

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN MARTINET

Sur les singularités des formes différentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 20, n° 1 (1970), p. 95-178

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_95_0

© Annales de l'institut Fourier, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SINGULARITÉS DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

par Jean MARTINET

Introduction.

Soit M une variété différentiable, et ω une forme différentielle extérieure sur M ; de nombreux exemples justifient l'intérêt d'une étude générale du couple (M, ω) ; ainsi :

1) Un champ d'éléments de contact de codimension p sur M , c'est-à-dire aussi un sous-fibré de codimension p du fibré tangent, est défini, au moins localement, par une p -forme décomposable non nulle.

2) Une forme de Pfaff ω , sans zéros, telle que $\omega \wedge d\omega = 0$, définit un feuilletage de codimension 1 sur M .

3) A l'opposé, si M est de dimension impaire $2p + 1$, et si $\omega \wedge d\omega^p \neq 0$ en tout point, la forme de Pfaff ω définit sur M une structure classique dite "de contact".

4) Une 2-forme ω (resp. 2-forme fermée) de rang maximum sur une variété de dimension paire $2p$ (i.e. $\omega^p \neq 0$ en tout point) définit une structure presque symplectique (resp. symplectique).

5) Si M est une variété riemannienne, les sous-variétés *minimales* de M sont les solutions de systèmes différentiels définis par des p -formes canoniques sur le fibré tangent TM .

Les exemples précédents mettent en jeu des formes suffisamment *régulières* : rang constant dans 1), classe égale à 1 ou 2 dans 2), etc.. Par contre, une étude générale du couple (M, ω) sera essentiellement une théorie des singularités des formes différentielles ; c'est cette théorie qui est ébauchée dans ce travail.

Les notions de singularités d'applications différentiables et de champs de vecteurs sont maintenant classiques ; c'est d'un point de vue analogue que j'ai abordé l'étude des formes.

On m'a si souvent fait remarquer que les singularités de formes de Pfaff devaient correspondre aux singularités de champs de vecteurs (via, par exemple, une métrique riemannienne) que je dois d'abord déduire ce petit mythe : tout champ de vecteurs *non nul* a pour expression $\partial/\partial x_1$ dans un système de coordonnées locales convenable ; par contre, il est pratiquement impossible de classifier à isomorphisme près les germes de formes de Pfaff ω *non nuls* : le *rang* de la différentielle extérieure $d\omega$ interviendra dans cette classification, et, de façon plus précise, la *classe* (au sens d'E. Cartan) de ω ; ainsi, les points où la classe change seront des points singuliers de ω .

Dans la théorie relative aux applications différentiables (R. Thom [15], H. Levine [9]), le rang joue le rôle central.

Dans ce travail, il sera question des singularités de trois types d'objets :

- 1) Les formes différentielles extérieures.
- 2) Les formes différentielles extérieures fermées.
- 3) Les équations de Pfaff, c'est-à-dire les champs d'hyperplans tangents à une variété (définis localement par une équation $\omega = 0$, où ω est une forme de Pfaff sans zéros).

Le rôle du rang pour les applications différentiables sera tenu par le *rang d'une forme multilinéaire et alternée* dans le cas des formes fermées, et la *classe* dans le cas des formes non fermées et des équations de Pfaff.

Le Chapitre I est consacré au *rang* dans l'Algèbre extérieure d'un espace vectoriel ; on y étudie d'assez près les stratifications définies par les ensembles de formes de rang donné dans $\overset{p}{\wedge} E^*$. Malgré la nature très élémentaire de ce chapitre, je le crois assez original ; je n'ai en tout cas guère trouvé trace, dans les ouvrages classiques de Goursat ou E. Cartan, des préoccupations qui ont été ici les miennes. Au cours de cette étude, je me suis de plus convaincu que la recherche d'invariants plus fins que le rang, pour les formes de degrés "intermédiaires", serait sans doute intéressante et amusante.

J'étudie ensuite, au Chapitre II, à l'aide des théorèmes de transversalité, la nature générique des ensembles de points où le rang ou la classe d'une forme différentielle (ou d'une équation de Pfaff) s'abaisse, sur une variété différentiable donnée. Voici un exemple de résultat dans cette direction :

Soit M une variété différentiable de dimension n , ω une forme de Pfaff sur M ; soit $\zeta_d(\omega)$ l'ensemble des points où la classe de ω est $n - d$; génériquement, $\zeta_d(\omega)$ est une sous-variété régulière de codimension $\frac{d(d+1)}{2}$ de M ; en particulier, la classe est en général partout assez grande, et minorée par une quantité valant approximativement $n - \sqrt{2n}$ (cf. II.4.3.3).

On peut ensuite étudier des singularités d'ordre supérieur, comme dans le cas des applications différentiables ; je n'ai réalisé cet objectif que dans le cas des 2-formes fermées en dimension 4 et des équations de Pfaff en dimension 3, où l'on obtient, dès les ordres 1 et 2, une classification déjà satisfaisante des singularités génériques (II.3 et II.6).

Le Chapitre III est essentiellement consacré à la recherche des *modèles* d'une singularité donnée : il s'agit de classifier, à isomorphisme près, les germes de formes présentant la singularité considérée.

On connaît des modèles classiques dans un certain nombre de situations régulières : forme volume, 2-forme fermée de rang maximal, forme de Pfaff de classe maximale (Théorème de Darboux). En partant de ces résultats, j'ai pu assez facilement montrer que, dans un assez grand nombre de cas, les singularités les plus simples admettent un modèle ; par exemple, la plus simple des singularités d'une forme de Pfaff, en dimension paire, admet comme modèle

$$\omega = (1 \pm x_1^2)dy_1 + x_2dy_2 + \cdots + x_pdy_p .$$

Les outils utilisés ici sont le théorème des fonctions implicites, le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles, et les propriétés de divisibilité des fonctions différentiables. Je n'ai cependant pas eu à utiliser le théorème de préparation différentiable, étant donnée la simplicité des situations envisagées.

J'ai d'autre part inclus dans ce chapitre (III. B) quelques remarques relatives aux notions de *stabilité* et de *stabilité infinitésimale* d'un germe de forme différentielle ; on peut se poser dans ce contexte un problème analogue à celui récemment résolu par J. Mather dans le cas des applications différentiables, mais d'un ordre de difficulté différent : il s'agit essentiellement d'un problème linéaire pour les applications ; par contre, un opérateur différentiel (d'ordre 1) intervient dans le cas des formes.

Les problèmes globaux de la théorie ne sont pas abordés ici. Mentionnons pourtant qu'on peut faire une étude homologique des ensembles singuliers d'une forme différentielle, analogue au cas des applications différentiables (cf. [8]). D'autre part, on peut citer quelques résultats relatifs à la stabilité globale de formes ou d'équations de Pfaff (voir en particulier [7] et [14]).

Enfin, j'ai jugé utile de donner, dans un Appendice, un résumé assez bref de la théorie de transversalité : il m'aurait été malaisé d'indiquer des références conduisant directement aux résultats qui m'étaient nécessaires. J'insiste surtout sur le théorème de transversalité relatif aux sections d'un fibré vectoriel, techniquement plus facile ; pour les sections d'un fibré quelconque, on se ramène au précédent par un procédé de linéarisation très simple.

En conclusion, il n'y a pas de techniques neuves dans ce travail ; on y applique seulement des méthodes maintenant éprouvées à une situation non encore étudiée, et certainement très riche. Je regrette d'autre part de n'avoir pu donner d'application de la théorie ébauchée ici ; il est possible qu'elle fournisse une voie d'approche au problème de l'existence, sur une variété donnée, de structures définies par des formes différentielles *sans singularités* (par exemple, l'existence, sur une variété compacte orientable de dimension 3, d'une structure de contact ; cf. S.S. Chern [4]).

Une partie des résultats de ce travail a été annoncée dans deux notes aux Comptes Rendus ([11], [12]).

Il me reste à signaler que le Professeur E. Calabi a obtenu indépendamment certains résultats qui figurent ici (et bien d'autres qui n'y figurent pas), et qu'il m'a indiqué des remarques qui m'ont permis d'améliorer certains points.

Cet article constitue l'essentiel du travail que j'ai présenté comme thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de Grenoble. Je remercie vivement Monsieur G. Reeb, qui m'a suggéré cette étude, Monsieur C. Chabauty, qui a bien voulu présider le jury, et Messieurs O. Galvani et R. Thom, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et leur participation au jury.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	95
CHAPITRE I. — <i>Le rang dans l'algèbre extérieure</i>	101
1. Notations — Définitions — Rappels	101
2. Etude générale de l'ensemble $\Sigma_{n,r}^p$	104
3. Cas triviaux	106
4. Cas des 2-formes	107
5. Cas des formes de degré $(n - 2)$	109
6. Cas intermédiaires ($3 \leq p \leq n - 3$)	112
7. La représentation de $Gl(E)$ dans $E^* \oplus \wedge^2 E^*$	114
CHAPITRE II. — <i>Singularités du rang et de la classe d'une forme différentielle</i>	118
1. Généralités ; notations et définitions	118
2. Le rang et ses singularités	120
3. Singularités "génériques" d'une 2-forme fermée en dimension 4	123
4. La classe et ses singularités	130
5. La classe d'une équation de Pfaff, et ses singularités	135
6. Singularités génériques d'une équation de Pfaff en dimension 3	138
CHAPITRE III. — <i>Etude locale des singularités</i>	141
A. <i>Modèles locaux</i>	141
1. Généralités	141
2. Cas des n -formes	144
3. Cas des $(n-1)$ -formes	146

	Pages
4. Cas des 2-formes fermées et des formes de Pfaff	150
5. Exemples de singularités non rigides	158
B. <i>Stabilité et stabilité infinitésimale</i>	159
1. Stabilité d'un germe de forme différentielle	159
2. Stabilité infinitésimale	160
APPENDICE. — <i>Théorèmes de transversalité pour les sections d'un fibré</i>	166
1. Topologies sur les espaces de sections	166
2. Distributions — Stratifications	167
3. Transversalité	170
4. Théorème d'Isotopie	171
5. Le Théorème de SARD et le lemme fondamental de la théorie	173
6. Le théorème de transversalité	173
7. Cas des formes différentielles	176
BIBLIOGRAPHIE	177

CHAPITRE I

LE RANG DANS L'ALGÈBRE EXTERIEURE

Tous les espaces vectoriels envisagés dans ce chapitre sont de dimension finie sur \mathbb{R} .

1. Notations – Définitions – Rappels.

1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension n ; pour tout p ($1 \leq p \leq n$), on note $\overset{p}{\wedge} E$ la puissance extérieure $p^{\text{ème}}$ de E .

Si $h : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, on note

$$h^p : \overset{p}{\wedge} E \longrightarrow \overset{p}{\wedge} F$$

la puissance extérieure $p^{\text{ème}}$ de h .

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $i : F \longrightarrow E$ l'injection canonique ; $i^p : \overset{p}{\wedge} F \longrightarrow \overset{p}{\wedge} E$ est une injection, et on identifiera toujours dans la suite $\overset{p}{\wedge} F$ et son image dans $\overset{p}{\wedge} E$ par i^p .

Moyennant cette identification, les relations suivantes sont vérifiées ([2]) :

$$\overset{p}{\wedge} (F_1 \cap F_2) = \overset{p}{\wedge} F_1 \cap \overset{p}{\wedge} F_2 \quad (1)$$

quels que soient les sous-espaces F_1 et F_2 de E .

$$h^p (\overset{p}{\wedge} E) = \overset{p}{\wedge} [h(E)] \quad (2)$$

où $h : E \longrightarrow F$ est une application linéaire.

1.2. DEFINITION ([2], p. 72). – Soit E un espace vectoriel, $\omega \in \overset{p}{\wedge} E$ un p -vecteur de E . Le support de ω est le plus petit sous-espace $S_\omega \subset E$ tel que $\omega \in \overset{p}{\wedge} S_\omega$; sa dimension est le rang de ω ; le corang de ω est la codimension de S_ω dans E .

Cette définition est justifiée par la relation (1).

PROPOSITION. — Soit $h : E \longrightarrow F$ une application linéaire injective, et $\omega \in \overset{p}{\wedge} E$; on a :

$$h(S_\omega) = S_{h^p(\omega)} .$$

C'est une conséquence immédiate des relations (1) et (2). Ce résultat, appliqué à un automorphisme de E , montre que le rang est un *invariant* dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\overset{p}{\wedge} E$.

Le rang d'un p -vecteur non nul de E est évidemment compris entre p et $n = \dim E$; la proposition précédente, appliquée à l'injection $i : S_\omega \longrightarrow E$, permet de considérer ω comme un p -vecteur de rang maximum de S_ω .

1.3. Soit E un espace vectoriel ; E^* désignera le dual de E , et $\overset{p}{\wedge} E^*$ l'espace des p -vecteurs de E^* , identifié à l'espace des p -formes alternées sur E .

On notera $x \lrcorner \omega$ le produit intérieur de $\omega \in \overset{p}{\wedge} E^*$ par $x \in E$.

DEFINITION. — ([3], [5], [6]). Soit $\omega \in \overset{p}{\wedge} E^*$; on appelle espace associé à ω le sous-espace $A_\omega \subset E$ défini par :

$$A_\omega = \{x \in E ; x \lrcorner \omega = 0\} .$$

PROPOSITION. — Soit $\omega \in \overset{p}{\wedge} E^*$; le sous-espace $A_\omega \subset E$, associé à ω , et le sous-espace $S_\omega \subset E^*$, support de ω , sont orthogonaux.

Le rang d'une p -forme sur E est donc également la codimension dans E de son espace associé.

Dans ce contexte, le support d'une p -forme ω sera aussi appelé le système associé à ω .

Remarque. — Soit $\omega \in \overset{p}{\wedge} E^*$; soit $i_\omega : E \longrightarrow \overset{(p-1)}{\wedge} E^*$ l'application linéaire définie par $i_\omega(x) = x \lrcorner \omega$; soit $j_\omega : \overset{(p-1)}{\wedge} E \longrightarrow E^*$ l'application linéaire définie par $j_\omega(X) = (-1)^{p-1} X \lrcorner \omega$. Il est immédiat que j_ω est la transposée de i_ω ; l'image de j_ω est donc l'orthogonal du noyau de i_ω , c'est-à-dire le support de ω . En d'autres termes, si ω est une p -forme, les formes

$$\omega(x_1, \dots, x_{p-1}, \cdot), (x_1, \dots, x_{p-1} \in E)$$

engendrent le support de ω dans E^* .

1.4. Propriétés immédiates du rang.

1.4.1. Soit $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ une p -forme décomposable non nulle ; il est immédiat que S_ω est le sous-espace de E^* engendré par les formes indépendantes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$; le rang de ω est donc égal à p . Réciproquement, si $\omega \in \wedge^p E^*$ est de rang p , comme $\omega \in \wedge^p S_\omega$ où $\dim S_\omega = p$, on a $\omega = \lambda \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est une base de S_ω , et λ un scalaire convenable ; ω est donc décomposable.

1.4.2. Soit $\omega \in \binom{n-1}{\wedge} E^*$, $\omega \neq 0$, avec $n = \dim E$; soit $\Omega \in \binom{n}{\wedge} E^*$, $\Omega \neq 0$. L'application linéaire $i_\Omega : E \longrightarrow \binom{n-1}{\wedge} E^*$ définie par $i_\Omega(x) = x \lrcorner \Omega$ est une injection ; c'est donc un isomorphisme puisque les dimensions de la source et du but sont égales. Il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $\omega = x \lrcorner \Omega$; alors $x \lrcorner \omega = 0$, c'est-à-dire $x \in A_\omega$; ainsi le rang de ω est strictement inférieur à n ; il est donc égal à $n - 1$, et ω est décomposable.

1.4.3. On déduit immédiatement de 1.4.2 qu'une p -forme ne peut être de rang $(p + 1)$.

1.4.4. PROPOSITION. — Soient ω et ω' deux p -formes sur E ($p \geq 2$) ; si $\dim(S_\omega \cap S_{\omega'}) \leq p - 2$, alors $S_{\omega + \omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$; en particulier, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$, $\text{rang}(\omega + \omega') = \text{rang}(\omega) + \text{rang}(\omega')$.

Démonstration. — On considère l'équation linéaire

$$x \lrcorner (\omega + \omega') = x \lrcorner \omega + x \lrcorner \omega' = 0 \quad (x \in E) .$$

Il est clair que $x \lrcorner \omega \in \binom{p-1}{\wedge} S_\omega$ et $x \lrcorner \omega' \in \binom{p-1}{\wedge} S_{\omega'}$; mais

$$\binom{p-1}{\wedge} S_\omega \cap \binom{p-1}{\wedge} S_{\omega'} = \{0\}$$

par hypothèse ; on a donc $x \lrcorner \omega = 0$ et $x \lrcorner \omega' = 0$, soit

$$A_{\omega + \omega'} = A_\omega \cap A_{\omega'} ,$$

et, par passage aux orthogonaux $S_{\omega + \omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$.

1.4.5. PROPOSITION. — Soient $\omega \in \wedge^p E^*$ et $\omega' \in \wedge^q E^*$, avec

$$S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\};$$

alors $S_{\omega \wedge \omega'} = S_\omega \oplus S_{\omega'}$, et $\text{rang}(\omega \wedge \omega') = \text{rang}(\omega) + \text{rang}(\omega')$.

La démonstration est également très facile ; nous ne la donnerons pas.

2. Etude générale des ensembles $\Sigma_{n,p}^p$.

Dans toute la suite, on désignera par $\Sigma_{n,r}^p$, l'ensemble des éléments de $\wedge^p E^*$, de rang r (où $n = \dim E$).

On se propose d'étudier de façon assez détaillée la figure formée dans $\wedge^p E^*$ par les ensembles $\Sigma_{n,r}^p$, et de comparer ces ensembles, invariants sous l'action du groupe $Gl(E)$, aux trajectoires de ce groupe.

Enonçons d'abord un résultat général, avant d'aborder l'étude pour les différentes valeurs de p .

PROPOSITION. — On suppose $\Sigma_{n,r}^p \neq \emptyset$; alors :

a) $\Sigma_{n,r}^p$ est une sous-variété régulière de $\wedge^p E^*$, de dimension $C_r^p + r(n-r)$.

b) $\overline{\Sigma_{n,r}^p}$ est une sous-variété algébrique de $\wedge^p E^*$, et

$$\overline{\Sigma_{n,r}^p} = \bigcup_{r' \leq r} \Sigma_{n,r'}^p$$

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'une fois éliminé le cas trivial $r = 0$, on a nécessairement $r \geq p$.

Soit alors $G_{r,n-r}$ la Grassmannienne des r -plans de E^* . Soit $F_r^p \longrightarrow G_{r,n-r}$ le fibré vectoriel constitué par les couples (ν, α) où $\nu \in G_{r,n-r}$ et $\alpha \in \wedge^p \nu$ (la fibre au-dessus de ν est donc l'espace vectoriel $\wedge^p \nu$).

Posons $h(\nu, \alpha) = \alpha \in \wedge^p E^*$; h est une application continue algébrique.

Il est clair, d'après la proposition 1.2, que $h(F_r^p) = \bigcup_{r' \leq r} \Sigma_{n,r'}^p$.

L'ensemble $\bigcup_{r' \leq r} \Sigma_{n,r'}^p$ est une sous-variété algébrique de $\bigwedge^p E^*$ (puisque c'est l'ensemble des $\omega \in \bigwedge^p E^*$ telles que l'application linéaire $i_\omega : E \longrightarrow \binom{p-1}{\wedge} E^*$ soit de rang inférieur ou égal à r).

D'autre part, l'ensemble des couples $(\nu, \alpha) \in F_r^p$ tels que $\alpha \in \bigwedge^p \nu$ soit de rang maximum r (i.e. de support ν) est un ouvert Ω , non vide par hypothèse, donc dense dans F_r^p ; comme $h(\Omega) = \Sigma_{n,r}^p$, la partie b) est démontrée.

Il est à peu près évident que h définit un homéomorphisme de Ω sur $\Sigma_{n,r}^p$. Il reste à montrer que h est une immersion en restriction à Ω .

Soit $(\nu, \alpha) \in \Omega$; soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , telle que dans la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) de E^* , les formes (e_1^*, \dots, e_r^*) constituent une base de ν ; on notera w le supplémentaire de ν engendré par e_{r+1}^*, \dots, e_n^* .

A la base (e_1^*, \dots, e_n^*) est associée une trivialisaton

$$\text{Hom}(\nu, w) \times \bigwedge^p \nu \longrightarrow F_r^p$$

de F_r^p au voisinage de (ν, α) ; au point

$$\{(a_i^j) \mid i = 1, \dots, r; j = r + 1, \dots, n\}$$

$$(\mu_\sigma) \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_p \leq r\}$$

est associé le couple (ν', σ') tel que :

1) ν' a pour base $(e_1^* + a_1, \dots, e_r^* + a_r)$ où $a_i \in w$,

$$a_i = \sum_{j=r+1}^n a_i^j e_j^* .$$

2) $\alpha' = \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} (e^* + a)_{\sigma}$ où

$$(e^* + a)_{\sigma} = (e_{\sigma_1}^* + a_{\sigma_1}) \wedge \dots \wedge (e_{\sigma_p}^* + a_{\sigma_p}) .$$

La formule 2) représente l'expression de h dans la carte considérée de F_r^p . Un calcul immédiat montre que l'expression de la dérivée h' de h au point (ν, α) , de coordonnées $\{a_i^j = 0; \mu_{\sigma} = \lambda_{\sigma}\}$ est :

$$\begin{aligned}
 h'(\varepsilon_i^j ; \eta_\sigma) &= \sum_\sigma \eta_\sigma e_\sigma^* + \sum_\sigma \lambda_\sigma \left(\sum_{i=1}^p e_{\sigma_1}^* \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\sigma_i} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_p}^* \right) \\
 &= \sum \eta_\sigma e_\sigma^* + \sum_{\sigma} \lambda_\sigma \varepsilon_i \wedge (e_i \lrcorner e_\sigma^*) \\
 & \qquad \qquad \qquad i=1, \dots, r \\
 &= \sum \eta_\sigma e_\sigma^* + \sum_{j=r+1}^n e_j^* \wedge \left[\left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i^j e_i \right) \lrcorner \alpha \right].
 \end{aligned}$$

Alors, $h'(\varepsilon_i^j ; \eta_\sigma) = 0$ équivaut à $\eta_\sigma = 0$ pour tout σ , et

$$\left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i^j e_i \right) \lrcorner \alpha = 0$$

pour tout i . Mais, par hypothèse, l'espace associé à α dans E a pour base (e_{r+1}, \dots, e_n) ; on a donc $\varepsilon_i^j = 0$ quels que soient i et j , et h' est injective, Q.E.D.

Remarques. — 1) Si n et p étant donnés, r a sa valeur maximale, $\Sigma_{n,r}^p$ est un ouvert dense dans $\wedge^p E^*$.

2) Il est clair que $\overline{\Sigma_{n,r}^p}$ est toujours un cône dans $\wedge^p E^*$.

3) L'ensemble $\Sigma_{n,p}^p$ des p -formes de rang p (c'est-à-dire décomposables) est toujours non vide, et identique à une trajectoire de $Gl(E)$.

3. Cas triviaux.

On pose toujours $\dim E = n$.

3.1. Dans E^* , une forme est de rang 0 ou 1 selon qu'elle est nulle ou non ; les ensembles $\Sigma_{n,0}^1 = \{0\}$ et $\Sigma_{n,1}^1 = E^* - \{0\}$ sont donc les trajectoires de $Gl(E)$ dans E^* .

