline{x'x''}^{-\mu} |k(x', y) - k(x'', y)| < +\infty.$$

Appendice 1

Stabilité de l'indice d'un opérateur linéaire.

Soient F et G des espaces vectoriels (réels, par exemple), et U une application linéaire de F dans G.

On dit que U *est d'indice fini* (de F dans G) si son noyau $\ker(U) = U^{-1}(0)$ est de dimension finie et son image $\mathrm{Im}(U) = U(F)$ est de codimension finie dans G. On définit alors *l'indice de* U, $\chi(U)$, par,

$$\chi(U) = \dim \ker (U) - \operatorname{codim} \mathrm{Im}(U).$$

Si F et G sont des espaces de Banach, on dit que U *est compact* si l'image par U de la boule unité de E est relativement compact dans F (U est alors continu). Cela étant :

Théorème. — *Soient* F *et* G *des espaces de Banach (réels, par exemple)* U *et* K *des applications linéaires de* F *dans* G. *On suppose que* U *est continue et d'indice fini et que* K *est compact. Alors* $U + K$ *est aussi d'indice fini, et on a,*

$$\chi(U + K) = \chi(U).$$

(voir, par exemple, [16] exposé n° 12).

APPENDICE 2.

Interpolation entre les espaces de Banach C^m et $C^{p,\mu}$

A.2.1. Le but de cet appendice est d'indiquer comment la Théorie de l'interpolation [1] permet d'établir [2] le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soient* M *une variété à bord compacte,* m, p, q, r *des entiers* $\geqslant 0$, *et* λ, μ *des nombres réels tels que,*

$$m \leqslant q \leqslant p, \quad o < \mu < 1, \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad q + \lambda < p + u.$$

On désigne par Λ *une application linéaire continue de* $C^{m+r}(M)$ *dans* $C^m(M)$. *Alors,*

(1) *Si* Λ *applique* $C^{p+r,\mu}(M)$ *dans* $C^{p,\mu}(M)$, Λ *applique continûment* [3] $C^{q+r,\lambda}(M)$ *dans* $C^{q,\lambda}(M)$.

(2) *Si* Λ *est compacte de* $C^{m+r}(M)$ *dans* $C^m(M)$, Λ *est aussi compacte de* $C^{q+r,\lambda}(M)$ *dans* $C^{q,\lambda}(M)$.

A.2.2. Définition du foncteur d'interpolation $K(\theta, p)$. On appellera ici couple « compatible » tout couple (A_0, A_1) d'espaces de Banach (réels par exemple) tels que A_1 soit un sous-espace vectoriel de A_0 avec injection canonique continue $(A_1 \hookrightarrow A_0)$ [4]. Un espace de Banach A est dit intermédiaire entre A_0 et A_1 si $A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_0$.

Si (A_0, A_1) est un couple compatible, on pose d'abord, pour $t \in]0, +\infty[$ et $a \in A_0$,

$$\text{(A.2.1)} \quad K(t, a, A_0, A_1) = \inf_{\substack{a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1 \\ a = a_0 + a_1}} \{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}.$$

[1] Nous remercions MM. Baouendi et Goulaouic qui nous ont aidé à rassembler les éléments de cette théorie intervenant ici.

[2] Voir le n° A2.7 ci-dessous.

[3] Théorème du graphe fermé.

[4] Cette définition est plus restrictive que celle qui figure habituellement dans la littérature sur ce sujet.

On désigne ensuite, pour $0 < \theta < 1$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, par $K(\theta, p, A_0, A_1)$ le sous-espace vectoriel de A_0 formé des $a \in A_0$ tels que $\|a\|_{\theta,p} < +\infty$, où

$$\text{(A.2.2)} \quad \|a\|_{\theta,p} = \left(\int_0^\infty \left\{\frac{K(t, a)}{t^\theta}\right\}^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p < +\infty$$

et

$$\text{(A.2.2')} \qquad \|a\|_{\theta,\infty} = \operatorname*{Sup}_{0<t<+\infty} \frac{K(t, a)}{t^\theta}.$$

La fonction $a \to \|a\|_{\theta,p}$ est une norme sur $K(\theta, p, A_0, A_1)$ qui en fait un espace de Banach intermédiaire entre A_0 et A_1 (voir Peetre [13]); On munira toujours $K(\theta, p, A_0, A_1)$ de cette norme.

