Université Grenoble Alpes

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Bastien Drevon & Vincent Sécherre

Décomposition en blocs de la catégorie des représentations ℓ-modulaires lisses de longueur finie de $\mathrm{GL}_m(D)$

Tome 73, n° 6 (2023), p. 2411-2468.

https://doi.org/10.5802/aif.3572

CENTRE MERSENNE

Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
73, 6 (2023) 2411-2468

DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS ℓ-MODULAIRES LISSES DE LONGUEUR FINIE DE $\mathrm{GL}_m(D)$

par Bastien DREVON & Vincent SÉCHERRE

Résumé. — Soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p, soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ avec $n \geqslant 1$, et soit ℓ un nombre premier différent de p. Nous décrivons la décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses de longueur finie de G à coefficients dans une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique ℓ. Contrairement au cas des représentations complexes d'un groupe réductif p-adique quelconque et au cas des représentations ℓ-modulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, à chaque bloc de cette décomposition correspond non pas un unique support supercuspidal, mais une réunion finie de tels supports, que nous décrivons. Nous prouvons également qu'un bloc supercuspidal est équivalent au bloc principal (c'est-à-dire le bloc contenant le caractère trivial) du groupe multiplicatif d'une algèbre à division convenable, et nous déterminons les représentations irréductibles ayant une extension non scindée avec une représentation supercuspidale de G donnée.

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p, let G be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ with $n \geqslant 1$ and ℓ be a prime number different from p. We describe the block decomposition of the category of smooth representations of finite length of G with coefficients in $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Unlike the case of complex representations of an arbitrary p-adic reductive group and that of ℓ-modular representations of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, several non-isomorphic supercuspidal supports may correspond to the same block. We describe the (finitely many) supercuspidal supports corresponding to a given block. We also prove that a supercuspidal block is equivalent to the principal (that is, the one which contains the trivial character) block of the multiplicative group of a suitable division algebra, and we determine those irreducible representations having a nontrivial extension with a given supercuspidal representation of G.

Mots-clés : Bloc, extension, longueur, réduction mod ℓ, représentation supercuspidale, type.
Classification Mathématique (2020) : 22E50.

1. Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p, et soit G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe sur F. C'est un groupe localement compact et totalement discontinu. On s'intéresse aux représentations lisses de G sur des espaces vectoriels complexes et aux opérateurs d'entrelacement entre ces représentations, qui forment une catégorie abélienne notée $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G})$. Dans [1], Bernstein a montré comment cette catégorie se décompose en un produit de blocs, c'est-à-dire de facteurs directs indécomposables, chacun correspondant bijectivement à une classe inertielle de paires cuspidales de G. Au cœur de ce résultat, il y a le fait qu'une représentation irréductible cuspidale complexe de G est projective modulo le centre, c'est-à-dire projective dans la sous-catégorie pleine des représentations de G ayant un caractère central fixé. La sous-catégorie pleine $\mathbf{rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G})$ formée des représentations de longueur finie se décompose elle aussi en une somme directe de blocs, chacun correspondant cette fois-ci à une *unique* classe de G-conjugaison de paires cuspidales, comme expliqué par Casselman dans [4, 7.3].

Remplaçons maintenant le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ d'un corps fini de caractéristique un nombre premier ℓ différent de p. Les représentations lisses de G sur des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels, dites *ℓ-modulaires*, sont étudiées depuis les travaux fondateurs de Vignéras [30], dans l'objectif d'étudier les phénomènes de congruence entre formes automorphes, ainsi que les propriétés de congruence des phénomènes de réciprocité et de fonctorialité de Langlands locales. Si la théorie des représentations ℓ-modulaires des groupes réductifs p-adiques ressemble à la théorie complexe sur certains points, du fait que p est inversible dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, une différence essentielle est l'existence, dans le cas modulaire, de représentations cuspidales non supercuspidales, c'est-à-dire apparaissant non comme quotients mais comme sous-quotients d'induites paraboliques propres (on renvoie au paragraphe 3.1 ci-dessous pour les définitions de *cuspidal* et *supercuspidal*). Par conséquent, une représentation cuspidale n'est en général pas projective modulo le centre dans le cas modulaire. S'ajoute à ceci le phénomène récemment observé ([11, 12]) de non-unicité du support supercuspidal : une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible d'un groupe réductif p-adique peut apparaître comme sous-quotient d'induites paraboliques de paires supercuspidales non conjuguées. Aussi l'approche de Bernstein devient-elle inopérante dans le cas modulaire.