3.2. Une n -forme non nulle est de rang n , et s'écrit $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ pour une base convenable de E^* ; $\Sigma_{n,0}^n = \{0\}$ et $\Sigma_{n,n}^n = \wedge^n E^* - \{0\}$ sont les trajectoires de $Gl(E)$.

3.3. Une $(n - 1)$ forme non nulle est de rang $(n - 1)$, et s'écrit $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ indépendants dans E^*) ; $\Sigma_{n,0}^{n-1} = \{0\}$ et $\Sigma_{n,n-1}^{n-1} = \binom{n-1}{\wedge} E^* - \{0\}$ sont les trajectoires de $Gl(E)$.

4. Cas des 2-formes.

4.1. On rappelle la

PROPOSITION. – ([3] p. 12, [5] p. 31). Toute 2-forme $\omega \in \binom{2}{\wedge} E^*$ est de rang pair, et les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) ω est de rang $2k$.
- 2) $\omega^k \neq 0$ et $\omega^{(k+1)} = 0$ ($\omega^k = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ k fois).
- 3) Il existe des formes indépendantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in E^*$

telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \beta_i .$$

Remarque. – Il est clair, d'après la proposition 1.4.4, que si $\omega = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \beta_i$, les formes α_i et β_i , étant indépendantes, constituent une base du support de ω .

4.2. PROPOSITION. – Dans $\binom{2}{\wedge} E^*$, les ensembles $\Sigma_c = \Sigma_{n,n-c}^2$ sont identiques aux trajectoires de $Gl(E)$; pour tout c ($n - c$ pair, $0 \leq n - c \leq n$), Σ_c est une sous-variété régulière de $\binom{2}{\wedge} E^*$ et

$$\text{codim } \Sigma_c = \frac{c(c - 1)}{2} .$$

La démonstration est évidente, d'après 4.1 (condition 3) et 2. Il est remarquable que les codimensions de ces variétés ne dépendent que du corang ; ce phénomène est à rapprocher du résultat concernant les ensembles de matrices de rang donné (dont la codimension est le produit des corangs à la source et au but).

Cependant la situation est différente selon la parité de la dimension n de E .

Si n est pair, les valeurs admissibles de c sont $0, 2, 4, 6, \dots$ et les codimensions correspondantes sont $0, 1, 6, 15, \dots$

Si n est impair, les valeurs admissibles de c sont $1, 3, 5, 7, \dots$ et les codimensions correspondantes sont $0, 3, 10, 21, \dots$

Remarque 1. — Pour tout $\omega \in \wedge^2 E^*$, on peut indiquer un système d'équations locales de la variété Σ_c passant par ω ; on procède de la façon suivante :

On identifie les formes extérieures de degré 2 avec les applications linéaires antisymétriques de E dans E^* .

Soit alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une base de E^* telle que :

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \dots + \alpha_{2k-1} \wedge \alpha_{2k}$$

où $2k = n - c = \text{rang}(\omega)$.

La matrice $\bar{\omega}$ correspondant à ω s'écrit :

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I est la $2k \times 2k$ matrice *antisymétrique* :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Désignons alors par Ω l'ouvert de $\wedge^2 E^*$ constitué par les formes $\lambda = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} \alpha_i \wedge \alpha_j$ telles que $\sum_{1 \leq i < j \leq 2k} \lambda_{i,j} \alpha_i \wedge \alpha_j$ soit de rang (maximum) $2k$. Pour tout $\lambda \in \Omega$, la matrice antisymétrique $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_{i,j})$ correspondante est définie par $\bar{\lambda}_{i,j} = \lambda_{i,j}$ pour $i < j$; posons

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est une $2k \times 2k$ matrice antisymétrique, et $C = -$ (transposée de B) ; comme dans ([9], Prop. 2, p. 6) on montre que $\lambda \in \Omega \cap \Sigma_c$ ($c = n - 2k$) si et seulement si $D - CA^{-1}B = 0$; ceci montre que $\Omega \cap \Sigma_c$ est définie comme ensemble de zéros communs à $\frac{c(c-1)}{2}$ fonctions indépendantes, D étant une $c \times c$ matrice antisymétrique.

Remarque 2. — D'après la proposition 2, $\overline{\Sigma_c} = \bigcup_{c' \geq c} \Sigma_{c'}$, est une sous-variété algébrique de ${}^2_\lambda E^*$.

Si $\overline{\Sigma_{c+2}}$ est non vide, on va montrer que pour tout $\omega \in \overline{\Sigma_{c+2}}$, le cône tangent en ω à $\overline{\Sigma_c}$ contient une base ${}^2_\lambda E^*$; on aura alors démontré que l'ensemble des points singuliers de $\overline{\Sigma_c}$ est égal à $\overline{\Sigma_{c+2}}$ (si c n'a pas sa valeur minimale).

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une base de E^* ; quels que soient i, j ($1 \leq i < j \leq n$), la courbe $t \longrightarrow \omega + t\alpha_i \wedge \alpha_j$ ($t \in [0, 1]$) est tracée dans $\overline{\Sigma_c}$, et sa vitesse à l'origine ω est $\alpha_i \wedge \alpha_j$. Q.E.D.

Remarque 3. — Dans l'espace ${}^2_\otimes E^*$, on sait que les formes bilinéaires de corang c définissent une sous-variété régulière S_c , de codimension c^2 ([9] p. 5).

On a d'autre part $\Sigma_c = {}^2_\lambda E^* \cap S_c$.

Si la variété S_c coupait le sous-espace ${}^2_\lambda E^*$ de ${}^2_\otimes E^*$ en position générale, la codimension de S_c dans ${}^2_\otimes E^*$ serait égale à la codimension de Σ_c dans ${}^2_\lambda E^*$; on voit qu'il n'en est rien ; dans l'intersection, la perte de codimension est même croissante avec c .

5. Cas des formes de degré $(n - 2)$.

5.1. Dans ${}^{(n-2)}_\lambda E^*$, le rang ne peut prendre que les valeurs $0, n - 2, n$ (cf. 1.4.3). A priori, on ne sait pas s'il existe toujours des $(n - 2)$ -formes de rang maximal n .

Mais $\Sigma_{n, n-2}^{n-2}$, ensemble des formes de rang $n - 2$, c'est-à-dire décomposables, est une sous-variété de dimension

$$C_{n-2}^{n-2} + 2(n-2) = 2n - 3 ;$$

dès que $n > 3$, on a $2n - 3 < \dim \binom{n-2}{\Lambda} E^*$, et il existe nécessairement des $(n-2)$ -formes de rang n .

5.2. Trajectoires de $Gl(E)$ dans $\binom{n-2}{\Lambda} E^*$.

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite.

5.2.1. Soit $\Omega \in \binom{n}{\Lambda} E^*$ une forme volume sur E , et

$$h_{\Omega} : \binom{n-2}{\Lambda} E^* \longrightarrow \binom{2}{\Lambda} E$$

l'isomorphisme qui à $\omega \in \binom{n-2}{\Lambda} E^*$ associe l'unique bivecteur $X = h_{\Omega}(\omega)$ tel que $\omega = X \lrcorner \Omega$; si Ω et Ω' sont deux volumes, $h_{\Omega}(\omega)$ et $h_{\Omega'}(\omega)$ sont proportionnels, et ont donc même rang $2k$; l'entier k sera appelé *longueur* de la $(n-2)$ -forme ω . On notera S_k l'ensemble des formes de longueur k .

5.2.2. Soit, avec les notations précédentes

$$\omega = X \lrcorner \Omega, \quad \text{où} \quad X = h_{\Omega}(\omega).$$

Si g est un automorphisme de E , on a

$$g \cdot \omega = (g^{-1} \cdot X) \lrcorner (g \cdot \Omega).$$

Mais $g \cdot \Omega = \Delta(g)\Omega$, où $\Delta(g)$ = déterminant de g . Si ω et ω' sont des $(n-2)$ -formes, en posant $X = h_{\Omega}(\omega)$ et $X' = h_{\Omega}(\omega')$, il est clair que :

$$\omega' = g \cdot \omega \quad (g \in Gl(E))$$

équivaut à

$$g \cdot X' = \Delta(g)X.$$

Ceci montre que *la longueur est un invariant dans l'action de $Gl(E)$.*

5.2.3. Soit $\omega = X \lrcorner \Omega$ une $(n-2)$ -forme de longueur k ; on déduit facilement de la proposition 4.1 l'existence d'une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ désigne la base duale de E^* , on ait :

$$X = e_1 \wedge e_2 + \dots + e_{2k-1} \wedge e_{2k}$$

$$\Omega = \lambda \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \quad \text{où} \quad \lambda = \pm 1,$$

donc

$$\omega = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{2i-2} \wedge \alpha_{2i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_n .$$

Ce qui montre que l'ensemble S_k se compose d'au plus deux trajectoires de $Gl(E)$.

a) $2k < n$; en changeant éventuellement le signe de e_n et α_n , on réduit ω à la "forme canonique" :

$$\omega = \sum_{i=1}^k \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{2i-2} \wedge \alpha_{2i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_n .$$

S_k est donc une trajectoire de $Gl(E)$ dans $\binom{n-2}{\wedge} E^*$, en bijection avec $\Sigma_k \subset \binom{2}{\wedge} E$ par h_Ω .

b) $2k = n$; d'après 5.2.1, $-\omega = g \cdot \omega$ équivaut à

$$g \cdot X = -\Delta(g) \cdot X .$$

Mais, dans le cas présent, X^k est un n -vecteur non nul de E , et on a nécessairement :

$$g \cdot X^k = \Delta(g) \cdot X^k = (-1)^k \Delta(g)^k \cdot X^k$$

soit :

$$(-1)^k = \Delta(g)^{(k-1)} .$$

b₁) Si k est impair, cette égalité est impossible. Toute $(n-2)$ -forme de longueur k se réduit donc à l'une des deux "expressions canoniques" suivantes, qui caractérisent les deux trajectoires ouvertes de $Gl(E)$ dans $\binom{n-2}{\wedge} E^*$:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{2i-2} \wedge \alpha_{2i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_n$$

$$\omega_2 = -\omega_1 .$$

Par h_Ω , ces trajectoires partagent $\Sigma_k \subset \binom{2}{\wedge} E$ en deux demi-cônes.

b₂) Si k est pair, on a nécessairement $\Delta(g) = 1$, et l'automorphisme g défini par

$$g(e_i) = e_{i+1} \quad \text{si } i \text{ est impair}$$

$$g(e_i) = e_{i-1} \quad \text{si } i \text{ est pair}$$

répond à la question.

S_k est donc la trajectoire ouverte de $Gl(E)$ dans $\binom{n-2}{\wedge} E^*$.

5.2.4. *Remarques.* — 1) Il est clair qu'une forme ω est décomposable si et seulement si elle est de longueur 1 ; ainsi, l'ouvert des formes de rang maximal n se décompose en la réunion (disjointe) :

$$\Sigma_{n,n}^{n-2} = \bigcup_{k \geq 2} S_k.$$

2) La *longueur* d'une $(n-2)$ -forme ω peut être aussi définie comme le *nombre minimal* k de formes *décomposables* ω_i nécessaires pour écrire $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$; cette définition n'utilise pas la dualité et se prolonge évidemment aux formes de degré quelconque.

6. Cas intermédiaires ($3 \leq p \leq n-3$).

6.1. PROPOSITION. — *Pour $3 \leq p \leq n-3$, $\Sigma_{n,r}^p$ est non vide si et seulement si $r = 0, p, p+2, p+3, \dots, n$.*

Démonstration.

a) Si $p \leq r < n$ et $\Sigma_{n,r}^p$ est non vide, alors $\Sigma_{n,r+1}^{p+1}$ est non vide ; en effet, soit $\omega \in \binom{p}{\wedge} E^*$ une p -forme de rang r ; comme r est strictement inférieur à n , il existe une forme $\alpha \in E^*$ n'appartenant pas à S_ω ; la forme $\omega \wedge \alpha$ est une $(p+1)$ -forme de rang $(r+1)$ d'après la proposition 1.4.5.

b) Il suffit alors d'établir la proposition pour $p = 3$ (le reste s'en déduit par récurrence en utilisant a).

b₁) Il est évident que $\Sigma_{n,3}^3$ est non vide.

b₂) Si $3 \leq r \leq n-2$ et si $\Sigma_{n,r}^3$ est non vide, alors $\Sigma_{n,r+2}^3$ est non vide ; en effet, soit ω une 3-forme de rang r ; soient $\alpha_1, \alpha_2 \in E^*$ telles que le plan engendré par α_1 et α_2 soit en position générale par rapport à S_ω ; soit $\alpha_3 \in S_\omega$, non nulle ; d'après la proposition 1.4.4, la forme $\omega + \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ est de rang $r+2$.

b₃) Si $3 \leq r \leq n-3$ et si $\Sigma_{n,r}^3$ est non vide, alors $\Sigma_{n,r+3}^3$ est non vide ; la démonstration est analogue à 2, en utilisant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E^*$ engendrant un 3-plan en position générale par rapport à S_ω .

La proposition pour le cas $p = 3$ se déduit immédiatement de ces remarques, par récurrence sur r .

6.2. PROPOSITION. — Si $\Sigma_{n,r}^p$ est non vide, la variété algébrique $\Sigma_{n,r}^p$ admet l'ensemble $\bigcup_{r' < r} \Sigma_{n,r'}^p$ comme ensemble de points singuliers.

La démonstration peut se faire de manière analogue à celle de la remarque 1) de 4.2.

Remarque. — J'ignore si la stratification Σ_n^p de l'espace ${}^p\Lambda E^*$ définie par les variétés $\Sigma_{n,r}^p$ est "cohérente" (cf. Appendice § 2.2).

6.3. PROPOSITION. — Pour $n \geq 9$ et $3 \leq p \leq n - 3$, la dimension de $Gl(E)$ est strictement inférieure à celle de ${}^p\Lambda E^*$; le groupe $Gl(E)$ admet alors une infinité continue de trajectoires dans ${}^p\Lambda E^*$.

Le rang est donc, pour n assez grand, un invariant très grossier des formes de degré intermédiaire.

6.4. Remarques. — Soit ω une p -forme sur E ; appelons *expression minimale* de ω toute décomposition $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ de ω en somme de formes ω_i décomposables, où k est la *longueur* de ω (cf. 5.2.3 remarque 2)) ; étant donnée une telle expression minimale de ω , désignons par F_i le support de ω_i ; pour tout $i = 1, \dots, k$, F_i est un sous-espace de dimension p de E^* , et les F_i sont tous distincts (les dimensions des intersections deux à deux sont même nécessairement inférieures à $p - 2$) ; on désigne par F la collection des sous-espaces F_i .

Soient $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ et $\omega = \sum_{j=1}^k \omega'_j$ deux expressions minimales de ω ; soient F et F' les collections de sous-espaces correspondantes ;

CONJECTURE. — Les collections F et F' sont égales dans E^* , c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme g de E tel que pour tout i , il existe j avec $g(F_i) = F'_j$.

A chaque classe de collections égales on peut associer un symbole numérique (par exemple : nombre k des sous-espaces, dimensions

des sommes 1 à 1, 2 à 2, ..., k à k) ; la résolution de la conjecture précédente permettrait donc d'attacher à toute p -forme un symbole numérique, qui serait un invariant dans l'action de $Gl(E)$ (le *rang* figurerait d'ailleurs dans ce symbole ; ce serait la dimension de la somme de tous les espaces F_i).

Il faudrait alors étudier, pour chaque p , les symboles "admissibles" ; on peut espérer que l'ensemble des formes admettant un symbole donné soit une sous-variété de $\bigwedge^p E^*$ dans laquelle les trajectoires de $Gl(E)$ aient une dimension constante.

7. La représentation de $Gl(E)$ dans $E^* \oplus \bigwedge^2 E^*$.

On pose dans la suite $F = E^* \oplus \bigwedge^2 E^*$, et $g(\alpha, \beta) = (g\alpha, g\beta)$ pour $g \in Gl(E)$ et $(\alpha, \beta) \in F$.

7.1. Soit $(\alpha, \beta) \in F$; on appelle *support* de (α, β) le sous-espace $S_{(\alpha, \beta)}$ de E^* , somme des supports de α et β ; le *rang* de (α, β) sera la dimension de $S_{(\alpha, \beta)}$. Il est évident que le rang est, dans F , un invariant sous l'action de $Gl(E)$.

(*Remarque* : on aurait pu définir directement, au début de ce chapitre, le support et le rang d'un élément quelconque, éventuellement non homogène, de l'algèbre extérieure d'un espace E).

Pour un élément de la forme $(0, \beta)$, le support et le rang sont ceux de la 2-forme β , qui ont été étudiés en 4 ; soit Ω l'ouvert de F , ensemble des (α, β) tels que $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{On pose } \gamma_p(\alpha, \beta) &= \beta^k \text{ pour } p = 2k, \\ &= \alpha \wedge \beta^k \text{ pour } p = 2k + 1. \end{aligned}$$

PROPOSITION. — Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \Omega$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\text{rang}(\alpha, \beta) = r$
- b) $\gamma_r(\alpha, \beta) \neq 0$ et $\gamma_{r+1}(\alpha, \beta) = 0$
- c) $\gamma_p(\alpha, \beta) \neq 0$ pour $p \leq r$ et $\gamma_p(\alpha, \beta) = 0$ pour $p > r$.
- d) Il existe des formes indépendantes $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in E^*$ telles que

$$\alpha = \alpha_1 \text{ et } \beta = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \dots + \alpha_{2k-1} \wedge \alpha_{2k} \text{ si } r = 2k$$

$$\alpha = \alpha_1 \text{ et } \beta = \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \dots + \alpha_{2k} \wedge \alpha_{2k+1} \text{ si } r = 2k + 1 .$$

La démonstration est très simple à partir de la proposition 4.1.

Remarque. — Le rang de (α, β) est $2k$ si et seulement si β est de rang $2k$ et si $\alpha \in S_\beta$; le rang de (α, β) est $2k + 1$ si et seulement si β est de rang $2k$ et $\alpha \notin S_\beta$.

7.2. Dans la suite, on désigne par Σ_c l'ensemble des $(0, \beta)$ avec $\text{rang}(\beta) = n - c$, et par S_d l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in \Omega$ de rang $n - d$ (corang égal à d), où $n = \dim E$.

PROPOSITION. — Les ensembles Σ_c et S_d sont les trajectoires de $Gl(E)$ dans F ; ce sont des sous-variétés régulières de F , dont les adhérences sont des variétés algébriques ; enfin

$$\text{codim } \Sigma_c = n + \frac{c(c - 1)}{2}$$

$$\text{codim } S_d = \frac{d(d + 1)}{2}$$

où $n - c$ est pair avec $0 \leq n - c \leq n$, et $0 \leq d \leq n - 1$.

On désigne par S la stratification de F ainsi définie.

Tout ce qui concerne les ensembles Σ_c résulte de la proposition 4.1. D'après la condition d) de la proposition 7.1 les ensembles S_d sont bien les trajectoires de $Gl(E)$ dans Ω .

$n - d = 2k + 1$; d'après 7.1 b), S_d est l'ensemble des (α, β) tels que $\beta^{(k+1)} = 0$ et $\alpha \wedge \beta^k \neq 0$; $\overline{S_d}$ est l'ensemble algébrique défini par l'équation $\beta^{(k+1)} = 0$; S_d est de façon évidente un ouvert dense dans le "cylindre" $E^* \times \Sigma_{n-k}$; on en déduit sa codimension.

$n - d = 2k$; d'après 7.1 b), S_d est l'ensemble des (α, β) tels que $\alpha \wedge \beta^k = 0$ et $\beta^k \neq 0$; $\overline{S_d}$ est la variété algébrique d'équations $\alpha \wedge \beta^k = 0$ et $\beta^{(k+1)} = 0$. La projection $\pi : F \longrightarrow \wedge^2 E^*$ envoie S_d sur Σ_{n-k} et, pour $\beta \in \Sigma_{n-k}$, $\pi^{-1}(\beta) \cap S_d$ est l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in \Omega$ tels que $\alpha \in S_\beta$; on en déduit facilement que S_d est une sous-variété régulière de F , de codimension $d(d + 1)/2$.

7.3. En vue de l'étude ultérieure de la classe d'une équation de Pfaff (cf. II.5), il est utile d'étudier la notion suivante :

DEFINITION. — Le rang réduit d'un élément $(\alpha, \beta) \in \Omega \subset E^* \oplus \wedge^2 E^*$ (i.e. tel que $\alpha \neq 0$) est l'entier impair $2k + 1$ tel que $\alpha \wedge \beta^k \neq 0$ et $\alpha \wedge \beta^{k+1} = 0$ (c'est aussi le rang de la 3-forme $\alpha \wedge \beta$).

On désignera par $S'_c \subset \Omega$ l'ensemble des éléments de rang réduit $n - c$, (où $n = \dim E$) et on va chercher à décrire la partition de Ω ainsi définie.

Soit H le groupe des jets d'ordre 1 à l'origine de E des fonctions numériques non nulles ; le groupe H est formé des couples $f = (\lambda, h)$ où λ est un nombre réel non nul et $h \in E^*$. La formule

$$d(f\omega) = fd\omega + df \wedge \omega,$$

où ω est une forme de Pfaff, f une fonction, et d la différentiation extérieure, suggère de faire agir H sur $F = E^* \oplus \wedge^2 E^*$ selon la règle

$$(\lambda, h) \cdot (\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta + h \wedge \alpha)$$

le rang réduit est un invariant dans l'action de H ; il suffit en effet de remarquer que $\lambda\alpha \wedge (\lambda\beta + h \wedge \alpha)^k = \lambda^{k+1} \alpha \wedge \beta^k$.

Soit maintenant $(f, g) \in H \times Gl(E)$, et $(\alpha, \beta) \in F$; on pose :

$$(f, g) \cdot (\alpha, \beta) = f \cdot g(\alpha, \beta) = (\lambda \cdot g\alpha, \lambda \cdot g\beta + h \wedge g\alpha)$$

où $f = (\lambda, h)$.

Il est clair que l'on définit de cette façon une loi d'opération de $\bar{G} = H \times Gl(E)$, muni d'une structure naturelle de produit semi-direct, dans F . Le rang réduit, invariant sous l'action de H et de $G = Gl(E)$, est un invariant sous l'action de \bar{G} .

PROPOSITION. — Les trajectoires de \bar{G} dans F sont les sous-variétés $\Sigma'_c \subset \{0\} \times \wedge^2 E^*$ d'une part, et les ensembles $S'_c \subset \Omega$ ($n - c$ impair) d'autre part ; pour tout c , tel que $n - c$ soit impair, avec $1 \leq n - c \leq n$, S'_c est une sous-variété régulière de F , d'adhérence algébrique, et de codimension $\frac{c(c-1)}{2}$.

Démonstration. — On a $(f, g)(0, \beta) = (0, \lambda \cdot g\beta)$ où $(f, g) \in \bar{G}$ et $f = (\lambda, h)$; il est alors clair que les trajectoires de \bar{G} dans $0 \times \wedge^2 E^*$ sont les ensembles Σ_c .

