

JACQUES FARAUT

**Semi-groupes de mesures complexes et calcul
symbolique sur les générateurs infinitésimaux
de semi-groupes d'opérateurs**

Annales de l'institut Fourier, tome 20, n° 1 (1970), p. 235-301

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_235_0

© Annales de l'institut Fourier, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SEMI-GROUPES DE MESURES COMPLEXES ET CALCUL SYMBOLIQUE SUR LES GÉNÉRATEURS INFINITESIMAUX DE SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS

par Jacques FARAUT

Introduction.

1. Considérons un semi-groupe fortement continu de contractions $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach E . Soit μ une mesure bornée sur $[0, \infty[$ et posons

$$\forall x \in E, G(\mu)x = \int_0^\infty P_t x \mu(dt)$$

$G(\mu)$ est un opérateur borné sur E , et l'application qui à μ fait correspondre $G(\mu)$ est un homomorphisme de l'algèbre de convolution $M(\mathbb{R}_+)$ des mesures de variation totale finie sur $[0, \infty[$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des opérateurs bornés sur E .

Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures sur $[0, \infty[$, de variations totales inférieures ou égales à 1. La famille d'opérateurs $Q_t = G(\mu_t)$ est un semi-groupe de contractions sur E , et si nous supposons que μ_t converge étroitement vers δ quand t tend vers 0, le semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est fortement continu. Une question se pose : quel est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$? Nous y répondrons au chapitre III.

2. Auparavant nous étudions au chapitre I les semi-groupes de mesures. L'instrument essentiel de cette étude est le principe du maximum du module : Soit X un espace localement compact, $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|f\| = \text{Sup } |f|$. Par définition un opérateur (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module si

$$f \in D_A, f(x) = \|f\| \implies \text{Re } Af(x) \leq 0$$

Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur $C_0(X)$ vérifie le principe du maximum du module. Réciproquement si un opérateur (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module, a un domaine dense et est tel que

$$\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)D_A \text{ soit dense,}$$

alors (D_A, A) est préfermé et le plus petit prolongement fermé de (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur $C_0(X)$.

3. Le principe du maximum du module permet de déterminer les générateurs infinitésimaux de semi-groupes de mesures : soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures complexes sur \mathbb{R}^m , de variations totales inférieures ou égales à 1, vaguement continu, alors $\frac{1}{t}(\mu_t - \delta)$ a une limite T dans l'espace des distributions $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$, T est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$. L'ensemble des générateurs infinitésimaux de tels semi-groupes de mesures est un cône convexe fermé P de $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$ caractérisé par la propriété suivante :

$$(T \in P) \iff (\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, |\varphi(x)| \leq \varphi(0) \implies \operatorname{Re} \langle T, \varphi \rangle \leq 0)$$

Nous donnons une représentation intégrale des distributions du cône P .

4. Dans le chapitre II nous étudions certains endomorphismes d'algèbres de mesures. D'abord nous déterminons les distributions du cône P qui engendrent des semi-groupes de mesures dont les supports sont contenus dans un cône convexe fermé de \mathbb{R}^m , en particulier les distributions qui engendrent les semi-groupes de mesures dont les supports sont contenus dans $[0, \infty[$. Nous étudions ensuite les endomorphismes de norme 1, étroitement continus, de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$. Cette étude est généralisée aux algèbres $M(C)$ où C est un cône convexe fermé de \mathbb{R}^m .

5. Le chapitre III est consacré au calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions. L'homomorphisme G que nous avons défini en 1 est étendu à l'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ des distributions dont les supports sont contenus

dans $[0, \infty[$ et qui sont sommes finies de dérivées de mesures de variation totale finie ; si T est une telle distribution, l'opérateur $G(T)$ est alors en général non borné.

Nous pouvons maintenant répondre à la question que nous avons posée en 1. Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$ du type décrit en 3, le générateur infinitésimal du semi-groupe $Q_t = G(\mu_t)$ est l'opérateur $G(T)$, où T désigne le générateur infinitésimal du semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$.

Nous étudions ensuite la relation qui existe entre le spectre du générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ et celui du générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$.

6. Une application en est faite à la théorie du potentiel. Soit X un espace localement compact à base dénombrable. Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini, c'est-à-dire une application positive de l'espace $C_K(X)$ des fonctions continues à support compact dans l'espace $C_0(X)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Nous disons que V est un noyau de Hunt s'il satisfait au principe complet du maximum et si $V(C_K)$ est dense dans C_0 . D'après un théorème dû à Hunt, un tel noyau V est l'intégrale d'un semi-groupe fortement continu de contractions positives $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sur $C_0(X)$. Nous définissons les puissances fractionnaires du noyau V : pour $0 < \alpha < 1$ nous posons

$$\forall f \in C_K^+, \forall x \in X, V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty P_t f(x) t^{\alpha-1} dt$$

Nous montrons que V^α est l'intégrale d'un semi-groupe de contractions positives $Q_t = G(\mu_t)$ où $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de mesures positives sur $[0, \infty[$. Nous en déduisons que V^α est aussi un noyau de Hunt.

Dans le cas où le noyau V est celui du potentiel newtonien, V^α est le noyau d'ordre 2α de Marcel Riesz.

7. Nous avons rassemblé dans l'appendice des définitions et propriétés, concernant des espaces de mesures et de distributions, que nous utilisons dans le texte. Les références qui les concernent sont précédées du signe 0.

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur Jacques Deny qui m'a proposé d'étudier la question qui a été à l'origine de mes recherches et qui m'a encouragé par l'intérêt qu'il y a toujours porté.

Je remercie Monsieur Paul Malliavin de s'être intéressé à ce travail et Monsieur Roger Temam de m'avoir proposé le sujet de seconde thèse.

TABLE DES MATIERES

	Pages
CHAPITRE I. — <i>Semi-groupes de mesures</i>	240
I. Semi-produit intérieur et principe du maximum du module	240
II. Le cône P	242
III. Semi-groupes de mesures de type H	244
IV. Représentation intégrale des distributions de P ...	248
V. Caractérisation des transformées de Fourier des semi-groupes de mesures	257
CHAPITRE II. — <i>Homomorphismes d'algèbres de mesures</i>	261
VI. Le cône P(C)	261
VII. Endomorphismes de $M(\mathbb{R}_+)$	264
VIII. Homomorphismes d'algèbres de mesures M(C) ...	271
CHAPITRE III. — <i>Calcul symbolique sur les générateurs infini- tésimaux de semi-groupes</i>	280
IX. Homomorphisme associé à un semi-groupe de con- tractions	280
X. Génération de semi-groupes de contractions	282
XI. Relations spectrales	285
XII. Application à la théorie du potentiel. Puissances fractionnaires d'un noyau de Hunt	291
APPENDICE	294
1. Espace de mesures $M(X)$	294
2. Espace de distributions \mathcal{D}'_{L1}	297
3. Spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$	298

CHAPITRE I

SEMI-GROUPES DE MESURES

Le principe du maximum du module permet de caractériser les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions sur $C_0(X)$, espace des fonctions continues sur un espace localement compact X et tendant vers 0 à l'infini. Dans la partie I nous indiquons le rapport qui existe entre le principe du maximum du module et la définition d'un opérateur dissipatif relativement à un semi-produit intérieur (Lumer-Phillips [4]).

Dans les parties II et III nous utilisons le principe du maximum du module pour déterminer les semi-groupes de mesures de variation totale inférieure ou égale à 1 sur \mathbb{R}^m et leurs générateurs infinitésimaux dont nous donnons à la partie IV une représentation intégrale.

Dans la partie V nous étudions les transformées de Fourier des mesures d'un semi-groupe de mesures sur un groupe abélien localement compact.

I. Semi-produit intérieur et principe du maximum du module.

1. *Semi-produit intérieur et opérateurs dissipatifs.*

G. Lumer et R.S. Phillips ont caractérisé les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions d'un espace de Banach E à l'aide de semi-produits intérieurs [4].

Un semi-produit intérieur sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{C} , $(x, y) \longmapsto [x, y]$, vérifiant :

$$[x, y] \text{ est linéaire en } x$$

$$|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$$

$$[x, x] = \|x\|^2$$

Supposons l'espace de Banach E muni d'un semi-produit intérieur. Un opérateur (D_A, A) désigne le couple d'un sous-espace D_A de E et d'une application linéaire A de D_A dans E .

DEFINITION I.1. — *Un opérateur (D_A, A) sur E est dit dissipatif si*

$$\forall x \in D_A, \operatorname{Re}[Ax, x] \leq 0$$

PROPOSITION I.1. — *Un opérateur dissipatif de domaine dense est préfermé ([4] Lemma 3.3 p. 693).*

Comme dans le cas hilbertien le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions est dissipatif, et on a la réciproque suivante, qui est une variante de résultats démontrés par Lumer et Phillips ([4] Theorem 3.1 p. 686).

PROPOSITION I.2. — *Soit (D_A, A) un opérateur dissipatif de domaine dense tel que*

$$\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)D_A \text{ est dense dans } E$$

Alors le plus petit prolongement fermé de (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.

2. Principe du maximum du module.

Soit X un espace localement compact, et $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme

$$\|f\| = \operatorname{Sup} |f|$$

DEFINITION I.2. — *Un opérateur (D_A, A) sur $C_0(X)$ vérifie le principe du maximum du module si*

$$\forall f \in D_A, f(x) = \|f\| \implies \operatorname{Re} Af(x) \leq 0$$

Définissons sur $C_0(X)$ un semi-produit intérieur de la façon suivante : soit f une fonction de $C_0(X)$, $|f|$ atteint son maximum en au moins un point de X , nous en choisissons un que nous notons x_f , et posons

$$[f, g] = f(x_g) \overline{g(x_g)}$$

PROPOSITION I.3. — *Si un opérateur (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module, il est dissipatif pour ce semi-produit intérieur.*

Soit f une fonction de D_A , posons $a = f(x_f)$ et considérons $g = \bar{a}f$, alors $g(x_f) = \|g\|$ donc

$$\operatorname{Re} A g(x_f) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re} A f(x_f) \overline{f(x_f)} = \operatorname{Re} [A f, f] \leq 0$$

Ainsi en combinant les propositions I.2 et I.3 nous pouvons énoncer :

PROPOSITION I.4. — Soit (D_A, A) un opérateur sur $C_0(X)$ vérifiant le principe du maximum du module, de domaine dense et tel que, pour tout λ positif, $(\lambda I - A)D_A$ soit un sous-espace dense ; alors (D_A, A) est préfermé et le plus petit prolongement fermé de (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions sur $C_0(X)$.

Le principe du maximum positif permet de déterminer les semi-groupes de mesures positives sur \mathbf{R}^m et leurs générateurs infinitésimaux, les laplaciens généralisés (C. Herz [2]). Par une démarche analogue nous déterminerons à l'aide du principe du maximum du module les semi-groupes de mesures complexes sur \mathbf{R}^m de variations totales inférieures ou égales à 1 et leurs générateurs infinitésimaux.

II. Le cône P.

DEFINITION II.1. — Soit P l'ensemble des distributions T de $\mathcal{O}'(\mathbf{R}^m)$ vérifiant

$$f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^m), \forall x \in \mathbf{R}^m |f(x)| \leq f(0) \implies \operatorname{Re} \langle T, f \rangle \leq 0$$

P est un cône convexe fermé de $\mathcal{O}'(\mathbf{R}^m)$.

PROPOSITION II.1. — Soit (D_A, A) un opérateur sur $C_0(\mathbf{R}^m)$ vérifiant le principe du maximum du module, commutant avec les translations, dont le domaine contient $\mathcal{O}(\mathbf{R}^m)$, alors il existe une distribution T de P telle que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^m), A f = T * f$$

L'opérateur (D_A, A) étant dissipatif et de domaine dense est préfermé (Proposition I.1).

La restriction de A à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ est une application fermée de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ dans $C_0(\mathbb{R}^m)$ donc continue, l'application

$$f \longmapsto A \check{f}(0) \quad (\check{f}(x) = f(-x))$$

est continue donc est une distribution T . Cette distribution appartient à P et

$$Af = T * f$$

PROPOSITION II.2. — Si T appartient à P , la restriction de T à $\mathbb{R}^m - \{0\}$ est une mesure de Radon, la restriction de T au complémentaire d'un voisinage quelconque de 0 est une mesure de variation totale finie, donc T est une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$, espace des distributions sur \mathbb{R}^m dont les régularisées appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^m)$ (Définition 0.2 et [7] p. 199).

Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$, $\text{Supp}(g) \subset B(0, \varepsilon)$ boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, $g(0) = 1$, $|g| \leq 1$; soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$, $\text{Supp}(f) \subset \bar{C}B(0, \varepsilon)$, $M = \|f\|_\infty$; soit c nombre complexe de module 1 tel que $\langle T, cf \rangle$ soit réel positif. Posons

$$h = Mg + cf$$

alors nous avons $h(0) = \|h\|_\infty$, donc

$$\text{Re} \langle T, h \rangle = M \text{Re} \langle T, g \rangle + |\langle T, f \rangle| \leq 0$$

d'où

$$|\langle T, f \rangle| \leq \text{Re} \langle -T, g \rangle \|f\|_\infty$$

Il en résulte que la restriction de T à $\bar{C}B(0, \varepsilon)$ est une mesure de variation totale finie. Soit α une fonction de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ égale à 1 au voisinage de 0 ,

$$T = \alpha T + (1 - \alpha)T$$

αT est une distribution à support compact, $(1 - \alpha)T$ une mesure de variation totale finie, et par suite T est une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$.

Elle peut ainsi être prolongée aux fonctions de classe C^∞ et bornées, et si f est une telle fonction vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^m |f(x)| \leq f(0)$, alors

$$\text{Re} \langle T, f \rangle \leq 0$$

En particulier la transformée de Fourier de T est une fonction continue de partie réelle négative ou nulle.

III. Semi-groupes de mesures de type H.

DEFINITION III.1. — Une famille $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de mesures sur \mathbb{R}^m est un semi-groupe de mesures de type H si

$$\|\mu_t\| \leq 1 \quad (\|\mu\| \text{ désigne la variation totale de la mesure } \mu)$$

$$\mu_0 = \delta, \quad \forall t, s \geq 0 \quad \mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t = \delta \quad (\text{vaguement})$$

THEOREME III.1. — Soit T une distribution de $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$, les propriétés suivantes sont équivalentes

- a) T appartient à P
- b) T est limite dans $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$ de mesures de la forme $k(\mu - \delta)$ avec $k > 0, \|\mu\| \leq 1$
- c) Il existe un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de type H tel que

$$T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mu_t - \delta) \quad \text{dans } \mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$$

Il est clair que c) entraîne b) et que b) entraîne a). Montrons que a) entraîne c).