Supposons maintenant que G soit une forme intérieure du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, avec $n \geqslant 1$. C'est un groupe de la forme $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, où D est une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F, et où m est un diviseur de n tel que $md = n$. Pour un tel groupe, on dispose de l'arsenal technique de la théorie des types de Bushnell et Kutzko développée dans [2, 3, 14, 22, 23, 24, 25, 26, 27] et adaptée au cas ℓ-modulaire dans [18], permettant d'étudier en détail ses représentations ℓ-modulaires. On peut attacher à chaque représentation irréductible de G un unique support supercuspidal (voir le paragraphe 3.2), et montrer que la catégorie abélienne $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ des représentations lisses de G à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ se décompose en un produit de blocs $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$, chacun correspondant bijectivement à une classe d'inertie Ω de paires supercuspidales (théorème 3.1). Se pose ensuite la question de la décomposition de la sous-catégorie pleine $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, formée des représentations de longueur finie : nous y répondons dans le présent article.

Pour décomposer $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, nous nous appuyons sur le résultat suivant (lemme 3.4).

Lemme 1.1. — *Soit* S *une partie de l'ensemble* X *des classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G *telle que, pour toutes représentations $\tau \in \mathrm{S}$ et $\pi \in \mathrm{X} - \mathrm{S}$, le premier espace d'extension* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\tau, \pi)$ *soit nul. Alors la catégorie* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ *se décompose en la somme directe de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$*, la sous-catégorie pleine des représentations dont les sous-quotients irréductibles sont dans* S*, et de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{X} - \mathrm{S})$.

Pour que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\tau, \pi)$ soit non nul, il faut et suffit qu'il existe une représentation indécomposable de G de longueur 2 dont l'unique sous-représentation irréductible soit π et l'unique quotient irréductible soit τ. Étant donné une représentation irréductible π de G, nous cherchons donc à quelle condition une représentation $\tau \in \mathrm{X}$ a une extension non scindée avec π, et plus généralement à quelle condition π et τ sont des constituants irréductibles d'une représentation indécomposable de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$. Pour cela, la décomposition en blocs de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ donnée au théorème 3.1 assure qu'on peut se ramener au cas où π et τ ont des supports supercuspidaux inertiellement équivalents.

Notre stratégie repose partiellement sur la notion de réduction modulo ℓ. Expliquons de quoi il s'agit. Considérons les représentations irréductibles de G à coefficients dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques. Une telle représentation est dite *entière* si elle admet un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau stable par G, où $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Tensoriser un tel réseau par $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ fournit une représentation lisse ℓ-modulaire de longueur finie, dont la semi-simplification ne dépend pas du réseau choisi : on appelle celle-ci la *réduction mod ℓ* de la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière considérée. Par exemple, il y a un critère simple pour savoir si une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale μ de G est entière : il faut et il suffit que son caractère central soit lui-même entier, c'est-à-dire à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$. Si tel est le cas, il y a une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale π de G telle que la réduction mod ℓ de μ soit :

$$\pi \oplus \pi\nu \oplus \cdots \oplus \pi\nu^{a-1} \tag{1.1}$$

où ν désigne le caractère “valeur absolue de la norme réduite” de G et $a = a(\mu) \geqslant 1$ la longueur de cette réduction mod ℓ. En outre, l'ensemble des facteurs irréductibles de (1.1) est soit réduit à π, soit formé de tous les $\pi\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$, et on se trouve dans l'un ou l'autre cas selon que ℓ divise ou non l'entier $q(\pi) - 1$, où $q(\pi)$ est une certaine puissance du cardinal q du corps résiduel de F associée à π au paragraphe 3.8. Dans le cas où π est de niveau 0, elle vaut simplement q^n.

Inversement, si π est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation *supercuspidale* (et pas seulement cuspidale) de G, l'ensemble des représentations de G apparaissant avec π dans la réduction mod ℓ d'une même $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière est soit réduit à π (si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$), soit formé des représentations $\pi\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$ (si ℓ divise $q(\pi) - 1$).

Observons que, si $\boldsymbol{k}$ est un corps fini de caractéristique p, il existe un phénomène comparable mais plus simple dans le cas du groupe linéaire général $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$: une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$ dont la réduction mod ℓ contient une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale est elle-même cuspidale et sa réduction mod ℓ est irréductible.

Disons plus généralement que des représentations irréductibles ℓ-modulaires de G sont *équivalentes* s'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G dont la réduction mod ℓ contienne chacune de ces représentations. Il n'est pas évident *a priori* qu'il s'agisse d'une relation d'équivalence, mais on peut montrer le résultat suivant (proposition 3.23).