D'autre part, $S'_c = S_c \cup S_{c-1}$; posons $n - c = 2k + 1$; soit $(\alpha, \beta) \in S_c$ et montrons que $\bar{G}(\alpha, \beta) = S'_c$; soit $f = (1, h)$ où $h \in E^*$ est tel que $h \wedge \alpha \wedge \beta^* \neq 0$; l'élément $(f, 1) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta + h \wedge \alpha)$ est de rang $2k + 2$; $\bar{G}(\alpha, \beta)$ rencontre donc S_c et S_{c-1} ; il contient donc leur réunion, l'action de \bar{G} prolongeant celle de $Gl(E)$; d'autre part $\bar{G}(\alpha, \beta) \subset S'_c$, le rang réduit étant un invariant, et on a bien $\bar{G}(\alpha, \beta) = S'_c$.

L'ensemble S'_c est alors une sous-variété, comme orbite d'un groupe de Lie; mais il est aussi réunion de deux sous-variétés régulières: c'est donc une sous-variété régulière de dimension égale à celle de S_{c-1} . Le reste de la proposition est immédiat.

Remarques. — La stratification définie dans F par les ensembles $S'_c \subset \Omega$ et $\Sigma_c \subset \{0\} \times \wedge^2 E^*$ est donc *cohérente* (cf. Appendice § 2.2).

2) La stratification définie dans F par les ensembles Σ_c et $S_c \subset \Omega$ a la propriété assez curieuse suivante: quel que soit c , l'ensemble $S_c \cup S_{c-1}$ est une sous-variété régulière de F, de codimension $\frac{c(c-1)}{2}$; pour $(n-c)$ impair, cela résulte de la proposition précédente; pour $(n-c)$ pair, il s'agit simplement du produit $(E^* - \{0\}) \times \Sigma_{\frac{n-c}{2}}$.

CHAPITRE II

SINGULARITES DU RANG ET DE LA CLASSE D'UNE FORME DIFFERENTIELLE

1. Généralités ; notations et définitions.

1.1. On désigne par F_k^p (resp. \mathfrak{F}_k^p) ($k \geq 0, 1 \leq p \leq n$) l'espace vectoriel des jets d'ordre k , à l'origine de \mathbb{R}^n , de formes différentielles (resp. formes différentielles *fermées*) extérieures de degré p .

On note \mathbf{R}_n le dual de \mathbb{R}^n ; on a ainsi $F_0^p = \mathfrak{F}_0^p = \bigwedge^p \mathbf{R}_n$.

Quels que soient k , et $k' \geq k$, on notera $\rho : F_{k'}^p \longrightarrow F_k^p$,
ou $\rho : \mathfrak{F}_{k'}^p \longrightarrow \mathfrak{F}_k^p$, les homomorphismes de *restriction*.

La différentiation extérieure définit, quels que soient p et $k \geq 1$, un homomorphisme $d : F_k^p \longrightarrow F_{k-1}^{p+1}$, dont l'image est \mathfrak{F}_{k-1}^{p+1} .

Soit maintenant, pour tout $k \geq 0$, L_k le groupe de Lie des $(k+1)$ -jets inversibles de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , de source et but 0, (c'est-à-dire les jets d'ordre $(k+1)$ des germes de difféomorphismes conservant l'origine de \mathbb{R}^n). Pour $k' \geq k$, on note encore $\rho : L_{k'} \longrightarrow L_k$ l'homomorphisme de restriction.

La règle du changement de variables dans une forme différentielle définit, pour tout $k \geq 0$, une loi d'opération naturelle de L_k dans F_k^p et \mathfrak{F}_k^p .

Ces lois d'opérations commutent avec les morphismes de restriction.

DEFINITION. — On appelle *singularité d'ordre k de p -formes* (resp. *de p -formes fermées*) toute sous-variété Σ de F_k^p (resp. \mathfrak{F}_k^p), régulière, invariante par L_k .

1.2. Soit M une variété de classe C^∞ , de dimension n , à base dénombrable de voisinages.

On notera :

TM et T^*M les fibrés tangent et cotangent à M ;

${}^p \wedge T^*M$ le fibré puissance extérieure p -ième de T^*M ;

${}^p \wedge T_k^*M$ le fibré vectoriel des k -jets de sections de ${}^p \wedge T^*M$;

${}^p \wedge \mathcal{C}_k^*M$ le fibré des k -jets de p -formes fermées.

On remarque que ${}^p \wedge T^*M = {}^p \wedge \mathcal{C}_0^*M$.

Le fibré ${}^p \wedge T_k^*M$ a pour fibre type F_k^p , et pour groupe de structure L_k ; de même ${}^p \wedge \mathcal{C}_k^*M$ a pour fibre type \mathcal{F}_k^p et pour groupe de structure L_k .

Quels que soient k et $k' \geq k$, on notera $\rho : {}^p \wedge T_k^*M \longrightarrow {}^p \wedge T_{k'}^*M$, ou $\rho : {}^p \wedge \mathcal{C}_k^*M \longrightarrow {}^p \wedge \mathcal{C}_{k'}^*M$, le morphisme de restriction.

Pour tout $k \geq 1$, on note $d : {}^p \wedge T_k^*M \longrightarrow {}^{p+1} \wedge \mathcal{C}_{k-1}^*M$ le morphisme de fibrés défini par la différentiation extérieure.

On désignera par $D_k^p(M)$, où $k \geq 0$ (resp. $\mathcal{O}_k^p(M)$, où $k \geq 1$) l'espace des p -formes différentielles (resp. p -formes fermées) sur M , à coefficients k fois continûment différentiables, muni de la C^k -topologie (Appendice § 1.2) ; $D^p(M)$ (resp. $\mathcal{O}^p(M)$) désignera l'espace des p -formes C^∞ (resp. p -formes fermées) muni de la C^∞ -topologie.

Soit $\omega \in D_k^p(M)$, et $k \leq k'$; on notera $j_k \omega$ la section de ${}^p \wedge T_{k'}^*M$ définie par $j_k \omega(x) = k$ -jet de ω en x .

1.3. Soit $\Sigma \subset F_k^p$ une singularité d'ordre k de p -formes ; cette sous-variété, étant invariante par le groupe de structure L_k , définit de façon naturelle une sous-variété de ${}^p \wedge T_k^*M$ (fibrée sur M avec Σ comme fibre type) que l'on notera $\Sigma(M)$.

Soit alors $\omega \in D_k^p(M)$, où $k \leq k' \leq \infty$; l'ensemble $\Sigma(\omega)$ des points $x \in M$ tels que $j_k \omega(x) \in \Sigma(M)$ sera appelé l'ensemble singulier de type Σ de ω ; les points de $\Sigma(\omega)$ sont les points singuliers de type Σ de ω .

On définit de la même façon les points singuliers et l'ensemble singulier d'une forme fermée, pour une singularité donnée.

Je me propose, dans ce chapitre, de définir un certain nombre de singularités liées aux notions de rang et de classe d'une forme différentielle, puis d'étudier, à l'aide des techniques de transversalité, la nature générique des ensembles singuliers correspondants.

De façon plus précise, on cherche à définir, pour tout p et tout k donnés, une *stratification finie* (cf. Appendice § 2.2) de F_k^p (resp. \mathfrak{F}_k^p) *par des singularités*, telle qu'on obtienne un "maximum d'information" sur le comportement en chaque point d'une forme différentielle ω sur une variété M , quand $j_k \omega$ est *transverse* à cette stratification.

Il n'existe pas actuellement de *méthode systématique* permettant de construire une "stratification naturelle optimale" de F_k^p .

J'utilise ici le *rang* comme invariant d'ordre 0, la *classe* comme invariant d'ordre 1, et j'emploie, pour construire des singularités d'ordre supérieur, la même stratégie que dans le cas des applications différentiables (seulement pour les 2-formes fermées en dimension 4 et les équations de Pfaff en dimension 3).

1.4. Remarques.

1) Le sens donné ici au terme "singularité" est un peu plus large que le sens intuitif habituel ; ainsi, si ω est une forme de Pfaff, un point où ω est de classe maximum pourra être considéré comme un point singulier de ω d'un type donné.

2) Soit $\Sigma \subset F_k^p$ (resp. \mathfrak{F}_k^p) une singularité de codimension c ; soit M une variété de dimension n , et $\omega \in D_{k'}^p(M)$ (resp. $\mathcal{O}_{k'}^p(M)$), où $k' \geq k + 1$. On sait alors (Appendice § 6 et 7) que, génériquement dans $D_{k'}^p(M)$ (resp. $\mathcal{O}_{k'}^p(M)$), $j_k \omega$ est transverse à $\Sigma(M)$; l'ensemble singulier $\Sigma(\omega)$ sera alors, *s'il est non vide*, une sous-variété régulière de M , de codimension c ; ceci sera toujours, dans la suite, résumé par l'expression : " $\Sigma(\omega)$ est génériquement une sous-variété régulière de codimension c ".

Notons d'ailleurs que, si $c \leq n$, il existe toujours, d'après un théorème de J. Mather ([13] p. 29) une p -forme ω telle que $j_k \omega$ soit transverse à $\Sigma(\omega)$ et que $\Sigma(\omega)$ soit non vide.

2. Le rang et ses singularités.

2.1. Il est clair que $F_0^p = \mathfrak{F}_0^p = \bigwedge^p \mathbf{R}_n$, où $\mathbf{R}_n = (\mathbf{R}^n)^*$; d'autre part, L_0 est le groupe $Gl(n, \mathbf{R})$, et la loi d'opération définie en 1.1.

est la loi naturelle déjà considérée au Chap. I. Les études faites dans ce chapitre montrent que les ensembles $\Sigma_{n,r}^p$ (rappelons qu'il s'agit, dans $\wedge^p R_n$, de l'ensemble des formes de rang r) sont des singularités d'ordre 0, et nous donnent les codimensions de ces singularités.

Si M est une variété de dimension n , on considère pour chaque entier p la stratification $\Sigma_n^p(M)$ de $\wedge^p T^*(M)$ constituée par les sous-variétés $\Sigma_{n,r}^p(M)$. D'après les théorèmes de transversalité (Appendice : Th. 6) le sous-ensemble de D_l^p (resp. \mathcal{O}_l^p) constitué par les formes (resp. formes fermées) transverses à cette stratification est, pour $l \geq 1$, un ensemble résiduel ; détaillons maintenant quelques aspects de cette situation générique.

2.2. THEOREME. — *Soit M une variété de dimension $n \geq 7$; pour $3 \leq p \leq n - 2$, l'ensemble des p -formes de D_1^p qui sont de rang maximal n en tout point de M , est un C^1 -ouvert dense. Ce résultat est encore vrai dans \mathcal{O}_1^p .*

En effet, d'après I, Prop. 2, la codimension de $\Sigma_{n,r}^p$ est strictement supérieure à n dès que $r < n$, pourvu que $n \geq 7$, et $3 \leq p \leq n - 2$; une forme en position générale par rapport aux variétés $\Sigma_{n,r}^p(M)$ ne peut donc être de rang inférieur à n en aucun point. D'autre part, ces formes constituent un C^1 -ouvert d'après l'Appendice § 6, Remarque 1. Pour la deuxième partie du théorème, on applique le théorème 7 de l'Appendice.

2.3. Pour $p = 1$, $n - 1$, n la situation est très simple, le rang ne pouvant prendre alors que deux valeurs ; génériquement, les zéros d'une n -forme constituent une sous-variété compacte de codimension 1 de M ; les zéros d'une forme de Pfaff (fermée ou non) ou d'une $(n - 1)$ -forme sont isolés.

2.4. Comportement générique du rang d'une 2-forme.

Compte tenu de I. 4.2, posons

$$\begin{aligned} r(n) &= \text{Max} \left(c ; c \text{ pair et } \frac{c(c-1)}{2} \leq n \right) \text{ pour } n \text{ pair} \\ &= \text{Max} \left(c ; c \text{ impair et } \frac{c(c-1)}{2} \leq n \right) \text{ pour } n \text{ impair.} \end{aligned}$$

Soit Σ la stratification de $\bigwedge^2 \mathbf{R}_n$ définie par les ensembles Σ_c (ensemble des 2-formes de corang c).

2.4.1. — On a alors la

PROPOSITION. — *Soit M une variété de dimension n . L'ensemble $T(\Sigma)$ des 2-formes $\omega \in D_k^2(M)$ (resp. $\mathcal{O}_k^2(M)$) qui sont transverses à la stratification $\Sigma(M) \subset \bigwedge^2 T^*M$ est un C^k -ouvert dense, pour $k \geq 1$.*

Une telle 2-forme a les propriétés suivantes :

a) *Le rang de ω est en tout point supérieur ou égal à $n - r(n)$; une expression asymptotique de ce minorant est $n - \sqrt{2n}$.*

b) *Pour $c \leq r(n)$, l'ensemble $\Sigma_c(\omega)$ les points de M où ω est de rang $n - c$ est, si non vide, une sous-variété régulière de codimension $c(c - 1)/2$.*

Ce résultat est une conséquence immédiate du Théorème 6 (remarque 2) de l'Appendice et du Théorème 7 pour les formes fermées.

Exemples. — Si $n = \dim M = 4$, le corang est nécessairement pair ; génériquement $\Sigma_4(\omega)$ est vide, c'est-à-dire que ω n'a pas de zéro ; $\Sigma_2(\omega)$ est une hypersurface (fermée) de M ; ω est de rang maximum 4 sur l'ouvert $\Sigma_0(\omega) = M - \Sigma_2(\omega)$.

Si $n = \dim M = 6$, $\Sigma_6(\omega)$ est génériquement vide (ω n'a pas de zéro), $\Sigma_4(\omega)$ est constitué de points isolés, $\Sigma_2(\omega)$ est une hypersurface telle que $\overline{\Sigma_2(\omega)} = \Sigma_2(\omega) \cup \Sigma_4(\omega)$.

Pour n pair, $6 \leq n \leq 14$, la description du comportement générique du rang reste la même, c'est-à-dire que seuls $\Sigma_2(\omega)$ et $\Sigma_4(\omega)$ (et évidemment $\Sigma_0(\omega)$) peuvent être non vides ; ils sont de codimensions respectives 1 et 6, et $\Sigma_4(\omega)$ est un lieu de points singuliers pour $\overline{\Sigma_2(\omega)}$.

Si $n = 5$, le corang est nécessairement impair ; génériquement $\Sigma_5(\omega)$ est vide (pas de zéro), $\Sigma_3(\omega)$ est une sous-variété (fermée) de codimension 3 ; ω est de rang maximum 4 sur l'ouvert

$$\Sigma_1(\omega) = M - \Sigma_3(\omega) ;$$

la description reste la même pour $n = 7, 9$.

2.4.2. PROPOSITION. — Dans $T(\Sigma) \subset D_k^2(M)$ (resp. $T(\Sigma) \subset \mathcal{O}_k^2(M)$), pour $k \geq 2$, il y a stabilité isotopique des ensembles singuliers du rang d'une 2-forme.

Démonstration. — D'abord, cette proposition signifie que si $\omega \in D_k^2(M)$ est transverse à $\Sigma(M)$, il existe un voisinage V de ω (pour la C^k -topologie) tel que, si $\omega' \in V$, alors les stratifications $\Sigma(\omega)$ et $\Sigma(\omega')$ de M formées par les ensembles singuliers $\Sigma_c(\omega)$ et $\Sigma_c(\omega')$ sont isotopes. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 4.2 de l'Appendice, puisque la stratification $\Sigma(M)$ est cohérente, comme la stratification Σ de $\wedge^2 \mathbb{R}_n$ (rappelons que les strates $\Sigma_c \subset \wedge^2 \mathbb{R}_n$ sont les trajectoires du groupe $L_0 = Gl(n, \mathbb{R})$).

3. Singularités "génériques" d'une 2-forme fermée en dimension 4.

3.1. Description de la situation générique.

Soit M une variété (compacte pour fixer les idées) de dimension 4. La situation décrite dans les paragraphes suivants, pour une 2-forme fermée ω sur M , est générique dans $\mathcal{O}_3^2(M)$, espace des 2-formes fermées au moins 3 fois continûment différentiables (rappelons que cela signifie que l'ensemble des 2-formes fermées ayant les propriétés explicitées ci-dessous est résiduel dans $\mathcal{O}_3^2(M)$; ce sera même en fait un C^3 -ouvert dense).

3.1.1. *L'ensemble $\Sigma_2(\omega)$ des points où ω est de corang 2 (donc de rang 2) est une sous-variété (compacte) de codimension 1 (si non vide) ; ω ne s'annule en aucun point de M . (cf. II. 2.4.1 exemple 1)).*

Remarque. — $\Sigma_2(\omega)$ est orientée de façon canonique ; soit en effet $x \in \Sigma_2(\omega)$, et Ω une forme volume sur un voisinage de x dans M ; on a $\omega^2 = f \cdot \Omega$; par définition de $\Sigma_2(\omega)$, $f(x) = 0$; en situation générique $f'(x)$ est une forme linéaire non nulle ; son noyau est $T_x \Sigma_2(\omega)$, qui hérite du couple $(\Omega(x), f'(x))$ une orientation ; si l'on change Ω de signe, f et f' changent de signe, et l'orientation induite ne change pas.

3.1.2. Soit ω' la restriction de ω à $\Sigma_2(\omega)$, et soit $\Sigma_{2,2}(\omega)$ l'ensemble des points où ω' est nulle ; $\Sigma_{2,2}(\omega)$ est une sous-variété (compacte) de codimension 3 dans M (ou de codimension 2 dans $\Sigma_2(\omega)$) : c'est donc une réunion finie de courbes fermées simples de M . On posera d'autre part $\Sigma_{2,0}(\omega) = \Sigma_2(\omega) - \Sigma_{2,2}(\omega)$.

Remarque. — ω' est une 2-forme fermée sur une variété de dimension 3 ; nous venons d'affirmer que, génériquement, ses zéros formaient une ligne. Par ailleurs, les zéros d'une 2-forme fermée en dimension 3 sont génériquement isolés ; mais on notera que dans le cas envisagé, ω' et $\Sigma_2(\omega)$ ne sont pas "indépendantes".

3.1.3. En chaque point $x \in \Sigma_2(\omega)$, $\omega(x)$ est, par définition de $\Sigma_2(\omega)$, une 2-forme de corang 2 sur $T_x M$; l'espace associé $A_\omega(x)$ est donc un plan ; il est clair que $\Sigma_{2,2}(\omega)$ est l'ensemble des points $x \in \Sigma_2(\omega)$ tels que $A_\omega(x) \subset T_x \Sigma_2(\omega)$; si $x \in \Sigma_{2,0}(\omega)$, le plan associé à ω est transverse à $T_x \Sigma_2(\omega)$; l'intersection est une droite : on définit ainsi un *champ de directions* D sur $\Sigma_{2,0}(\omega)$, qui est aussi le *champ associé à la forme induite ω'* ; ce champ est canoniquement orienté ; il suffit de choisir une forme volume Ω sur $\Sigma_2(\omega)$, positive par rapport à l'orientation canonique de $\Sigma_2(\omega)$, et de considérer le champ de vecteurs X défini en chaque point par l'équation linéaire $\omega' = X \lrcorner \Omega$; le champ X est défini à un facteur positif près, et il est évidemment porté par D .

Soit $\Sigma_{2,2,1}(\omega)$ l'ensemble des points $x \in \Sigma_{2,2}(\omega)$ tels que la droite $T_x \Sigma_{2,2}$ soit incluse dans le plan $A_\omega(x)$; $\Sigma_{2,2,1}$ est un ensemble de points isolés.

On posera $\Sigma_{2,2,0}(\omega) = \Sigma_{2,2}(\omega) - \Sigma_{2,2,1}(\omega)$; en tout point $x \in \Sigma_{2,2,0}(\omega)$, $T_x \Sigma_{2,2}$ et le plan $A_\omega(x)$ sont transverses dans $T_x \Sigma_2(\omega)$.

3.1.4. On peut préciser la situation aux points de $\Sigma_{2,2}$ de la façon suivante, qui m'a été indiquée par le Professeur Calabi.

Considérons un point $x \in \Sigma_{2,2}(\omega)$; comme la section

$$\omega' : \Sigma_2(\omega) \longrightarrow \wedge^2 T^* \Sigma_2(\omega)$$

est nulle en ce point, sa jacobienne en x est une application linéaire $T_x \omega' : T_x \Sigma_2 \longrightarrow \wedge^2 T_x^* \Sigma_2$; en utilisant une forme volume positive sur $T_x \Sigma_2$, et l'isomorphisme de dualité correspondant de $\wedge^2 T_x^* \Sigma_2$ sur $T_x \Sigma_2$, $T_x \omega'$ définit un endomorphisme

$$\Lambda_{\omega}(x) : T_x \Sigma_2 \longrightarrow T_x \Sigma_2 .$$

Cet endomorphisme est défini à une homothétie *positive* près (selon le choix du volume).

On peut aussi définir $\Lambda_{\omega}(x)$ de la façon suivante : soit Ω une forme volume positive sur $\Sigma_2(\omega)$, et X le champ de vecteurs construit au paragraphe précédent ; le point x est un zéro de X ; la jacobienne de X en x est alors la matrice $\Lambda_{\omega}(x)$ correspondant au volume $\Omega(x)$ sur $T_x \Sigma_2(\omega)$: on peut donc dire que $\Lambda_{\omega}(x)$ est la jacobienne en x ($x \in \Sigma_{2,2}$) du champ de directions D .

Par construction, $\Lambda_{\omega}(x)$ est de rang inférieur ou égal à 2 ; en effet, ω' s'annulant aux points de $\Sigma_{2,2}(\omega)$, la droite tangente à $\Sigma_{2,2}(\omega)$ est certainement contenue dans le noyau de $\Lambda_{\omega}(x)$.

D'autre part, $\Lambda_{\omega}(x)$ est toujours de trace nulle ; en effet, ω' étant fermée, le champ de vecteurs auxiliaire X construit ci-dessus vérifie $\theta(X)\Omega = 0$; il est donc *unimodulaire*.

La situation générique décrite en 3.1.3 se précise alors ainsi :

a) $\Lambda_{\omega}(x)$ est de rang 2 en tout point $x \in \Sigma_{2,2}(\omega)$; le noyau de $\Lambda_{\omega}(x)$ est la tangente à $\Sigma_{2,2}(\omega)$ en x ; l'image de $\Lambda_{\omega}(x)$ est $A_{\omega}(x)$.

b) $\Sigma_{2,2,0}(\omega)$ est l'ensemble des points x tels que $\Lambda_{\omega}(x)$ soit non nilpotente ; cette matrice a une valeur propre nulle, les deux autres sont non nulles et opposées : elles sont donc imaginaires pures, ou réelles ; le premier cas définit le sous-ensemble $\Sigma_{2,2,0}^e(\omega)$ des "points elliptiques", le second l'ensemble $\Sigma_{2,2,0}^h(\omega)$ des "points hyperboliques".

c) Les points de $\Sigma_{2,2,1}(\omega)$ séparent les arcs elliptiques et hyperboliques ; on peut les appeler "paraboliques" ; en un tel point, les valeurs propres de $\Lambda_{\omega}(x)$ sont toutes nulles, et l'image de $\Lambda_{\omega}(x)$, qui est toujours $A_{\omega}(x)$, contient la tangente à $\Sigma_{2,2}(\omega)$.

3.2. Pour convaincre le lecteur, donnons un exemple de chacun des types de points singuliers décrits ci-dessus ;

3.2.1. En tout point de $\Sigma_0(\omega)$ (c'est-à-dire : ω est de rang maximum 4), il existe (d'après le théorème de Darboux : voir le chapitre suivant) des coordonnées locales (x, y, z, t) telles que

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt .$$

3.2.2. En tout point de $\Sigma_{2,0}(\omega)$, il existe des coordonnées locales (x, y, z, t) dans lesquelles

$$\omega = x dx \wedge dy + dz \wedge dt .$$

Ce fait sera démontré en III. A. 4.2.2.