On posera, en outre, $K(\theta, p, A_0, A_1) = A_\theta$ pour $\theta = 0$ ou $\theta = 1$ (¹).

A.2.3. Théorème de Réitération. — *Soient* (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *des couples compatibles et* θ_0, θ_1 *des nombres réels de telle sorte que,* $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 1$ *et,*

$$\text{(A.2.3)} \quad K(\theta_i, 1, A_0, A_1) \hookrightarrow X_i \hookrightarrow K(\theta_i, \infty, A_0, A_1) \quad (i = 0, 1).$$

Alors, si $\theta_0 < \theta < \theta_1$ *et* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *on a,*

$$\text{(A.2.4)} \qquad K(\theta, p, A_0, A_1) = K(\eta, p, X_0, X_1)$$

avec équivalence des normes, où

$$\text{(A.2.5)} \qquad \eta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}.$$

(voir Lions-Peetre [10]).

A.2.4. La propriété d'interpolation de $K(\theta, p)$ s'énonce alors :

Théorème. — *Soient* (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *des couples compatibles, et* π *une application linéaire continue de* A_0 *dans* B_0 *appliquant continûment* A_1 *dans* B_1. *Alors,* π *applique aussi continûment* $A_{\theta,p} = K(\theta, p, A_0, A_1)$ *dans*

(¹) Pour $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, les relations (A.2.2) et (A.2.2′) ne définissent pas, en général, une norme sur A_θ équivalente à $\| \ \|_{A_\theta}$.

$B_{\theta,p} = K(\theta, p, B_0, B_1)$ $(0 < \theta < 1,\ 1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, *et on a,*

(A.2.6) $$\|\pi\|_{\mathcal{L}(A_{\theta,p},\,B_{\theta,p})} \leqslant \|\pi\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0,\,B_0)}\|\pi\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1,\,B_1)}.$$

(voir Peetre [13] et Lions-Peetre [10]).

A.2.5. Cas d'un opérateur compact.

THÉORÈME. — *Avec les notations et en plus des hypothèses du théorème* A.2.4, *on suppose que* π *est compacte de* A_0 *dans* B_0 *et que* (B_0, B_1) *possède la propriété d'approximation suivante :*

(H) *Il existe une suite* (P_n) *d'applications linéaires de* B_0 *dans* B_1 *et une constante* $C > 0$ *telles que,*

(A.2.7) $$\|P_n\|_{\mathcal{L}(B_i,\,B_i)} \leqslant C \quad \textit{pour tout} \quad n \quad \textit{et} \quad i = 0,1,$$

et

(A.2.8) $$\|P_n b - b\|_{B_0} \leqslant \frac{1}{n}\|b\|_{B_0} \textit{ pour tout } n \textit{ et tout } b \in B_0.$$

Alors, pour $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, π *est compacte de* $K(\theta, p, A_2, A_1)$ *dans* $K(\theta, p, B_0, B_1)$.

(voir Persson [14]).

A.2.6. Cas des espaces de fonctions Höldériennes. Désignant par M une variété à bord compacte (n° 0.1.1), on pose,

$$C^k = C^k(M),\ C^{k,\lambda} = C^{k,\lambda}(M)\ (k \text{ entier} \geqslant 0,\ 0 < \lambda < 1\ (^1);$$

ces espaces étant munis des structures d'espaces de Banach introduites aux n° 0.1.2 et III.1.2 ci-dessus). Cela étant,

LEMME. — (*a*) *Soient* k *un entier* $\geqslant 0$ *et* $0 < \lambda < 1$. *On a,*

(A.2.9) $$K(\lambda, \infty, C^k, C^{k+1}) = C^{k,\lambda}$$

avec équivalence des normes.