Soit T une distribution de P. Considérons sur $C_0(\mathbb{R}^m)$ l'opérateur (D_A, A) défini par $D_A = \dot{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^m)$, espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^m qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées (Définition 0.5), $Af = T * f$. D_A est dense dans $C_0(\mathbb{R}^m)$ et (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module. La transformée de Fourier ψ de T est une fonction continue de partie réelle négative ou nulle, donc

$$\forall \lambda > 0, \forall y \in \mathbb{R}^m, \lambda - \psi(y) \neq 0.$$

Nous allons montrer que pour tout λ positif $(\lambda I - A)D_A$ contient $\mathcal{F}C_K(\mathbb{R}^m)$, espace des transformées de Fourier des fonctions continues à support compact, qui est dense dans $C_0(\mathbb{R}^m)$. Soit h une fonction continue à support compact et $f = \mathcal{F}h$:

$$f(x) = \mathcal{F}h(x) = \int e^{2i\pi x \cdot y} h(y) dy$$

alors f appartient à D_A et

$$Af = \overline{\mathfrak{F}}(\psi h) .$$

Soit $g = \overline{\mathfrak{F}} k$ une fonction de $\mathfrak{F}C_K(\mathbf{R}^m)$, la fonction $f = \overline{\mathfrak{F}}\left(\frac{k}{\lambda - \psi}\right)$ vérifie

$$\lambda f - Af = g$$

D'après la proposition I.4 le plus petit prolongement fermé de (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ fortement continu de contractions de $C_0(\mathbf{R}^m)$. Chaque opérateur de ce semi-groupe commute avec les translations, donc ce semi-groupe est défini par un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$.

$$P_t f = \mu_t * f$$

On vérifie que ce semi-groupe de mesures est de type H et de plus

$$\forall f \in \dot{\mathcal{O}}_3(\mathbf{R}^m) , \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle \mu_t - \delta , f \rangle = \langle T , f \rangle$$

THEOREME III.2. — Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures de type H sur \mathbf{R}^m ; quand t tend vers 0, $\frac{1}{t}(\mu_t - \delta)$ converge dans $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbf{R}^m)$ vers une distribution appartenant à P.

Soit φ_t la transformée de Fourier de μ_t , pour tout y de \mathbf{R}^m l'application qui à t fait correspondre $\varphi_t(y)$ est mesurable et vérifie

$$\forall t \geq 0 , |\varphi_t(y)| \leq 1$$

$$\forall t, s \geq 0 , \varphi_{t+s}(y) = \varphi_t(y) \varphi_s(y)$$

Donc il existe une fonction ψ sur \mathbf{R}^m , continue, de partie réelle négative ou nulle telle que ([3] p. 144)

$$\varphi_t = e^{t\psi}$$

Soit h une fonction continue à support compact et $f = \overline{\mathfrak{F}} h$, posons

$$L(f) = \int \psi(y) h(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle \mu_t - \delta , f \rangle$$

Si pour tout x de \mathbf{R}^m on a $|f(x)| \leq f(0)$ alors

$$\operatorname{Re} L(f) \leq 0$$

Posons $g(x) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\sin x_j}{x_j} \right)^2$, alors $g(0) = 1$ et si $x \neq 0$, on a $0 \leq g(x) < 1$.

Soit f une fonction de $C_K(\mathbf{R}^m)$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$$

Posons $M = \operatorname{Sup} \frac{|f|}{1-g}$; soit c un nombre complexe de module 1 tel que $L(cf)$ soit réel positif ou nul; posons $h = Mg + cf$, on a

$$|h| \leq Mg + M(1-g) = M = h(0)$$

donc

$$\operatorname{Re} L(h) \leq 0, \quad |L(f)| \leq M \operatorname{Re} L(-g)$$

Il en résulte que L se prolonge en une distribution T de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbf{R}^m)$.

Soit $\{P_t\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe de contractions sur $C_0(\mathbf{R}^m)$ défini par $P_t f = \mu_t * f$.

Ce semi-groupe est faiblement continu, en effet soit ν une mesure sur \mathbf{R}^m de variation totale finie

$$\int P_t f(x) \nu(dx) = \int (\check{f} * \nu)(y) \mu_t(dy) \quad (\check{f}(x) = f(-x))$$

La fonction $\check{f} * \nu$ appartient à $C_0(\mathbf{R}^m)$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int (\check{f} * \nu)(y) \mu_t(dy) = \check{f} * \nu(0) = \int f(x) \nu(dx)$$

Donc d'après un théorème dû à Yosida ([9] p. 233) ce semi-groupe est aussi fortement continu.

Le domaine du générateur infinitésimal (D_A, A) de ce semi-groupe contient $\mathcal{S}C_K(\mathbf{R}^m)$, si \hat{f} appartient à $C_K(\mathbf{R}^m)$, $(A\hat{f}) = \psi \hat{f}$, $Af = T * f$. L'opérateur (D_A, A) étant fermé, il en résulte que D_A contient $\dot{\mathcal{B}}(\mathbf{R}^m)$ et qu'en particulier

$$\forall f \in \dot{\mathcal{B}}(\mathbf{R}^m), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{t} (\mu_t - \delta), f \right\rangle = \langle T, f \rangle$$

Il est clair que la distribution T appartient à P .

PROPOSITION III.1. — Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de mesures de type H ; alors l'application $t \longmapsto \mu_t$ de \mathbb{R}_+ dans $M(\mathbb{R}^m)$ est étroitement continue.

D'après la proposition 0.2 il suffit de vérifier :

a) que l'application $t \longmapsto \mu_t$ est vaguement continue, ce qui est une conséquence directe de la démonstration de la proposition précédente.

b) que pour tout $t_0 \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $h_1 > 0$ et K compact de \mathbb{R}^m tels que

$$|t - t_0| \leq h_1 \implies |\mu_t|(\text{CK}) < \varepsilon$$

Montrons d'abord

$$\forall r > 0, \lim_{t \rightarrow 0} |\mu_t|(\text{CB}(0, r)) = 0$$

Soit f une fonction continue à support compact, telle que $|f| \leq 1$, $\text{Supp}(f) \subset \text{CB}(0, r)$, soit $M_r = \frac{1}{r^2}(1 + r^2)$, et c_t un nombre complexe de module 1 tel que $\langle \mu_t, c_t f \rangle$ soit réel positif ou nul, posons

$$h(x) = M_r \frac{1}{1 + x^2} + c_t f(x)$$

$$|h(x)| \leq M_r = h(0), \text{ donc } \text{Re} \left\langle \frac{1}{t} (\mu_t - \delta), h \right\rangle \leq 0$$

$$|\langle \mu_t, f \rangle| \leq t M_r \text{Re} \left\langle \frac{1}{t} (\delta - \mu_t), \frac{1}{1 + x^2} \right\rangle$$

d'où $\lim_{t \rightarrow 0} |\mu_t|(\text{CB}(0, r)) = 0$. Il en résulte que μ_t converge étroitement vers δ quand t tend vers 0.

Soit $t_0 > 0$ et ε , $0 < \varepsilon \leq 1$; soit $r > 0$, d'après ce qui précède il existe $h_0 > 0$ tel que

$$\forall h, 0 \leq h \leq h_0, |\mu_h|(\text{CB}(0, r)) \leq \varepsilon$$

Soit t_1 tel que

$$0 \leq t_1 < t_0, |t_0 - t_1| \leq \frac{1}{2} h_0$$

il existe R tel que

$$|\mu_{t_1}|(\mathcal{C}B(0, R)) \leq \varepsilon$$

et si t appartient à l'intervalle $\left[t_1, t_0 + \frac{1}{2} h_0 \right]$, $t = t_1 + h$ avec $0 \leq h \leq h_0$, d'après la propriété de semi-groupe

$$|\mu_t|(\mathcal{C}B(0, r + R)) \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 3\varepsilon$$

d'où le résultat annoncé.

PROPOSITION III.2. — *Etant donné une distribution T de P , il existe un seul semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de type H tel que*

$$T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mu_t - \delta) \quad (\text{dans } \mathcal{O}'(\mathbb{R}^m))$$

En effet, soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ un tel semi-groupe, φ_t la transformée de Fourier de μ_t et ψ celle de T , nous avons

$$\varphi_t = e^{t\psi}$$

donc le semi-groupe $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ est déterminé de façon unique.

IV. Représentation intégrale des distributions de P .

Soit S un laplacien généralisé au sens de C. Herz [2] sur $\mathbb{R}^m \times T$, c'est-à-dire une distribution réelle vérifiant

$$g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m \times T), \forall (x, \theta) \in \mathbb{R}^m \times T, g(x, \theta) \leq g(0, 0) \implies \langle S, g \rangle \leq 0$$

Considérons la distribution T sur \mathbb{R}^m définie par

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), \langle T, f \rangle = \langle S, e^{i\theta} f \rangle$$

Supposons que pour tout n de \mathbb{R}^m on ait, $|f(x)| \leq f(0)$, alors $\text{Re}(f(x) e^{i\theta}) \leq f(0)$ donc

$$\text{Re} \langle T, f \rangle = \langle S, \text{Re}(e^{i\theta} f) \rangle \leq 0.$$

Donc la distribution T appartient à P . On a ainsi défini une application π du cône Q des laplaciens généralisés sur $\mathbb{R}^m \times T$ dans le

cône P. L'objet de ce paragraphe est de montrer que π est une application surjective.

1. Soit E l'espace des fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^m appartenant à $C_0(\mathbb{R}^m)$ ainsi que leurs dérivés premières et secondes muni de la norme :

$$\|f\| = \text{Sup } |f| + \sum_{j=1}^m \text{Sup } \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| + \sum_{j,k=1}^m \text{Sup } \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right|$$

PROPOSITION IV.1. — Une distribution T de P se prolonge en une forme linéaire continue sur E.

Notons $u(x) = \frac{1}{1 + |x|^2}$, et si f est une fonction de E posons

$$f(x) = f(0) u(x) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) x_j u(x) + g(x)$$

et

$$A(f) = \text{Sup } \frac{|g|}{1 - u}$$

$A(f)$ est une semi-norme continue sur E. Supposons que f appartienne à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ et posons

$$h = A(f)u + cg$$

où c est un nombre complexe de module 1 tel que $\langle T, cg \rangle$ soit réel positif ou nul.

$$|h(x)| \leq A(f)u(x) + A(f)(1 - u(x)) = A(f) = h(0)$$

donc

$$|\langle T, g \rangle| \leq A(f) \text{Re} \langle -T, u \rangle$$

Il en résulte qu'il existe une constante B telle que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), |\langle T, f \rangle| \leq B \|f\|$$

LEMME. — Pour toute distribution T de P on a

$$|\text{Im} \langle T, x_j u \rangle| \leq \text{Re} \langle -T, u \rangle \quad (j = 1, \dots, m)$$

En effet, si b est un vecteur de \mathbb{R}^m de norme inférieure ou égale à 1, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^m, |u(x) + i(b, x) u(x)| \leq 1$$

où (b, x) désigne le produit scalaire ordinaire. Considérons

$$h(x) = u(x) + i(b, x) u(x)$$

avec $|b| \leq 1$, alors on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^m, |h(x)| \leq h(0)$$

et donc

$$\operatorname{Re} \langle T, h \rangle \leq 0$$

$$- \operatorname{Im} \langle T, (b, x) u(x) \rangle \leq \operatorname{Re} \langle -T, u \rangle$$

Le résultat s'obtient en changeant i en $-i$.

PROPOSITION IV.2. — Une distribution T appartient à P et à $-P$ si et seulement si elle est de la forme

$$T = ic\delta + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \quad (1)$$

où c, b_j sont des nombres réels.

Supposons que T appartienne à P et à $-P$, on a alors

$$\operatorname{Re} \langle T, u \rangle = 0$$

et donc $\langle T, g \rangle = 0$, et d'après le lemme $\operatorname{Im} \langle T, x_j u \rangle = 0$.

$$\langle T, f \rangle = i \operatorname{Im} \langle T, u \rangle f(0) + \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \langle T, x_j u \rangle \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \quad (0)$$

Réciproquement supposons que T soit de la forme (1). Soit f une fonction de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^m)$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^m, |f(x)| \leq f(0)$$

il en résulte

$$\operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0, j = 1, \dots, m$$

on aura donc

$$\operatorname{Re} \langle T, f \rangle = 0$$

PROPOSITION IV.3. — L'ensemble M des distributions de P vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle T, x_j u \rangle = 0, j = 1, \dots, m \\ \langle -T, u \rangle = 1 \end{cases}$$

est un convexe fermé faiblement compact de E' , dual topologique de E .

Il est clair que M est convexe et fermé, pour montrer qu'il est faiblement compact il suffit de montrer qu'il est borné dans E' . Soit T une distribution de M

$$\langle T, f \rangle = -f(0) + i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \operatorname{Im} \langle T, x_j u \rangle + \langle T, g \rangle$$

$$|\langle T, f \rangle| \leq |f(0)| + C \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \right| + A(f) \leq D \|f\|$$

Donc M est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon D .

2. Points extrémaux de M .

LEMME. — Soient α, β, γ des fonctions de classe C^2 ayant des limites à l'infini, dont les dérivées premières et secondes tendent vers 0 à l'infini, et vérifiant

$$0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1$$

$$\alpha = 1 \text{ au voisinage de } 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Soit T une distribution de P , alors il existe deux nombres positifs λ et μ , vérifiant $\lambda + \mu = 1$, tels que $(\lambda\alpha + \beta)T$ et $(\mu\alpha + \gamma)T$ appartiennent à P .

Considérons

$$\lambda_0 = \inf \{ \lambda \geq 0, (\lambda\alpha + \beta)T \in P \}$$

$$\mu_0 = \inf \{ \mu \geq 0, (\mu\alpha + \gamma)T \in P \}$$

On veut montrer que $\lambda_0 + \mu_0 \leq 1$. Supposons au contraire $\lambda_0 + \mu_0 > 1$:

$$\exists \lambda_1 < \lambda_0 \quad (\lambda_1 \alpha + \beta)T \notin P$$

$$\exists \mu_1 < \mu_0 \quad (\mu_1 \alpha + \gamma)T \notin P, \lambda_1 + \mu_1 = 1$$

$$\exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), 1 = f(0) \geq |f(x)|, \operatorname{Re} \langle (\lambda_1 \alpha + \beta) T, f \rangle > 0$$

$$\exists g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), 1 = g(0) \geq |g(x)|, \operatorname{Re} \langle (\mu_1 \alpha + \gamma) T, g \rangle > 0$$

Posons alors

$$h = \alpha(\lambda_1 f + \mu_1 g) + \lambda_1 \beta f + \mu_1 \gamma g$$

Nous avons

$$1 = h(0) \geq |h(x)| \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle T, h \rangle > 0$$

d'où la contradiction.