3.2.3. a) Voici maintenant un exemple de forme dans \mathbf{R}^4 présentant à l'origine un point de type $\Sigma_{2,2,0}^e$ (type elliptique) :

$$\omega = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d \left(xz + ty - \frac{z^3}{3} \right) \wedge dt .$$

Dans ce cas, $\Sigma_2(\omega)$ est défini par $x = 0$ (on a $\omega^2 = x dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$) ; un volume positif sur $\Sigma_2(\omega)$ est $dy \wedge dz \wedge dt$; d'autre part,

$$\omega' = z dy \wedge dz + t dy \wedge dt - z^2 dz \wedge dt ;$$

le champ de vecteurs associé est défini par

$$X = -z^2 \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} ;$$

$\Sigma_{2,2}(\omega)$ est donc l'axe des y ; les courbes intégrales du champ X sont des "hélices d'axe Oy ".

Remarque. — En un point *elliptique* x de $\Sigma_{2,2}(\omega)$, la tangente à $\Sigma_{2,2}$ est canoniquement orientée ; en effet, en un tel point, $\Lambda_\omega(x)$ définit un "quart de tour" dans le plan image, qui est transverse à $\Sigma_{2,2}$: ce plan est donc orienté, et, l'espace tangent à Σ_2 l'étant aussi, on en déduit une orientation de la droite $T_x \Sigma_{2,2}(\omega)$.

b) On obtient un exemple de point *hyperbolique* (type $\Sigma_{2,2,0}^h$) en changeant un signe dans l'exemple précédent :

$$\omega = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d \left(xz - ty - \frac{z^3}{3} \right) \wedge dt .$$

Remarque. — J'ignore si un germe de 2-forme fermée présentant un point singulier elliptique ou hyperbolique est *isomorphe* (au sens de III. A. 1.1.2) à l'exemple correspondant ci-dessus ; voir cependant III. B. 2.2 à ce sujet.

3.2.4. La remarque faite en 3.2.3 a) montre qu'il y a au moins *deux types de points paraboliques*, selon que l'arc elliptique "en part

ou y arrive” ; voici deux exemples correspondant à ces deux comportements :

$$\omega = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d \left(xz + 2tx \pm \frac{y^2}{2} - \frac{z^3}{3} - tz^2 \right) \wedge dt .$$

Dans les deux cas, $\Sigma_2(\omega)$ est définie par $x = 0$; on a

$$\omega' = z dy \wedge dz \pm y dy \wedge dt - z(z + 2t) dz \wedge dt ;$$

le champ de vecteurs X correspondant est

$$X = -z(z + 2t) \frac{\partial}{\partial y} \mp y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} ;$$

la variété $\Sigma_{2,2}(\omega)$ est la droite définie par $x = y = z = 0$. L'équation aux valeurs propres de la jacobienne Λ de X au point $(0, 0, t_0)$ de $\Sigma_{2,2}$ est $\lambda(\lambda^2 \pm 2t_0) = 0$. On vérifie que dans le cas $(-y^2/2)$ l'arc elliptique ($t > 0$) “part” de l'origine, et qu'il y arrive ($t < 0$) dans le cas $(+y^2/2)$.

J'ignore aussi si tout germe de 2-forme présentant un point parabolique est isomorphe à l'un des deux exemples ci-dessus.

3.3. Justification de la généricité de la situation décrite en 3.1.

On va travailler dans l'espace \mathfrak{F}_1^2 des jets d'ordre 1 de 2-formes fermées à l'origine de \mathbb{R}^4 ; je vais construire une suite de singularités dans \mathfrak{F}_1^2 telle que la position transversale de $j_2 \omega$ par rapport à ces singularités (où ω est une 2-forme fermée) implique le comportement explicité en 3.1.

Nous écrirons tout jet sous la forme $\omega = \omega_0 + \omega_1$ où ω_0 est une 2-forme à coefficients constants, et ω_1 une 2-forme fermée à coefficients linéaires et homogènes.

3.3.1. On considère d'abord la stratification $\mathfrak{F}_1^2 = \Sigma_0 \cup \Sigma_2' \cup \Sigma_4$ de \mathfrak{F}_1^2 , où Σ_i désigne l'ensemble des ω tels que ω_0 soit de corang i ; $\Sigma_0, \Sigma_2', \Sigma_4$ sont des sous-variétés régulières de \mathfrak{F}_1^2 de codimension 0, 1, 6 (d'après la Proposition I. 4.2).

3.3.2. On va maintenant stratifier la sous-variété Σ_2' ; c'est un fibré (vectoriel) sur l'ensemble des ω_0 de rang 2 ; on va opérer dans une fibre, en remarquant que pour tout $\omega \in \Sigma_2'$, il existe une base de \mathbb{R}^4 dans laquelle $\omega_0 = dx \wedge dy$.

Soit alors $\omega_1 = h dz \wedge dt + \dots$, où h, \dots , sont des formes linéaires.

Il est clair que " ω est transverse à $\Sigma_2 \subset F_0^2$ " équivaut à " h est une forme linéaire non nulle".

On décompose alors Σ_2' en $\Sigma_2 \cup \Sigma_2''$ où Σ_2'' est l'ensemble des ω tels que $h \equiv 0$; Σ_2'' est une sous-variété régulière de *codimension 4 dans Σ_2* , donc de *codimension 5 dans \mathfrak{F}_1^2* .

3.3.3. Soit $\omega = \omega_0 + \omega_1 = dx \wedge dy + h dz \wedge dt + \dots \in \Sigma_2$; notons H l'hyperplan noyau de h .

On définit $\Sigma_{2,2}' \subset \Sigma_2$ comme l'ensemble des ω tels que la restriction de la forme $dx \wedge dy$ à l'hyperplan H soit nulle ; cela équivaut à $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} = 0$; ces conditions définissent une sous-variété de *codimension 2 dans Σ_2* , donc de *codimension 3 dans \mathfrak{F}_1^2* ; on pose $\Sigma_{2,0} = \Sigma_2 - \Sigma_{2,2}'$.

3.3.4. Soit un élément $\omega \in \Sigma_{2,2}'$; on voit aisément qu'il est possible de choisir une base de \mathbb{R}^4 telle que $\omega_0 = dx \wedge dy$ et

$$\omega_1 = x dz \wedge dt + \dots$$

On va opérer dans l'ensemble des éléments de $\Sigma_{2,2}'$ dont l'expression est comme ci-dessus, dans une base fixée.

On posera, de façon plus précise,

$$\omega_1 = x dz \wedge dt + k dy \wedge dz + l dy \wedge dt + \dots,$$

où k, l, \dots sont des formes linéaires.

Soit ϖ_1 la restriction de ω_1 à H, qui est ici l'hyperplan $x = 0$. On a $\varpi_1 = \bar{k} dy \wedge dz + \bar{l} dy \wedge dt$, où \bar{k} et \bar{l} désignent les restrictions de k et l à $x = 0$. On lui associe l'endomorphisme Λ de H défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial l}{\partial y} & -\frac{\partial l}{\partial z} & -\frac{\partial l}{\partial t} \\ \frac{\partial k}{\partial y} & \frac{\partial k}{\partial z} & \frac{\partial k}{\partial t} \end{pmatrix}$$

(c'est ce qui correspond, bien entendu, au $\Lambda_\omega(x)$ envisagé auparavant). La seule relation entre ces coefficients exprimant que ω_1 est fermée est $-\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0$ (i.e. Λ est de trace nulle).

On pose alors $\Sigma_{2,2} = \Sigma'_{2,2} - \Sigma''_{2,2}$, où $\Sigma''_{2,2}$ désigne l'ensemble des ω tels que Λ soit de rang ≤ 1 : $\Sigma''_{2,2}$ est une variété algébrique de codimension 2 dans $\Sigma'_{2,2}$, donc de codimension 5 dans \mathfrak{F}_1^2 .

Enfin $\Sigma_{2,2,1} \subset \Sigma_{2,2}$ sera défini par l'équation

$$-\frac{\partial l}{\partial z} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial t} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} = -\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial l}{\partial t} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} = 0$$

qui est de rang 1, les trois coefficients $\frac{\partial k}{\partial t}$, $\frac{\partial l}{\partial t}$, $\frac{\partial k}{\partial z}$ ne pouvant être tous nuls dans $\Sigma_{2,2}$ (Λ serait de rang 1). $\Sigma_{2,2,1}$ est ainsi une sous-variété régulière de \mathfrak{F}_1^2 , de codimension 4. La sous-variété

$$\Sigma_{2,2,0} = \Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,2,1}$$

est alors l'ensemble des ω tels que Λ ait deux valeurs propres (opposées) non nulles. Le sous-ensemble $\Sigma_{2,2,0}^e$ (resp. $\Sigma_{2,2,0}^h$) correspond au cas où le déterminant $-\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial l}{\partial t} \cdot \frac{\partial k}{\partial z}$ est positif (resp. négatif).

3.3.5. On a ainsi stratifié l'espace des jets d'ordre 1 de 2-formes fermées en

$$\mathfrak{F}_1^2 = \Sigma_0 \cup \Sigma_{2,0} \cup \Sigma_{2,2,0} \cup \Sigma_{2,2,1} \cup \Sigma_2'' \cup \Sigma_{2,2}'' \cup \Sigma_4$$

(les strates étant classées par ordre de codimensions croissantes : 0, 1, 3, 4, 5, 5, 6) ; cette stratification est, par construction, invariante par le groupe L_1 des 2-jets d'automorphismes.

D'après le théorème 7 de l'Appendice, l'ensemble des $\omega \in \mathcal{O}_3^2(M)$ telles que $j_1 \omega$ soit transverse à la stratification induite dans ${}^2\mathfrak{F}_1^*(M)$ par la précédente est résiduel ; il est facile de vérifier qu'une telle forme a les propriétés indiquées en 3.1.

4. La classe et ses singularités.

4.1. Considérons l'espace vectoriel F_1^p des jets d'ordre 1 de p -formes différentielles à l'origine de \mathbf{R}^n ($1 \leq p \leq n$) ; soit

$$d : F_1^p \longrightarrow F_0^{p+1} = \binom{p+1}{\wedge} \mathbf{R}_n$$

l'application linéaire définie par la différentiation extérieure,

$$\rho : F_1^p \longrightarrow F_0^p = \binom{p}{\wedge} \mathbf{R}_n$$

l'application linéaire de restriction.

DEFINITION. — Soit $\omega_1 \in F_1^p$; le support de ω_1 est, dans \mathbf{R}_n , le sous-espace somme des supports (cf. I. 1.2) de $\rho(\omega_1)$ et $d(\omega_1)$; la classe de ω_1 est la dimension de son support.

L'espace associé à ω_1 est l'intersection des espaces associés à $\rho(\omega_1)$ et $d(\omega_1)$; c'est l'orthogonal du support de ω_1 ; la classe est donc aussi la codimension de l'espace associé.

La classe est évidemment un invariant dans l'action du groupe L_1 .

Si M est une variété, et $\omega \in D_1^p(M)$ une p -forme sur M , la classe de ω en $x \in M$ sera la classe de $j_1 \omega(x)$; l'espace associé à $j_1 \omega(x)$ est aussi appelé *espace caractéristique de ω en x* .

Remarque. — La classe d'une forme fermée est égale à son rang.

4.2. PROPOSITION. — ([12]) Soit M une variété de dimension $n \geq 7$; dans $D_1^p(M)$, et pour $2 \leq p \leq n - 2$, l'ensemble des p -formes de classe maximale n en tout point est résiduel.

Démonstration. — a) Pour $3 \leq p \leq n - 2$, c'est une conséquence immédiate du Théorème II. 2.2, une forme de rang maximal étant nécessairement de classe maximale.

b) Pour $p = 2$, considérons le morphisme $d : \binom{2}{\wedge} T_1^*M \longrightarrow \binom{3}{\wedge} T^*M$ défini par la différentiation extérieure ; soit S la stratification de $\binom{2}{\wedge} T_1^*M$ image réciproque par d de la stratification $\Sigma^3(M)$ (cf. II. 2.1) ; la codimension de S est égale à celle de $\Sigma^3(M)$, d étant une submersion ; ainsi pour $n \geq 7$, $\text{codim } S > n$.

D'après l'Appendice § 6 Remarque 1, l'ensemble des $\omega \in D_1^2(M)$ telles que $j_1(\omega)$ soit transverse à S (i.e. ne rencontre pas les strates non ouvertes) est un ouvert dense ; cet ensemble est aussi celui des ω telles que $d\omega$ soit de rang maximal en tout point : la classe est à fortiori maximale, et la proposition est démontrée.

4.3. Cas des formes de Pfaff.

Ce paragraphe utilise les notations et résultats de I.7.

4.3.1. Considérons la projection $\pi : F_1^1 \longrightarrow R_n \oplus \overset{2}{\wedge} R_n = F$ définie par $\pi(\omega_1) = (\alpha, \beta) = (\rho(\omega_1), d(\omega_1))$. La classe de ω_1 est le rang de $\pi(\omega_1)$ au sens de I. 7.1.

On notera ζ la stratification de F_1^1 image réciproque de S par π ; on posera $\Sigma'_c = \pi^{-1}(\Sigma_c)$ et $\zeta'_d = \pi^{-1}(S_d)$; Σ'_c est donc l'ensemble des 1-jets ω_1 de formes de Pfaff, tels que $\rho(\omega_1) = 0$ (i.e. ω_1 est nul à l'ordre 0), et $d(\omega_1)$ est une 2-forme de corang c ; ζ'_d est l'ensemble des jets ω_1 non nuls à l'ordre 0, et de co-classe d ; les sous-variétés Σ'_r constituent une stratification du sous-espace vectoriel noyau de ρ dans F_1^1 ; les variétés ζ_r stratifient l'ouvert Ω' complémentaire du noyau de ρ .

4.3.2. Comparons la stratification ζ à l'ensemble des trajectoires de L_1 dans F_1^1 .

La classe étant un invariant, les trajectoires de L_1 sont contenues dans les strates de ζ .

D'autre part, l'espace F_1^1 s'identifie de façon naturelle à $R_n \oplus (\overset{2}{\otimes} R_n)$; moyennant cette identification, l'application π est définie par

$$\pi(\alpha, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta)$$

où β désigne l'antisymétrisée de $\bar{\beta}$. Le groupe L_1 s'identifie à l'ensemble des couples (a, b) où $a \in Gl(n, \mathbf{R})$ et $b \in \text{Hom}_s^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (espace des applications bilinéaires symétriques de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans \mathbf{R}^n). L'action de L_1 dans F_1^1 s'exprime alors, comme le montre un petit calcul, par :

$$(a, b) \cdot (\alpha, \bar{\beta}) = (\alpha \circ a, \alpha \circ b + \beta \circ \overset{2}{\otimes} a) .$$

On en déduit :

1) Dans le noyau de ρ , c'est-à-dire l'ensemble des $(\alpha, \bar{\beta})$ tels que $\alpha = 0$, l'action de L_1 s'identifie à celle de $Gl(n, \mathbf{R})$; il y a donc une infinité de trajectoires.

2) Soit $(\alpha, \bar{\beta}) \in \Omega'$ (i.e. $\alpha \neq 0$); il existe alors un $b \in \text{Hom}_\mathbb{R}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ tel que la forme bilinéaire $\alpha \circ b$ soit égale à l'opposée de la partie symétrique de $\bar{\beta}$; il en résulte que $(1, b) \cdot (\alpha, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta)$; cette remarque suffit à prouver que $L_1(\alpha, \bar{\beta}) = \pi^{-1}[Gl(n, \mathbf{R}) \cdot (\alpha, \beta)]$. On a donc démontré la

PROPOSITION. — Dans l'ouvert Ω' , ensemble des jets ω_1 tels que $\rho(\omega_1) \neq 0$ (i.e. non nuls à l'ordre 0), les trajectoires de L_1 sont les sous-variétés ζ_d .

Remarques. — 1) Le fait que ζ_0 soit une trajectoire de L_1 , dans la proposition précédente, peut être considéré comme la version à l'ordre 1 du Théorème de Darboux (cf. III. A. 4.1.3 et 4.1.4).

2) Soit M une variété de dimension n . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \overset{2}{\otimes} T^*M \longrightarrow T_1^*M \xrightarrow{\rho} T^*M \longrightarrow 0$$

mais il n'y a pas de décomposition canonique du fibré T_1^*M en une somme de Whitney $T^*M \oplus (\overset{2}{\otimes} T^*M)$.

4.3.3. D'après I. 7.2, les sous-ensembles Σ'_c et ζ_d de F_1^1 , qui définissent la stratification ζ , sont des singularités d'ordre 1 de formes de Pfaff.

Soit M une variété de dimension n ; pour toute forme de Pfaff ω sur M , on désignera par $Z(\omega)$ l'ensemble des zéros de ω , et par $\zeta_d(\omega)$ l'ensemble des points singuliers de type ζ_d de ω (c'est-à-dire l'ensemble des points où ω est différente de 0 et de co-classe d).

Remarque. — Un point singulier de type ζ_d d'une forme de Pfaff ω est un point x où

a) $\omega \wedge d\omega^k \neq 0$ et $d\omega^{k+1} = 0$ si $d = n - (2k + 1)$, c'est-à-dire si la classe est impaire.

b) $\omega \neq 0$, $d\omega^k \neq 0$ et $\omega \wedge d\omega^k = 0$ si $d = n - 2k$, c'est-à-dire si la classe est paire.

La stratification $\zeta(M)$ de T_1^* issue de ζ est de codimension 1 et cohérente ; d'après l'Appendice (Th. 6. et I. 7.2), on a le

THEOREME. — ([11]) Dans $D_k^1(M)$, pour $k \geq 2$, l'ensemble $T(\zeta)$ des formes ω telles que $j_1\omega$ soit transverse à $\zeta(M)$ est un ouvert dense. Toute forme $\omega \in T(\zeta)$ a les propriétés suivantes :

a) Elle est transverse à la section nulle de T^*M ; $Z(\omega)$ est un ensemble fermé de points isolés ; en chaque point de $Z(\omega)$, $d\omega$ est de rang maximal ;

b) Pour tout d ($0 \leq d \leq n - 1$), l'ensemble singulier $\zeta_d(\omega)$ est, si non vide, une sous-variété régulière de M , de codimension $\frac{d(d+1)}{2}$;

c) La classe de ω est partout supérieure ou égale à $n - f(n)$, où $f(n) = \text{Max}\{p ; p(p+1)/2 \leq n\}$; une expression asymptotique de $n - f(n)$ est $n - \sqrt{2n}$.

Remarques. — 1) Pour $\omega \in T(\zeta)$, $\zeta_d(\omega) \cup \zeta_{d-1}(\omega)$ est toujours, si non vide, une sous-variété régulière de M de codimension $\frac{d(d-1)}{2}$; en effet, d'après I. 7.3, $\zeta_d(M) \cup \zeta_{d-1}(M)$ est une sous-variété de T_1^*M et $j_1\omega$ lui est transverse, l'étant à $\zeta_d(M)$ et $\zeta_{d-1}(M)$.

2) Soit $x \in Z(\omega)$ un zéro de $\omega \in T(\zeta)$; x sera adhérent à $\zeta_d(\omega)$ si et seulement si $d = 0$ (ζ_0 étant évidemment un ouvert dense dans M) ou $d = 1$, si la dimension ambiante n est impaire.

Exemples. — 1) $\text{Dim } M = 3$. $\zeta_1(\omega)$ est l'ensemble des points où $\omega \wedge d\omega = 0$ avec $\omega \neq 0$; c'est génériquement une hypersurface ; $\zeta_2(\omega)$ est l'ensemble des points où $d\omega = 0$ et $\omega \neq 0$; sa codimension est 3, et il s'agit donc en général d'un ensemble fermé de points isolés ; enfin $\overline{\zeta_1(\omega)} = \zeta_1(\omega) \cup \zeta_2(\omega) \cup Z(\omega)$; $\zeta_1(\omega) \cup \zeta_2(\omega)$ est encore une hypersurface de M , qui sera fermée si et seulement si ω est sans zéro.

2) $\text{Dim } M = 5$. La classe est génériquement partout supérieure ou égale à 3 ; pour une forme $\omega \in T(\zeta)$ sans zéro (il en existe), $\zeta_1(\omega) \cup \zeta_2(\omega)$ sera une hypersurface fermée de M , $\zeta_2(\omega)$ étant une sous-variété fermée de codimension 3 de M .

3) $\dim M = 8$; génériquement, la classe est partout supérieure ou égale à 5, c'est-à-dire que, pour $\omega \in T(\zeta)$, on a $\omega \wedge d\omega^2 \neq 0$ en tout point de $M - Z(\omega)$; $\zeta_1(\omega)$ est une hypersurface, $\zeta_2(\omega)$ une sous-variété de codimension 3, $\zeta_3(\omega)$ une sous-variété de codimension 6 ; on a de plus

$$\overline{\zeta_1(\omega)} = \zeta_1(\omega) \cup \zeta_2(\omega) \cup \zeta_3(\omega) \quad , \quad \overline{\zeta_2(\omega)} = \zeta_2(\omega) \cup \zeta_3(\omega) ;$$

$\zeta_3(\omega)$ est fermée ; $Z(\omega)$ est disjoint de $\zeta_1(\omega)$; $\zeta_1(\omega) \cup \zeta_2(\omega)$ et $\zeta_2(\omega) \cup \zeta_3(\omega)$ sont des sous-variétés de codimensions 1 et 3 respectivement.

4.3.4. PROPOSITION. — *Dès que $k \geq 3$, il y a stabilité isotopique des ensembles singuliers de la classe dans $T(\zeta) \subset D_k^1(M)$.*

Cela signifie que tout $\omega \in T(\zeta)$ admet un voisinage U tel que pour tout $\omega' \in U$, les stratifications de M formées par les ensembles singuliers de la classe de ω et ω' respectivement s'échangent par une isotopie de M . Cette proposition est un corollaire immédiat de l'Appendice, Th. 4.2, la stratification $\zeta(M)$ étant cohérente.

4.4. Cas des $(n - 1)$ -formes.

La situation est ici très simple. Si ω est une $(n - 1)$ -forme sur une variété M de dimension n , notons $Z(\omega)$ l'ensemble de ses zéros, et $S(\omega)$ l'ensemble des zéros de $d\omega$. Alors, dans $D_k^{n-1}(M)$, pour $k \geq 2$, les propriétés suivantes sont génériques et définissent un ouvert dense :

a) ω est transverse à la section nulle de ${}^{(n-1)}_{\Lambda} T^*M$, et $Z(\omega)$ est donc un ensemble fermé de points isolés ;

b) $d\omega$ est transverse à la section nulle de ${}^n_{\Lambda} T^*$, et $S(\omega)$ est donc une hypersurface de M ;

c) $S(\omega)$ est fermée et disjointe de $Z(\omega)$.

Dans ce cas, $S(\omega)$ est l'ensemble des points où la classe de ω est égale à $(n - 1)$.

La situation pour les $(n - 1)$ -formes fermées est encore plus simple : génériquement une $(n - 1)$ -forme fermée est transverse à la section nulle du fibré ${}^{(n-1)}_{\Lambda} T^*$, et admet donc des zéros isolés.