Proposition 1.2. — *Soit π une représentation irréductible de* G *dont le support supercuspidal est $\rho_1 + \cdots + \rho_r$. Alors une représentation irréductible π' est équivalente à π si et seulement s'il y a des entiers $j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{Z}$ tels que le support supercuspidal de π' soit $\rho_1\nu^{j_1} + \cdots + \rho_r\nu^{j_r}$, où, pour chaque $k = 1, \ldots, r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k) - 1$.*

Notons $\mathrm{B}(\pi)$ la classe des représentations irréductibles équivalentes à une représentation donnée π, et notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des classes $\mathrm{B}(\pi)$ lorsque π décrit les représentations irréductibles ℓ-modulaires de G. (Attention : la définition des $\mathrm{B}(\pi)$ que nous donnons au paragraphe 3.11 est différente, mais équivalente d'après la proposition 1.2.) On a le résultat suivant (théorème 6.2).

Théorème 1.3. — *On a une décomposition en blocs :*

$$\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\mathrm{B}} \mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$$

où B *décrit les éléments de* $\mathscr{B}$, *et où* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ *formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B.

Dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, des représentations irréductibles de G sont dans le même bloc si et seulement si elles ont le même support supercuspidal (voir les remarques 3.22 et 6.3).

Il n'est pas difficile de montrer (voir le lemme 3.5) que deux représentations irréductibles équivalentes au sens défini ci-dessus sont les constituants d'une représentation indécomposable de longueur finie G, et (voir le lemme 3.2) que les constituants irréductibles d'une représentation indécomposable de longueur finie G ont le même caractère central. Il ne reste donc qu'à prouver que, pour toute classe $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\tau, \pi)$ est nul quels que soient $\pi \in \mathrm{B}$ et $\tau \in \mathrm{X} - \mathrm{B}$. Nous pouvons supposer, comme observé précédemment que τ et π ont des supports supercuspidaux inertiellement équivalents. Nous procédons en trois étapes :

(1) d'abord le cas où π est une représentation cuspidale de niveau 0,
(2) puis le cas où π est une représentation cuspidale de niveau quelconque de G,
(3) et enfin le cas général,

que nous traitons respectivement dans les paragraphes 4, 5 et 6. Détaillons chacune de ces trois étapes, à commencer par la première.

La première étape repose sur la description de π comme l'induite compacte d'une représentation ξ d'un sous-groupe N de G telle que :

- le groupe N contient et normalise le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$, où $\mathcal{O}_\mathrm{D}$ est l'anneau des entiers de D,
- la restriction de ξ à $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ est l'inflation d'une représentation irréductible cuspidale σ du groupe fini $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, où $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}$ est le corps résiduel de D.

(Dans le langage de la théorie des types simples de Bushnell–Kutzko [3, 18], la paire (N, ξ) est un type simple maximal étendu de niveau 0 : voir le paragraphe 3.7.) D'abord (voir les paragraphes 4.1 à 4.3), nous montrons que la détermination des représentations cuspidales de G ayant une extension non scindée avec π équivaut à la détermination des caractères non ramifiés

χ de G tels que ξ ait une extension non scindée avec un conjugué de $\xi\chi$ sous le normalisateur de N dans G. Nous ramenons ainsi le problème initial à un problème dans la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$ des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de longueur finie de N.

Le groupe N se comportant presque comme un groupe fini, nous prouvons ensuite que ξ admet une enveloppe projective dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$, ce qui permet de ramener le problème à celui de la description des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles δ de N dont la réduction mod ℓ contient ξ (voir les paragraphes 4.4 à 4.6).

Pour décrire ces représentations δ, la situation est particulièrement favorable lorsque π (ou de façon équivalente σ) est supercuspidale, grâce au fait que toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ dont la réduction mod ℓ contient σ est elle-même cuspidale et sa réduction mod ℓ est irréductible ; les représentations δ se décrivent alors aisément à l'aide des types simples maximaux de niveau 0 relevant σ. Si π n'est pas supercuspidale, le fait précédent est à remplacer par le fait que toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ dont la réduction mod ℓ contient σ est générique (voir les paragraphes 4.7 à 4.11).