PROPOSITION IV.4. — *Soit T un point extrémal de M, alors $\operatorname{Supp}(T) \cap (\mathbb{R}^m - \{0\})$ contient au plus un point.*

Supposons au contraire que $\operatorname{Supp}(T)$ contienne deux points x_1 et x_2 distincts et non nuls. Choisissons les fonctions α, β, γ du lemme telles que

α soit nulle au voisinage de x_1 et x_2

β " " " " " 0 et x_2

γ " " " " " 0 et x_1

D'après le lemme, il existe λ et μ , $\lambda + \mu = 1$ telles que $S_1 = (\lambda\alpha + \beta) T$ et $S_2 = (\mu\alpha + \gamma) T$ appartiennent à P. Posons

$$T_1 = S_1 - i \operatorname{Im} \langle S_1, u \rangle \delta - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \langle S_1, x_j u \rangle \frac{\partial \delta}{\partial x_j}$$

$$T_2 = S_2 - i \operatorname{Im} \langle S_2, u \rangle \delta - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \langle S_2, x_j u \rangle \frac{\partial \delta}{\partial x_j}$$

On a $T_1 + T_2 = T$. Les supports de T_1 et T_2 sont différents et ne sont réduits à $\{0\}$ ni l'un ni l'autre par hypothèse, donc

$$a = \operatorname{Re} \langle -T_1, u \rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Re} \langle -T_2, u \rangle \neq 0,$$

$\frac{1}{a} T_1$ et $\frac{1}{b} T_2$ appartiennent à M, d'où la contradiction.

PROPOSITION IV.5. — *Un point extrémal T de M est de la forme*

$$T = \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial \delta}{\partial x_j} + c\delta + d\delta_{x_0} \quad (2)$$

où (a_{jk}) est une forme quadratique sur \mathbb{R}^m à coefficients réels, et si R désigne le polynôme

$$R(y) = \sum_{j,k=1}^m a_{jk} y_j y_k + \sum_{j=1}^m (\text{Im} b_j) y_j - \text{Re } c$$

alors

$$|d| \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^m} R(y).$$

En effet, d'après les propositions IV.4, IV.1 et II.2, T est de la forme (2). Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^m à coefficients réels.

$$q(x) = \sum_{j,k=1}^m \xi_{jk} x_j x_k$$

Soit α une fonction égale à 1 au voisinage de 0 et nulle en x_0 , $0 \leq \alpha \leq 1$, posons $f(x) = e^{iq(x)} \alpha(x)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) = i \xi_{jk}$$

$$\text{Re} \langle -T, f \rangle = \sum_{j,k} (\text{Im} a_{jk}) \xi_{jk} + \text{Re } c \geq 0$$

La forme quadratique q étant quelconque il en résulte que $\text{Im } a_{jk} = 0$.

Soit λ un nombre complexe de module 1 et soit α une fonction de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$, égale à 1 au voisinage de 0, $|\alpha| \leq 1$, et égale à λ en x_0 , posons

$$f(x) = e^{-i(x,y)} \alpha(x)$$

$$\text{Re} \langle -T, f \rangle = R(y) + \text{Re}(\lambda d e^{-i(x_0,y)}) \geq 0$$

pour y fixé, soit λ tel que $\lambda d e^{-i(x_0,y)} = -|d|$; on obtient

$$|d| \leq R(y)$$

ceci étant vrai pour tout y

$$|d| \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^m} R(y)$$

3) Soit Q le cône des laplaciens généralisés sur $\mathbb{R}^m \times T$, et F l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^m \times T$ appartenant à $C_0(\mathbb{R}^m \times T)$ ainsi que leurs dérivées premières et secondes, muni de la norme :

$$\|f\| = \text{Sup } |f| + \sum_{j=1}^{m+1} \text{Sup} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| + \sum_{j,k=1}^{m+1} \text{Sup} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right|, \quad (x_{m+1} = \theta)$$

PROPOSITION IV.6. — Une distribution S de Q se prolonge en une forme linéaire continue sur F .

La démonstration est analogue à celle de la proposition IV.1. Soit f une fonction de F , posons

$$f(x, \theta) = f(0, 0) u \cos \theta + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(0, 0) x_j u \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}(0, 0) u \sin \theta + g(x, \theta)$$

$$A_1(f) = \text{Sup} \frac{|g|}{1 - u \cos \theta}$$

$A_1(f)$ est une semi-norme continue sur F , et comme dans la démonstration de la proposition IV.1 on montre qu'il existe une constante B_1 telle que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m \times T), \quad |\langle S, f \rangle| \leq B_1 \|f\|$$

PROPOSITION IV.7. — L'ensemble N des distributions de Q vérifiant

$$\begin{cases} \langle S, x_j u \cos \theta \rangle = 0 & (j = 1, \dots, m) \\ \langle -S, u e^{i\theta} \rangle = 1 \end{cases}$$

est un convexe fermé faiblement compact de F' , dual topologique de F .

Comme dans la proposition IV.3 on montre qu'il existe une constante D_1 telle que

$$\forall S \in N, \quad \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m \times T), \quad |\langle S, f \rangle| \leq D_1 \|f\|$$

PROPOSITION IV.8. — L'application π du cône Q des laplaciens généralisés sur $\mathbb{R}^m \times T$ dans le cône P défini par

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), \langle \pi(S), f \rangle = \langle S, f e^{i\theta} \rangle$$

est surjective.

L'application est continue pour les topologies *-faibles de F' et E' . L'image par π de N est contenue dans M ; N étant compact (proposition IV.6) $\pi(N)$ est compact donc fermé; par ailleurs $\pi(N)$ est convexe. En vertu du théorème de Krein-Milman, pour montrer que $\pi(N) = M$, il suffit de montrer que $\pi(N)$ contient l'ensemble des points extrémaux de M , et pour cela il suffit qu'il contienne l'ensemble des distributions de la forme (proposition IV.5).

$$T = \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial \delta}{\partial x_j} + c \delta + d \delta_{x_0}$$

où (a_{jk}) est une forme quadratique sur \mathbb{R}^m à coefficients réels, et

$$|d| \leq \text{Inf } R(y)$$

où R désigne le polynôme

$$R(y) = \sum_{j,k=1}^m a_{jk} y_j y_k + \sum_{j=1}^m (\text{Im } b_j) y_j - \text{Re } c$$

Soit T une telle distribution et posons

$$S = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m (\text{Im } b_j) \frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j \partial \theta} + (\text{Re } c - m) \frac{\partial^2 \delta}{\partial \delta^2} \\ + \sum_{j=1}^m (\text{Re } b_j) \frac{\partial \delta}{\partial x_j} + \text{Im } c \frac{\partial \delta}{\partial \theta} - m \delta + \rho \delta_{(x_0, \varphi)}$$

où $m = \text{Inf } R(y)$ et $d = \rho e^{i\varphi}$

S est un laplacien généralisé sur $\mathbb{R}^m \times T$ et $\pi(S) = T$.

Le cône $\pi(Q)$ contient également $P \cap (-P)$; en effet une distribution de $P \cap (-P)$ est de la forme (proposition IV.2).

$$T = ic \delta + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial \delta}{\partial x_j}$$

et si l'on pose

$$S = c \frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial \delta}{\partial x_j}$$

S appartient à Q et $\pi(S) = T$.

Toute distribution de P se décompose en

$$T = \lambda T_1 + T_2$$

où $\lambda \geq 0$, T_1 appartient à M et T_2 appartient à $P \cap (-P)$, on en déduit le résultat énoncé.

THEOREME IV.1. — Soit T une distribution de P, il existe :

- 1) Q forme quadratique réelle sur \mathbf{R}^m
- 2) L forme linéaire complexe sur \mathbf{R}^m
- 3) C constante complexe

vérifiant

$$\forall y \in \mathbf{R}^m, Q(y) + \text{Im } L(y) + \text{Re } C \geq 0$$

- 4) σ mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^m \times T - \{0\}$ vérifiant

$$\int \int_{|x|^2 + \theta^2 \leq 1} (x^2 + \theta^2) \sigma(dx, d\theta) < \infty$$

$$\int \int_{|x|^2 + \theta^2 > 1} \sigma(dx, d\theta) < \infty$$

tels que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^m), \langle T, f \rangle = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(0) + L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(0) - Cf(0)$$

$$+ \int \int_{\mathbf{R}^m \times T} \left\{ f(x) e^{i\theta} - \left[(1 + i\theta) f(0) + \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \right] u(x) \right\} \sigma(dx, d\theta).$$

D'après la proposition IV.8 il existe un laplacien généralisé S sur $\mathbf{R}^m \times T$ tel que $\pi(S) = T$. La distribution S admet la représentation suivante, que l'on déduit de la formule de Lévy-Khintchine : il existe

- 1) Q_1 forme quadratique réelle positive sur \mathbf{R}^{m+1}
- 2) L_1 forme linéaire réelle sur \mathbf{R}^{m+1}

3) C_1 constante positive

4) σ mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{T} - \{0, 0\}$ vérifiant

$$\int_{|x|^2 + \theta^2 \leq 1} (|x|^2 + \theta^2) \sigma(dx, d\theta) < \infty$$

$$\int_{|x|^2 + \theta^2 > 1} \sigma(dx, d\theta) < \infty$$

telles que

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{T}), \langle S, g \rangle = & Q_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) g(0, 0) + \\ & + L_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) g(0, 0) - C_1 g(0, 0) + \int_{\mathbf{R}^m \times \mathbf{T}} \left\{ g(x, \theta) - \right. \\ & \left. \left[g(0, 0) + \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} (0, 0) \right] u(x) \right\} \sigma(dx, d\theta) \end{aligned}$$

La formule IV.8.1 s'obtient à partir de la formule IV.8.2 en posant $g(x, \theta) = f(x) e^{i\theta}$.

V. Caractérisation des transformées de Fourier des semi-groupes de mesures.

Soit G un groupe abélien localement compact, Γ le groupe dual. Les transformées de Fourier des mesures sur G de variation totale finie sont caractérisées par la propriété suivante :

PROPOSITION V.1. — *Soit φ une fonction continue sur Γ , pour que φ soit la transformée de Fourier d'une mesure sur G de variation totale inférieure ou égale à A , il faut et suffit que pour tout polynôme trigonométrique sur G*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

on ait

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\gamma_k) \right| \leq A \|f\|_\infty$$

(Rudin [6] p. 32).

THEOREME V.1. — Soit ψ une fonction continue sur Γ telle que, pour tout t positif, $e^{t\psi}$ soit la transformée de Fourier d'une mesure sur G , de variation totale inférieure ou égale à 1, alors, pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \text{ vérifiant } f(0) = \|f\|_\infty$$

on a

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \leq 0.$$

En effet d'après la proposition précédente

$$\forall t > 0, \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{t\psi(\gamma_k)} \right| \leq f(0) = \sum_{k=1}^n c_k$$

donc

$$\forall t > 0, \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k (1 - e^{t\psi(\gamma_k)}) \geq 0$$

et en passant à la limite quand t tend vers 0

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \leq 0$$

THEOREME V.2. — Soit ψ une fonction continue sur Γ telle que pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \text{ vérifiant } f(0) = \|f\|_\infty$$

on ait

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \leq 0$$

alors pour tout t positif, $e^{t\psi}$ est la transformée de Fourier d'une mesure sur G de variation totale inférieure ou égale à 1.

Soit \bar{G} le compactifié de Bohr de G , $C(\bar{G})$ l'espace des fonctions continues sur \bar{G} . Pour tout polynôme trigonométrique sur G

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

posons

$$Af(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k)(x, \gamma_k)$$

L'ensemble D_A des polynômes trigonométriques sur G est un sous-espace dense de $C(\bar{G})$. Soit f un polynôme trigonométrique sur G dont le module est maximum en \bar{x}_0 , point de \bar{G} , et en ce point $f(\bar{x}_0) > 0$; le polynôme trigonométrique g défini par

$$g(x) = f(x + \bar{x}_0) = \sum_{k=1}^n c_k \psi(\bar{x}_0, \gamma_k)(x, \gamma_k)$$

vérifie $g(0) = \|g\|_\infty$, et par suite de l'hypothèse faite sur la fonction ψ

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k(\bar{x}_0, \gamma_k) \psi(\gamma_k) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re} Af(x_0) \leq 0$$

Ainsi l'opérateur (D_A, A) vérifie le principe du maximum du module (Définition I.2). En considérant $f(x) = (x, \gamma)$ on obtient $\operatorname{Re} \psi(\gamma) \leq 0$; donc pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)D_A = D_A$. Il en résulte que les opérateurs P_t définis sur D_A par

$$P_t f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n c_k e^{t\psi(\gamma_k)}(\bar{x}, \gamma_k)$$

se prolongent, pour $t > 0$, en des contractions sur $C(\bar{G})$ (Propositions I.2 et I.3); et par suite pour tout $t > 0$ et tout polynôme trigonométrique f sur G

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k e^{t\psi(\gamma_k)} \right| \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi, d'après la proposition V.1, pour tout t positif, $e^{t\psi}$ est la transformée de Fourier d'une mesure sur G de variation totale inférieure ou égale à 1.

PROPOSITION V.2. — *Soit ψ une fonction continue sur Γ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) pour tout t réel, $e^{t\psi}$ est la transformée de Fourier d'une mesure sur G de variation totale inférieure ou égale à $e^{w|t|}$, où w est une constante positive ou nulle.

b) pour tout polynôme trigonométrique.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \text{ vérifiant } f(0) = \|f\|_\infty$$

on a

$$\left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \right| \leq wf(0)$$

Remarque sur les théorèmes V.1 et V.2.

Les théorèmes V.1 et V.2 donnent une caractérisation des fonctions ψ sur Γ telles que, pour tout t positif, $e^{t\psi}$ soit la transformée de Fourier d'une mesure de variation totale inférieure ou égale à 1. Dans le cas où les mesures μ_t sont positives, $-\psi$ est une fonction définie négative. Les fonctions définies négatives ont été caractérisées par I.J. Schoenberg (Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. Math. Soc., 44, 1938, p. 522-536).

CHAPITRE II

HOMOMORPHISMES D'ALGÈBRES DE MESURES

Dans la partie VI, étant donné un cône convexe fermé C de \mathbb{R}^m , nous caractérisons les distributions qui engendrent des semi-groupes de mesures dont les supports sont contenus dans C . Dans la partie VII, nous appliquons les résultats obtenus dans la partie précédente au cas particulier où ce cône est la demi-droite \mathbb{R}_+ , et nous étudions les endomorphismes de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$: à un semi-groupe $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$ nous associons un endomorphisme H de $M(\mathbb{R}_+)$ tel que $H(\delta_t) = \mu_t$. Dans la partie VIII les résultats obtenus sur $M(\mathbb{R}_+)$ seront étendus à $M(C)$, où C est un cône convexe fermé de \mathbb{R}^m .

VI. Le cône $P(C)$.

1. Préliminaire sur la transformation de Laplace.

Soit C un cône convexe fermé de \mathbb{R}^m d'intérieur non vide, Γ le cône dual défini par

$$\xi \in \Gamma \iff \forall x \in C, x \cdot \xi \leq 0$$

Remarque. — Le cône dual de Γ est le cône C .

Soit $\varepsilon = \Gamma - \Gamma$, sous-espace de \mathbb{R}^m , Γ_0 l'intérieur de Γ relativement à ε .

PROPOSITION VI.1. — *Soit F une fonction continue sur $\Gamma + i\mathbb{R}^m$, telle qu'il existe $A > 0$ et k entier de façon que*

$$\forall p \in \Gamma + i\mathbb{R}^m, |F(p)| \leq A(1 + |p|^2)^k$$

et dont la restriction à $\Gamma_0 + i\varepsilon$ est holomorphe.

