ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON

Addendum à « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin »

Tome 67, n^{o} 3 (2017), p. 1005-1008.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2017__67_3_1005_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
67, 3 (2017) 1005-1008

ADDENDUM À « UN THÉORÈME DU SUPPORT POUR LA FIBRATION DE HITCHIN »

par Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON (*)

Résumé. — Cet addendum apporte deux précisions à « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin » : il corrige légèrement la démonstration du résultat principal et précise que celui-ci vaut encore en caractéristique positive plus grande que le rang.

Abstract. — This addendum gives precisions to “A support theorem for the Hitchin fibration”: first it slightly corrects the proof of the main result and second it notices that the result is still true when the characteristic is positive and greater than the rank.

Les notations et les références renvoient, sauf mention contraire, à [1].

1. Sur la démonstration du théorème 9.1

Mark Andrea de Cataldo, nous l'en remercions, nous a signalé quelques faiblesses de rédaction dans la démonstration du résultat central (théorème 9.1) : la distinction entre points géométriques et points de Zariski est parfois obscure et l'égalité incorrecte de dimensions (ligne 12 p. 721) doit être remplacée par l'inégalité (1.1) ci-dessous. Pour que les choses soient claires, on reprend dans ce qui suit les arguments.

Soit Λ_n l'ensemble des couples $(\underline{n}, \underline{m})$ de suites $\underline{n} = (n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_s)$ et $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ d'entiers strictement positifs telles que

$$m_{i+1} \geqslant m_i \text{ si } n_{i+1} = n_i,\ \forall i = 1, \ldots, s-1,$$

et

$$n = n_1 m_1 + \cdots + n_s m_s.$$

Mots-clés : Fibration de Hitchin, faisceaux pervers, théorème de décomposition, cohomologie relative.
Classification math. : 14F20, 14D20, 14D24.
(*) Pierre-Henri Chaudouard a bénéficié du support de l'Institut Universitaire de France et des projets Ferplay ANR-13-BS01-0012 et Vargen ANR-13-BS01-0001-01 de l'ANR.

Pour chaque $\lambda = (\underline{n}, \underline{m})$ on a un morphisme fini

$$\iota_\lambda : \mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s} \to \mathbb{A}_n$$

défini par $P_{\iota_\lambda(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_s)}(u) = P_{\overline{a}_1}^{m_1}(u)\cdots P_{\overline{a}_s}^{m_s}(u)$ pour tous points géométriques $\overline{a}_i$ de $\mathbb{A}_{n_i}$.

Pour chaque point géométrique $\overline{a}$ de $\mathbb{A}_n$, il existe un unique $\lambda = \lambda(\overline{a}) \in \Lambda_n$ tel que $\overline{a}$ puisse s'écrire $\overline{a} = \iota_\lambda(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s)$ où les $\overline{a}_i$ sont des points géométriques des $\mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$ tels que $P_{\overline{a}_i}(u) \neq P_{\overline{a}_j}(u)$, $\forall i \neq j$. Les $X_{n_i,\overline{a}_i}$ sont les composantes irréductibles de $X_{\overline{a}}$ et, pour chaque i, m_i est la multiplicité de $X_{n_i,\overline{a}_i}$ dans le diviseur de Cartier $X_{\overline{a}}$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda_n$, on définit une partie localement fermée $\mathbb{A}_{n,\lambda}$, incluse dans l'image de ι_λ dans $\mathbb{A}_n$, par la condition $\lambda(\overline{a}) = \lambda$. On obtient alors une stratification, la strate ouverte étant $\mathbb{A}_{n,((n),(1))} = \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ et la strate fermée étant la strate « nilpotente » $\mathbb{A}_{n,((1),(n))}$.

Soit $\lambda \in \Lambda_n$ et a un point de Zariski de $\mathbb{A}_{n,\lambda} \subset \mathbb{A}_n$. Ce dernier est l'image par ι_λ d'un point $\tilde{a}$ de $\mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s}$ dont on note a_i la projection sur $\mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$. On a donc (les barres signifiant les adhérences)

$$\overline{\{\tilde{a}\}} \subset \overline{\{a_1\}} \times_k \cdots \times_k \overline{\{a_s\}}$$

et donc

$$\mathrm{d}_a = \mathrm{d}_{\tilde{a}} \leqslant \mathrm{d}_{a_1} + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}. \tag{1.1}$$