La seconde étape consiste à se ramener au cas précédent, au moyen d'une équivalence de catégories construite par Chinello [5, 6] grâce à la théorie des types simples de Bushnell–Kutzko [3, 18]. Étant donné une représentation cuspidale π de G, correspondant à une classe inertielle Ω, Chinello :

- construit un progénérateur de type fini de la catégorie :
$$\bigoplus_{\Omega'} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega') \tag{1.2}$$
(où Ω' décrit les classes inertielles équivalentes à Ω en un sens que nous ne préciserons pas ici),
- et prouve l'existence d'une extension finie E de F de degré k divisant n et d'une équivalence de catégories :
$$\bigoplus_{\Omega'} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega') \xrightarrow{\mathbf{F}} \bigoplus_{\Omega_0} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$$
où Ω_0 décrit les classes inertielles de niveau 0 d'une certaine forme intérieure G_0 de $\mathrm{GL}_{n/k}(\mathrm{E})$.

Le foncteur $\mathbf{F}$ envoie donc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ sur $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$ pour une certaine classe inertielle Ω_0.

Il s'agit alors de prouver que $\mathbf{F}$ envoie π sur une représentation cuspidale π_0 (lemme 5.5), puis que l'image de $\mathrm{B}(\pi)$ par $\mathbf{F}$ est égale à $\mathrm{B}(\pi_0)$, ce que nous faisons en décrivant le comportement de ce foncteur par torsion par un caractère non ramifié (lemme 5.6).

Enfin, nous traitons le cas général dans la section 6, en nous inspirant de [13, théorème 3.2.13]. Nous obtenons le résultat suivant (proposition 6.1).

Proposition 1.4. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G *telles que l'espace* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\pi)$ *soit non nul. Alors π et π' sont équivalentes.*

Enfin, le résultat suivant (proposition 6.5) complète la description de la relation d'équivalence faite dans la proposition 1.2.

Proposition 1.5. — *Pour que des représentations irréductibles de* G *soient équivalentes, il faut et suffit qu'elles apparaissent comme sous-quotients d'une même représentation indécomposable de longueur finie de* G.

Dans la section 7, nous nous intéressons aux blocs supercuspidaux des catégories $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ et $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, dans l'objectif de prolonger les résultats de Chinello [5, 6] (voir page précédente) Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de G, de classe inertielle Ω, et posons $\mathrm{B}=\mathrm{B}(\pi)$. Nous construisons un progénérateur de type fini du bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ (proposition 7.4) et calculons l'algèbre de ses endomorphismes (théorème 7.10). Nous en déduisons le résultat suivant (théorème 7.1 et corollaire 7.2). Appelons *bloc principal* le bloc contenant le caractère trivial.

Théorème 1.6. — *Il existe un corps localement compact non archimédien* F' *et une* F'*-algèbre à division centrale* D' *tels que les blocs* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ *et* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ *soient respectivement équivalents aux blocs principaux des catégories* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^{\times})$ *et* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^{\times})$.

Ce résultat corrobore le principe selon lequel, étant donné un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F, un bloc de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathbf{G}(\mathrm{F}))$ devrait être équivalent au bloc principal de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathbf{G}'(\mathrm{F}))$ pour un groupe réductif convenable $\mathbf{G}'$ (voir Dat [9], ainsi que [6, 10] pour le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$). Observons cependant que, contrairement à ce qui se passe pour les représentations complexes, on ne peut pas toujours choisir $\mathrm{D}'=\mathrm{F}'$ dans ce théorème (voir la remarque 7.15).

Dans la dernière section, étant donné une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale π de G, nous déterminons toutes les représentations irréductibles π' de G telles qu'il existe une extension non scindée de π par π'. Le résultat (proposition 8.5) s'exprime en fonction de l'invariant de Hasse h de D (définition 3.9) et du degré k de l'extension E/F définie plus haut. On note (a, b) le plus grand diviseur commun à deux entiers $a, b \geqslant 1$.

Proposition 1.7. — *Notons $h(\pi)$ le reste dans la division euclidienne de $hk/(k,d)$ par $d/(k,d)$. L'ensemble des représentations π' de* G *telles que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ *soit non nul est :*

(1) *réduit à π si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$,*
(2) *formé de π et de la représentation $\pi\nu^{-h(\pi)}$ si ℓ divise $q(\pi) - 1$.*

Signalons pour finir qu'un rapporteur d'une version antérieure de cet article a attiré notre attention sur le fait que la récurrence sur laquelle est fondée la preuve de [28, proposition 1.3] est incorrecte. Nous n'avons pas su corriger la récurrence, mais nous expliquons dans un appendice au présent article pourquoi le résultat principal de [28] – c'est le théorème 3.1 ci-dessous – est toujours valable. Nous remercions le rapporteur d'avoir attiré notre attention sur ce point.