5. La classe d'une équation de Pfaff, et ses singularités.

5.1. Soit M une variété ; on désigne par $P \longrightarrow M$ le fibré projectif associé au fibré vectoriel $T^*M \longrightarrow M$ (c'est-à-dire l'ensemble des droites de T^*M), par T_0^* l'ouvert de T^*M constitué des formes non nulles, par $q : T_0^* \longrightarrow P$ la projection canonique.

On appelle *équation de Pfaff* sur M toute section du fibré projectif P ; on ne considèrera dans la suite que des sections au moins une fois continûment différentiables.

Une équation de Pfaff peut aussi être interprétée comme un sous-fibré en droites de T^*M , ou encore, par passage à l'orthogonal, comme un sous-fibré de codimension 1 du fibré tangent à M (champ d'hyperplans tangents à M).

On désignera par $\Gamma_k(M)$ ($0 \leq k \leq \infty$) l'espace des sections k -fois continûment différentiables du fibré P (cf. Appendice § 1.2).

Soit σ une section de P , et U un ouvert de M ; une forme de Pfaff ω définie et non nulle en tout point de U est dite un *relèvement de σ sur U* si $\sigma = q \circ \omega$ sur U . Une équation de Pfaff admet localement des relèvements, mais n'admet pas nécessairement de relèvement global.

5.2. Si ω et ω' sont deux relèvements d'une équation de Pfaff σ sur un même ouvert U , on a $\omega' = f \cdot \omega$, f étant une fonction partout non nulle sur U ; on en déduit :

$$\omega' \wedge d\omega'^p = f^{p+1} \cdot \omega \wedge d\omega^p$$

quel que soit l'entier p .

Ceci justifie la

DEFINITION. — Une équation de Pfaff σ est dite de classe $2p + 1$ en un point $x \in M$ si tout relèvement ω de σ dans un voisinage de x est tel que $\omega \wedge d\omega^p \neq 0$ et $\omega \wedge d\omega^{(p+1)} = 0$ en x .

Ainsi, la classe d'une équation de Pfaff en un point est un nombre impair ; elle s'interprète aussi comme le *rang réduit* (cf. I. 7.3) du couple $(\omega, d\omega)$, ω étant un relèvement local quelconque de σ ; c'est un invariant d'ordre 1 de l'équation en chaque point, c'est-à-dire qu'elle se laisse définir sur le fibré J^1P des jets d'ordre 1 de sections de P .

5.3. On utilise dans ce paragraphe les notations et résultats de I. 7 et II. 4.3.

Désignons par $\tilde{q} = j_1 q : J^1 T_0^* \longrightarrow J^1 P$ la projection déduite de $q : T_0^* \longrightarrow P$.

La fibre type de $J^1 T_0^*$ est l'ouvert Ω' de F_1^1 , ensemble des jets ω_1 tels que $\rho(\omega_1) \neq 0$ (voir II. 4.3).

On désigne par P_1 la fibre type de $J^1 P$, et on note encore $\tilde{q} : \Omega' \longrightarrow P_1$ la projection déduite de \tilde{q} (P_1 est la variété des 1-jets d'équations de Pfaff à l'origine de R^n).

Le groupe de Lie L_1 des 2-jets d'automorphismes à l'origine de R^n agit canoniquement sur P_1 (changement de variables dans une équation de Pfaff), et les actions de L_1 dans P_1 et Ω' sont compatibles avec \tilde{q} .

Soit $\sigma_1 \in P_1$; soit $\omega_1 \in \Omega'$ tel que $\tilde{q}(\omega_1) = \sigma_1$; le rang réduit de $\pi(\omega_1) \in \Omega \subset R_n \oplus \wedge^2 R_n$ (où $\pi : F_1^1 \longrightarrow R_n \oplus \wedge^2 R_n$ est la surjection définie en II. 4.3.1) est indépendant du choix de ω_1 ; c'est la classe de σ_1 .

On désigne par C_d ($0 \leq d \leq n-1$) l'ensemble des $\sigma_1 \in P_1$ qui sont de co-classe d , c'est-à-dire de classe $n-d$.

PROPOSITION. — Les trajectoires du groupe L_1 dans P_1 sont les ensembles C_d ($0 \leq d \leq n-1$, $n-d$ impair); pour chaque d , C_d est une sous-variété régulière de P_1 , de codimension $\frac{d(d-1)}{2}$; on a de plus

$$\bar{C}_d = \bigcup_{d' \geq d} C_{d'}$$

On désignera par C la stratification de P_1 constituée par les sous-variétés C_d ; c'est une stratification cohérente (puisque définie par les trajectoires d'un groupe de Lie).

Démonstration. — a) Soit H le groupe de Lie des jets d'ordre 1 de fonctions numériques non nulles à l'origine de R^n ; la multiplication d'une forme par une fonction définit une loi d'opération de H dans Ω' ; avec les notations de II. 4.3.2, cette loi est donnée par la règle :

$$f \cdot \omega_1 = (\lambda \alpha, h \otimes \alpha + \lambda \bar{\beta}) \quad \text{où} \quad (\alpha, \bar{\beta}) \in \Omega' \subset \mathbb{R}_n \otimes \otimes \mathbb{R}_n$$

$$\text{et} \quad f = (\lambda, h) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}_n = H.$$

Il est clair que P_1 est le quotient de Ω' par l'action de H .

b) Si l'on pose, pour $f \in H, g \in L_1, \omega_1 \in \Omega'$,

$$(f, g) \cdot \omega_1 = f \cdot (g \cdot \omega_1),$$

on remarque que cette règle définit une loi d'opération du produit semi-direct $\overline{G}_1 = H \times L_1$ (L_1 opérant dans H de façon évidente) dans Ω' ; cette loi d'opération est telle que les trajectoires de L_1 dans P_1 sont les projections (par \tilde{q}) des trajectoires de \overline{G}_1 dans Ω' .

c) L'action du groupe \overline{G}_1 dans Ω' et l'action de \overline{G} dans Ω (cf. I. 7.3) sont compatibles avec la surjection $\pi : \Omega' \longrightarrow \Omega$; il résulte alors des Propositions I. 7.3 et II. 4.3.2 que les trajectoires de \overline{G}_1 dans Ω' sont les ensembles $\pi^{-1}(S'_d)$: ce sont donc des sous-variétés régulières de Ω' , de mêmes codimensions que les variétés S'_d ; on a aussi

$$\overline{\pi^{-1}(S'_d)} = \bigcup_{d' \geq d} \pi^{-1}(S'_{d'}).$$

D'après b), les trajectoires de L_1 dans P_1 sont donc les ensembles C_d ; enfin, la variété $\pi^{-1}(S'_d)$ étant invariante par H , il résulte de a) que l'ensemble C_d est une sous-variété régulière de P_1 , de même codimension que $\pi^{-1}(S'_d)$, soit $d(d-1)/2$; d'autre part, la projection $\tilde{q} : \Omega' \longrightarrow P_1$ conserve évidemment les propriétés relatives aux adhérences.

Remarques. — 1) P_1 est évidemment une variété algébrique; on peut facilement vérifier que les ensembles C_d sont des sous-variétés algébriques de P_1 , et que l'ensemble des points singuliers de $\overline{C_d}$ est $\overline{C_{d+2}}$.

2) Si la dimension ambiante n est paire, la co-classe doit être impaire; les valeurs admissibles de d sont alors 1, 3, 5, ... et les codimensions correspondantes des strates C_d sont 0, 3, 10, ...; la stratification C est dans ce cas de codimension 3.

Si la dimension ambiante n est impaire, d doit être pair; les codimensions des strates C_d sont alors 0, 1, 6, 15, ..., et la codimension de C est 1.

5.4. Comportement générique de la classe d'une équation de Pfaff.

Etant donnée une variété M , la stratification C de P_1 , invariante par le groupe de structure L_1 de J^1P , induit une stratification $C(M)$ de J^1P dont les strates ont mêmes codimensions que celles de C , et qui est aussi cohérente.

On a alors, en corollaire de l'Appendice § 6.2, le

THEOREME. — *Soit M une variété de dimension n ; dans $\Gamma_k(M)$, $k \geq 2$, l'ensemble $T(C)$ des équations de Pfaff σ telles que $j_1\sigma$ soit transverse à $C(M)$ est un ouvert dense.*

Exemples. — 1) $\dim M = 3$; pour $\sigma \in T(C)$, l'ensemble $C_2(\sigma)$ des points où la classe est 1 est une surface fermée de M (si non vide) ; la classe est 3 en dehors de cette surface.

2) $\dim M = 5$; la classe est génériquement partout supérieure ou égale à 3 ; $C_2(\sigma)$ est, pour $\sigma \in T(C)$, une hypersurface fermée.

3) $\dim M = 4$; la classe ne peut être que 1 ou 3 ; l'ensemble $C_3(\sigma)$ où la classe tombe à 1 est génériquement une sous-variété fermée de codimension 3.

Remarques. — 1) Pour une équation de Pfaff "générique" (au sens du théorème précédent), la classe est partout assez grande ; elle est minorée par une quantité dont une expression asymptotique est (comme dans les cas du rang d'une 2-forme ou de la classe d'une 1-forme) $n - \sqrt{2n}$.

2) La stratification C étant cohérente, il y a stabilité isotopique des ensembles singuliers de la classe d'une équation de Pfaff dans $\Gamma_k(M)$, dès que $k \geq 3$.

6. Singularités génériques d'une équation de Pfaff en dimension 3.

6.1. Soit M une variété (compacte) de dimension 3. La situation suivante, relative à une équation de Pfaff σ sur M , est générique (dans $\Gamma_k(M)$, pour k assez grand) :

1) L'ensemble $C_2(\sigma)$ des points de M où la classe de σ est 1 (co-classe = 2) est une surface (compacte).

2) Pour tout point $x \in M$, désignons par $P_x \subset T_x M$ le plan défini par l'équation σ .

Soit alors $C_{2,1}(\sigma) \subset C_2(\sigma)$ l'ensemble des points x tels que $P_x = T_x C_2(\sigma)$; $C_{2,1}(\sigma)$ est un ensemble de points isolés.

Posons $C_{2,0}(\sigma) = C_2(\sigma) - C_{2,1}(\sigma)$; sur $C_{2,0}(\sigma)$, P_x et $T_x C_2(\sigma)$ sont en position générale, et ont donc pour intersection une droite ; σ induit donc un champ de directions D sur $C_{2,0}(\sigma)$, dont les points de $C_{2,1}(\sigma)$ sont des singularités.

3) On peut préciser la situation *générique* aux points de $C_{2,1}$ de la façon suivante :

Soit $x \in C_{2,1}(\sigma)$, et soit ω un relèvement (local) de σ sur un voisinage de x ; désignons par ω' la restriction de ω à $C_2(\sigma)$; ω' s'annule en x , par définition ; la jacobienne de ω' en x définit une application linéaire

$$T_x \omega' : T_x C_2(\sigma) \longrightarrow T_x^* C_2(\sigma)$$

c'est-à-dire une *forme bilinéaire* sur $T_x C_2(\sigma)$.

Sachant que $C_2(\sigma)$ est le lieu des zéros du produit $\omega \wedge d\omega$, on montre aisément que $T_x \omega'$ est une forme bilinéaire *symétrique*. *Génériquement*, elle sera *non dégénérée* en tout point de $C_{2,1}(\sigma)$. Cette forme peut encore être interprétée comme la jacobienne au point x du champ de direction D ; de ce point de vue la remarque précédente signifie que les points singuliers du champ D dans $C_2(\sigma)$ ne pourront être que des *foyers* (ou des centres) ou des *cols*.

6.2. La démonstration des assertions qui précèdent n'est pas difficile ; il suffit de définir une stratification convenable de la variété des 2-jets d'équations de Pfaff telle qu'une équation σ ait les propriétés précédentes dès que $j_2 \sigma$ est transverse à cette stratification ; je me bornerai à donner un exemple de chacun des types de singularités qui viennent d'être énumérés.

1) En un point où la classe de σ est 3, il existe, d'après le théorème de Darboux (cf. III. A. 4.1.3) des coordonnées locales (x, y, z) dans lesquelles σ peut être définie par l'équation

$$dx + y dz = 0 .$$

2) En un point de $C_{2,0}(\sigma)$, il existe (cf. III. 4.3) des coordonnées locales dans lesquelles σ peut être définie par l'équation :

$$x dx + (1 + y) dz = 0 .$$

3) En un point de $C_{2,1}(\sigma)$, j'ignore s'il existe un *modèle* ; les équations de Pfaff suivantes présentent à l'origine ($x = y = z = 0$) un point singulier de type $C_{2,1}$, respectivement col et foyer (ou centre) :

$$\omega_1 = d \left(xz + y^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + y) dz = 0$$

$$\omega_2 = d \left(xz + y^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + y) dz = 0$$

Dans le cas de ω_1 , par exemple, $d\omega_1 = dy \wedge dz$,

$$\omega_1 \wedge d\omega_1 = (z + x^2) dx \wedge dy \wedge dz ;$$

la surface $C_2(\sigma)$ a pour équation $z + x^2 = 0$; la forme induite est

$$\omega' = 2y dy - 2x(1 + y + x^2) dx .$$

La forme quadratique $T_0\omega'$ est alors $y^2 - x^2$.

Je me propose de revenir ultérieurement sur ce point.

CHAPITRE III

ETUDE LOCALE DES SINGULARITES A. MODELES LOCAUX

1. Généralités.

1.1. On désigne par D_k^p , $k \geq 0$ (resp. \mathcal{O}_k^p , $k \geq 1$) l'espace vectoriel des *germes* de formes différentielles extérieures (resp. fermées) de degré p , à l'origine de \mathbb{R}^n , à coefficients k fois continûment différentiables ; on pose $D^p = D_\infty^p$ et $\mathcal{O}^p = \mathcal{O}_\infty^p$.

Soit \mathcal{L}_k le groupe des germes d'automorphismes à l'origine de \mathbb{R}^n , k fois continûment différentiables ; on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$.

DEFINITION. — Deux germes ω et $\omega' \in D_k^p$ (resp. \mathcal{O}_k^p) sont dits C^r -isomorphes s'il existe $g \in \mathcal{L}_r$ (avec $1 \leq r \leq k + 1$) tel que

$$\omega' = g^* \omega ,$$

où $g^* \omega$ désigne l'image réciproque de ω par g .

Si $r = k = \infty$, ω et ω' seront simplement dits *isomorphes*.

1.2. Les notations concernant les espaces des jets sont les mêmes qu'au chapitre II.

On notera $j_k : D_{k'}^p \longrightarrow F_k^p$ ($k' \geq k$) l'homomorphisme de restriction défini par $j_k(\omega) = \text{jet d'ordre } k \text{ de } \omega \text{ en } 0$, pour tout $\omega \in D_{k'}^p$; on définit de la même façon l'homomorphisme de restriction

$$j_k : \mathcal{O}_{k'}^p \longrightarrow \mathfrak{F}_k^p$$

(espace des k -jets de p -formes fermées).

Soit $\Sigma \subset F_k^p$ une singularité d'ordre k de p -formes ; un problème essentiel est celui de la classification, dans $D_{k'}^p$ ($k' \geq k$), des germes ω présentant la singularité Σ (i.e. tels que $j_k \omega \in \Sigma$) du point de vue des relations de C^r -isomorphisme ($1 \leq r \leq k' + 1$).

DEFINITION. — Une singularité $\Sigma \subset F_k^p$ (resp. \mathfrak{F}_k^p) est dite rigide si tous les germes $\omega \in D^p$ (resp. \mathcal{O}^p) tels que $j_k \omega \in \Sigma$ sont isomorphes.

Tout élément de Σ , interprété comme une forme différentielle à coefficients polynômiaux (de degrés inférieurs ou égaux à k) sera alors appelé un modèle (local) de la singularité.

Remarquons que, dans ce cas, Σ est une orbite de L_k dans F_k^p (resp. \mathfrak{F}_k^p), et que pour tout $k' \geq k$, $\rho^{-1}(\Sigma) \subset F_{k'}^p$ est une orbite de $L_{k'}$.

Le premier but de ce chapitre est d'amorcer l'étude des singularités du point de vue qui vient d'être défini.

1.3. Je rappellerai maintenant un résultat classique concernant la dérivée de Lie.

Si X est un champ de vecteurs et ω une forme différentielle, nous noterons $\theta(X)\omega$ la dérivée de Lie de ω par rapport à X ; si X et ω sont de classe C^k , $\theta(X)\omega$ est de classe C^{k-1} . On rappelle que $\theta(X)\omega = d(X \lrcorner \omega) + X \lrcorner d\omega$.

Soit maintenant X_t un champ de vecteurs "dépendant du temps" défini et C^k ($k \geq 1$) sur $U \times [0, 1]$, où U est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n , tel que $X(0, t) = X_t(0) = 0$ quel que soit t .

L'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X(x, t)$ définit une application $\varphi : U' \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (où U' est un voisinage ouvert de 0), telle que

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = X(t, x) \quad \text{et} \quad \varphi(x, 0) = x$$

pour tout $x \in U'$.

φ est C^k et pour tout $t \in [0, 1]$, l'application φ_t définie par $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ définit un élément de \mathcal{L}_k , et φ_0 est l'identité.

Soit ω_t une famille à un paramètre de formes différentielles définie et C^k sur $U \times [0, 1]$ ($k \geq 1$); on note $\omega_t = \frac{\partial \omega_t}{\partial t}$ la "vitesse de déformation" au temps t .

PROPOSITION. — Avec les données et notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\theta(X_t)\omega_t = \dot{\omega}_t$

b) $\varphi_t^*(\omega_0) = \omega_t$.

Démonstration. — On pose $\alpha_t = (\varphi_t^{-1})^*(\omega_t)$; un calcul élémentaire montre que

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = \dot{\alpha}_t = (\varphi_t^{-1})^* [\dot{\omega}_t - \theta(X_t)\omega_t]$$

il est donc immédiat que b) implique a).

Si l'on suppose a), on a $\dot{\alpha}_t = 0$, mais $\alpha_0 = (\varphi_0^{-1})^*(\omega_0) = \omega_0$, φ_0 étant l'identité ; donc $\alpha_t = \omega_0$ quel que soit t .

1.4. J'aurai encore besoin dans la suite des deux remarques suivantes. Soit $\omega \in D_k^p$ un germe de forme différentielle à l'origine de \mathbf{R}^n , où les coordonnées naturelles sont x_1, \dots, x_n ; on désigne par ω_0 la restriction de ω à l'hyperplan $x_1 = 0$. On désigne par π la projection canonique de \mathbf{R}^n sur cet hyperplan.

1.4.1. Si $k \geq 1$, et si $\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner \omega = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner d\omega = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner \omega = 0 \text{ et } \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\omega = 0, \text{ on a}$$

$$\omega = \pi^*(\omega_0) .$$

En d'autres termes, la forme ω s'exprime uniquement à l'aide des coordonnées x_i ($2 \leq i \leq n$) et de leurs différentielles.

1.4.2. Si $k \geq 1$, et si $\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner \omega = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner d\omega = f \cdot \omega$ (où f

désigne une fonction C^{k-1}), c'est-à-dire encore $\frac{\partial}{\partial x_1} \lrcorner \omega = 0$ et

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\omega = f \cdot \omega ,$$

on a

$$\omega = h\pi^*(\omega_0)$$

où h est une fonction C^{k-1} , égale à 1 pour $x_1 = 0$.

2. Cas des n -formes.

2.1. Considérons d'abord le cas le plus simple, où

$$\Sigma = \Sigma_{n,n}^n \subset F_0^n = \wedge^n \mathbb{R}^n$$

est l'ensemble des n -formes non nulles ; un germe $\omega \in D_k^n$ présente la "singularité" $\Sigma_{n,n}^n$ s'il est non nul : c'est donc un germe de volume.

THEOREME. — Pour $k \geq 1$, tout germe de volume $\omega \in D_k^n$ est C^k -isomorphe au germe défini par l'expression

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

(x_1, \dots, x_n désignant les coordonnées dans \mathbb{R}^n).

Ce résultat est classique et trivial : si

$$\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

est un germe de volume, i.e. $f(0) \neq 0$, le changement de variables

$$X_1 = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

$$X_i = x_i \quad \text{pour } i = 2, \dots, n$$

le ramène à la forme "canonique" indiquée, et définit un C^k -automorphisme.

2.2. On considère ensuite l'ensemble $\Sigma_{n,0}^n \subset F_1^n$ formé des jets d'ordre 1 non nuls dont l'image par $\rho : F_1^n \rightarrow F_0^n$ soit nulle. Un germe $\omega \in D_k^n$ ($k \geq 1$) est tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{n,0}^n$ si et seulement si ω s'annule en 0 transversalement à la section nulle du fibré des n -formes.

THEOREME. — ([12]) Pour $k \geq 3$, tout germe $\omega \in D_k^n$ tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{n,0}^n$ est C^{k-2} -isomorphe au germe défini par l'expression :

$$x_1 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Démonstration. — Soit $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ l'expression de ω dans les coordonnées naturelles ; par hypothèse, f est C^k , $f(0) = 0$ et df est non nulle en 0 ; l'équation $f = 0$ détermine un germe d'hypersurface S , ensemble des zéros de ω . Nous allons établir

un résultat plus précis qu'il n'est nécessaire dans la situation présente, car il interviendra dans la suite ; le théorème en est une conséquence évidente.

LEMME. — Soit $\omega \in D_1^n$ ($l \geq 3$) tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{n,0}^n$; soit S le germe de l'hypersurface des zéros de ω . Si u_2, \dots, u_n sont des fonctions C^k ($3 \leq k \leq l$), nulles en 0, indépendantes en restriction à S , il existe une fonction u_1 de classe C^{k-2} , nulle en 0, telle que :

- a) (u_1, \dots, u_n) est un système de coordonnées locales.
- b) $\omega = \pm u_1 du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ (le signe est déterminé par la donnée de ω, u_2, \dots, u_n).

Démonstration. — L'indépendance des fonctions u_2, \dots, u_n sur S signifie que $df \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n \neq 0$ à l'origine ; les fonctions (f, u_2, \dots, u_n) constituent donc un système de coordonnées locales C^k ; dans ce système on a

$$\omega = h(f, u_2, \dots, u_n) df \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n ;$$

la fonction h est de classe C^{k-1} ; on a évidemment $h(0, u_2, \dots, u_n) = 0$ et dh est non nulle à l'origine, c'est-à-dire que $\frac{\partial h}{\partial f}(0) \neq 0$. Il existe donc une fonction g (et une seule) telle que

$$h(f, u_2, \dots, u_n) = f \cdot g(f, u_2, \dots, u_n) .$$

La fonction g est de classe C^{k-2} , non nulle à l'origine. Il suffit alors pour démontrer le lemme d'établir l'existence d'une fonction u_1 de classe C^{k-2} , vérifiant l'équation :

$$\frac{u_1^2}{2} = \varepsilon \int_0^f t \cdot g(t, u_2, \dots, u_n) dt$$

où $\varepsilon = \text{signe de } g(0)$.

(on aura alors $\omega = \varepsilon u_1 du_1 \wedge \dots \wedge du_n$).

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^f t \cdot g(t, u_2, \dots, u_n) dt &= f^2 \cdot \int_0^1 x \cdot g(f \cdot x, u_2, \dots, u_n) dx \\ &= f^2 \cdot \varphi(f, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

et φ est une fonction de classe C^{k-2} , non nulle en 0, et de même signe que g . La fonction

$$u_1 = \sqrt{2} \cdot f \cdot \sqrt{\varepsilon \varphi}$$

répond à la question.