Alors $F(-i\eta)$ est la transformée de Fourier d'une distribution dont le support est contenu dans C .

$F(-i\eta)$ est une fonction à croissance lente, donc est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée T .

Soit x un point n'appartenant pas à C . Il existe un voisinage B de x et un point ξ_0 de Γ_0 , $|\xi_0| = 1$, tels que

$$\forall y \in B, y \cdot \xi_0 > 0, \text{ et } B \cap C = \emptyset$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, $\text{Supp } \varphi \subset B$ et posons

$$\alpha = \inf \{y \cdot \xi_0, y \in \text{Supp } (\varphi)\}$$

et

$$\Phi(p) = \int e^{-p \cdot x} \varphi(x) dx$$

α est un nombre positif et nous avons les majorations suivantes :

$\forall k', \exists A'$ tel que, pour $p = u\xi_0 + i\eta$ avec $u \geq 0$, on ait

$$|\Phi(p)| \leq A'(1 + |p|^2)^{-k'} e^{-\alpha u}$$

Posons

$$f(u) = \int \Phi(u\xi_0 + i\eta) F(u\xi_0 + i\eta) d\eta$$

Pour $k' > k + \frac{m}{2}$, nous obtenons la majoration

$$|f(u)| \leq A A' e^{-\alpha u} \int (1 + |\eta|^2)^{k-k'} d\eta$$

D'après le théorème de convergence dominée f est continue sur $[0, \infty[$. Pour $\text{Re } z > 0$, $\Phi(\xi_0 z) F(\xi_0 z)$ est holomorphe en z .

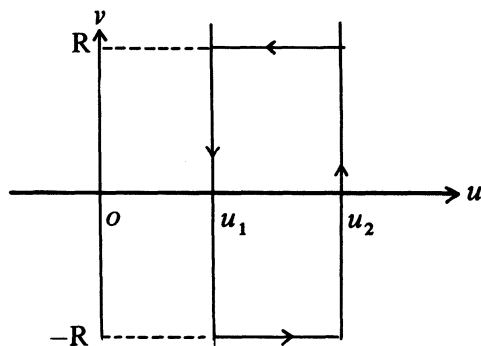
Considérons le rectangle γ de sommets :

(u_1, R)

$(u_1, -R)$

$(u_2, -R)$

(u_2, R)



D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\gamma} \Phi(\xi_0 z) F(\xi_0 z) dz = 0$$

Il en résulte, en faisant tendre R vers l'infini, que l'on a :

$$\int \Phi(\xi_0(u_1 + iv)) F(\xi_0(u_1 + iv)) dv = \int \Phi(\xi_0(u_2 + iv)) F(\xi_0(u_2 + iv)) dv$$

Choisissons un système de coordonnées pour lequel ξ_0 soit le premier vecteur de base, et intégrons les deux membres de l'égalité par rapport à η_2, \dots, η_m , nous obtenons

$$f(u_1) = f(u_2)$$

Donc f est constante pour $u > 0$; étant continue, elle est constante pour $u \geq 0$, et

$$|f(0)| \leq A'' e^{-\alpha u}, \quad \forall u \geq 0$$

et puisque α est positif, $f(0) = 0$. Or $f(0) = (2\pi)^m \langle T, \varphi \rangle$, donc le point x considéré n'appartient pas au support de T ; le support de T est contenu dans C .

Remarque. — La proposition VI.1 peut aussi se déduire de la proposition 8 p. 308 et du corollaire p. 310 — Schwartz [7].

2. Cône $P(C)$.

Soit C un cône convexe fermé de \mathbf{R}^m d'intérieur non vide, Γ le cône dual. $M(C)$ désigne l'algèbre de convolution des mesures de variation totale finie dont les supports sont contenus dans C .

DEFINITION VI.1. — On note $P(C)$ l'ensemble des distributions sur \mathbf{R}^m vérifiant

$$f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^m), \quad \forall x \in C, \quad |f(x)| \leq f(0) \implies \operatorname{Re} \langle T, f \rangle \leq 0$$

$P(C)$ est un cône convexe fermé de $\mathcal{O}'(\mathbf{R}^m)$ contenu dans P . Les distributions de $P(C)$ ont leurs supports contenus dans C .

THEOREME VI.1. — Soit T une distribution de P . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

a) T appartient à $P(C)$.

b) Les mesures du semi-groupe $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ "engendré" par T appartiennent à $M(C)$.

• Montrons que b) entraîne a).

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ telle que

$$\forall x \in C, |f(x)| \leq f(0)$$

nous avons

$$\operatorname{Re} \langle \mu_t - \delta, f \rangle = \operatorname{Re} \int f d\mu_t - f(0) \leq 0$$

et en passant à la limite quand t tend vers 0

$$\operatorname{Re} \langle T, f \rangle \leq 0$$

• Montrons que a) entraîne b).

Soit ψ la transformée de Laplace de T ,

$$\psi(p) = \langle T, e^{p \cdot x} \rangle$$

définie pour $p \in \Gamma + i\mathbb{R}^m$; nous avons

$$\forall p \in \Gamma + i\mathbb{R}^m, \forall x \in C, |e^{p \cdot x}| \leq 1$$

donc $\operatorname{Re} \psi(p) \leq 0$. La fonction $e^{t\psi(-iy)}$ est la transformée de Fourier de la mesure μ_t . Elle admet un prolongement continu dans $\Gamma + i\mathbb{R}^m$, holomorphe dans $\Gamma_0 + i\varepsilon$, et

$$\forall p \in \Gamma + i\mathbb{R}^m, |e^{t\psi(p)}| \leq 1$$

Il en résulte, d'après la proposition VI.1 que le support de μ_t est contenu dans C .

VII. Endomorphismes de $M(\mathbb{R}_+)$.

1) Soit H un endomorphisme étroitement continu de norme 1 de $M(\mathbb{R}_+)$, $\mu_t = H(\delta_t)$ est un semi-groupe de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$ de type H ; soit T le générateur infinitésimal de ce semi-groupe de mesures ; d'après la proposition VI.2 T appartient à $P(\mathbb{R}_+)$. Nous allons étendre H à l'algèbre $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

DEFINITION VII.1. — L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ dont les supports sont contenus dans \mathbb{R}_+ .

L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est une algèbre pour le produit de convolution. Le cône $P(\mathbb{R}_+)$ est contenu dans $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

DEFINITION VII.2. — On appelle filtre régularisant le filtre \mathcal{F} de base $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$.

$$A_\varepsilon = \{ \alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}), \alpha \geq 0, \int \alpha(t) dt = 1, \text{Supp}(\alpha) \subset [0, \varepsilon] \}$$

Ce filtre converge étroitement vers la mesure δ . Une fonction appartenant à l'un des A_ε est appelée fonction régularisante.

THEOREME VII.1. — Soit H un endomorphisme étroitement continu de norme 1 de $M(\mathbb{R}_+)$.

a) Si S est une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, α une fonction régularisante, $H(S * \alpha)$ admet dans $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ une limite $H(S)$, quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant, qui est un élément de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. En particulier $H(-\delta') = T$.

b) L'application H ainsi définie de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est un endomorphisme de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

a) La propriété a est vraie si S est une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$.

b) Considérons le cas particulier $S = -\delta'$. Soit $\chi_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$, nous avons :

$$-\delta' * \chi_{[0,t]} = \delta_t - \delta$$

Soit α une fonction régularisante, H étant un endomorphisme d'algèbre nous avons

$$H(-\delta' * \alpha) * H\left(\frac{1}{t} \chi_{[0,t]}\right) = H\left(\frac{1}{t} (\delta_t - \delta)\right) * H(\alpha)$$

Considérons comme une mesure, $\frac{1}{t} \chi_{[0,t]}$ converge quand t tend vers 0 étroitement vers δ , et d'après le théorème III.2

$$H\left(\frac{1}{t}(\delta_t - \delta)\right) = \frac{1}{t}(\mu_t - \delta)$$

converge dans $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ vers T , donc à la limite

$$H(-\delta' * \alpha) = H(\alpha) * T$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant le second membre a pour limite T : $H(-\delta') = T$.

c) Supposons la propriété a vraie pour S et soit φ une fonction de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[0, \infty[$ (Définition 0.5).

$$H(S * \alpha) * H(\varphi) = H(S * \alpha * \varphi) = H(S * \varphi) * H(\alpha)$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant

$$H(S) * H(\varphi) = H(S * \varphi)$$

d) Supposons la propriété a vraie pour S_1 et S_2 et montrons qu'elle est vraie pour $S_1 * S_2$. D'après c)

$$H(S_1 * S_2 * \alpha) = H(S_1) * H(S_2 * \alpha)$$

car $S_2 * \alpha$ appartient à $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$, et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant, le second membre a une limite, donc la propriété est vraie pour $S_1 * S_2$ et

$$H(S_1 * S_2) = H(S_1) * H(S_2)$$

Or l'algèbre $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est engendrée par $M(\mathbb{R}_+)$ et δ' , (Proposition 0.5), il en résulte donc que la propriété est vraie pour toute distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

THEOREME VII.2. — *Etant donnée une distribution T de $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, il existe un endomorphisme H de $M(\mathbb{R}_+)$ de norme 1, étroitement continu, et un seul tel que $T = H(-\delta')$.*

— D'après les théorèmes III.1 et VI.1 il existe un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de $M(\mathbb{R}_+)$ de type H tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mu_t - \delta) = T \quad (\text{dans } \mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}))$$

– Définissons l'application H de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $M(\mathbb{R}_+)$ par

$$H(\nu) = \int \mu_t \nu(dt)$$

(intégrale faible, relativement à la topologie $\sigma(M, C_B)$) on a

$$\|H(\nu)\| \leq \|\nu\| ,$$

ainsi H est une application linéaire bornée de norme 1, et $H(\delta_t) = \mu_t$.

– H est un endomorphisme :

$$\begin{aligned} \langle H(\nu) * H(\pi), f \rangle &= \iiint f(x+y) \mu_t(dx) \nu(dt) \mu_s(dy) \pi(ds) \\ &= \iint \langle \mu_{t+s}, f \rangle \nu(dt) \pi(ds) \\ &= \langle H(\nu * \pi), f \rangle \end{aligned}$$

– H est étroitement continu. Supposons que des mesures ν_i convergent étroitement vers 0, soit f une fonction continue bornée, d'après la proposition III.3 $\langle \mu_t, f \rangle$ est une fonction continue de t , donc $\langle H(\nu_i), f \rangle = \int \langle \mu_t, f \rangle \nu_i(dt)$ converge vers 0.

– D'après la proposition VII.1, H s'étend à l'algèbre $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ et $H(-\delta') = T$.

– Supposons que l'on ait deux endomorphismes H_1 et H_2 de $M(\mathbb{R}_+)$, de norme 1 et étroitement continus tels que $H_1(-\delta') = H_2(-\delta')$, d'après la proposition III.2

$$\forall t \geq 0, H_1(\delta_t) = H_2(\delta_t)$$

H_1 et H_2 coïncident donc sur le sous-espace des mesures discrètes et, étant étroitement continus, ils sont identiques.

2. Relation avec la transformation de Laplace.

Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, H l'endomorphisme étroitement continu de $M(\mathbb{R}_+)$ tel que $H(-\delta') = T$ et $\mu_t = H(\delta_t)$.

Soit ψ la transformée de Laplace de T

$$\psi(z) = \langle T, e^{zt} \rangle \quad (\operatorname{Re} z \leq 0)$$

nous avons

$$\mathcal{L}\mu_t = e^{t\psi}$$

(voir la démonstration du théorème VI.2).

Soit Γ le spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$, et \hat{H} l'application de Γ dans Γ définie par

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \mu \in M(\mathbb{R}_+), \hat{H}(\gamma)(\mu) = \gamma(H(\mu))$$

(pour les définitions et les notations voir le paragraphe 3 de l'appendice : spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$).

THEOREME VII.3.

a) $\hat{H}(\Gamma_b) \subset \Gamma_b$ et la restriction de \hat{H} à Γ_b est définie par la fonction ψ .

b) Pour toute mesure ν de $M(\mathbb{R}_+)$.

$$\mathcal{L}H(\nu) = \mathcal{L}\nu \circ \psi$$

a) Si γ est un homomorphisme étroitement continu, puisque H est étroitement continu, $\hat{H}(\gamma) = \gamma \circ H$ est étroitement continu, c'est-à-dire $\hat{H}(\Gamma_b) \subset \Gamma_b$.

D'après la proposition 0.6, si γ est étroitement continu, γ est défini par un point z de $\{z, \operatorname{Re} z \leq 0\}$:

$$\gamma(\nu) = \int e^{zt} \nu(dt)$$

$$\hat{H}(\gamma)(\delta_t) = \gamma(H(\delta_t)) = \int e^{zs} \mu_t(ds) = e^{t\psi(z)}$$

donc $\hat{H}(\gamma)$ est défini par le point $Z = \psi(z)$ de $\{z, \operatorname{Re} z \leq 0\}$.

b) Soit ν une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$.

$$\widehat{H(\nu)} = \hat{\nu} \circ \hat{H}$$

or la restriction de $\hat{\nu}$ à Γ_b est définie par $\mathcal{L}\nu$, et de même la restriction de $\widehat{H(\nu)}$ à Γ_b est définie par $\mathcal{L}H(\nu)$, donc

$$\mathcal{L}H(\nu) = \mathcal{L}\nu \circ \psi$$

PROPOSITION VII.1. — Pour que H soit un automorphisme étroitement continu de $M(\mathbb{R}_+)$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$\langle H(\nu), f \rangle = \int_0^\infty e^{i\beta t} f(\alpha t) \nu(dt)$$

où α et β sont des constantes réelles, $\alpha > 0$.

En effet supposons que H soit un automorphisme étroitement continu de $M(\mathbb{R}_+)$, la fonction ψ correspondante est un automorphisme holomorphe de $\{z ; \operatorname{Re} z < 0\}$ donc est de la forme

$$\psi(z) = \frac{az + ib}{d - icz}$$

avec a, b, c, d , réels et $ad - bc > 0$,

De plus $\psi(z)$ admet un prolongement continu à $\{z ; \operatorname{Re} z \leq 0\}$ donc $c = 0$.

c'est-à-dire que

$$H(\delta_t) = e^{i\beta t} \delta_{\alpha t}$$

et

$$\langle H(\nu), f \rangle = \int_0^\infty e^{i\beta t} f(\alpha t) \nu(dt)$$

3. Représentation intégrale des distributions de $P(\mathbb{R}_+)$.

THEOREME VII.4. — Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, il existe deux constantes a et b vérifiant

$$a \geq 0, \operatorname{Re} b \geq 0$$

et une mesure σ positive sur $]0, \infty[\times T$ vérifiant

$$\iint \frac{1 - \cos \theta + t}{1 + t} \sigma(dt, d\theta) < \infty$$

telles que

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}), \langle T, \varphi \rangle = a\varphi'(0) - b\varphi(0)$$

$$+ \iint \left[e^{i\theta} \varphi(t) - \left(1 + i \frac{\sin \theta}{1+t} \right) \varphi(0) \right] \sigma(dt, d\theta)$$

La démonstration de cette proposition est analogue à la partie IV, mais plus simple :

a) Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ appartenant à $C_0(\mathbf{R}_+)$ ainsi que leurs dérivées, muni de la norme

$$\|f\| = \text{Sup } |f| + \text{Sup } |f'|$$

– Une distribution de $P(\mathbf{R}_+)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur E .