2. Notations

Nous introduisons maintenant les principales définitions et notations utilisées dans la suite.

Fixons un corps localement compact non archimédien F, de caractéristique résiduelle p.

Si K est une extension finie de F, ou plus généralement une F-algèbre à division de dimension finie, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ et $\boldsymbol{k}_{\mathrm{K}}$ son corps résiduel, qui est un corps fini de cardinal noté q_{K}. On pose $q = q_{\mathrm{F}}$ dans toute la suite.

Si n est un entier strictement positif, on note $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K et $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ le groupe de ses éléments inversibles. Muni de la topologie induite par celle de K, celui-ci est un groupe topologique localement profini.

Étant donné un nombre premier ℓ différent de p, on note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques, $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau des entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel.

Soit R un anneau commutatif, et soit G un groupe localement profini.

Par R-*représentation* (ou simplement représentation si aucune confusion n'en résulte) de G on entendra toujours une représentation lisse sur un R-module. Par R-*caractère* de G, on entendra une représentation lisse de G sur R, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes de G dans $\mathrm{R}^\times$ de noyau ouvert.

On note $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la catégorie abélienne des R-représentations lisses de G et $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la sous-catégorie pleine formée des représentations de longueur finie.

Si π est une représentation d'un sous-groupe fermé H de G et $g \in \mathrm{G}$, on pose $\mathrm{H}^g = g^{-1}\mathrm{H}g$ et on note π^g la représentation $x \mapsto \pi(gxg^{-1})$ de H^g. Si χ est un caractère de H, on note $\pi\chi$ la représentation $x \mapsto \chi(x)\pi(x)$ de H.

3. Préliminaires et premiers théorèmes de décomposition

Fixons une fois pour toutes une F-algèbre à division centrale D, de degré réduit d, et un entier $m \geqslant 1$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Si l'on pose $n = md$, c'est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$.

On fixe une uniformisante ϖ_{F} de F, et une uniformisante ϖ_{D} de D telle que $\varpi_{\mathrm{D}}^d = \varpi_{\mathrm{F}}$.

Dans cette section, R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

3.1. Induction parabolique

Soit P un sous-groupe parabolique de G, soit N son radical unipotent et soit M une composante de Levi de P. On note $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ le foncteur d'induction parabolique normalisée de M à G relativement à P. (La normalisation nécessite de fixer une racine carrée de q dans R, ce que nous faisons une fois pour toutes.) Si $m_1, \dots, m_r$ sont des entiers $\geqslant 1$ de somme m, si M est le sous-groupe de Levi des matrices diagonales par blocs de tailles respectives $m_1, \dots, m_r$, canoniquement isomorphe au produit $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathrm{D})$, si P est le sous-groupe parabolique standard engendré par M et les matrices unipotentes triangulaires supérieures de G, et si π_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on note :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r \tag{3.1}$$

l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ à G relativement à P.

Une représentation irréductible de G est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est quotient (resp. sous-quotient) d'aucune représentation de la forme (3.1) avec $r \geqslant 2$. Une représentation supercuspidale est donc cuspidale, la réciproque n'étant pas vraie en général. Si R est de caractéristique nulle, toute représentation irréductible cuspidale est supercuspidale.

On définit de façon analogue les notions de représentation irréductible cuspidale et supercuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$, où $\boldsymbol{k}$ est un corps fini de caractéristique p.

3.2. Décomposition de Bernstein

Soit π une représentation irréductible de G. Il y a des entiers $m_1, \dots, m_r$ de somme m et des représentations irréductibles supercuspidales $\pi_1, \dots, \pi_r$, comme au paragraphe 3.1, telles que π soit un sous-quotient de l'induite parabolique (3.1). D'après [17, théorème 8.16], ces représentations supercuspidales sont uniques à permutation près. La somme formelle :

$$\pi_1 + \cdots + \pi_r \tag{3.2}$$

s'appelle le *support supercuspidal* de π. On la note $\mathrm{scusp}(\pi)$.

On définit et on note de façon analogue le support supercuspidal d'une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$, dont l'unicité provient par exemple de [19, théorème 2.5].

La *classe inertielle* d'un support supercuspidal (3.2) est l'ensemble des supports supercuspidaux de G de la forme $\pi_1\chi_1 + \cdots + \pi_r\chi_r$ où χ_i est un caractère non ramifié du groupe $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$. Si Ω est une classe inertielle de supports supercuspidaux de G, on note $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans Ω.

Appelons *bloc* de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ un facteur direct indécomposable de cette catégorie.