2.3. *Remarque.* — Les singularités $\Sigma_{n,n}^n$ et $\Sigma_{n,0}^n$ sont les seules singularités qui se présentent génériquement (II. 2.3) ; nous venons de montrer qu'elles sont rigides ; le problème de la classification est donc complètement résolu dans le cas des n -formes.

3. Cas des $(n - 1)$ -formes.

3.1. Soit $\Sigma_{n,n}^{n-1} \subset F_1^{n-1}$ l'ensemble des jets ω_1 d'ordre 1 de $(n - 1)$ -formes tels que $j_0(\omega_1) \neq 0$ et $d\omega_1 \neq 0$; un germe $\omega \in D_k^{n-1}$ ($k \geq 1$) est tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{n,n}^{n-1}$ si et seulement si ω et $d\omega$ sont non nulles en 0. $\Sigma_{n,n}^{n-1}$ est donc une singularité ouverte dans F_1^{n-1} .

THEOREME. — Pour $k \geq 2$, tout germe $\omega \in D_k^{n-1}$ tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{n,n}^{n-1}$ est C^{k-1} -isomorphe au germe défini par l'expression

$$(1 + x_1) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Démonstration. — Soit D le champ de directions associé à ω (défini en chaque point par la droite associée à ω) ; soient u_2, \dots, u_n $n - 1$ intégrales premières indépendantes, C^k , nulles en 0, de l'équation différentielle D ; on a alors

$$\omega = h du_2 \wedge \dots \wedge du_n$$

où h est une fonction de classe C^{k-1} , non nulle à l'origine ; on peut choisir les fonctions u_2, \dots, u_n de telle sorte que $h(0) = 1$. Mais $d\omega = dh \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n \neq 0$ à l'origine ; les fonctions $u_1 = 1 - h, u_2, \dots, u_n$ définissent donc un système de coordonnées locales C^{k-1} à l'origine, dans lequel ω a l'expression requise.

3.2. Compte tenu des remarques de II. 4.4, il est naturel d'étudier ensuite la singularité $\Sigma_{n,n-1}^{n-1} \subset F_2^{n-1}$, ensemble des jets ω_2 d'ordre 2 de $(n - 1)$ -formes tels que $d\omega_2 \in \Sigma_{n,0}^n$ (cf. III. 2.2) et $j_0(\omega_2) \neq 0$;

si ω est un germe dans D_k^{n-1} ($k \geq 2$), on aura $j_2(\omega) \in \Sigma_{n,n-1}^{n-1}$ si et seulement si ω est non nulle et si $d\omega$ s'annule *transversalement* à l'origine (ω est donc de classe $n-1$ à l'origine) ; il est évident que $\Sigma_{n,n-1}^{n-1}$ est une singularité de codimension 1 dans F_2^{n-1} .

Soit $\omega \in D_k^{n-1}$ ($k \geq 2$) tel que $j_2\omega \in \Sigma_{n,n-1}^{n-1}$; on peut considérer le champ de directions D associé à ω , et l'hypersurface S des zéros de $d\omega$; il est clair que l'ordre de contact à l'origine du champ D et de la surface S est un invariant de la classe d'isomorphisme (C^∞) du germe ω ; ainsi, si l'on considère par exemple, dans \mathbb{R}^3 (coordonnées x, y, z), les germes définis par les expressions

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (1 + x^2) dy \wedge dz \\ \omega_2 &= (1 + xy - x^3) dy \wedge dz \\ \omega_3 &= (1 + xz - x^2y - x^4) dy \wedge dz ,\end{aligned}$$

le champ de directions associé D est dans les trois cas le champ parallèle à l'axe des x ; d'autre part :

$$\begin{aligned}d\omega_1 &= 2x dx \wedge dy \wedge dz \\ d\omega_2 &= (y - 3x^2) dx \wedge dy \wedge dz \\ d\omega_3 &= (z - 2xy - 4x^3) dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

et les équations des surfaces lieux des zéros sont respectivement (S_1) $x = 0$; (S_2) $y - 3x^2 = 0$; (S_3) $z - 2xy - 4x^3 = 0$. Dans le premier cas, le champ D est transverse à S_1 , c'est-à-dire que la restriction de ω_1 à S_1 est non nulle. Dans le second cas, la projection définie par les lignes intégrales de D (c'est-à-dire la projection parallèle à Ox) définit un *pli* (au sens de Whitney [17]) de la surface S_2 dans le plan yOz ; la restriction de ω_2 à S_2 présente à l'origine la singularité $\Sigma_{n-1,0}^{n-1}$. Dans le dernier cas, la projection de S_3 dans yOz parallèlement à Ox définit une *fronce* (au sens de Whitney [17]) ; ici encore, la restriction de ω_3 à S_3 présente à l'origine la singularité $\Sigma_{n-1,0}^{n-1}$.

Ces remarques montrent que les germes à l'origine de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ne sont pas C^k -isomorphes ($k \geq 4$).

On définit la singularité $\Sigma_{n,n-1,0}^{n-1} \subset F_2^{n-1}$ comme l'ensemble des jets ω_2 tels que

$$1) d\omega_2 \in \Sigma_{n,0}^n$$

2) La restriction de ω_2 à l'hypersurface des zéros de $d\omega_2$ est non nulle.

Ces conditions définissent un ouvert dans $\Sigma_{n,n-1}^{n-1}$, donc une singularité de codimension 1.

THEOREME. — ([12]) Pour $k \geq 5$, tout germe $\omega \in D_k^{n-1}$ tel que $j_2 \omega \in \Sigma_{n,n-1,0}^{n-1}$ est C^{k-4} -isomorphe à l'un des germes définis par les expressions :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left(1 + \frac{x_1^2}{2}\right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{x_1^2}{2}\right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Démonstration. — Soit S l'hypersurface des zéros de $d\omega$, D le champ de directions associé à ω ; S est transverse à D puisque la restriction de ω à S est non nulle; notons ω' cette restriction.

La variété S est de classe C^{k-1} , et ω' est un germe de volume à l'origine dans S, de classe C^{k-2} ; d'après le Th. 2.1, il existe des coordonnées locales $\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, C^{k-2} , dans S, telles que

$$\omega' = d\bar{u}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{u}_n. \quad (1)$$

On *prolonge* alors les fonctions $\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ à un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n en les laissant constantes sur les lignes intégrales de D; on obtient ainsi des fonctions u_2, \dots, u_n toujours de classe C^{k-2} , et indépendantes en restriction à S, par construction.

En appliquant le lemme du paragraphe 2.2 à $(d\omega, u_2, \dots, u_n)$, on trouve une fonction u_1 , de classe C^{k-4} , telle que (u_1, \dots, u_n) soit un système de coordonnées locales à l'origine, et que

$$d\omega = \pm u_1 du_1 \wedge \dots \wedge du_n. \quad (2)$$

Etudions l'expression de ω dans les coordonnées (u_1, \dots, u_n) . On a évidemment

$$\omega = h(u_1, \dots, u_n) du_2 \wedge \dots \wedge du_n$$

les fonctions u_2, \dots, u_n constituant par construction un système d'intégrales premières de D; mais (1) équivaut à $h(0, u_2, \dots, u_n) = 1$

et (2) équivaut à $\frac{\partial h}{\partial u_1} = \pm u_1$. On a donc

$$h = 1 \pm \frac{u_1^2}{2} \quad \text{Q.E.D.}$$

Remarques. — 1) Soit ω un germe tel que $j_2(\omega) \in \Sigma_{n, n-1, 0}^{n-1}$; l'équation linéaire $X \lrcorner d\omega = \omega$ définit en tout point n'appartenant pas à la surface S un vecteur non nul porté par la droite associée à ω . Le champ de vecteurs ainsi associé à la forme ω_1 (resp. ω_2) du théo-

rème précédent est $X_1 = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}$

$$\left(\text{resp. } X_2 = \left(-\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) ;$$

ce champ est *dirigé vers* S dans le cas ω_2 , et *dirigé vers l'extérieur* dans le cas de ω_1 . Cette observation met en évidence le fait que ω_1 et ω_2 ne peuvent être isomorphes.

2) J'ignore si les singularités d'ordre supérieur correspondant à des ordres de contact supérieurs à 1 du champ associé D et de l'hyper-surface S sont rigides.

3.3. Nous avons vu en II. 4.4 qu'une $(n-1)$ -forme ω pouvait présenter génériquement des zéros isolés, *disjoints* de l'ensemble des zéros de $d\omega$; mentionnons simplement qu'en un tel point, on peut associer canoniquement à ω le germe de champ de vecteurs X défini par l'équation linéaire $X \lrcorner d\omega = \omega$; X s'annule, comme ω , au point considéré ; tous les invariants du champ X sont des invariants de ω .

3.4. Cas des $(n-1)$ -formes fermées.

Je rappellerai seulement le résultat classique suivant : *tout germe de $(n-1)$ -forme fermée $\omega \in \mathcal{O}_k^{n-1}$ ($k \geq 1$), non nul à l'origine, est C^k -isomorphe au germe $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.*

Remarquons d'autre part que si Ω désigne une n -forme sans zéros (forme volume) et si X désigne un champ de vecteurs, la forme $\omega = X \lrcorner \Omega$ est fermée si et seulement si la dérivée de Lie $\theta(X)\Omega$ est nulle, puisque $\theta(X)\Omega = X \lrcorner d\Omega + d(X \lrcorner \Omega)$.

L'étude d'une $(n-1)$ -forme fermée est donc très voisine de l'étude d'un *champ de vecteurs unimodulaire* (i.e. qui conserve un volume).

4. Cas des 2-formes fermées et des formes de Pfaff.

4.1. Le théorème de Darboux.

Ce théorème établit l'existence de "formes canoniques" d'un germe de 2-forme fermée de *rang maximum* (en dimension paire ou impaire) et d'un germe de forme de Pfaff de *classe maximum*. Je vais en redonner ici une démonstration complète, bien qu'il s'en trouve de nombreuses dans la littérature ([3], [5], [6], [10], [18]) ; l'idée centrale de la démonstration qui suit se trouve chez J. Moser [14], et me semble être la plus naturelle, compte tenu des considérations qui suivront sur la stabilité et la stabilité infinitésimale des formes différentielles.

Rappelons d'abord que Σ_0 (resp. Σ_1) désigne l'ouvert des éléments de ${}^2\mathbf{R}_n = \mathbf{F}_0^2 = \mathfrak{F}_0^2$ (espace vectoriel des jets d'ordre 0 de 2-formes fermées ou non), avec n pair $= 2p$ (resp. n impair $= 2p + 1$), qui sont de rang maximum $2p$ (le *corang* est alors respectivement 0 et 1).

D'autre part ζ_0 désigne l'ouvert de \mathbf{F}_1^1 (espace des jets d'ordre 1 de formes de Pfaff à l'origine de \mathbf{R}^n) constitué des jets de classe n (cf. II. 4.3.1).

4.1.1. THEOREME. — Soit $\omega \in \mathcal{O}_k^2$ ($k \geq 1$) un germe de 2-forme fermée à l'origine de \mathbf{R}^n , avec $n = 2p$, tel que $j_0\omega \in \Sigma_0$; alors ω est C^k -isomorphe au germe défini par l'expression :

$$dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_p \wedge dy_p$$

(où $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ désignent les coordonnées naturelles dans \mathbf{R}^{2p}).

Démonstration. — Considérons la forme ω_0 , à coefficients constants, égale à l'expression de ω à l'origine, et posons

$$\omega_t = \omega_0 + t \cdot (\omega - \omega_0) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Ainsi $\omega_1 = \omega$, et, pour tout $t \in [0, 1]$, ω_t est de rang maximum à l'origine.

La 2-forme $\alpha = \omega - \omega_0$ est C^k , et fermée ; il existe donc une forme de Pfaff β , que l'on peut prendre nulle à l'origine, à coefficients C^k , telle que $\alpha = d\beta$.

Maintenant, la *dimension ambiante étant* $2p$ et la forme ω_t de rang $2p$ dans un voisinage de l'origine, l'équation linéaire

$$X_t \lrcorner \omega_t = \beta$$

détermine un germe de champ de vecteurs X_t , nul à l'origine, de classe C^k , quel que soit $t \in [0,1]$.

On a alors, pour tout t , la relation :

$$\theta(X_t) \omega_t = d(X_t \lrcorner \omega_t) + X_t \lrcorner d\omega_t = \alpha$$

puisque ω_t est fermée.

Si l'on considère alors l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X_t(x) = X(t, x)$$

et si l'on note $\varphi_t(x)$ la solution qui vérifie $\varphi_0(x) = x$, on a $\varphi_t(0) = 0$ pour tout t puisque $X(t, 0) = 0$; la fonction φ est donc définie et C^k sur $[0,1] \times U$, U désignant un voisinage assez petit de 0 dans \mathbf{R}^n ; ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, φ_t est un germe de difféomorphisme conservant l'origine, et on a par construction, d'après III. A. 1.3,

$$\varphi_t^*(\omega_0) = \omega_t \quad \text{pour tout } t .$$

Ainsi φ_1 définit un C^k -isomorphisme de ω sur ω_0 . Il suffit ensuite de faire un changement de variables *linéaire* dans ω_0 pour la ramener à l'expression annoncée dans le théorème, d'après I. 4.1.

4.1.2. THEOREME. — Soit $\omega \in \mathcal{O}_k^2$ ($k \geq 2$) un germe de 2-forme fermée à l'origine de \mathbf{R}^n , avec $n = 2p + 1$, tel que $j_0 \omega \in \Sigma_1$; alors ω est C^k -isomorphe au germe défini par l'expression

$$dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_p \wedge dy_p$$

(où $z, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ désignent les coordonnées dans \mathbf{R}^{2p+1}).

Démonstration. — On a un champ de directions D défini en chaque point par la droite associée à ω (qui est de corang 1) ; ce champ est de classe C^k .

Soit S un élément d'hypersurface transverse à D à l'origine (par exemple un hyperplan) ; la restriction $\bar{\omega}$ de ω à S vérifie les hypothèses du théorème 4.1.1 ; il existe donc des fonctions $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p$ constituant un système de coordonnées locales C^k à l'origine dans S , telles que

$$\bar{\omega} = d\bar{x}_1 \wedge d\bar{y}_1 + \dots + d\bar{x}_p \wedge d\bar{y}_p.$$

Soient alors $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ les intégrales premières de D obtenues par prolongement de $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p$, que nous complétons en un système de coordonnées

$$C^k : (z, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p).$$

Dans ce système, on a évidemment $\frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0$; l'expression de ω étant C^{k-1} par rapport à ces coordonnées, on aura

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_p \wedge dy_p$$

d'après III. A. 1.4.1, pourvu que $k - 1 \geq 1$.

Q.E.D.

4.1.3. THEOREME. — Soit $\omega \in D_k^1$ ($k \geq 3$) un germe de forme de Pfaff à l'origine de \mathbb{R}^n , avec $n = 2p + 1$, tel que $j_1 \omega \in \xi_0$, c'est-à-dire $\omega \wedge d\omega^p \neq 0$; alors ω est C^{k-1} -isomorphe au germe défini par l'expression :

$$dz + x_1 dy_1 + \dots + x_p dy_p.$$

Démonstration. — On a $d\omega \in \mathcal{O}_{k-1}^2$ et d'après 4.1.2, il existe des fonctions $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ telles que

$$d\omega = \sum_{i=1}^p dx_i \wedge dy_i$$

la forme différentielle $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^p x_i dy_i$ est donc C^{k-2} , et telle que $d(\omega - \bar{\omega}) = 0$; ainsi $\omega - \bar{\omega} = dz$ où z est une fonction C^{k-1} , nulle à l'origine ; on a bien

$$\omega = dz + \sum_{i=1}^p x_i dy_i$$

les fonctions $z, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ étant indépendantes puisque $\omega \wedge d\omega^p = p! dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_p \wedge dy_p \neq 0$.

4.1.4. THEOREME. — Soit $\omega \in D_k^1$ ($k \geq 3$) un germe de forme de Pfaff à l'origine de \mathbb{R}^n , avec $n = 2p$, tel que $j_1 \omega \in \xi_0$, c'est-à-dire $\omega \neq 0$ et $d\omega^p \neq 0$; alors ω est C^{k-2} -isomorphe au germe défini par l'expression

$$(1 + x_1)dy_1 + x_2 dy_2 + \dots + x_p dy_p .$$

Démonstration. — Par hypothèse, la $(2p - 1)$ -forme $\omega \wedge d\omega^{p-1}$ est non nulle, et C^{k-1} ; soit D le champ de directions associé à cette forme; si X est un champ de vecteurs non nul porté par D , on a $X \lrcorner (\omega \wedge d\omega^{p-1}) = 0$ soit

$$(X \lrcorner \omega) \cdot d\omega^{p-1} - \omega \wedge (X \lrcorner d\omega^{p-1}) = 0$$

ceci implique, $d\omega$ étant de rang $2p$, $X \lrcorner \omega = 0$ et $X \lrcorner d\omega = f \cdot \omega$, f étant une fonction.

Soit alors S un élément d'hypersurface transverse à D à l'origine; la restriction $\bar{\omega}$ de ω à S vérifie les hypothèses du théorème 4.1.3; il existe donc des coordonnées locales C^{k-1} , $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_p, \bar{y}_p$ à l'origine dans S , telles que

$$\bar{\omega} = d\bar{y}_1 + \bar{x}_2 d\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_p d\bar{y}_p .$$

Soient y_1, x_2, \dots, y_p les intégrales première de D obtenues par prolongement de $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{y}_p$; d'après la remarque du début et III. A. 1.4.2, on a

$$\omega = h \cdot \omega'$$

où $\omega' = dy_1 + x_2 dy_2 + \dots + x_p dy_p$ et où h est une fonction C^{k-2} , égale à 1 sur S .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} d\omega^p &= (dh \wedge \omega' + h d\omega')^p = \\ &= p(p-1)! h^{p-1} dh \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_p \wedge dy_p \neq 0 \end{aligned}$$

Donc h, y_1, x_2, \dots, y_p sont indépendantes; le changement de variables

$$\begin{aligned} X_1 &= h - 1 \\ X_i &= h \cdot x_i \quad \text{pour } 2 \leq i \leq p \\ X_j &= y_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p \end{aligned}$$

est C^{k-2} et met ω sous la forme requise.

4.2. Nous allons examiner maintenant les singularités les plus simples de la classe d'une forme de Pfaff et du rang d'une 2-forme fermée.

4.2.1. En ce qui concerne les formes de Pfaff, il est naturel d'envisager d'abord le cas des germes ω jouissant des propriétés suivantes :

i) $j_1 \omega \in \xi_1$, c'est-à-dire : la classe de ω en 0 est $n - 1$.

ii) ω est générique du point de vue de II. 4.3.3, c'est-à-dire que l'application définie par $x \longrightarrow j_1 \omega(x)$ est transverse à ξ_1 ; la classe de ω reste donc égale à $(n - 1)$ aux points d'une hypersurface $S = \xi_1(\omega)$, passant par l'origine.

iii) la restriction de ω à S est de classe maximale $(n - 1)$.

Ces trois conditions expriment en fait des propriétés de $j_2 \omega$. De façon plus précise, elles définissent un ouvert de $\rho^{-1}(\xi_1)$ (où $\rho : F_2^1 \longrightarrow F_1^1$ est l'homomorphisme de restriction de l'espace des jets d'ordre 2 dans celui des jets d'ordre 1), donc une sous-variété de codimension 1 de F_2^1 , c'est-à-dire une singularité d'ordre 2 ; cette singularité sera désignée par $\xi_{1,0}$.

THEOREME. — ([12]) Soit $\omega \in D_k^1$, où $k \geq 7$ (resp. $k \geq 6$), un germe de 1-forme à l'origine de \mathbf{R}^n , où $n = 2p + 1$ (resp. $n = 2p$), tel que $j_2 \omega \in \xi_{1,0}$; alors ω est C^{k-6} -isomorphe (resp. C^{k-5} -isomorphe) à un et un seul des germes définis par les expressions :

$$\pm z dz + (1 + x_1) dy_1 + x_2 dy_2 + \cdots + x_p dy_p$$

(resp. à un et un seul des germes :

$$\left(1 \pm \frac{x_1^2}{2}\right) dy_1 + x_2 dy_2 + \cdots + x_p dy_p).$$

Démonstration. — a) $n = 2p + 1$. Dans ce cas, la condition i) signifie que $\omega \wedge d\omega^p = 0$ et $d\omega^p \neq 0$ à l'origine ; la condition ii) signifie que la n -forme $\omega \wedge d\omega^p$ s'annule transversalement à l'origine, donc présente la singularité $\Sigma_{n,0}^n$ (au sens de III. A. 2.2) ; le lieu des zéros est un germe d'hypersurface S , de classe C^{k-1} ; la condition iii) signifie que la restriction $\bar{\omega}$ de ω à S vérifie $\bar{\omega} \neq 0$ et $d\bar{\omega}^p \neq 0$ à l'origine ; en particulier, le champ de direction D associé à $d\omega$ est transverse à S .

La forme $\bar{\omega}$ est C^{k-2} ; d'après le théorème III. A. 4.1.4, il existe des coordonnées locales C^{k-4} , $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p$ à l'origine dans S telles que

$$\bar{\omega} = (1 + \bar{x}_1)d\bar{y}_1 + \bar{x}_2d\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_pd\bar{y}_p .$$

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ les intégrales premières de D définies par les prolongements de $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p$; d'après le lemme III. A. 2.2, appliqué à $\omega \wedge d\omega^p$, il existe une fonction z , C^{k-6} , telle que

$$\omega \wedge d\omega^p = \pm z dz \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dy_p . \tag{1}$$

On a évidemment $d\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_p \wedge dy_p$ (d'après III. A. 1.4.1). Donc si $\omega' = (1 + x_1)dy_1 + x_2dy_2 + \dots + x_pdy_p$, on a $\omega - \omega' = df$, f étant une fonction (C^{k-5}) ; df est nulle sur S ; on peut donc prendre f nulle sur S. Ainsi

$$\omega \wedge d\omega^p = df \wedge d\omega'^p = (p - 1)! \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dy_p$$

dans le système de coordonnées $(z, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$. Par comparaison avec (1), on a immédiatement

$$df = \pm \frac{z}{(p - 1)!} dz .$$

L'expression de ω dans le système de coordonnées C^{k-6} ,

$$\{z, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p\}$$

est donc

$$\omega = \pm \frac{z}{(p - 1)!} dz + (1 + x_1)dy_1 + x_2dy_2 + \dots + x_pdy_p ,$$

expression que l'on transforme aisément en la forme indiquée dans le théorème.

b) $n = 2p$. On a cette fois $d\omega^p = 0$ et $\omega \wedge d\omega^{p-1} \neq 0$ à l'origine ; $d\omega^p$ présente la singularité $\Sigma_{n,0}^n$; soit S l'hypersurface des zéros de $d\omega^p$ (S est de classe C^{k-1}) ; d'après iii) la restriction $\bar{\omega}$ de ω à S est telle que $\bar{\omega} \wedge d\bar{\omega}^{p-1} \neq 0$; le champ de directions D associé à la $(n - 1)$ -forme $\omega \wedge d\omega^{p-1}$ est donc transverse à S.

Appliquant le théorème III. A. 4.1.3 à $\bar{\omega}$, on choisit dans S des coordonnées locales (C^{k-3}) à l'origine : $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{y}_p$, telles que $\bar{\omega} = d\bar{y}_1 + \bar{x}_2 d\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_p d\bar{y}_p$. Soient y_1, x_2, \dots, y_p les intégrales premières de D définies par les prolongements de $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p$.