Notons $u(t) = \frac{1}{1+t}$, et si f est une fonction de E , posons

$$f(t) = f(0)u(t) + g(t)$$

et
$$A(f) = \text{Sup}_{t>0} \frac{|g|}{1-u} \leq \|f\|.$$

Supposons que f appartienne à $\mathcal{O}(\mathbf{R})$ et posons

$$h = A(f)u + cg$$

où c est un nombre complexe de module 1 tel que $\langle T, cg \rangle$ soit réel positif ou nul.

$$\forall t \geq 0, |h(t)| \leq A(f)u(t) + A(f)(1-u(t)) = A(f) = h(0)$$

donc

$$|\langle T, g \rangle| \leq A(f) \text{Re} \langle -T, u \rangle$$

il en résulte qu'il existe une constante B telle que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}) \quad |\langle T, f \rangle| \leq B \|f\|$$

– Une distribution T appartient à $P(\mathbf{R}_+)$ et à $-P(\mathbf{R}_+)$ si et seulement si $T = ic\delta$, où c est une constante réelle.

Si T appartient à $P(\mathbf{R}_+)$ et à $-P(\mathbf{R}_+)$, alors $\text{Re} \langle T, u \rangle = 0$, donc $\langle T, g \rangle = 0$,

$$\langle T, f \rangle = f(0) \langle T, u \rangle = icf(0)$$

Réciproquement $ic\delta$ appartient bien à $P(\mathbf{R}_+)$ et à $-P(\mathbf{R}_+)$.

– L'ensemble M des distributions de $P(\mathbf{R}_+)$ vérifiant

$$\langle -T, u \rangle = 1$$

est un convexe fermé faiblement compact de E' , dual topologique de E .

Il est clair que M est convexe et fermé, montrons qu'il est faiblement compact. Soit T un élément de M

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= -f(0) + \langle T, g \rangle \\ |\langle T, f \rangle| &\leq 2 \|f\| \end{aligned}$$

donc M est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon 2 qui est faiblement compacte.

b) *Points extrémaux de M .*

— Si T appartient à $P(\mathbf{R}_+)$, 0 appartient à $\text{Supp}(T)$, et si T est un élément extrémal de M , $\text{Supp}(T) \cap]0, \infty[$ contient au plus un point. (cf. proposition IV.4).

Les points extrémaux dont le support est réduit à $\{0\}$ sont $-\delta$ et $-\delta'$, les autres sont les mesures

$$\frac{1+t}{1-\cos\theta+t} \left[e^{i\theta} \delta_t - \left(1 + i \frac{\sin\theta}{1+t} \right) \delta \right] \quad (t > 0, \theta \in T)$$

et l'ensemble de ces mesures est homéomorphe à $]0, \infty[\times T$. L'ensemble des points extrémaux n'est pas fermé ; les points adhérents à cet ensemble qui ne sont pas extrémaux sont ceux du segment joignant $-\delta$ à $-\delta'$. La proposition VII.4 est ainsi une conséquence du théorème de Krein-Milman.

VIII. Homomorphismes d'algèbres de mesures.

Soit C un cône convexe fermé d'intérieur non vide de \mathbf{R}^m . $M(C)$ désigne l'algèbre de convolution des mesures de variation totale finie dont le support est contenu dans C . Nous considérerons sur $M(C)$ les topologies suivantes.

- a) celle de la norme.
- b) celle de la convergence étroite.

Soient C et L deux cônes convexes fermés d'intérieurs non vides respectivement de \mathbf{R}^m et \mathbf{R}^n ; l'objet de cette partie est d'étudier les

homomorphismes de $M(C)$ dans $M(L)$ qui sont de norme 1 et étroitement continus. On notera Γ (resp. Λ) le cône dual de C (resp. L).

1. *Homomorphismes étroitement continus de $M(C)$ sur C .*

Soit h un homomorphisme de $M(C)$ sur C . D'après la théorie générale des algèbres de Banach, h est continu pour la topologie de la norme, et sa norme est égale à 1.

LEMME. — *Soit f une application continue de C dans C vérifiant*

$$f(x + y) = f(x) f(y), \quad f(1) = 1$$

$$|f(x)| \leq 1$$

Alors il existe un point unique p de $\Gamma + i\mathbb{R}^m$ tel que

$$f(x) = e^{p \cdot x}$$

PROPOSITION VIII.1. — *Soit h un homomorphisme étroitement continu de $M(C)$ sur C , alors il existe un point p de $\Gamma + i\mathbb{R}^m$ unique tel que*

$$h(\mu) = \int e^{p \cdot x} \mu(dx)$$

ce qui établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des homomorphismes étroitement continus de $M(C)$ sur C et $\Gamma + i\mathbb{R}^m$.

Soit h un tel homomorphisme, posons $f(x) = h(\delta_x)$. La fonction f vérifie les hypothèses du lemme : il existe un point p de $\Gamma + i\mathbb{R}^m$ et un seul tel que

$$f(x) = e^{p \cdot x}$$

Soit μ une mesure de $M(C)$

$$h(\mu) = \int h(\delta_x) \mu(dx) = \int e^{p \cdot x} \mu(dx)$$

Réciproquement si p appartient à $\Gamma + i\mathbb{R}^m$, l'application

$$\mu \longmapsto \int e^{p \cdot x} \mu(dx)$$

définit un homomorphisme étroitement continu de $M(C)$ sur C .

2. Homomorphismes étroitement continus de $M(C)$ dans $M(L)$.

Soit H un homomorphisme de $M(C)$ dans $M(L)$. D'après la théorie générale des algèbres de Banach, H est continu pour la norme puisque $M(L)$ est semi-simple, et si $H \neq 0$, $\|H\| \geq 1$. Supposons de plus que H soit étroitement continu, soit k un homomorphisme étroitement continu de $M(L)$ sur C , alors $k \circ H$ est un homomorphisme étroitement continu de $M(C)$ sur C , donc l'application $k \longmapsto k \circ H$ définit une application ψ de $\Lambda + iR^n$ dans $\Gamma + iR^m$, telle que, si $\mathcal{L}\mu$ désigne la transformée de Laplace de μ , définie sur $\Gamma + iR^m$ par

$$\mathcal{L}\mu(p) = \int e^{p \cdot x} \mu(dx)$$

alors

$$\mathcal{L}H(\mu) = \mathcal{L}\mu \circ \psi$$

On se propose de déterminer les applications ψ associées aux homomorphismes étroitement continus de $M(C)$ dans $M(L)$ de norme 1. Dans la suite H désignera un homomorphisme étroitement continu de $M(C)$ dans $M(L)$ de norme 1.

3. Extension de H à l'algèbre $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$.

DEFINITION VIII.1. — L'espace $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{O}'_{L,1}(R^m)$ dont les supports sont contenus dans C .

L'espace $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ est une algèbre pour le produit de convolution. Le cône $P(C)$ est contenu dans $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$. Le cône C étant convexe possède la régularité de Whitney ; il en résulte que toute distribution de $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ peut s'exprimer comme somme finie de dérivées de mesures de $M(C)$ (Schwartz [7] p. 99). C'est-à-dire que l'algèbre $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ est engendrée par $M(C)$ et les distributions $\frac{\partial \delta}{\partial x_k}$ ($k = 1, \dots, m$).

DEFINITION VIII.2. — On appelle filtre régularisant le filtre \mathfrak{F} de base $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$.

$$A_\varepsilon = \{\alpha \in \mathcal{O}(R^m), \alpha \geq 0, \int \alpha(x) dx = 1, \text{Supp}(\alpha) \subset B(0, \varepsilon) \cap C\}$$

THEOREME VIII.1. — a) Soit S une distribution de $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$, α une fonction régularisante, $H(S * \alpha)$ admet dans $\mathcal{O}'_{L,1}(L)$ une limite $H(S)$ quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant.

b) L'application H ainsi définie de $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ dans $\mathcal{O}'_{L,1}(L)$ est un homomorphisme d'algèbre.

La démonstration est analogue à celle du théorème VII.1. Puisque l'algèbre $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$ est engendrée par $M(C)$ et les distributions $\frac{\partial \delta}{\partial x_k}$ ($k = 1, \dots, m$) il suffit de montrer que la propriété a est vraie si $S = \frac{\partial \delta}{\partial x_k}$, et que si elle est vraie pour deux distributions de $\mathcal{O}'_{L,1}(C)$, elle est vraie pour leur produit de convolution. Comme C est d'intérieur non vide, il suffit de montrer que la propriété est vraie si $S = \frac{\partial \delta}{\partial u}$, u étant un point de C , et $\frac{\partial}{\partial u}$ étant défini par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(x + tu) - \varphi(x))$$

Posons

$$a_u = \delta_u - \delta$$

$$b_u(\varphi) = \int_0^1 \varphi(su) ds$$

on a la relation

$$-\frac{\partial \delta}{\partial u} * b_u = a_u$$

et pour tout t positif

$$-\frac{\partial \delta}{\partial u} * b_{tu} = \frac{1}{t} a_{tu}$$

Posons $\mu_t = H(\delta_{tu})$ pour $t \geq 0$ et u fixé. La famille $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de mesures de type H, dont les supports sont contenus dans L , donc d'après le théorème VI.1 $\frac{1}{t}(\mu_t - \delta)$ converge dans $\mathcal{O}'_{L,1}(\mathbb{R}^n)$ vers une distribution $T(u)$ de $P(L)$.

Soit α une fonction régularisante

$$H\left(-\frac{\partial\delta}{\partial u} * \alpha\right) * H(b_{tu}) = \frac{1}{t} (\mu_t - \delta) * H(\alpha)$$

La mesure b_{tu} converge étroitement vers δ quand t tend vers 0, on a donc à la limite

$$H\left(-\frac{\partial\delta}{\partial u} * \alpha\right) = T(u) * H(\alpha)$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant le second membre a pour limite $T(u)$:

$$H\left(-\frac{\partial\delta}{\partial u}\right) = T(u)$$

THEOREME VIII.2. — Soit $u \mapsto T(u)$ une application de C dans $P(L)$ additive et positivement homogène. Il existe un homomorphisme H étroitement continu de norme 1 et un seul de $M(C)$ dans $M(L)$ tel que

$$\forall u \in C, H\left(-\frac{\partial\delta}{\partial u}\right) = T(u)$$

a) Soit u un point de C , d'après la proposition VI.2, $T(u)$ engendre un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de type H dont les supports sont contenus dans L . Il est clair que si $T(v)$ engendre le semi-groupe $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$, alors $T(u + v)$ engendre le semi-groupe $\{\mu_t * \nu_t\}_{t \geq 0}$. On obtient ainsi un semi-groupe de mesures μ_x indexées par les points de C tel que $T(u)$ engendre le semi-groupe $\{\mu_{tu}\}_{t \geq 0}$.

b) Nous allons montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon, \forall x \in C, |\mu_x|(CB(0, \varepsilon)) \leq M_\varepsilon |x|$$

La transformée de Fourier de $T(u)$ s'écrit

$$\mathfrak{F}T(u)(\eta) = u \cdot \theta(\eta)$$

où θ est une application continue de \mathbf{R}^n dans $\Gamma + i\mathbf{R}^m$. Une distribution de $P(L)$ est d'ordre 2, plus précisément il résulte de la proposition IV.1

$$\exists M, |u \cdot \theta(\eta)| \leq M |x| (1 + |\eta|^2)$$

La transformée de Fourier de μ_x est $e^{x \cdot \theta}$, posons

$$g(x) = \int e^{-|y|^2} \mu_x(dy)$$

$$g(0) - g(x) = (\sqrt{\pi})^n \int [1 - e^{x \cdot \theta(\eta)}] e^{-\frac{|\eta|^2}{4}} d\eta$$

$$|g(0) - g(x)| \leq |x| M(\sqrt{\pi})^n \int (1 + |\eta|^2) e^{-\frac{|\eta|^2}{4}} d\eta = M_1 |x|$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$C_\varepsilon = (1 - e^{-\varepsilon^2})^{-1}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$, $\text{Supp}(\varphi) \subset \text{C B}(0, \varepsilon)$, et c un nombre complexe de module 1 tel que $\langle \mu_x, \varphi \rangle$ soit réel positif, et posons

$$f(y) = C_\varepsilon e^{-|y|^2} + c\varphi(y)$$

alors pour tout y nous avons

$$|f(y)| \leq C_\varepsilon = f(0)$$

donc

$$\text{Re} \langle \mu_x - \delta, f \rangle \leq 0$$

$$|\langle \mu_x, \varphi \rangle| \leq C_\varepsilon \text{Re} \langle \delta - \mu_x, e^{-|y|^2} \rangle \leq C_\varepsilon M_1 |x| = M_\varepsilon |x|$$

c) Nous allons montrer que l'application $x \longmapsto \mu_x$ de \mathbb{C} dans $M(L)$ est étroitement continue ; pour cela, d'après la proposition 0.2, il suffit de montrer que l'application $x \longmapsto \mu_x$ est vaguement continue et que $\forall x_0 \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact et V voisinage de x_0 dans \mathbb{C} tel que

$$\forall x \in V, |\mu_x|(\text{C K}) \leq \varepsilon$$

En considérant les transformées de Fourier, on vérifie que l'application $x \longrightarrow \mu_x$ est continue pour la topologie de \mathfrak{F}' , et puisque $\|\mu_x\| \leq 1$, il en résulte que cette application est continue pour la topologie $\sigma(M(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n))$.

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ et ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, soit $A > 0$, $\exists r > 0$ tel que

$$h \in \mathbb{C}, |h| \leq r \implies |\mu_h|(\text{C B}(0, A)) \leq \varepsilon$$

(conséquence directe de a)).

Soit $x_1 \in C$ tel que $V = (x_1 + C) \cap B(x_1, r)$ soit voisinage de x_0 dans C ,

$$\exists A_1 > 0, |\mu_{x_1}|(CB(0, A_1)) \leq \varepsilon$$

Soit x dans V , $x = x_1 + h$, $|h| \leq r$

$$\mu_x = \mu_{x_1} * \mu_h$$

$$|\mu_x|(CB(0, A + A_1)) \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 3\varepsilon$$

d) Définissons l'application H de $M(C)$ dans $M(L)$ par

$$H(\nu) = \int_C \mu_x \nu(dx)$$

intégrale faible au sens de la topologie $\sigma(M, C_B)$. Cette application est un homomorphisme de norme 1 étroitement continu. On vérifie que

$$\forall u \in C, H\left(-\frac{\partial \delta}{\partial u}\right) = T(u)$$

L'unicité se démontre comme dans le théorème VII.2.