Théorème 3.1 ([1, 28, 32]). — *Pour chaque classe inertielle Ω de supports supercuspidaux de* G*, la sous-catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$ est un bloc. On a une décomposition :*

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}) = \prod_{\Omega} \mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega) \tag{3.3}$$

où Ω décrit les classes inertielles de supports supercuspidaux de G.

3.3. Décomposition selon le caractère central

Passons maintenant à la sous-catégorie $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ des R-représentations de longueur finie de G. D'abord, la décomposition (3.3) induit une décomposition :

$$\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\Omega} \mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$$

où $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$ est la sous-catégorie pleine des représentations de longueur finie de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$. Cependant, contrairement aux $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$, les facteurs $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$ ne sont pas indécomposables, comme nous allons le voir tout de suite.

Notons Z le centre de G, naturellement isomorphe à $\mathrm{F}^{\times}$. D'après [30, II.2.8], toute représentation irréductible de G admet un caractère central.

Lemme 3.2. — *Soit* V *une représentation de longueur finie de* G*. Pour tout caractère* α *de* Z*, notons* $\mathrm{V}(\alpha)$ *la plus grande sous-représentation de* V *dont les sous-quotients irréductibles admettent* α *pour caractère central. On a alors :*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\alpha} \mathrm{V}(\alpha).$$

Démonstration. — Soit n la longueur de V, et soit r le cardinal de l'ensemble des caractères centraux des composants irréductibles de V. On a $n \geqslant r$, et on peut supposer que $r \geqslant 2$. La preuve se fait par récurrence sur n, comme celle de [28, proposition 1.7]. Nous ne détaillons que le cas où $n = r = 2$.

Supposons donc que V ait une sous-représentation irréductible W, de caractère central α, et que V/W soit irréductible et de caractère central $\beta \neq \alpha$. Il s'agit de prouver que W a un supplémentaire dans V stable par G. Plus précisément, nous allons prouver que :

$$\mathrm{X} = \{v \in \mathrm{V} \mid z \cdot v = \beta(z)v \text{ pour tout } z \in \mathrm{Z}\}$$

est un supplémentaire de W dans V stable par G. Bien sûr, X est stable par G et $\mathrm{W} \oplus \mathrm{X} \subseteq \mathrm{V}$. Comme V est de longueur 2, il suffit de prouver que $\mathrm{X} \neq \{0\}$ pour en déduire que $\mathrm{W} \oplus \mathrm{X} = \mathrm{V}$. Fixons un $v \in \mathrm{V}$ tel que $v \notin \mathrm{W}$ et un $z_0 \in \mathrm{Z}$ tel que $\beta(z_0) \neq \alpha(z_0)$, et posons :

$$x = z_0 \cdot v - \alpha(z_0)v.$$

Pour tout $z \in \mathrm{Z}$, on pose $w = z \cdot v - \beta(z)v$ (qui appartient à W car Z agit par β sur le quotient V/W). En particulier, pour $z = z_0$, on en déduit que

$x \neq 0$ car $v \notin \mathrm{W}$. On a :

$$\begin{aligned} z \cdot x &= z_0 \cdot (\beta(z)v + w) - \alpha(z_0)(z \cdot v) \\ &= \beta(z)(x + \alpha(z_0)v) + \alpha(z_0)w - \alpha(z_0)(w + \beta(z)v) \\ &= \beta(z)x \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $x \in \mathrm{X}$.

Pour finir, indiquons brièvement comment prouver le lemme par récurrence sur n. Si $n = 2$, le lemme est prouvé. Si $n \geqslant 3$, on fixe un caractère central α_0 d'une sous-représentation irréductible de V, et on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{V}(\alpha_0)$, qui se décompose sous la forme $\mathrm{W}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{W}(\alpha_s)$, les α_i étant des caractères de Z tous distincts de α_0 par maximalité de $\mathrm{V}(\alpha_0)$ (on a donc $s = r - 1$). Il ne reste plus qu'à prouver que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, il y a une sous-représentation V_i de V isomorphe à $\mathrm{W}(\alpha_i)$: on en déduira que V est la somme directe $\mathrm{V}(\alpha_0) \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{r-1}$ et que V_i est égal à $\mathrm{V}(\alpha_i)$. Pour cela, on raisonne comme dans la preuve de [28, lemme 1.8], en appliquant l'hypothèse de récurrence à la préimage de $\mathrm{W}(\alpha_i)$ dans V et en s'aidant du cas où $n = r = 2$. Pour plus de détails, voir [28, proposition 1.7]. □

Il sera commode d'introduire la définition suivante.