D'après le lemme III. A. 2.2 appliqué à $d\omega^p$, il existe une fonction x_1, C^{k-5} , telle que

$$d\omega^p = \pm x_1 dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_p \wedge dy_p. \quad (1)$$

On montre aisément que $\omega = f \cdot \omega'$ où

$$\omega' = dy_1 + x_2 dy_2 + \dots + x_p dy_p$$

et f est une fonction (C^{k-4}) égale à 1 sur S. On a alors :

$$d\omega^p = (df \wedge \omega' + f d\omega')^p = p(p-1)! f^{p-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p.$$

On en déduit, compte tenu de (1), que $f^p = 1 \pm \frac{x_1^2}{2(p-1)!}$. L'expression de ω dans le système de coordonnées $C^{k-5}, \{x_1, y_1, \dots, y_p\}$ est donc

$$\omega = \left[1 \pm \frac{x_1^2}{2(p-1)!} \right]^{1/p} (dx_1 + x_2 dy_2 + \dots + x_p dy_p)$$

expression qu'il est facile de ramener à l'expression indiquée dans le théorème.

Remarques. — 1) Dans le cas $n = 2p + 1$, les expressions

$$\pm z dz + (1 + x_1) dy_1 + \dots + x_p dy_p$$

se distinguent aisément géométriquement, par le comportement du champ de vecteurs X défini par l'équation linéaire

$$X \lrcorner (\omega \wedge d\omega^p) = d\omega^p ;$$

ce champ n'est défini qu'en dehors de la surface singulière S ($z = 0$) ; dans un cas, il pointe vers S, dans l'autre cas il s'en éloigne.

On a une remarque analogue pour $n = 2p$.

2) Le théorème précédent montre que la singularité $\xi_{1,0}$ est réunion disjointe de deux singularités rigides.

4.2.2. Dans le cas des *2-formes fermées*, on va considérer les germes ω à l'origine de \mathbf{R}^n , où $n = 2p$, admettant les propriétés suivantes :

i) ω est de corang 2 à l'origine, c'est-à-dire $j_0 \omega \in \Sigma_2$, ou encore $\omega^p = 0$ et $\omega^{p-1} \neq 0$ à l'origine.

ii) ω est générique, du point de vue de II. 2.4, c'est-à-dire que ω est transverse à Σ_2 ; l'ensemble $\Sigma_2(\omega)$ des points où ω est de corang 2 est alors un germe d'hypersurface.

iii) la restriction de ω à $\Sigma_2(\omega)$ est de rang maximum $2p - 1$.

Ce sont là des propriétés du jet d'ordre 1 de ω à l'origine, qui définissent un sous-ensemble $\Sigma_{2,0} \subset \mathfrak{F}_1^2$; ce sous-ensemble est d'évidence un ouvert de $\rho^{-1}(\Sigma_2)$ où $\rho : \mathfrak{F}_1^2 \longrightarrow F_0^2$; c'est donc une sous-variété de codimension 1.

THEOREME. — Soit $\omega \in \mathcal{O}_k^2$ ($k \geq 6$) un germe de 2-forme fermée à l'origine de \mathbf{R}^n , avec $n = 2p$, tel que $j_1 \omega \in \Sigma_{2,0}$; alors ω est C^{k-5} -isomorphe au germe :

$$x_1 dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_p \wedge dy_p .$$

Démonstration. — On trouve aisément une forme de Pfaff α , telle que $d\alpha = \omega$ et $j_2 \alpha \in \xi_{1,0}$; on applique le théorème III. A. 4.2.1 à α ; on obtient ainsi

$$\omega = d\alpha = \pm x_1 dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_p \wedge dy_p .$$

On fait disparaître le signe en modifiant éventuellement y_1 .

4.3. Mentionnons encore un corollaire intéressant du théorème III. A. 4.2.1, relatif aux *équations de Pfaff en dimension impaire* $n = 2p + 1$.

Soit une équation de Pfaff σ , générique du point de vue du théorème II. 5.4 ; $C_2(\sigma)$, ensemble des points où σ est de co-classe 2, est une hypersurface ; considérons un point de $C_2(\sigma)$ tel que la restriction de σ à $C_2(\sigma)$ soit de classe maximale $2p - 1$ en ce point. On montre facilement que σ peut être définie, au voisinage d'un tel point, par une forme de Pfaff présentant la singularité $\xi_{1,0}$ en ce point. Il en résulte que, dans un système de coordonnées locales convenables, σ est définie par la forme :

$$z dz + (1 + x_1)dy_1 + x_2 dy_2 + \cdots + x_p dy_p .$$

5.

Je vais maintenant montrer quelques exemples de singularité de formes différentielles, telles que la classification des germes présentant ces singularités fasse intervenir des paramètres ; il s'agira donc de *singularités non rigides*, admettant une infinité de modèles.

5.1. Considérons, pour $n = 3$, la singularité d'ordre 1 de 2-formes fermées $\Sigma_{3,0} \subset \mathfrak{F}_1^2$, définie par la propriété : un germe $\omega \in \mathcal{O}^2$ présente la singularité $\Sigma_{3,0}$ (i.e. $j_1 \omega \in \Sigma_{3,0}$) si et seulement si ω s'annule transversalement à l'origine.

Considérons un tel germe ; soit Ω un germe de forme volume, et X le champ de vecteurs défini par $\omega = X \lrcorner \Omega$; soit Λ la matrice jacobienne de X à l'origine (X s'annule en ce point) ; Λ est de trace nulle, car ω est fermée, et X est donc unimodulaire ; Λ est de rang 3, par la condition de transversalité. L'équation aux valeurs propres de Λ est donc de la forme $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$, où $q \neq 0$; le nombre $r = p \cdot q^{-2/3}$ est alors un invariant de ω , donc de $j_1 \omega \in \Sigma_{3,0}$; en effet, si on change le choix du volume Ω , Λ est multipliée par un scalaire, et $p \cdot q^{-2/3}$ est inchangé.

Ainsi, par exemple, posons :

$$\omega_p = (x_2 + px_3)dx_2 \wedge dx_3 + x_3 dx_3 \wedge dx_1 - x_1 dx_1 \wedge dx_2 ,$$

x_1, x_2, x_3 désignant les coordonnées naturelles dans \mathbb{R}^3 , et p un scalaire ; pour chaque p , ω_p présente la singularité $\Sigma_{3,0}$ à l'origine, et $r(\omega_p) = p$; ω_p et $\omega_{p'}$ ne pourront être isomorphes si $p \neq p'$.

5.2. Plaçons-nous maintenant en dimension 5 ; un germe $\omega \in \mathcal{O}^2$ sera dit présenter la singularité $\Sigma_{3,0} \subset \mathfrak{F}_1^2$ si :

a) ω est transverse à $\Sigma_3 \subset F_0^2$ (ensemble des formes de corang 3, donc de rang 2) ; $\Sigma_3(\omega)$ est alors (cf. II. 2.4.1 exemple 4) un germe de surface (de codimension 3).

b) la restriction de ω à $\Sigma_3(\omega)$ est non nulle.

Soit Ω un germe de volume à l'origine de \mathbf{R}^5 , et définissons un champ de vecteurs X par l'équation $\omega^2 = X \lrcorner \Omega$; X s'annule aux points de $\Sigma_3(\omega)$; pour tout $x \in \Sigma_3(\omega)$, la jacobienne Λ_x de X en x est de rang 3 et de trace nulle; son équation aux valeurs propres est de la forme $\lambda^2(\lambda^3 + p(x)\lambda + q(x)) = 0$; on vérifie immédiatement que la fonction $r(x) = p(x)q(x)^{-2/3}$ est un invariant du germe ω (r est un germe de fonction à l'origine dans $\Sigma_3(\omega)$).

Une assez grande classe de fonctions peut être obtenue de cette façon; par exemple, considérons les 2-formes:

$$\begin{aligned} \omega_p &= (x_2 + px_3)dx_2 \wedge dx_3 + x_3dx_3 \wedge dx_1 - x_1dx_1 \wedge dx_2 \\ &+ \frac{\partial p}{\partial x_4} x_2x_3dx_4 \wedge dx_3 + \frac{\partial p}{\partial x_5} x_2x_3dx_5 \wedge dx_3 + \\ &+ dx_4 \wedge dx_5. \end{aligned}$$

où x_1, \dots, x_5 désignent les coordonnées dans \mathbf{R}^5 , et

$$p(x_4, x_5) = s(x_4) + t(x_5),$$

s et t étant des fonctions C^∞ quelconques.

Pour tout p , ω_p est une 2-forme fermée présentant à l'origine la singularité $\Sigma_{3,0}$; $\Sigma_3(\omega_p)$ est le plan défini par $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; on vérifie aisément que la fonction r relative à ω_p est la fonction p .

B. STABILITE ET STABILITE INFINITESIMALE

Dans cette partie, tous les objets considérés seront supposés C^∞ .

1. Stabilité d'un germe de forme différentielle.

1.1. Soit M une variété, $\omega \in D^p(M)$ (resp. $\mathcal{O}^p(M)$) une p -forme (resp. p -forme fermée) sur M , x un point de M . ω sera dite stable en x si la condition suivante est réalisée: (comparer avec [9], p. 44).

Pour tout voisinage U de x , il existe un C^∞ -voisinage V de ω dans

$D^p(M)$ (resp. $\mathcal{O}^p(M)$) tel que, pour tout $\omega' \in V$, il existe $x' \in U$ avec : les germes de ω en x et de ω' en x' sont isomorphes.

On reconnaît aisément que cette propriété ne dépend en fait que du germe de ω en x ; on aboutit à la définition d'un germe stable.

1.2. THEOREME. — *Tous les modèles indiqués dans la première partie définissent des germes stables.*

Démonstration. — Tous ces cas réalisent la situation suivante : on a une singularité Σ d'ordre k , rigide, et une forme ω dans \mathbb{R}^n telle que

- a) $j_k \omega(0) \in \Sigma$,
- b) $j_k \omega$ est transverse à Σ en 0.

Un argument classique (analogue au lemme d'isotopie) montre alors que, pour tout voisinage U de 0, il existe un C^{k+2} -voisinage V de ω , tel que, pour tout $\omega' \in V$, il existe $x' \in U$ avec $j_k \omega'(x') \in \Sigma$; la stabilité en résulte immédiatement, Σ étant rigide.

2. Stabilité infinitésimale.

2.1. Dans la suite, on désigne par χ l'espace des germes de champs de vecteurs (C^∞) à l'origine de \mathbb{R}^n .

Soit $\omega \in D^p$ (resp. \mathcal{O}^p) ; on note alors $T_\omega : \chi \longrightarrow D^p$ (resp. $T_\omega : \chi \longrightarrow \mathcal{O}^p$) l'application \mathbb{R} -linéaire définie par $T_\omega(X) = \theta(X)\omega$ pour tout $X \in \chi$ (non sans avoir remarqué que la dérivée de Lie d'une forme fermée par rapport à un champ est une forme fermée).

Il est naturel de poser la

DEFINITION. — *Soit $\omega \in D^p$ (resp. \mathcal{O}^p) ; le germe ω est dit infinitésimalement stable si l'application $T_\omega : \chi \longrightarrow D^p$ (resp.*

$$T_\omega : \chi \longrightarrow \mathcal{O}^p)$$

est surjective.

Remarque. — On prendra garde au fait que les notions de stabilité infinitésimale des formes non fermées et fermées sont distinctes.

THEOREME. — Soit $\omega \in D^p$ un germe infinitésimalement stable ; alors le germe $d\omega \in \mathcal{O}^{p+1}$ est infinitésimalement stable.

Démonstration. — Elle est évidente, d'après la formule :

$$d(\theta(X)\omega) = \theta(X)d\omega .$$

2.2. On peut affaiblir la définition précédente en passant aux jets d'ordre infini de formes et de champs de vecteurs ; on obtient ainsi la notion algébrique de *stabilité formelle*.

Un des problèmes fondamentaux de la théorie ébauchée dans ce travail est d'établir l'équivalence des notions de stabilité, stabilité infinitésimale, et stabilité formelle ; je n'ai pas abordé ce problème.

On peut établir, par des calculs fastidieux que je n'imposerai pas au lecteur, la stabilité infinitésimale des germes définis par les modèles obtenus dans la première partie de ce chapitre.

Je préfère conclure par la proposition suivante, intéressante en elle-même et qui me semble donner, bien que la situation envisagée soit très simple, une bonne idée des problèmes qui se posent dans ce genre de questions.

PROPOSITION. — Les germes de 2-formes fermées à l'origine de \mathbb{R}^4 définis par les expressions :

$$\omega = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d\left(xz + ty - \frac{z^3}{3}\right) \wedge dt$$

$$\omega' = dx \wedge dy + z dy \wedge dz + d\left(xz - ty - \frac{z^3}{3}\right) \wedge dt$$

sont formellement stables. (Il s'agit des exemples de points elliptiques et hyperboliques indiqués en II. 3.2.3).

Démonstration. — Je vais l'indiquer dans le cas de ω ; les modifications à y apporter pour le cas de ω' seront évidentes.

a) La stabilité infinitésimale de ω équivaut à la possibilité de trouver, quel que soit le germe de 2-forme fermée $\tau = d\pi$ ($\pi \in D^1$), un germe de champ de vecteurs $X \in \chi$ tel que

$$\theta(X)\omega = d(X \lrcorner \omega) = \tau = d\pi .$$

Désignons par M_ω le module (sur l'anneau D^0 des germes de fonctions C^∞ à l'origine de \mathbb{R}^4) des germes de formes de Pfaff de la forme $X \lrcorner \omega$; la stabilité infinitésimale de ω équivaut alors encore à l'existence, pour tout $\pi \in D^1$, d'une fonction $f \in D^0$ telle que $\pi - df \in M_\omega$, c'est-à-dire à l'égalité $D^1 = M_\omega + dD^0$.

b) LEMME 1. — Un germe $\pi \in D^1$ appartient à M_ω si et seulement si $\pi(m)$ appartient au support $S_\omega(m)$ de ω en m , pour tout point m .

La nécessité est évidente, les produits intérieurs $X \lrcorner \omega$ constituant en chaque point m le support $S_\omega(m)$.

Pour montrer que la condition est suffisante, on pourrait remarquer, sans utiliser l'expression particulière de ω , que le rang de l'équation linéaire $X \lrcorner \omega = \pi$ se comporte *génériquement* (c'est-à-dire que ω est transverse à Σ_2) et utiliser un théorème récent de J. Mather.

Mais la démonstration directe est très simple :

On vérifie d'abord qu'aux points de $\Sigma_2(\omega)$ (c'est-à-dire tels que $x = 0$), on a $\omega = (dx - zdz - tdt) \wedge (dy + zdt)$; on en déduit qu'une forme $\pi \in D^1$, $\pi = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta dt$, appartient en chaque point au support de ω , si et seulement si les fonctions $z\alpha + \gamma$ et $t\alpha - z\beta + \delta$ s'annulent identiquement pour $x = 0$, c'est-à-dire sont divisibles (dans l'anneau D^0) par la fonction x .

D'autre part, l'équation $X \lrcorner \omega = \pi$, où

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} + d \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{équivaut à :}$$

$$b + zd = -\alpha \quad (1)$$

$$a - zc - td = \beta \quad (2)$$

$$zb - (x - z^2)d = \gamma \quad (3)$$

$$za + tb + (x - z^2)c = \delta \quad (4)$$

(1) et (3) donnent $xd = -(z\alpha + \gamma)$; on en déduit d , $z\alpha + \gamma$ étant divisible par x , et (1) donne b ;

(1), (2) et (4) donnent $xc = t\alpha - z\beta + \delta$; on en déduit c , et (2) donne a . Q.E.D.

c) Soit $\overline{D^0}$ l'anneau des germes de fonctions différentiables à l'origine de l'hyperplan $\Sigma_2(\omega)$ (défini par $x = 0$), $\overline{D^1}$ le module des

germes de formes de Pfaff à l'origine dans $\Sigma_2(\omega)$; on désigne par \overline{M}_ω le \overline{D}^0 -module des restrictions à $\Sigma_2(\omega)$ des éléments de M_ω .

LEMME 2. — *La stabilité infinitésimale de ω équivaut à la condition :*

$$\overline{M}_\omega + d\overline{D}^0 = \overline{D}^1 .$$

La nécessité de cette condition est évidente.

Suffisance : remarquons d'abord que, pour tout $\tau \in \overline{D}^1$, telle que $\overline{\tau} = 0$ ($\overline{\tau}$ = restriction de τ à Σ_2), il existe une fonction h (nulle sur $\Sigma_2(\omega)$) avec $\tau - dh = 0$; en effet, si $\tau = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta dt$, $\overline{\tau} = 0$ équivaut à $\beta = \gamma = \delta = 0$ pour $x = 0$; si $h = x \cdot \alpha$, $\tau - dh$ a tous ses coefficients nuls sur $\Sigma_2(\omega)$. Soit maintenant $\pi \in \overline{D}^1$; par hypothèse, il existe une fonction f telle que $\overline{\pi} - \overline{df} \in \overline{M}_\omega$, donc $\overline{\pi} - \overline{df} = \overline{\sigma}$ où $\sigma \in M_\omega$, soit $\overline{\pi} - \overline{df} - \overline{\sigma} = 0$; d'après la remarque précédente, il existe une fonction h telle que $\pi - df - \sigma - dh \in M_\omega$, ce qui donne $\pi - d(f + h) \in M_\omega$. Q.E.D.

Remarque. — On n'a pas utilisé ici la définition particulière de M_ω , mais uniquement le fait qu'il est défini par des conditions aux points de $\Sigma_2(\omega)$ seulement.

d) Soit X le champ de vecteurs, dans l'hyperplan $\Sigma_2(\omega)$, associé à la restriction ω' de ω ; on a

$$X = -z^2 \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t}$$

(cf. II. 3.2.3 a)).

LEMME 3. — *Une forme $\pi \in \overline{D}^1$ appartient à \overline{M}_ω si et seulement si $X \lrcorner \pi = 0$.*

La nécessité est évidente.

Réciproquement, soit $\pi = \beta dy + \gamma dz + \delta dt$ telle que $X \lrcorner \pi = 0$, c'est-à-dire $-z^2\beta - t\gamma + z\delta = 0$, soit $z(-z\beta + \delta) = t\gamma$; γ est donc divisible par z dans D^0 , et il existe une fonction $\alpha(y, z, t)$ telle que $\gamma = -z\alpha$; mais alors $-z\beta + \delta = -t\alpha$; il en résulte, d'après a), que la forme $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta dt$ appartient à M_ω .

Remarque. — C'est ici qu'on utilise le fait que $j_1 \omega$ est transverse à la singularité $\Sigma_{2,2}$.

e) D'après les lemmes 2 et 3, la stabilité infinitésimale de ω équivaut à la condition suivante :

Pour tout $\pi \in \overline{D^1}$, il existe une fonction $f \in \overline{D^0}$ telle que

$$X \lrcorner df = X \lrcorner \pi .$$

C'est-à-dire : l'équation aux dérivées partielles

$$-z^2 \frac{\partial f}{\partial y} - t \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial f}{\partial t} = -z^2 \beta - t\gamma + z\delta \quad (E)$$

a une solution (C^∞) $f(y, z, t)$ quelles que soient les fonctions β, γ, δ . Les seconds membres forment exactement l'idéal J des fonctions nulles sur $\Sigma_{2,2}(\omega)$ ($z = t = 0$).

On s'est en définitive ramené à l'étude de la condition :

L'équation aux dérivées partielles

$$-z^2 \frac{\partial f}{\partial y} - t \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial f}{\partial t} = h \quad (E)$$

a une solution quel que soit $h \in J$.

f) A ma connaissance, on ne possède pas actuellement de méthode générale d'étude d'équations aux dérivées partielles avec singularités. Dans ce cas particulier, je puis simplement montrer qu'il est possible de résoudre en séries formelles l'équation (E) précédente.

Soit $[h] = \sum_{p,q,r \geq 0} a_{p,q,r} y^p z^q t^r$ le développement de Taylor infini de h à l'origine ; l'hypothèse $h \in J$ implique que $a_{p,0,0} = 0$ quel que soit $p \geq 0$.

Désignons par $[f] = \sum_{p,q,r \geq 0} b_{p,q,r} y^p z^q t^r$ le développement de Taylor de la fonction inconnue f .

Par identification des développements en série des deux membres de (E), on obtient le système d'équations

($E_{p,q,r}$) $p, q, r \geq 0$:

$$-(p+1)b_{p+1,q-2,r} - (q+1)b_{p,q+1,r-1} + (r+1)b_{p,q-1,r+1} = a_{p,q,r} .$$

Je nommerai *hauteur* d'un coefficient la *somme* de ses indices.

J'indique seulement un résumé de la démonstration, qui est un peu fastidieuse.

Il est clair que le système d'équations considéré se décompose en deux systèmes *disjoints* : $(E_{p,q,r})$, $q + r$ *impair*, et $(E_{p,q,r})$, $q + r$ *pair*.

Dans le premier cas, on montre aisément que, pour p_0 et k_0 donnés, le système $(E_{p_0,q+r})$, $q + r = k_0$ forme un système d'équations indépendantes par rapport aux inconnues de hauteur $p_0 + k_0$; on résoud alors le premier système par récurrence sur p_0 et k_0 .

Dans le second cas, on envisage les sous-systèmes

$$S_{2k} = \{E_{p,q,r} ; 2p + q + r = 2k\} ;$$

ce sont des systèmes disjoints ; on montre que S_{2k} est un système d'équations indépendantes, par récurrence sur $q + r$.

Remarques. — 1) Dans le cas des exemples de points "paraboliques" (cf. II. 3.2.4), on montre de la même façon l'équivalence de la stabilité infinitésimale avec la condition :

L'équation aux dérivées partielles

$$-z(z+2t) \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial f}{\partial t} = h$$

a une solution f quelle que soit $h \in J$, J étant l'idéal des fonctions nulles sur $\Sigma_{2,2}(\omega)$ (i.e. h nulle pour $y = z = 0$).

J'ai acquis la conviction (sans cependant en écrire une démonstration explicite) qu'il y a encore stabilité formelle dans ce cas.

2) Ces considérations me semblent motiver raisonnablement la *conjecture* : les singularités génériques d'une 2-forme fermée en dimension 4 (cf. II. 3) sont toutes rigides.

APPENDICE

THÉORÈMES DE TRANSVERSALITÉ POUR LES SECTIONS D'UN FIBRÉ

1. Topologies sur les espaces de sections.

1.1. Toutes les variétés envisagées ici seront de dimension finie sur \mathbf{R} , C^∞ (sauf mention du contraire), à base dénombrable de voisinages.

Soit M une variété, $\pi : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel sur M . On note $\pi_k : J^k E \longrightarrow M$ le fibré vectoriel des jets d'ordre k de sections de E ($0 \leq k < \infty$).

Soit D_k l'espace vectoriel des sections de classe C^k de E ; si $\omega \in D_k$, on note $j_k \omega$ la section de $J^k E$ définie en chaque point $x \in M$ par le jet d'ordre k de ω en x .

On désignera par D l'espace vectoriel des sections C^∞ de E .

1.2. PROPOSITION — DEFINITION. — *Les ensembles*

$$V_U = \{ \omega \in D_k ; j_k \omega(M) \subset U \}$$

où $U \subset J^k E$ est un ouvert, constituent la base d'une topologie de D_k , appelée C^k -topologie de Whitney.