(*b*) *Soient* j *et* k *des entiers* $\geqslant 0$ *tels que* $0 \leqslant k \leqslant j$. *On a,*

(A.2.9) $$K(\theta, 1, C, C^j) \hookrightarrow C^k \hookrightarrow K(\theta, \infty, C, C^j),$$

où $j\theta = k$.

(1) $C = C^0 = C(M)$.

Pour établir ces propriétés, on se ramène d'abord au cas des espaces $C^j = C_0^j(\overline{R^{n+}})$ (1) grâce à la propriété d'interpolation appliquée à une application « recollement », puis au cas des espaces $C^j = C_0^j(R^n)$ (1) grâce à la même propriété appliquée à une application « prolongement ».

On traite ensuite le cas de espaces $C^j = C_0^j(R^n)$ par la méthode des semi-groupes développée par Lions et Peetre dans [10] (chapitre VIII, n° 2.1 et 3.1) et étendue ici aux n semi-groupes deux à deux commutants constitués par les translations parallèles aux axes.

A.2.7. Démonstration du Théorème A.2.1 : Une première application du théorème de réitération (n° A.2.3) donne, compte tenu du lemme A.2.6 (et ceci avec équivalence des normes),

$$K(\theta,\ \infty,\ C,\ C^{p+1}) = K(\eta,\ \infty,\ C^m,\ C^{p+1}),$$

et

$$K(\theta,\ \infty,\ C,\ C^{p+1}) = K(\mu,\ \infty,\ C^p,\ C^{p+1}) = C^{p,\mu},$$

où θ et η sont déterminés par,

$$\theta(p+1) = m + \eta(p+1-m) = p + \mu.$$

D'où

$$K(\eta,\ \infty,\ C^m,\ C^{p+1}) = C^{p,\mu};$$

et de même,

$$K(\eta,\ \infty,\ C^{m+r},\ C^{p+r+1}) = C^{p+r,\mu};$$

ainsi que,

$$K(\eta',\ \infty,\ C^m,\ C^{p+1}) = C^{q,\lambda};$$
$$K(\eta',\ \infty,\ C^{m+r},\ C^{p+r+1}) = C^{q+r+\lambda},$$

où η' est déterminé par,

$$m + \eta'(p+1-m) = q + \lambda.$$

Cela étant, une deuxième application du théorème de réitération donne,

$$K(\rho,\ \infty,\ C^m,\ C^{p,\mu}) = K(\eta',\ \infty,\ C^m,\ C^{p+1}),$$

(1) Fonctions de classe C^j dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre j sont nulles à l'infini.

et

$$K(\rho,\ \infty,\ C^{m+r},\ C^{p+r,\mu}) = K(\eta',\ \infty,\ C^{m+r},\ C^{p+r+1}),$$

où ρ est déterminé par, $m + \rho(p + \mu - m) = q + \lambda$. D'où

$$C^{q,\lambda} = K(\rho,\ \infty,\ C^{m},\ C^{p,\mu}),$$

et

$$C^{q+r,\lambda} = K(\rho,\ \infty,\ C^{m+r},\ C^{p+r,\mu})$$

On conclut alors, en ce qui concerne la propriété (1) du Théorème A.2.1, en appliquant la propriété d'interpolation (n° A.2.4) aux couples compatibles $(C^m, C^{p,\mu})$ et $(C^{m+r}, C^{p+r,\mu})$; et en ce qui concerne la propriété (2) en appliquant le théorème de Persson (n° A.2.5) ([l'hypothèse d'approximation (H) est satisfaite : Par prolongement et recollement on se ramène au cas du couple $(C^m(R^n), C^{p,\mu}(R^n))$ pour lequel une suite d'opérateurs de convolution régularisants convergeant vers l'identité répond à la question]. c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aisenstat, Un type d'opérateur homogène; *Ucenye Zapiski Moskv Mat.*, t. 15, (1939), p. 35-112.