Définition 3.3. — *Des représentations irréductibles* π, π' *de* G *sont dites* dépendantes *s'il y a une représentation indécomposable de longueur finie de* G *ayant* π *et* π' *pour sous-quotients.*

D'après le lemme 3.2, pour que deux représentations irréductibles de G soient dépendantes, il faut qu'elles aient le même caractère central.

3.4. Espaces d'extension

D'après [31], la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ a assez d'objets projectifs. On peut donc définir, pour des représentations π, π' de cette catégorie, des espaces d'extension $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ pour tout $i \geqslant 0$.

Dans ce paragraphe, nous nous concentrerons sur le premier espace d'extension entre représentations irréductibles. Étant donné des représentations irréductibles π et π' de G, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ est non nul si et seulement s'il existe une représentation indécomposable de G de longueur 2 dont l'unique sous-représentation soit isomorphe à π' et l'unique quotient soit isomorphe à π.

Le lemme suivant nous donne un moyen général de décomposer la catégorie $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ en somme de deux facteurs directs. Notons $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G.

LEMME 3.4. — *Soit* S *une partie de* $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ *telle que, pour toute* $\sigma \in \mathrm{S}$ *et toute* $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) - \mathrm{S}$, *on ait :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi) = \{0\}. \tag{3.4}$$

Alors $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ *se décompose en la somme directe de* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$, *la sous-catégorie pleine des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* S, *et de* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) - \mathrm{S})$.

Démonstration. — Soit V une représentation de longueur finie de G. On note X la plus grande sous-représentation de V dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans S, et Y celle dont tous les sous-quotients irréductibles sont hors de S. Il s'agit de prouver que V est égale à $\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}$, c'est-à-dire que $\mathrm{W} = \mathrm{V}/(\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y})$ est nul. Supposons que ce ne soit pas le cas ; soit π une sous-représentation irréductible de W, qu'on peut supposer dans S pour fixer les idées, le cas contraire se traitant de la même façon. Notons U l'image réciproque de π par la surjection naturelle de V sur W. C'est une extension de U/Y, qui a tous ses sous-quotients irréductibles dans S, par Y, qui a tous ses sous-quotients irréductibles hors de S. Par un argument de dévissage classique, la condition (3.4) entraîne que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}/\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$ est nul ; ainsi U est la somme directe de Y et U/Y. Le fait que U/Y ait tous ses sous-quotients irréductibles dans S, contienne strictement X et se plonge dans V contredit la maximalité de X. □

3.5. Réduction mod ℓ

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour que des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles soient dépendantes. Elle repose sur la notion de réduction mod ℓ, que nous rappelons maintenant.

Soit π une représentation de longueur finie de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V. Elle est dite *entière* si V contient un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau (c'est-à-dire un sous-$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module libre engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) stable par G. Si L est un tel réseau, la représentation de G sur $\mathrm{L} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est alors lisse et de longueur finie, et sa semi-simplification ne dépend que de π, et pas du choix de L. On la note $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, qu'on appelle la *réduction mod* ℓ de π. Pour les détails, on renvoie le lecteur à [30, 33].

Lemme 3.5. — *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* G. *Si deux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G *apparaissent dans $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, elles sont dépendantes.*

Démonstration. — Soit σ un facteur irréductible de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, et soit T l'ensemble des facteurs irréductibles τ de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ tels que σ et τ soient dépendants. On veut prouver que T est égal à l'ensemble de tous les facteurs irréductibles de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Nous allons prouver qu'il existe un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau L de l'espace V de π tel que L soit stable par G, et tel qu'aucune sous-représentation irréductible de $\mathrm{L} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ ne soit dans T.

Pour cela, nous allons utiliser [13, lemme 2.2.6]. Pour se convaincre que l'on peut s'en servir, on observe que, d'après [30, II.4.7], il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et une E-représentation $\mathrm{V_E}$ de G telles que :

$$\mathrm{V} \simeq \mathrm{V_E} \otimes_\mathrm{E} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