4. Relation avec la transformée de Laplace.

THEOREME VIII.3. — Soit H un homomorphisme de $M(C)$ dans $M(L)$ de norme 1, étroitement continu, et

$$T(u) = H\left(-\frac{\partial \delta}{\partial u}\right)$$

si $\mathcal{L}\nu$ est la transformée de Laplace de ν (définie sur $\Gamma + i\mathbb{R}^m$), la transformée de Laplace de $H(\nu)$ est donnée par

$$\mathcal{L}H(\nu) = \mathcal{L}\nu \circ \psi$$

où ψ est l'application de $\Lambda + i\mathbb{R}^n$ dans $\Gamma + i\mathbb{R}^m$ définie par

$$\forall u \in C, \langle T(u), e^{p \cdot y} \rangle = u \cdot \psi(p)$$

Soit x un point de C

$$\mathcal{L}H(\delta_x) = e^{x \cdot \psi(p)}$$

et si ν appartient à $M(C)$, au sens de l'intégrale faible relativement à la topologie $\sigma(M, C_B)$,

$$\nu = \int_C \delta_x \nu(dx)$$

donc

$$H(\nu) = \int H(\delta_x) \nu(dx)$$

et

$$\ell H(\nu)(p) = \int \ell H(\delta_x)(p) \nu(dx) = \int e^{x \cdot \psi(p)} \nu(dx) = \ell \nu \circ \psi(p)$$

Exemple. — Soit C le cône de \mathbb{R}^3 défini par les inégalités :

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Le cône dual Γ est défini par

$$\begin{cases} \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 \geq 0 \\ \xi_1 \leq 0 \end{cases}$$

On notera, si $x \in C$, $s = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$.

Soit $L = \mathbb{R}^2$, le cône dual Λ est réduit à $\{0\}$. Définissons l'application $x \mapsto T(x)$ de C dans $P(L)$ par

$$T(x) = (x_1 + x_3) \frac{\partial^2 \delta}{\partial y_1^2} + 2x_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y_1 \partial y_2} + (x_1 - x_3) \frac{\partial^2 \delta}{\partial y_2^2}$$

A cette application correspond un homomorphisme H étroitement continu de norme 1 de $M(C)$ dans $M(L)$ tel que :

$$\forall u \in C, H\left(-\frac{\partial \delta}{\partial u}\right) = T(u) \quad (\text{Proposition VIII.2})$$

Si x est un point intérieur à C , la mesure $H(\delta_x)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$p_x(y) = -\frac{1}{4\pi s} \exp\left\{-\frac{1}{4s^2} [(x_1 + x_3)y_1^2 - 2x_2 y_1 y_2 + (x_1 - x_3)y_2^2]\right\}$$

L'application ψ figurant dans l'énoncé du théorème VIII.3, définie par

$$\forall u \in C, \langle T(u), e^{p \cdot y} \rangle = u \cdot \psi(p)$$

est l'application de $i\mathbb{R}^2$ dans $\Gamma + i\mathbb{R}^3$ qui à $p = (i\eta_1, i\eta_2)$ fait correspondre

$$\psi(p) = -(\eta_1^2 + \eta_2^2, 2\eta_1\eta_2, \eta_1^2 - \eta_2^2)$$

Remarque. — Nous indiquons dans cette remarque les relations qui existent entre les parties précédentes et les résultats connus dans le cas des mesures positives (Bochner [1] p. 82-91).

1) Les endomorphismes de $M(\mathbb{R}_+)$ qui conservent le cône des mesures positives correspondent aux distributions de $P(\mathbb{R}_+)$ qui admettent la représentation

$$\langle T, \varphi \rangle = -a\varphi(0) + b\varphi'(0) + \int_0^\infty [\varphi(t) - \varphi(0)] \sigma(dt)$$

où a et b sont des constantes positives et σ une mesure positive sur $]0, \infty[$ telle que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t} \sigma(dt) < \infty$$

La transformée de Laplace ψ d'une telle distribution possède la propriété suivante :

Si f est une fonction absolument monotone sur $]-\infty, 0[$ (de classe C^∞ et positive ainsi que toutes ses dérivées) alors $f \circ \psi$ est aussi absolument monotone.

2) Les homomorphismes de $M(C)$ dans $M(L)$ qui conservent la positivité des mesures ont été étudiées par Bochner, dans le cas où C et L sont saillants.

Par définition une fonction définie sur $\overset{\circ}{\Gamma}$ est absolument monotone sur $\overset{\circ}{\Gamma}$ si elle est de classe C^∞ et si

$$\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \in \overset{\circ}{\Gamma}, \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_p} f \geq 0$$

L'application ψ associée à un tel homomorphisme positif de $M(C)$ dans $M(L)$ vérifie la propriété suivante :

Si f est absolument monotone sur $\overset{\circ}{\Gamma}$ alors $f \circ \psi$ est absolument monotone sur $\overset{\circ}{\Lambda}$.

CHAPITRE III

CALCUL SYMBOLIQUE SUR LES GENERATEURS INFINITESIMAUX DE SEMI-GROUPES

Le problème qui est à l'origine de l'étude que nous avons faite des semi-groupes de mesures est le suivant :

Etant donné un semi-groupe fortement continu de contractions $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach, et un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de $M(\mathbb{R}_+)$, en posant

$$Q_t x = \int_0^\infty P_s x \mu_t(ds)$$

nous définissons un nouveau semi-groupe fortement continu de contractions $\{Q_t\}_{t \geq 0}$; quel est le générateur infinitésimal de ce semi-groupe ?

Ce problème est l'objet de la partie X. Dans la partie XI nous étudions la relation qu'il y a entre le spectre du générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ et celui du générateur infinitésimal du semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$. Dans la partie XII une application en est faite à la théorie du potentiel : Si un noyau de potentiel V est l'intégrale d'un semi-groupe de Feller,

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt$$

nous définissons les puissances fractionnaires V^α de V , $0 < \alpha < 1$. Dans le cas du potentiel newtonien, V^α correspond aux potentiels d'ordre 2α de M. Riesz.

IX. Homomorphisme associé à un semi-groupe d'opérateurs.

Soit E un espace de Banach, et $\{P_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contractions sur E .

1) A ce semi-groupe nous associons un homomorphisme G de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}(E)$ défini de la façon suivante :

DEFINITION IX.1. — Soit μ une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$, on pose

$$\forall x \in E, G(\mu)x = \int_0^\infty P_t x \mu(dt)$$

ce qui définit un opérateur $G(\mu)$ borné sur E tel que

$$\|G(\mu)\| \leq \|\mu\|$$

et à cause de la propriété de semi-groupe nous avons

$$G(\mu * \nu)x = \iint P_{t+s} x \mu(dt) \nu(ds) = G(\mu)G(\nu)x.$$

IX.1. Ainsi G est un homomorphisme d'algèbre de norme 1 de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

IX.2. Si une suite μ_n de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$ converge étroitement vers 0, alors la suite d'opérateurs $G(\mu_n)$ converge fortement vers 0.

Pour la démonstration de ces résultats, voir Schwartz [8] p. 95-101, et Hille Phillips [3] p. 435-437.

2) Extension de l'homomorphisme G aux distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

DEFINITION IX.2. — L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ dont les supports sont contenus dans \mathbb{R}_+ .

L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est une algèbre pour le produit de convolution.

DEFINITION IX.3. — On appelle filtre régularisant le filtre \mathcal{F} de base $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$:

$$A_\varepsilon = \left\{ \alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}), \alpha \geq 0, \int \alpha(t) dt = 1, \text{Supp}(\alpha) \subset [0, \varepsilon] \right\}$$

Ce filtre converge étroitement vers la mesure δ .

DEFINITION IX.4. — Soit T une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$; l'opérateur $(D_{G(T)}, G(T))$ est défini par :

Le domaine $D_{G(T)}$ est l'ensemble des x de E , tels que $\lim_{\mathcal{F}} G(T * \alpha)x$ existe, et $G(T)x$ est égal à cette limite.

IX.3. Pour toute fonction φ de $\mathcal{O}(\mathbf{R})$, de support contenu dans \mathbf{R}_+ , $G(\varphi)x$ appartient à $D_{G(T)}$ et

$$G(T)G(\varphi)x = G(T * \varphi)x$$

IX.4. Le domaine $D_{G(T)}$ est dense dans E .

IX.5. l'opérateur $(D_{G(T)}, G(T))$ est fermé.

IX.6. Soient S et T deux distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbf{R}_+)$. Soit x appartenant à $D_{G(T)}$. Alors x appartient à $D_{G(T * S)}$ si, et seulement, si, $G(T)x$ appartient à $D_{G(S)}$, et alors on a :

$$G(T * S)x = G(S)G(T)x$$

IX.7. L'opérateur $(D_{G(\delta')}, G(-\delta'))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$.

Pour la démonstration de ces résultats, voir Schwartz [8] p. 102-106.

Remarque. — Soit (D_A, A) le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$. Soit T une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbf{R}_+)$, F sa transformée de Laplace définie dans $\{z; \operatorname{Re} z \leq 0\}$. L'opérateur $(D_{G(T)}, G(T))$ sera également noté $(D_{F(A)}, F(A))$.

X. Génération de semi-groupes de contractions.

Soit T une distribution de $\mathcal{P}(\mathbf{R}_+)$, $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe de mesures "engendré" par T et H l'endomorphisme de $M(\mathbf{R}_+)$ tel que $T = H(-\delta')$. Posons $Q_t = G(\mu_t)$.

THEOREME X.1.

a) *La famille d'opérateurs $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions.*

b) *Le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est l'opérateur $(D_{G(T)}, G(T))$.*

c) *L'homomorphisme associé au semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est $G \circ H$.*

a) D'après IX.1, $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contractions. D'après la proposition III.1, la mesure μ_t converge étroitement vers δ quand t tend vers 0, et par suite, d'après IX.2, l'opérateur $G(\mu_t)$ converge fortement vers l'identité.

b) Soit $\chi_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$, on a

$$-\delta' * \chi_{[0,t]} = \delta_t - \delta$$

et quand t tend vers 0, $\frac{1}{t} \chi_{[0,t]}$ converge vers la mesure δ étroitement.

Posons

$$a_t = H\left(\frac{1}{t}(\delta_t - \delta)\right) = \frac{1}{t}(\mu_t - \delta)$$

$$b_t = H\left(\frac{1}{t} \chi_{[0,t]}\right) = \frac{1}{t} \int_0^t \mu_s ds \quad (\text{intégrale faible})$$

H étant un endomorphisme, on a

$$T * b_t = a_t$$

et H étant étroitement continu, la mesure b_t converge étroitement vers δ quand t tend vers 0.

— Soit x appartenant à $D_{G(T)}$. Soit α une fonction régularisante (cf. IX.3).

$$G(a_t) G(\alpha)x = G(b_t) G(T * \alpha)x$$

quand α tend vers δ suivant le filtre \mathcal{F} , on obtient

$$G(a_t)x = G(b_t) G(T)x$$

et quand t tend vers 0, le second membre a pour limite $G(T)x$, donc x appartient au domaine du générateur infinitésimal (D_B, B) du semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ et

$$Bx = G(T)x$$

— Soit x appartenant à D_B ,

$$G(\alpha) G(a_t)x = G(T * \alpha) G(b_t)x$$

en considérant les limites quand t tend vers 0

$$G(\alpha)Bx = G(T * \alpha)x$$

et quand α tend vers δ suivant le filtre \mathfrak{F} , le premier membre a une limite : Bx , donc x appartient à $D_{G(T)}$, et

$$Bx = G(T)x$$

c) Soit G_1 l'homomorphisme de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$G_1(\mu)x = \int_0^\infty Q_t x \mu(dt)$$

Les applications G_1 et $G \circ H$ sont continues de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}(E)$ pour

sur $M(\mathbb{R}_+)$ convergence étroite

sur $\mathcal{L}(E)$ convergence forte

et elles coïncident sur les mesures δ_t ;

$$G_1(\delta_t) = Q_t = G(\mu_t) = G \circ H(\delta_t)$$

donc elles sont égales.

Montrons qu'il en est de même pour les extensions de G et G_1 aux distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, c'est-à-dire que si T appartient à $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, et si $S = H(T)$ alors

$$(D_{G_1(T)}, G_1(T)) = (D_{G(S)}, G(S))$$

Nous avons démontré la propriété dans deux cas particuliers :

- si T est une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$
- si $T = -\delta'$

la propriété dans le cas général résultera du lemme suivant :

LEMME. — *Supposons la propriété vraie pour T_1 et T_2 , alors elle est vraie pour $T_1 * T_2$.*

Ce lemme est une conséquence directe de IX.6.

En effet l'algèbre $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est engendrée par $M(\mathbb{R}_+)$ et δ' (Proposition 0.5).

La proposition X.1 admet une réciproque :

THEOREME X.2. — Soit T une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ telle que, quel que soit le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ considéré, $(D_{G(T)}, G(T))$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions, alors T appartient à $P(\mathbb{R}_+)$.

Il suffit de considérer le cas particulier $E = C_0(\mathbb{R})$ et le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ défini par $P_t f = \delta_t * f$. On a alors

$$\forall \mu \in M(\mathbb{R}_+) , G(\mu)f = \mu * f$$

$$\forall T \in \mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+) , \mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset D_{G(T)} , \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}) , G(T)f = T * f$$

La proposition X.2 est ainsi une conséquence du théorème VI.1.

PROPOSITION X.3. — Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, alors le domaine de $G(T)$ contient le domaine du générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$.

En effet, une distribution T de $P(\mathbb{R}_+)$ peut se mettre sous la forme

$$T = \delta' * \sigma_1 + \sigma_2$$

où σ_1 et σ_2 sont deux mesures de $M(\mathbb{R}_+)$. La proposition est ainsi une conséquence de IX.6.

Exemple. — Soit T_α définie par

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}) , \langle T_\alpha , f \rangle = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty [f(t) - f(0)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} , 0 < \alpha < 1$$

T_α est une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$ et la transformée de Laplace de T_α est $-(-z)^\alpha$ ($\text{Re } z \leq 0$), ainsi

$$G(T_\alpha) = -(-A)^\alpha \quad (\text{Yosida [9] p. 259-268})$$

XI. Relations spectrales.

Soit E un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur E . Soit \mathfrak{A} une sous-algèbre commutative fermée unitaire de $\mathcal{L}(E)$. Soit (D_A, A) un opérateur sur E , tel que $\rho(A)$ ne soit pas vide ($\rho(A)$ désigne le complémentaire du spectre $\sigma(A)$ de (D_A, A)) et vérifiant

$$\forall \lambda \in \rho(A), R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathfrak{u}$$

Soit Ω le spectre de l'algèbre \mathfrak{u} , Ω est un espace compact. Si B est un opérateur de \mathfrak{u} , on note \hat{B} sa transformée de Gelfand. On définit $\hat{A} : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$, sphère de Riemann, par :

$$\hat{R}_\lambda(\omega) = \frac{1}{\lambda - \hat{A}(\omega)}$$

c'est-à-dire

$$\text{si } \hat{R}_\lambda(\omega) = 0, \hat{A}(\omega) = \infty$$

$$\text{si } \hat{R}_\lambda(\omega) \neq 0, \hat{A}(\omega) = \lambda - \frac{1}{\hat{R}_\lambda(\omega)}$$

Cette définition de \hat{A} ne dépend pas de λ , et on pose

$$\Omega_0 = \{\omega \mid R_\lambda(\omega) = 0\}, \text{ "pôles" de } \hat{A}, \Omega_1 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega_0$$

PROPOSITION XI.1. — ([3] Th. 5.8.5 p. 187 et Th. 5.8.4 p. 186).

a) Ω_0 est vide si et seulement si l'opérateur A est borné.

b) Le spectre de A est égal à $\hat{A}(\Omega)$.

a) D'après la théorie de Gelfand, si $\forall \omega \in \Omega, \hat{R}_\lambda(\omega) \neq 0$, alors R_λ est inversible dans \mathfrak{u} , donc A est borné.

b) Il est clair que $\hat{A}(\Omega) \subset \sigma(A)$.