(Si M est compacte, c'est la topologie de la "convergence uniforme" sur M des sections de E et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k).

Sur D , la C^∞ -topologie de Whitney est définie comme la limite projective des C^k -topologies sur les espaces D_k .

On rappelle que D_k , muni de la C^k -topologie ($0 \leq k \leq \infty$), est un espace vectoriel topologique localement convexe, qui est de plus un espace de Baire.

Un sous-ensemble de D_k sera dit *résiduel* s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses ; une propriété définissant un ensemble résiduel sera dite *générique* sur D_k .

1.3. PROPOSITION. — *Quel que soit $k' \geq k$, $D_{k'}$ est C^k -dense dans D_k .*

C'est une conséquence du lemme 6 de [19].

1.4. Soit $\pi : B \longrightarrow M$ un *fibré localement trivial* quelconque, C^∞ ; soit Γ_k l'ensemble des sections C^k de ce fibré ; on peut définir la C^k -topologie sur Γ_k de la même façon qu'en 1.2, en utilisant les ouverts du fibré $J^k B$.

On peut aussi définir sur Γ_k ($0 \leq k \leq \infty$) une structure de "variété", modelée sur des espaces de sections de fibrés vectoriels, de la façon suivante :

a) Soit $V \longrightarrow B$ le fibré vectoriel sur B constitué par les vecteurs *tangents aux fibres* de B .

On se donne une fois pour toutes, sur B , une équation différentielle du "second ordre", C^∞ , telle que, pour tout $y \in B$ et tout $v \in V$ d'origine y , la solution de cette équation définie par les conditions initiales (y, v) soit tracée dans la fibre $\pi^{-1}(\pi(y))$; on notera $\exp(y, v)$ la valeur au temps $t = 1$ de cette solution (pour v assez "petit").

b) Soit $\sigma \in \Gamma_k$ ($0 \leq k \leq \infty$) ; on considère alors le fibré vectoriel $E_\sigma \longrightarrow M$, image réciproque de V par σ ; il est clair que l'application exponentielle définie en b) induit une *injection d'un C^k -voisinage ouvert convenable de la section nulle de E_σ dans Γ_k* .

On a ainsi défini une carte de Γ_k , modelée sur $D_k(E_\sigma)$. On vérifie aisément que ces cartes forment un atlas sur Γ_k , dont la topologie sous-jacente est précisément la C^k -topologie.

Ce point de vue sera commode dans la suite (cf. 4.3 et 6.2).

2. Distributions. Stratifications.

2.1. Soit N une variété. On appelle *distribution* sur N toute fonction Δ qui à chaque point $x \in N$ associe un sous-espace Δ_x de

$T_x N$, espace tangent à N en x . Une distribution Δ sera dite *cohérente* si pour tout point x et pour tout $v \in \Delta_x$, il existe un voisinage ouvert U de x et un champ de vecteurs X sur U , C^∞ , tel que $X(x) = v$ et $X(x') \in \Delta_{x'}$ pour tout $x' \in U$.

PROPOSITION. — Soit V une sous-variété (C^∞) régulière de N , et F un fermé de N inclus dans V ; la distribution Δ définie par $\Delta_x = T_x V$ pour x dans F et $\Delta_x = T_x N$ ailleurs, est cohérente.

2.2. On appelle *stratification* d'une variété N toute partition $S = (S_i)_{i \in I}$ de N telle que :

- a) Chaque S_i (ou strate) est une sous-variété (C^∞) de N ;
- b) Pour tout entier p , la réunion des strates de dimension inférieure ou égale à p est un fermé de N .

La *codimension d'une stratification* de N est le minimum des codimensions des strates non ouvertes.

Si S est une stratification de N , on notera $T_x S$, pour $x \in N$, le sous-espace de $T_x N$ tangent en x à la strate de S contenant x .

La distribution associée à une stratification S est définie par $\Delta_x = T_x S$.

Une stratification sera dite *dénombrable* si l'ensemble de ses strates est dénombrable, et si chaque strate est une sous-variété *régulière* de N .

Une stratification est dite *cohérente* si la distribution associée l'est.

Exemples. — 1) Un feuilletage de N définit une stratification cohérente.

2) Les trajectoires d'un groupe de Lie agissant sur N constituent une stratification cohérente : les images des champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe réalisent même *globalement* les prolongements requis.

Remarque. — On définira de façon analogue une stratification de classe C^k d'une variété : les strates seront des sous-variétés de classe C^k de N , et, dans la condition de cohérence, les champs de vecteurs seront de classe C^{k-1} ($k \geq 1$).

2.3. PROPOSITION. — Soit S une stratification cohérente d'une variété N ; alors S est localement triviale.

Cela signifie que pour tout point $x \in N$, il existe une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de N en x ($n = \dim N$) telle que

a) $\varphi(U) = B_{n-p} \times B_p$ où B_{n-p} , B_p désignent des cubes ouverts de \mathbb{R}^{n-p} et \mathbb{R}^p , et $p =$ dimension de la strate passant par x .

b) Chaque plaque $\varphi^{-1}(\{u\} \times B_p)$, $u \in B_{n-p}$, est contenue dans une strate de S .

La démonstration se fait par récurrence sur p (n quelconque $\geq p$) ; la proposition est triviale pour $p = 0$; supposons-la établie pour la dimension $(p - 1)$.

Soit alors $v \in T_x S$, $v \neq 0$; S étant cohérente, il existe un champ de vecteurs local X tangent aux strates tel que $X(x) = v$. Soit H un élément d'hypersurface dans N , transverse à X en x ; soit S' la stratification induite par S dans H (en effet H est transverse aux strates au voisinage de x). S' est cohérente : si $v' \in T_x S \cap T_x H$, on considère un champ local Y (dans N) tangent à S prolongeant v' , et, en chaque point $y \in H$, on projette $Y(y)$ dans $T_y H$ parallèlement à $X(y)$; on construit ainsi, dans H , un champ tangent à S' et prolongeant v' . Dans H , la strate passant par x est de dimension $p - 1$; soit, d'après l'hypothèse de récurrence, $\varphi' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ une carte de H en x réalisant les conditions a) et b) pour S' . Il est clair que l'on peut prolonger φ' en une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (après diminution éventuelle de U') telle que $\varphi_*(X) = \frac{\partial}{\partial t}$, t désignant la n^{e} coordonnée ;

on vérifie alors aisément que φ a les propriétés a) et b) pour S , car les lignes intégrales du champ X sont tracées dans les strates de S .

Remarques. — 1) On a prouvé, de façon plus précise, qu'une stratification cohérente en un point x est localement triviale en x .

2) La démonstration précédente vaut sans modifications pour une stratification cohérente de classe C^k , $k \geq 2$; on obtiendra des trivialisations de classe C^1 . Il est clair qu'une stratification localement triviale est cohérente. La proposition précédente montre donc que la cohérence équivaut à la trivialité locale.

3. Transversalité.

3.1. Soient M et N des variétés, N étant munie d'une distribution Δ . Une application différentiable $f : M \longrightarrow N$ est dite *transverse* à Δ en $x \in M$, si

$$f'(T_x M) + \Delta_{f(x)} = T_{f(x)} N$$

où f' désigne l'application linéaire tangente à f . Cette condition exprime une propriété du jet d'ordre 1 de f en x ; on pourra donc parler aussi d'un *1-jet transverse* à Δ . L'application f est *transverse* à Δ sur un sous-ensemble $K \subset M$ si elle est transverse à Δ en tout point de K ; si $K = M$, on dira que f est *transverse* à Δ .

Remarque. — Une *submersion* est transverse à toute distribution.

3.2. Supposons N munie d'une stratification S ; une application $f : M \longrightarrow N$, au moins C^1 , est dite *transverse* à la stratification S si elle est transverse à la distribution associée à S .

PROPOSITION. — Soit $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^k ($k \geq 1$) transverse à une stratification $S = (S_i)_{i \in I}$ de N ; soit $f^{-1}(S) = \Sigma = (\Sigma_i)_{i \in I}$ la partition de M définie par $\Sigma_i = f^{-1}(S_i)$ pour tout $i \in I$; Σ est une stratification de classe C^k de M et

$$\text{codim}_M \Sigma_i = \text{codim}_N S_i ,$$

si Σ_i est non vide ; de plus, Σ est dénombrable (resp. cohérente) si S est dénombrable (resp. cohérente).

Toutes ces assertions sont évidentes, sauf celle qui concerne la cohérence de Σ . Pour cela, en utilisant la proposition 2.3, on se ramène immédiatement au cas où f est une *submersion*, et dans cette situation la conclusion est immédiate, Σ étant localement triviale d'après le théorème du rang.

Remarque. — Si f est transverse à la stratification S , et si $\text{codim}_N S_i > \dim M$, alors Σ_i est nécessairement vide ; en particulier, si $\text{codim}_N S > \dim M$, Σ se réduit à la stratification triviale (une seule strate égale à M).

3.3. PROPOSITION. — Soit Δ une distribution cohérente sur la variété N ; l'ensemble des 1-jets de M dans N qui sont transverses à Δ est un ouvert dans la variété $J^1(M, N)$.

COROLLAIRE. — Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, et Δ une distribution cohérente sur la variété $J^k E$; pour $r > k$, l'ensemble des sections ω de E telles que ω_k soit transverse à Δ est un C^r -ouvert dans D_r .

Ces propositions sont très faciles à démontrer.

4. Théorème d'isotopie.

4.1. LEMME D'ISOTOPIE. — Soient M une variété compacte, et N une variété munie d'une stratification cohérente S ; soit

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow N$$

une homotopie C^k de M dans N , telle que, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $H_t : M \longrightarrow N$ définie par $H_t(x) = H(x, t)$, soit transverse à S . On pose $\Sigma_t = H_t^{-1}(S)$. Alors, si $k \geq 2$, il existe une C^{k-1} -isotopie g de M telle que $g_t(\Sigma_0) = \Sigma_t$ pour tout $t \in [0,1]$.

On rappelle qu'une C^k -isotopie de M est une C^k -homotopie $g : M \times [0,1] \longrightarrow M$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, g_t soit un automorphisme (C^k) de M , et $g_0 =$ identité de M .

D'autre part, $g_t(\Sigma_0) = \Sigma_t$ signifie que, pour tout $x \in M$, g_t envoie la strate de Σ_0 passant par x sur la strate de Σ_t passant par $g_t(x)$.

Démonstration. — Soit $\Sigma = H^{-1}(S)$ la stratification (C^k) de $M' = M \times [0,1]$, image réciproque de S par H .

a) Il existe sur M' un champ de vecteurs Y , de classe C^{k-1} , tel que :

- 1) pour tout $y \in M'$, $Y(y)$ est tangent à la strate de Σ en y
- 2) la composante "verticale" (sur le facteur $[0,1]$) de Y est

$\frac{\partial}{\partial t}$ en chaque point.

En effet, en chaque point de M' , il existe un vecteur tangent ayant les propriétés 1) et 2), car les strates de Σ sont transverses aux "horizontales" $M \times \{t\}$; cette remarque, jointe à la cohérence de Σ (cf. Proposition 3.2), permet de fabriquer localement un champ ayant les propriétés 1) et 2); une partition de l'unité sur M' permet alors de construire le champ annoncé.

b) L'intégration du champ Y (qui est au moins C^1 par hypothèse) fournit évidemment l'isotopie cherchée (c'est ici que l'hypothèse de compacité de M intervient).

4.2. THEOREME D'ISOTOPIE. — Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, la base M étant compacte, et S une stratification cohérente de $J^k E$; soit $r \geq k + 2$. Pour $\omega \in T(S) \subset D_r$, ensemble des sections ω telles que $j_k \omega$ soit transverse à S , on note $S(\omega)$ la stratification de M , image réciproque de S par $j_k \omega$. Alors, pour tout $\omega \in T(S)$, il existe un voisinage ouvert V de ω dans D_r , tel que :

a) $V \subset T(S)$;

b) Pour tout $\omega' \in V$, il existe une isotopie φ_t de M telle que $\varphi_1(S_{\omega'}) = S_{\omega}$.

En effet, $T(S)$ est ouvert dans D_r , d'après 3.3. Soit donc V un voisinage ouvert convexe de ω inclus dans $T(S)$; si $\omega' \in V$, l'homotopie $H : M \times [0,1] \longrightarrow J^k E$ définie par

$$H(x, t) = (1 - t)j_k \omega(x) + t j_k \omega'(x)$$

vérifie les hypothèses du lemme 4.1, et le théorème est établi.

4.3. Extension au cas d'un fibré quelconque.

Soit $\pi : B \longrightarrow M$ un fibré localement trivial quelconque ; soit S une stratification cohérente du fibré $J^k B$. Le théorème 4.2 reste vrai dans $T(S) \subset \Gamma_r$ ($r \geq k + 2$), ensemble des sections σ de B telles que $j_k \sigma$ soit transverse à S ; on se ramène en effet immédiatement au théorème précédent en utilisant une carte de Γ_r , (cf. 1.4).

5. Le théorème de Sard et le lemme fondamental de la théorie.

5.1. THEOREME DE SARD. — Soient M et N des variétés, pas nécessairement C^∞ , de dimensions m et n respectivement ; soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable ; si la classe de différentiabilité de f est supérieure ou égale à $\text{Max}(1, m - n + 1)$, l'ensemble des valeurs régulières de f est résiduel dans N (son complémentaire est de mesure nulle dans N).

(Rappelons que $y \in N$ est appelé valeur régulière de f si, quel que soit $x \in f^{-1}(y)$, le rang de f en x est égal à n).

Pour une démonstration de ce théorème, voir R. Abraham, J. Robbin [1], p. 37.

5.2. LEMME FONDAMENTAL. — Soient M, V, N des variétés, et $H : M \times V \longrightarrow N$ un C^k -morphisme ; si $v \in V$, on note $H_v : M \longrightarrow N$ le morphisme défini par $H_v(x) = H(x, v)$. Soit S une stratification dénombrable de N ; si

a) $k \geq \text{Max}(1, m - \text{codim } S + 1)$ où $m = \dim M$,

b) H est transverse à S sur $U \times V$ où U est un ouvert de M ,

alors l'ensemble des $v \in V$ tels que H_v soit transverse à S sur U est dense dans V .

En effet, soit $p : M \times V \longrightarrow V$ la projection canonique, et $\Sigma_i = H^{-1}(S_i) \cap (U \times V)$; on voit aisément que, pour $v \in V$, H_v est transverse à S_i sur U si et seulement si v est valeur régulière de la restriction de p à la variété Σ_i ; l'hypothèse a) permet d'appliquer le théorème de Sard pour chaque i , et le lemme est démontré (c'est ici qu'on a besoin de l'hypothèse de dénombrabilité de S : dans V , une intersection dénombrable d'ensembles résiduels, au sens de 5.1, est dense).

6. Le théorème de transversalité.

6.1. THEOREME. — Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, et S une stratification dénombrable de $J^k E$. Pour $r \geq k + 1$, l'ensemble $T(S)$

des $\omega \in D_r$, telles que $j_k \omega : M \longrightarrow J^k E$ soit transverse à S est un ensemble résiduel de D_r .

Démonstration (résumée). — Il suffit, M étant à base dénombrable, de montrer que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x tel que l'ensemble $T_U(S)$ des $\omega \in D_r$, vérifiant " $j_k \omega$ est transverse à S sur U " est résiduel (une intersection dénombrable d'ensembles résiduels étant résiduelle).

a) *Densité de $T_U(S)$* . Soit V la fibre de $J^k E$ en x ; on construit, par un procédé standard, utilisant une trivialisaton du fibré E , une application $P : V \longrightarrow D$ continue et telle que

1) $j_k P(v)(x) = v$ pour tout $v \in V$, c'est-à-dire que P est un prolongement.

2) $P(0) = 0$.

3) $P(v)$ est C^∞ quel que soit v .

4) L'application $\bar{H} : M \times V \longrightarrow J^k E$ définie par

$$\bar{H}(y, v) = j_k P(v)(y)$$

est une *submersion* sur $U \times V$, U étant un voisinage assez petit de x dans M .

Alors, si $\omega \in D_{r'}$, où

$$r' \geq k + \text{Max}(1, m - \text{codim } S + 1) \quad (m = \dim M),$$

l'application $H : M \times V \longrightarrow J^k E$ définie par

$$H(y, v) = j_k \omega(y) + j_k P(v)(y) = j_k(\omega + P(v))(y)$$

est encore une submersion sur $U \times V$; d'après le lemme fondamental 5.2, l'ensemble des v tels que $j_k(\omega + P(v))$ soit transverse à S sur U est dense dans V ; P étant continu, on a prouvé la densité de $T_U(S) \cap D_{r'}$ dans $D_{r'}$; mais $D_{r'}$ est dense dans D_r (Proposition 1.3); donc $T_U(S)$ est dense dans D_r .

b) On démontre ensuite que $T_U(S)$ est une intersection dénombrable d'ouverts (denses d'après a)), et donc un ensemble résiduel, de la façon suivante : les strates de S sont à base dénombrable de voisinages (sous-variétés régulières de $J^k E$); on recouvre alors chaque strate par une famille dénombrable de fermés de $J^k E$; pour chacun

de ces fermés, l'ensemble des ω telles que $j_k \omega$ soit transverse, sur U , à la distribution correspondante définie dans la proposition 2.1 est, d'après 2.1 et 3.3, un ouvert ; il est clair que $T_U(S)$ est égal à l'intersection de ces ouverts.

Remarque. — Dans certains cas, on peut ajouter une précision intéressante.

1) Si $\text{codim } S > m = \dim M$, $T(S)$ est un ouvert dense dans D_r , pour $r \geq k + 1$.

Il suffit de justifier "ouvert" ; mais dans ce cas, " $j_k \omega$ est transverse à S " signifie simplement que, quel que soit $x \in M$, $j_k \omega(x)$ n'appartient à aucune strate non ouverte de $J^k E$; cette condition définit un ouvert de $J^k E$ d'après la propriété b) de la définition d'une stratification.

On en déduit immédiatement que $T(S)$ est un ouvert dense dans D_r , pour $r \geq k$.

2) Si S est une stratification cohérente de $J^k E$, $T(S)$ est un ouvert dense dans D_r , pour $r \geq k + 1$.

Immédiat d'après le corollaire 3.3.

6.2. Extension au cas d'un fibré quelconque.

Si $\pi : B \longrightarrow M$ est un fibré quelconque, et S une stratification dénombrable de $J^k B$, on a un théorème identique au précédent dans Γ_r , $r \geq k + 1$:

Si $\sigma \in \Gamma_r$, on démontre le théorème sur un voisinage de σ en se ramenant au théorème précédent, à l'aide de la carte définie en 1.4 (il s'agit donc d'une technique de linéarisation).

Remarque. — Ce théorème est à peu près le plus général que l'on puisse obtenir (en dimension finie). Par exemple, le théorème de transversalité classique, relatif aux applications d'une variété M dans une variété N munie d'une stratification dénombrable S , en est une conséquence triviale : on applique le théorème précédent aux sections du fibré trivial $M \times N \longrightarrow M$, muni de la stratification $S' = M \times S$.

7. Cas des formes différentielles.

Soit toujours M une variété C^∞ à base dénombrable ; les notations relatives au fibré cotangent à M sont celles de II. 1. On va pouvoir énoncer dans ce cas, outre le théorème 6.1, un théorème de transversalité relatif aux formes différentielles *fermées*.

L'ensemble des p -formes fermées de classe C^k , noté $\mathcal{O}_k^p(M)$ ($k \geq 1$), sera muni de la C^k -topologie induite de $D_k^p(M)$; c'est aussi un espace vectoriel topologique localement convexe, et un espace de Baire.

THEOREME. — Soit S une stratification dénombrable de ${}^p\mathcal{G}_k^*M$ (fibré des k -jets de p -formes fermées) ; l'ensemble $T(S)$ des $\omega \in \mathcal{O}_r^p(M)$ telles que $j_k\omega$ soit transverse à S est, pourvu que $r \geq k + 1$ un ensemble résiduel.

La démonstration est analogue à celle du théorème 6.1 ; il suffit de montrer que l'on peut définir une "famille de perturbations" P , pour chaque point $x \in M$, permettant de déformer toute forme fermée en une forme fermée transverse dans un voisinage de x . Pour cela, soit V la fibre en x de ${}^{(p-1)}T_{(k+1)}^*M$ (fibré des jets d'ordre $k + 1$ de $p - 1$ formes non nécessairement fermées), et $\tilde{P} : V \longrightarrow D^{(p-1)}(M)$ un "prolongement" ayant les propriétés de 6.1 a) ; alors l'application $P : V \longrightarrow \mathcal{O}^p(M)$ définie par $P(v) = d\tilde{P}(v)$ (où d désigne la différentiation extérieure) a les propriétés requises pour achever la démonstration comme dans 6.1.

Remarques. — 1) Comme dans 6.1, on peut affirmer de plus que $T(S)$ est ouvert si la codimension de S est supérieure à la dimension de M , ou si S est cohérente.

2) Les "perturbations" effectuées dans la démonstration du théorème ne mettent en jeu que des p -formes *exactes* ; on peut donc dire que $T(S)$ est résiduel dans chaque classe de cohomologie de $\mathcal{O}_r^p(M)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM and J. ROBBIN, Transversal mappings and flows. Benjamin, New-York, 1967.
- [2] N. BOURBAKI, Algèbre – Chap. 3, Algèbre multilinéaire. Hermann, Paris 1958.
- [3] E. CARTAN, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, Paris 1945.
- [4] S.S. CHERN, The geometry of G-structures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 1966, 167-219.
- [5] C. GODBILLON, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris 1969.
- [6] E. GOURSAT, Leçons sur le problème de Pfaff, Hermann, Paris 1922.
- [7] John W. GRAY, Some global properties of contact structures, *Ann. Math.* 69, 2, 1959, 421-450.
- [8] A. HAEFLIGER et A. KOSINSKI, Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables, Séminaire H. Cartan, Ecole Normale Sup., Paris, Exposé 8, 1956/57.
- [9] H.I. LEVINE, Singularities of differentiable mappings, Bonn, 1959.
- [10] P. LIBERMANN, Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée, *Bull. Ac. Roy. Belg. Cl. Sc. (5)*, 39, 1953, 846-850.
- [11] Jean MARTINET, Classe et points critiques d'une forme de Pfaff, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 264, 1967, 97-99.
- [12] Jean MARTINET, Sur quelques singularités de formes différentielles admettant des modèles locaux, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 266, 1968, 1 246-48.
- [13] J. MATHER, Stability of C^∞ -mappings V. Transversality (à paraître).
- [14] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1965, 286-294.
- [15] R. THOM, Les singularités des applications différentiables. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, VI, 1956, 43-87.

- [16] R. THOM, Un lemme sur les applications différentiables. *Bol. Soc. Mat. Mexic*, 2^a Serie, t. 1, 1956, 59-71.
- [17] H. WHITNEY, On singularities of mappings of euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane. *Ann. Math.* 62, 3, 1955, 374-410.
- [18] S. STERNBERG, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall édit. U.S.A., 1964.
- [19] H. WHITNEY, Analytic extensions for differentiable functions defined on closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 36, 1934, 63-89.

(Thèse, Fac. Sciences, Grenoble 1969)

Jean MARTINET
Département de Mathématiques
Université de Strasbourg
rue René Descartes
67 – Strasbourg