On peut trouver des points géométriques $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s$ localisés en $a_1, \ldots, a_s$ de sorte que $\overline{a} = \iota_\lambda(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s)$ soit un point géométrique localisé en a. Écrivons $\lambda = (\underline{n}, \underline{m}) \in \Lambda_n$ et posons $n' = n_1 + \cdots + n_s$. On définit le point géométrique $\overline{a}'$ de $\mathbb{A}_{n'}^{\mathrm{grss}}$ par $P_{\overline{a}'}(u) = P_{\overline{a}_1}(u)\cdots P_{\overline{a}_s}(u)$. Ainsi $X_{\overline{a}'}$ n'est autre que la courbe réduite $(X_{\overline{a}})_{\mathrm{red}}$.

On a un homomorphisme de restriction de $X_{\overline{a}}$ à $X_{\overline{a}'}$

$$J_{n,\overline{a}} \to J_{n',\overline{a}'}$$

qui est surjectif, et dont le noyau est affine et est une extension successive de copies du groupe additif. De plus on a un homomorphisme

$$J_{n',\overline{a}'} \to J_{n_1,\overline{a}_1} \times_k \cdots \times_k J_{n_s,\overline{a}_s}$$

qui est lui aussi surjectif à noyau affine. Par définition de $\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}$ et des $\mathrm{d}_{a_i}^{\mathrm{ab}}$, on déduit de ce qui précède l'égalité

$$\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) = \mathrm{d}_{a_1}^{\mathrm{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}^{\mathrm{ab}}(J_{n_s}). \tag{1.2}$$

Supposons, de plus, $a \in \mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell)$. Alors on a, d'une part,

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n)$$

d'après le théorème 7.2 (voir le paragraphe 4.12 de [3] pour l'hypothèse sur la polarisation), et, d'autre part, pour chaque i,

$$\mathrm{d}^{\mathrm{ab}}_{a_i}(J_{n_i}) \geqslant d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i}$$

d'après le théorème 7.3 appliqué à $a_i \in \mathbb{A}^{\mathrm{ell}}_{n_i}$. Combinant ces deux dernières inégalités avec l'égalité (1.2), on obtient

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geqslant \sum_{i=1}^{s} (d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i})$$

En tenant compte de l'égalité

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} = n(2g-2-d) + 1$$

et de l'inégalité (1.1), il vient

$$1 - s \geqslant (n - n_1 - \cdots - n_s)(d - 2g + 2)$$

qui n'est possible que si $s = 1$ et $n_1 = n$, c'est-à-dire $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \mathbb{A}^{\mathrm{ell}}_n$ puisque l'on a supposé $d > 2g - 2$.

2. Sur la restriction sur la caractéristique

Un ingrédient crucial dans la démonstration du théorème 9.1 est une inégalité de type Severi (théorème 7.3). Longtemps celle-ci ne fut connue qu'en caractéristique nulle. Or récemment, Melo, Rapagnetta et Viviani ont donné une démonstration de cette inégalité valable en toute caractéristique (cf. [2, théorème 3.3]). Il s'ensuit que le théorème principal (théorème 9.1) vaut pour un corps de caractéristique $> n$. Notons alors le corollaire suivant du théorème 9.1 et de la formule des traces de Grothendieck–Lefschetz.

Corollaire 2.1. — *Soit X une courbe géométriquement connexe, projective et lisse sur un corps fini de caractéristique $> n$. Le nombre de classes d'isomorphie de fibrés de Hitchin sur X, stables de rang n et de degré e premier au rang ne dépend pas de e.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.-H. Chaudouard & G. Laumon, « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **66** (2016), n° 2, p. 711-727.

[2] M. Melo, A. Rapagnetta & F. Viviani, « Fourier–Mukai and autoduality for compactified Jacobians. I », `https://arxiv.org/abs/1207.7233`, 2012.

[3] B. C. Ngô, « Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2010), n° 111, p. 1-169.

Manuscrit reçu le 6 juin 2016,
accepté le 1er mars 2017.

Pierre-Henri CHAUDOUARD
Université Paris-Diderot (Paris 7) et Institut Universitaire de France
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
UMR 7586
Bâtiment Sophie Germain, Case 7012
75205 PARIS Cedex 13 (France)
Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr

Gérard LAUMON
CNRS et Université Paris-Sud
UMR 8628
Mathématique, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)
gerard.laumon@math.u-psud.fr