Soit $\lambda \notin \hat{A}(\Omega)$ et $\lambda_0 \in \rho(A)$, montrons que $S_\lambda = I - (\lambda_0 - \lambda)R_\lambda$ est inversible :

$$\text{si } \omega \in \Omega_0, \hat{S}_\lambda(\omega) = 1$$

$$\text{si } \omega \in \Omega_1, \hat{S}_\lambda(\omega) = \frac{\lambda - \hat{A}(\omega)}{\lambda_0 - \hat{A}(\omega)} \neq 0$$

donc $\forall \omega \in \Omega, \hat{S}_\lambda(\omega) \neq 0$, il en résulte que S_λ est inversible et $R_{\lambda_0} S_\lambda^{-1} = R_\lambda$, donc $\lambda \in \rho(A)$.

Soit $\{P_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contractions sur E , (D_A, A) son générateur infinitésimal, R_λ la résolvante de (D_A, A) et G l'homomorphisme de $M(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{L}(E)$ associé au semi-groupe (définition IX.1).

Soit \mathfrak{u} le bicommutant de $\{P_t\}_{t \geq 0}$. \mathfrak{u} est une sous-algèbre commutative fermée de $\mathcal{L}(E)$, et si B est un opérateur de \mathfrak{u} , inversible

dans $\mathcal{L}(E)$, il est inversible dans \mathfrak{u} . Soit Ω le spectre de l'algèbre \mathfrak{u} . Si Γ désigne le spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$, on note \hat{G} l'application de Ω dans Γ définie par

$$\hat{G}(\omega)(\mu) = \widehat{G(\mu)}(\omega)$$

PROPOSITION XI.2. — ([3] Th. 16.2.3. p. 455).

a) Si μ est une mesure de $M(\mathbb{R}_+)$, $G(\mu)$ appartient à \mathfrak{u} .

b) Soit $T \in \mathcal{O}'_{L,1}(\mathbb{R}_+)$, et $\lambda \in \rho(G(T))$, alors $S_\lambda = (\lambda I - G(T))^{-1}$ appartient à \mathfrak{u} .

Soit B appartenant à $\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall t \geq 0, BP_t = P_t B$.

$$\begin{aligned} \text{a) } BG(\mu)x &= B \int_0^\infty P_t x \mu(dt) = \int_0^\infty BP_t x \mu(dt) = \int_0^\infty P_t Bx \mu(dt) \\ &= G(\mu)Bx \end{aligned}$$

b) Si x appartient à $D_{G(T)}$, Bx appartient à $D_{G(T)}$ et

$$G(T)Bx = BG(T)x$$

en effet soit α une fonction régularisante, d'après a)

$$BG(T * \alpha)x = G(T * \alpha)Bx$$

quand α tend vers δ suivant le filtre régularisant le premier membre a pour limite $BG(T)x$, donc Bx appartient à $D_{G(T)}$ et

$$G(T)Bx = BG(T)x$$

c) Soit x appartenant à E , $S_\lambda x$ appartient à $D_{G(T)}$, donc d'après

b) $BS_\lambda x$ appartient à $D_{G(T)}$ et

$$G(T)BS_\lambda x = BG(T)S_\lambda x$$

$$(\lambda I - G(T))BS_\lambda x = B(\lambda I - G(T))S_\lambda x = x$$

appliquons S_λ aux deux membres

$$BS_\lambda x = S_\lambda Bx$$

PROPOSITION XII.3. — ([3] Th. 16.3.2 p. 457) :

a) $\hat{G}(\Omega_1)$ est contenu dans Γ_b , $\hat{G}(\Omega_0)$ est contenu dans Γ_s .

b) Si ω appartient à Ω_1 , $\hat{G}(\omega) = \hat{A}(\omega)$.

On pose $e_\lambda = Y(t) e^{-\lambda t}$, pour $\text{Re } \lambda > 0$, si γ appartient à Γ_b .
 $\hat{e}_\lambda(\gamma) = \mathcal{L}e_\lambda(\gamma) = \frac{1}{\lambda - \gamma}$ ($\mathcal{L}\mu$ désigne la transformée de Laplace de la mesure μ).

$$G(e_\lambda) = R_\lambda, \hat{e}_\lambda \circ \hat{G} = \hat{R}_\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \omega \in \Omega_0 &\iff \forall \lambda, \text{Re } \lambda > 0, \hat{R}_\lambda(\omega) = 0 \\ &\iff \forall \lambda, \text{Re } \lambda > 0, \hat{e}_\lambda(\hat{G}(\omega)) = 0 \\ &\iff \hat{G}(\omega) \in \Gamma_s \end{aligned}$$

b) D'après la proposition XI.1,

$$\forall \omega \in \Omega_1, \hat{R}_\lambda(\omega) = \frac{1}{\lambda - \hat{A}(\omega)} = \frac{1}{\lambda - \hat{G}(\omega)}$$

donc $\hat{G}(\omega) = \hat{A}(\omega)$

PROPOSITION XII.4. – ([3] Th. 16.3.5 p. 459) :

- a) Si μ appartient à $M(\mathbf{R}_+)$, le spectre de $G(\mu)$ contient $\overline{\mathcal{L}\mu(\sigma(A))}$.
 b) Si A est borné, le spectre de $G(\mu)$ est égal à $\mathcal{L}\mu(\sigma(A))$.
 c) Si A n'est pas borné, et si μ appartient à $L^1(\mathbf{R}_+)$, le spectre de $G(\mu)$ est égal à $\mathcal{L}\mu(\sigma(A)) \cup \{0\}$.

a) D'après la théorie de Gelfand,

$$\begin{aligned} \sigma(G(\mu)) &= \widehat{G(\mu)}(\Omega) = \hat{\mu} \circ \hat{G}(\Omega) \\ &= \mathcal{L}\mu(\hat{A}(\Omega_1)) \cup \hat{\mu}(\hat{G}(\Omega_0)) \\ &= \mathcal{L}\mu(\sigma(A)) \cup \hat{\mu}(G(\Omega_0)) \end{aligned}$$

d'où le résultat a) puisque $\sigma(G(\mu))$ est fermé.

b) Supposons A borné, d'après la proposition XI.1, $\Omega_0 = \emptyset$, d'où le résultat b).

c) Supposons A non borné, alors $\Omega_0 \neq \emptyset$ d'après la proposition XII.1. Supposons que μ appartienne à $L^1(\mathbf{R}_+)$, alors $\hat{\mu}$ est nulle sur Γ_s (proposition 0.7) donc

$$\hat{\mu}(\hat{G}(\Omega_0)) = \{0\}, \quad \text{d'où le résultat c).}$$

THEOREME XI.1. — Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$.

a) Le spectre de $G(T)$ contient $\mathcal{L}T(\sigma(A))$.

b) Si pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ $(\lambda\delta - T)^{-1}$, qui appartient à $M(\mathbb{R}_+)$, appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors le spectre de $G(T)$ est égal à $\mathcal{L}T(\sigma(A))$.

a) Posons pour $\lambda \in \rho(G(T))$ $S_\lambda = (\lambda I - G(T))^{-1}$, d'après la proposition XI.2, S_λ appartient à \mathfrak{u} . Posons pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $s_\lambda = (\lambda\delta - T)^{-1}$, pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $S_\lambda = G(s_\lambda)$. Posons

$$\Omega'_0 = \{\omega, \hat{S}_\lambda(\omega) = 0\}, \quad \Omega'_1 = \mathbb{C} \Omega'_0$$

Pour ω appartenant à Ω_1 et $\operatorname{Re} \lambda > 0$ on a :

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = \hat{s}_\lambda \circ \hat{A}(\omega) = \mathcal{L}s_\lambda \circ \hat{A}(\omega) = \frac{1}{\lambda - \mathcal{L}T \hat{A}(\omega)}$$

il en résulte que Ω'_1 contient Ω_1 et que si ω appartient à Ω_1 .

$$\widehat{G(T)}(\omega) = \mathcal{L}T \circ \hat{A}(\omega)$$

d'après la proposition XI.1

$$\sigma(G(T)) = \widehat{G(T)}(\Omega'_1) = \mathcal{L}T(\sigma(A)) \cup G(\hat{T})(\Omega'_1 - \Omega_1)$$

d'où le résultat a) car $\sigma(G(T))$ est fermé.

b) Supposons que s_λ appartienne à $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors \hat{s}_λ est nul sur Γ_s , donc $\hat{s}_\lambda \circ \hat{G}$ est nul sur Ω_0 , il en résulte que $\Omega'_0 = \Omega_0$ et $\Omega'_1 = \Omega_1$ donc

$$\sigma(G(T)) = \mathcal{L}T(\sigma(A))$$

Remarque. — Dans le théorème XI.1, l'inclusion a) peut être stricte, comme le montre l'exemple suivant :

$$E = L^p(0, 1), \quad p \geq 1$$

$$P_t f(x) = \frac{e^{-at}}{\Gamma(t)} \int_0^x (x-u)^{t-1} f(u) du$$

$\{P_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu vérifiant $\|P_t\| = \frac{e^{-at}}{\Gamma(t+1)}$

On peut trouver $a > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{e^{-at}}{\Gamma(t+1)} \leq 1$$

Le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ est alors un semi-groupe fortement continu de contractions. Le spectre $\sigma(A)$ du générateur infinitésimal de ce semi-groupe est vide. Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$, appartenant à $M(\mathbb{R}_+)$, l'opérateur $G(T)$ est borné, son spectre n'est donc pas vide.

Exemple. — Soit T_α défini par

$$\langle T_\alpha, f \rangle = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty [f(t) - f(0)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Les mesures s_λ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$s_\lambda(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-rt} \frac{r^\alpha}{\lambda^2 - 2r^\alpha \lambda \cos \alpha \pi + r^{2\alpha}} dr$$

(Yosida [9] p. 259-268)

Ainsi, d'après le théorème XI.1, $\sigma(-(-A)^\alpha) = -(-\sigma(A)^\alpha)$

PROPOSITION XI.5. — Soit T une distribution de $P(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\langle T, f \rangle = \int_0^\infty [f(t) - f(0)] p(t) dt$$

où

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t} |p(t)| dt < \infty$$

si il existe α , $0 < \alpha < 1$, et $C > 0$ tels que

$$\int_0^1 \left| p(t) - \frac{C}{t^{1+\alpha}} \right| dt < \infty$$

alors les mesures $s_\lambda = (\lambda \delta - T)^{-1}$ sont définies par des fonctions de $L^1(\mathbb{R}_+)$ et par suite du théorème XI.1 le spectre de $G(T)$ est égal à $\mathcal{L}T(\sigma(A))$.

En effet $T = C_1 T_\alpha + f$, où f est une fonction de $L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$(\lambda \delta - T) = (\lambda \delta - C_1 T_\alpha - f) = (\lambda \delta - C_1 T_\alpha) [\delta - (\lambda \delta - C_1 T_\alpha)^{-1} * f]$$

et

$$\|(\lambda \delta - C_1 T_\alpha)^{-1} * f\|_1 \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$$

donc pour $\lambda > \|f\|_1$, $\delta - (\lambda\delta - C_1 T_a)^{-1} * f$ est inversible dans $M(\mathbb{R}_+)$.

$$(\lambda\delta - T)^{-1} = (\lambda\delta - C_1 T_a)^{-1} * [\delta - (\lambda\delta - C_1 T_a)^{-1} * f]^{-1}$$

et puisque $(\lambda\delta - C_1 T)^{-1}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$, $(\lambda\delta - T)^{-1}$ appartient également à $L^1(\mathbb{R}_+)$.

XII. Application à la théorie du potentiel.

Puissance fractionnaire d'un noyau de Hunt.

Rappelons le théorème fondamental de Hunt :

Soit X un espace localement compact à base dénombrable. Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini. Pour que l'image $V(C_K(X))$ soit dense dans $C_0(X)$ et que V satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe fortement continu de contractions positives $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sur $C_0(X)$, tel que

$$\forall f(x) \in C_K(X) \quad \forall x \in X ; \quad \int_0^\infty P_t f(x) dt$$

le semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ associé à V est unique. (Meyer [5]). Un tel noyau sera appelé noyau de Hunt.