[2] J. M. Bony, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 265, série A, 1967.
— Principe du maximum dans les espaces de Sobolev; p. 333-336.
— Problème de Dirichlet et semi-groupes fortement Felleriens associés à un opérateur intégro-différentiel; p. 361-364.

[3] Ph. Courrège, Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution et formule de Lévy-Khinčin, *Bull. sc. Mat.*, 2e série, t. 88, (1964), p. 3-30.

[4] E. B. Dynkin, Markovskie processy, Moscou 1963; trad. anglaise, Springer Verlag 1965.

[5] W. Feller, The parabolic differential equation and the associated semi-groups of transformation; *Annals of Math.*, série 2, t. 55 (1952) p. 468-519.

[6] W. Feller, The general diffusion operator and positivy preserving semi-groups in one dimension; *Annals of Math.*, t. 60 (1954), p. 417-436.

[7] W. Feller, Generalized second order differential operators and their lateral conditions; *Illinois J. of Math.*, t. 1, (1957), p. 459-504.

[8] R. Fiorenza, Sui problemi di derivate obliqua per le equazioni ellitiche; *Ric. di Mat.*, t. 8, (1959), p. 83-110.

[9] G. A. Hunt, Semi-groups of measure on Lie Groups; *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 81 (1956), p. 264-293.

[10] J. L. LIONS et J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation; Inst. Hautes Études Sci., *Publ. Math.*, t. 19 (1964), p. 5-68.

[11] C. MIRANDA, Équazioni alle derivate parziali di tipo ellitico; *Springer Verlag*, Berlin (1955).

[12] J. NEVEU, Semi-groupes généralisés et processus de Markov; *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 240 (1955), p. 1046-1047.

[13] J. PEETRE, Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation, *Ric. di Mat.*, t. 12 (1963), p. 248-261.

[14] A. PERSSON, Compact linear mapping between interpolation spaces; à paraître.

[15] *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Théorie du potentiel, 5e année, (1960-61), Paris secrétariat mathématique.

[16] *Séminaire Cartan-Schwartz*, 16e année (1963/64), Paris secrétariat mathématique.

[17] *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Théorie du potentiel, 10e année (1965/66), Paris secrétariat mathématique.

[18] *Séminaire Choquet*, Initiation à l'analyse, 5e année (1965/66), Paris, secrétariat mathématique.

[19] K. SATO, A decomposition theorem of Markov processes; *J. Soc. Math. Jap.*, t. 17 (1965), p. 219-243.

[20] K. SATO et T. VENO, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary; *J. Math. Kyoto. Univ.*, t. 14 (1965), p. 529-605.

[21] A. D. VENTCEL', O graničykh uslovijakh dlja mnogomernykh diffuzionnykh processov; *Teor Veroj i primen*, t.4, (1959), p. 172-185; trad. anglaise dans *Theor prob and appl*, t. 4. (1959), p. 164-177.

[22] M. I. VIŠIK, On general boundary problems for elliptic differential equations; Trudy Moskov Mat obsč, t 1 (1952), p. 187-246.

[23] W. von WALDENFELS, Positive Halbgruppen auf einem n-dimensionalen Torus, *Archiv der Math*, t. 15 (1964), p. 191-203.

[24] W. von WALDENFELS, Fast positive operatoren; Berichte der Kernforschungsanlague Jülich, 1964.

[25] K. YOSIDA, Functional analysis; *Springer Verlag*, Berlin (1965).

Manuscrit reçu le 29 juin 1967

Jean-Michel BONY
Philippe COURRÈGE
et Pierre PRIOURET

Institut Henri-Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e.