Soit V un noyau de Hunt, intégrale du semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$. On pose pour $0 < \alpha < 1$:

$$\forall f \in C_K^+ , \quad V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty P_t f(x) t^{\alpha-1} dt .$$

THEOREME XII.1. – *Le noyau V^α est un noyau de Hunt.*

a) *Le noyau V^α est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini.*

Soit f dans C_K^+ ,

$$\Gamma(\alpha) V^\alpha f(x) = \int_0^1 P_t f(x) t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty P_t f(x) t^{\alpha-1} dt .$$

La première intégrale est uniformément convergente en x , c'est donc une fonction de C_0 . Pour $t \geq 1$, $t^{\alpha-1} \leq 1$, donc :

$$\int_1^\infty P_t f(x) t^{\alpha-1} dt \leq \int_1^\infty P_t f(x) dt \leq V f(x).$$

La seconde intégrale tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini, et c'est une fonction s.c.i.

$$\int_1^\infty P_t f(x) dt = \int_1^\infty P_t f(x) t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty P_t f(x) (1 - t^{\alpha-1}) dt.$$

Le premier membre est une fonction continue, les deux termes du second membre sont continus. Donc V^α est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini.

b) *Le noyau V^α est l'intégrale d'un semi-groupe fortement continu de contractions positives sur $C_0(X)$.*

Soit T_a la distribution définie à la fin de la partie X, il existe un semi-groupe de mesures positives $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de $M(\mathbb{R}_+)$, de masses égales à 1, étroitement continu, tel que

$$e^{-tu^\alpha} = \int_0^\infty e^{-su} \mu_t(ds), \quad \forall u \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

et on a

$$\frac{1}{u^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-su} s^{\alpha-1} ds, \quad \forall u > 0,$$

$$\frac{1}{u^\alpha} = \int_0^\infty e^{-tu^\alpha} dt, \quad \forall u > 0.$$

LEMME. — *Soit g une fonction s.c.i. positive sur \mathbb{R}_+ , alors*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g(s) s^{\alpha-1} ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s) \mu_t(ds) \right] dt.$$

Pour toute fonction g de $C_K(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s) \mu_t(ds) \right] dt$$

est définie, car il existe $k > 0$, et $u > 0$, tels que $|g(s)| \leq ke^{-su}$, et cette forme linéaire sur $C_K(\mathbb{R}_+)$ définit une mesure positive ν sur

$[0, \infty[$ dont la transformée de Laplace est $\frac{1}{u^\alpha}$, donc

$$\nu(ds) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} ds .$$

Soit g une fonction s.c.i. positive sur \mathbf{R}_+ ; il existe une suite croissante g_n de fonctions de $C_K(\mathbf{R}_+)$ convergeant vers g , et pour tout n ,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g_n(s) s^{\alpha-1} ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g_n(s) \mu_t(ds) \right] dt ;$$

en appliquant le théorème de la convergence monotone de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n(s) \mu_t(ds) = \int_0^\infty g(s) \mu_t(ds) ,$$

et par une deuxième application de ce théorème,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty g(s) s^{\alpha-1} ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(s) \mu_t(ds) \right] dt .$$

Soit $Q_t = G(\mu_t)$, où G est l'homomorphisme associé au semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$. La famille $\{Q_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions positives sur $C_0(X)$ (Théorème X.1). La fonction $g(s) = P_s f(x)$, pour f dans $C_0^+(X)$, est continue positive et, d'après le lemme,

$$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty P_s f(x) s^{\alpha-1} ds = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty P_s f(x) \mu_t(ds) \right] dt .$$

le crochet est égal à $Q_t f(x)$.

$$V^\alpha f(x) = \int_0^\infty Q_t f(x) dt ,$$

le noyau V^α est donc l'intégrale du semi-groupe $\{Q_t\}_{t \geq 0}$.

Domaine positif d'un noyau. Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini ; on appelle domaine positif de V :

$$D^+(V) = \{f \in C_0^+ , V f(x) < \infty , \forall x , \text{ et } V f \in C_0(X)\}$$

$D^+(V)$ contient $C_K^+(X)$.

Soit V un noyau de Hunt, on a défini V^α pour $0 < \alpha < 1$, on pose :

$$V^1 = V \quad \text{et} \quad V^0 = 1 .$$

Soient α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, on a alors

$$D^+(V^\beta) \subset D^+(V^\alpha) .$$

En effet, pour $t \geq 1$, $t^{\alpha-1} \leq t^{\beta-1}$, et la démonstration se fait comme dans la partie a) du théorème XII.1.

Supposons de plus $\alpha + \beta \leq 1$ et f dans $D^+(V^{\alpha+\beta})$, alors f est dans $D^+(V^\alpha)$ d'après ce qui précède, et on a

$$V^\alpha f \in D^+(V^\beta) , \quad V^\beta (V^\alpha f) = V^{\alpha+\beta} f .$$

En effet, par hypothèse, $V^{\alpha+\beta} f$ est dans $C_0(X)$,

$$V^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^\infty P_t f(x) t^{\alpha+\beta-1} dt .$$

Le résultat annoncé résulte de calculs classiques sur les fonctions eulériennes.

Remarque. — Soit V un noyau de Hunt, intégrale du semi-groupe $\{P_t\}$; le générateur infinitésimal A du semi-groupe $\{P_t\}$ est injectif ; soit $R_0 = -A^{-1}$, c'est un opérateur fermé (en général non borné) qui prolonge V , et on a

$$D^+(V) = D(R_0) \cap C_0^+ .$$

0. Appendice.

1. Espace de mesures $M(X)$.

Soit X un espace localement compact. $M(X)$ désigne l'espace des mesures complexes sur X de variation totale finie. On pose

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

Pour cette norme $M(X)$ est un espace de Banach.

DEFINITION 0.1. — *Des mesures μ_i de $M(X)$ convergent étroitement vers 0 si pour toute fonction continue bornée f*

$$\lim \int f d\mu_i = 0$$

Cette convergence correspond à la topologie $\sigma(M(X), C_B(X))$ où $C_B(X)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur X .

Une application de $M(X)$ dans un espace topologique Y sera dite étroitement continue si elle est continue pour la topologie $\sigma(M(X), C_B(X))$.

En anglais le mot étroitement est traduit par strictly, Bochner appelle cette convergence la convergence au sens de Bernoulli (Bochner [1] p. 15).

Dans le cas des mesures positives on a le critère suivant :

PROPOSITION 0.1. — *Pour que des mesures μ_i positives de $M(X)$ convergent étroitement vers une mesure μ il faut et il suffit que*

a) *Pour toute fonction f continue à support compact*

$$\lim \int f d\mu_i = \int f d\mu$$

b) $\lim \int d\mu_i = \int d\mu$

Dans le cas des mesures complexes quelconques de $M(X)$ on a le critère suivant (Schwartz [8] Lemme 17.4. p. 91) :

PROPOSITION 0.2. — *Pour que des mesures μ_i de $M(X)$ convergent étroitement vers 0 il suffit que*

a) *pour toute fonction f continue à support compact*

$$\lim \int f d\mu_i = 0$$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact et i_0 tels que

$$\forall i \geq i_0, |\mu_i|(C K) \leq \varepsilon.$$

Soit f une fonction continue bornée et $\varepsilon > 0, \exists K$ compact et $i_0, \forall i \geq i_0, |\mu_i|(C K) \leq \varepsilon$, soit α une fonction continue à support compact, $0 \leq \alpha \leq 1$, et $\alpha = 1$ sur K ,

$$\int f d\mu_i = \int \alpha f d\mu_i + \int (1 - \alpha) f d\mu_i$$

et pour $i \geq i_0$,

$$\left| \int (1 - \alpha) f d\mu_i \right| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$$

αf est continue à support compact,

$$\exists i_1, \forall i \geq i_1, \left| \int \alpha f d\mu_i \right| \leq \varepsilon$$

donc pour $i \geq i_0$ et i_1

$$\left| \int f d\mu_i \right| \leq (1 + \|f\|_\infty) \varepsilon$$

Cette proposition admet une réciproque dans le cas des suites :

PROPOSITION 0.3.⁽¹⁾ – Soit μ_n une suite de mesures de $M(X)$ convergeant étroitement vers 0, alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact et n_0 tels que

$\forall n \geq n_0, |\mu_n|(\mathbb{C} K) \leq \varepsilon$

Nous voulons montrer

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ et K compact tels que

$\forall n \geq n_0, |\mu_n|(\mathbb{C} K) \leq \varepsilon$

supposons au contraire

$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0$ et K compact, $\exists n \geq n_0, |\mu_n|(\mathbb{C} K) > \varepsilon$

et dans cette hypothèse nous allons construire une fonction continue bornée f et une suite $n_1 < n_2 < \dots < n_p \dots$ telle que

$$\forall p, \left| \int f d\mu_{n_p} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit K_1 un compact, $\exists n_1$ tel que $|\mu_{n_1}|(\mathbb{C} K_1) > \varepsilon$

$\exists g_1$ continue à support compact $|g_1| \leq 1$

$$\text{Supp}(g_1) \cap K_1 = \emptyset, |\mu_{n_1}(g_1)| = \varepsilon$$

La suite (K_p, n_p, g_p) est construite par récurrence telle que

$$K_p \supset K_{p-1} \cup \text{Supp}(g_{p-1})$$

⁽¹⁾ La démonstration de cette proposition m'a été communiquée par J.P. Schreiber.

$$|\mu_{n_{p-1}}|(CK_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|g_p| \leq 1, \text{ Supp}(g_p) \cap K_p = \emptyset, |\mu_{n_p}(g_p)| = \varepsilon$$

$$\left| \mu_{n_p} \left(\sum_{K=1}^p g_K \right) \right| = \left| \mu_{n_p} \left(\sum_{K=1}^{p-1} g_K \right) \right| + |\mu_{n_p}(g_p)|$$

Posons $f = \sum_1^{\infty} g_p$, puisque les fonctions g_p ont des supports disjoints, f est continue et $|f| \leq 1$.

$$\int f d\mu_{n_p} = \mu_{n_p} \left(\sum_{K=1}^p g_K \right) + \int \left(\sum_{K=p+1}^{\infty} g_K \right) d\mu_{n_p}$$

$$|\mu_{n_p} \left(\sum_{K=1}^p g_K \right)| \geq \varepsilon$$

$$\left| \int \left(\sum_{K=p+1}^{\infty} g_K \right) d\mu_{n_p} \right| \leq |\mu_{n_p}|(CK_{p+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc
$$\left| \int f d\mu_{n_p} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Espace de distributions $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ ([7] p. 199).

DEFINITION 0.2. — L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^m)$ qui sont sommes finies de dérivées de mesures de $M(\mathbb{R}^m)$.

PROPOSITION 0.4. — Pour qu'une distribution T appartienne à $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ il faut et il suffit que

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m), T * \alpha \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

DEFINITION 0.3. — L'espace $\dot{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^m qui tendent vers 0 à l'infini ainsi que chacune de leurs dérivées.

Munissons $\dot{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^m)$ de la topologie d'EVTLIC définie par les semi-normes

$$p_k(f) = \text{Sup } |D^k f|$$

le dual de $\dot{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^m)$ est $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$.

DEFINITION 0.4. — L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des distributions de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R})$ dont les supports sont contenus dans \mathbb{R}_+ .

L'espace $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est une algèbre pour le produit de convolution.

PROPOSITION 0.5. — Toute distribution T de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ est somme de dérivées de mesures de $M(\mathbb{R}_+)$.

Soit T une distribution de $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$; par définition il existe des mesures μ_k de $M(\mathbb{R})$ telles que

$$T = \sum_{k=1}^n \delta^{(k)} * \mu_k$$

Posons

$$\alpha(t) = Y(t) e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a > 0$$

le produit de convolution $T * \alpha$ appartient à $M(\mathbb{R}^+)$, or

$$(a\delta - \delta')^{*n} * \alpha = \delta$$

donc

$$T = (a\delta - \delta')^{*n} * \alpha * T$$

d'où le résultat.

DEFINITION 0.5. — L'espace $\mathcal{O}_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^m dont toutes les dérivées appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^m)$.

Si φ appartient à $\mathcal{O}_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ et T appartient à $\mathcal{O}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$, alors $T * \varphi$ appartient à $\mathcal{O}_{L^1}(\mathbb{R}^m)$.

3. Spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$ ([3] p. 147-150).

Soit Γ le spectre de l'algèbre $M(\mathbb{R}_+)$. On note $\hat{\mu}$ la transformée de Gelfand de μ .

PROPOSITION 0.6. — Pour qu'un homomorphisme γ de $M(\mathbb{R}_+)$ sur \mathbb{C} soit étroitement continu il faut et il suffit qu'il existe z , $\operatorname{Re} z \leq 0$, tel que

$$\gamma(\mu) = \int e^{zt} \mu(dt)$$

L'homomorphisme γ est continu pour la topologie $\sigma(M(\mathbf{R}_+), C_B(\mathbf{R}_+))$, il existe donc une fonction continue bornée f telle que

$$\gamma(\mu) = \int f(t) \mu(dt)$$

et γ étant un homomorphisme

$$\gamma(\delta_{t+s}) = \gamma(\delta_t * \delta_s) = \gamma(\delta_t) (\delta_s)$$

$$f(t+s) = f(t)f(s)$$

donc il existe $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \leq 0$, tel que $f(t) = e^{zt}$

Nous noterons Γ_b l'ensemble des homomorphismes étroitement continus de $M(\mathbf{R}_+)$ sur \mathbf{C} , et $\Gamma_s = \mathbf{C} \Gamma_b$. Γ_b est homéomorphe au demi-plan $\{z, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. La restriction de $\hat{\mu}$ à Γ_b est définie par la transformée de Laplace $\mathcal{L}\mu$ de μ .

Le sous-espace de $M(\mathbf{R}_+)$ des mesures qui ont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sera identifié à $L^1(\mathbf{R}_+)$. Soit e_λ la mesure de densité $Y(t)e^{-t\lambda}$, pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

PROPOSITION 0.7. — *Soit γ un élément de Γ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- a) γ appartient à Γ_s .
- b) $\forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0, \gamma(e_\lambda) = 0$
- c) $\forall \mu \in L^1(\mathbf{R}_+), \gamma(\mu) = 0$

Il est clair que c) entraîne b), montrons que b) entraîne a). Supposons au contraire qu'il existe $z, \operatorname{Re} z \leq 0$, tel que

$$\gamma(\mu) = \int e^{zt} \mu(dt)$$

$$\gamma(e_\lambda) = \int_0^\infty e^{zt-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda - z} \neq 0$$

Montrons que a) entraîne c). Supposons au contraire qu'il existe μ dans $L^1(\mathbf{R}_+)$ tel que $\gamma(\mu) \neq 0$, et posons

$$f(t) = \gamma(\delta_t) = \frac{\gamma(\mu * \delta_t)}{\gamma(\mu)}$$

f est une fonction bornée, $f(0) = 1$, $f(t + s) = f(t)f(s)$. Puisque μ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$ l'application $t \longmapsto \mu * \delta_t$ est continue de \mathbb{R}_+ dans $M(\mathbb{R}_+)$ pour la topologie de la norme, donc f est continue, donc il existe z , $\operatorname{Re} z \leq 0$, tel que $f(t) = e^{zt}$. Soit ν appartenant à $M(\mathbb{R}_+)$,

$$\gamma(\mu * \nu) = \gamma \left(\int (\mu * \delta_t) \nu(dt) \right)$$

(intégrale faible, relativement à la topologie $\sigma(M, C_B)$).

$$\begin{aligned} \gamma(\mu * \nu) &= \int \gamma(\mu * \delta_t) \nu(dt) \\ &= \gamma(\mu) \int e^{zt} \nu(dt) \end{aligned}$$

donc

$$\gamma(\nu) = \int e^{zt} \nu(dt)$$

d'où la contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BOCHNER, Harmonic analysis and the theory of probability, University of California Press, Berkeley and Los Angeles.
- [2] C. HERZ, Spectral theory of bounded functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94, p. 181, (1960).
et aussi
Processus stochastiques et laplaciens généralisés, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny* (Théorie du Potentiel), 9^{ème} année, 1964-65.
- [3] E. HILLE, R.S. PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-groups, *Colloq. Publ. Amer. Math. Soc.*, (1957).
- [4] G. LUMER, R.S. PHILLIPS, Dissipative operators in a Banach space, *Pacific Journal of Mathematics*, 11, 679-698, (1961).
- [5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiels, Hermann, Paris, (1966).
- [6] W. RUDIN, Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, (1962).

- [7] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris, (1966).
- [8] L. SCHWARTZ, Lectures on mixed problems in partial differential equations and representation of semi-groups, Tata Institute, Bombay, (1958).
- [9] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer, (1966).

(Thèse Fac. Sciences. Orsay 1969)

Jacques FARAUT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 – Orsay