L'espace $\mathrm{V_E}$ contient un $\mathcal{O}_\mathrm{E}$-réseau $\mathrm{M_E}$ stable par G, et $\mathrm{M_E} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{E}} \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau de V stable par G. Quitte à augmenter E si besoin, on peut même supposer que tous les sous-quotients irréductibles de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ sont définis sur $\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$, le corps résiduel de E. En particulier, les éléments de T sont tous de la forme $\mathrm{W} \otimes_{\boldsymbol{k}_\mathrm{E}} \overline{\mathbb{F}}_\ell$, où W décrit un ensemble $\mathrm{T_E}$ de $\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$-représentations irréductibles de G. L'anneau $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ est un anneau de valuation discrète complet, le module $\mathrm{M_E}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{p}_\mathrm{E}$-adique car il est libre sur $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ et $\mathrm{M_E} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{E}} \boldsymbol{k}_\mathrm{E}$ est une $\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$-représentation de G de longueur finie d'après [33, théorème 1] ou [30, II 5.11.b]. La E-représentation $\mathrm{V_E}$ est donc une bonne représentation entière au sens de [13, Definition 2.2.1], et elle est admissible d'après [30, II.2.8]. Appliquant [13, lemme 2.2.6], on obtient un $\mathcal{O}_\mathrm{E}$-réseau $\mathrm{L_E}$ dans $\mathrm{V_E}$, stable par G, tel qu'aucune sous-représentation irréductible de $\mathrm{L_E} \otimes \boldsymbol{k}_\mathrm{E}$ ne soit dans $\mathrm{T_E}$. Ainsi $\mathrm{L} = \mathrm{L_E} \otimes \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau de V stable par G ayant la propriété voulue.

Soit maintenant ρ une sous-représentation irréductible de $\mathrm{L} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Elle n'est pas dans T, donc ρ et σ ne sont pas dépendantes. Il y a donc une décomposition :

$$\mathrm{L} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell = \mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2$$

où X_1 est indécomposable et contient σ mais pas ρ, et où X_2 contient ρ. Tout sous-quotient irréductible de X_1 est dans T : contradiction. □

3.6. Représentations cuspidales

En vue d'appliquer le lemme 3.5, nous allons décrire la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de G. Notons ν le caractère non ramifié "valeur absolue de la norme réduite" de G.

Proposition 3.6. — *Soit μ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de* G*.*

(1) *Il existe une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale π de* G *et un entier $a \geqslant 1$ tels que :*

$$\mathbf{r}_\ell(\mu) = \pi \oplus \pi\nu \oplus \cdots \oplus \pi\nu^{a-1}. \tag{3.5}$$

(2) *Si $\epsilon(\pi)$ désigne le plus petit entier $i \geqslant 1$ tel que $\pi\nu^i$ soit isomorphe à π, l'entier a est égal soit à 1, soit à $\epsilon(\pi)\ell^u$ pour un $u \geqslant 0$.*

Démonstration. — La première partie est donnée par [18, théorème 3.15], la seconde est donnée par [18, lemme 3.19] et [20, 3.3]. □

D'après [20, 3.3], on a une autre description de $\epsilon(\pi)$. Si $t(\pi)$ désigne le *nombre de torsion* de π, c'est-à-dire le nombre de caractères non ramifiés χ de G tels que π soit isomorphe à $\pi\chi$, et si q est le cardinal du corps résiduel de F, alors :

$$\epsilon(\pi) = \text{ordre de } q^{t(\pi)} \bmod \ell. \tag{3.6}$$

Afin d'affiner la description de l'entier a apparaissant dans (3.5), il nous faut introduire des invariants supplémentaires associés à la représentation cuspidale π, ce que nous faisons dans les paragraphes suivants, à commencer par le cas où π est de niveau 0.

3.7. Niveau 0

Soit π une représentation cuspidale de G de niveau 0, c'est-à-dire que l'espace de ses vecteurs invariants par le pro-p-sous-groupe $\mathrm{N}^1 = 1 + \mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})$ est non nul. D'après [18, paragraphe 3.2], le groupe compact maximal $\mathrm{N}^0 = \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ agit sur cet espace *via* une représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, de dimension finie car π est admissible ([30, II.2.8]), et contenant une sous-représentation irréductible cuspidale σ. Selon [17, paragraphe 6.1], on a le fait suivant.

Fait 3.7. — *La représentation π est supercuspidale si et seulement si σ est supercuspidale.*

Notons ξ^0 l'inflation de σ à N^0, et N le normalisateur de la classe d'isomorphisme de ξ^0 dans G. D'après [18, paragraphe 3.1], il y a un unique prolongement de ξ^0 à N, noté ξ, tel que l'induite compacte de ξ à G soit isomorphe à π.

Soit $\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0)$ le normalisateur de N^0 dans G, qui est engendré par N^0 et l'uniformisante ϖ_{D}. Le groupe N est compact mod le centre de G et on a :

$$\mathrm{F}^\times \mathrm{N}^0 \subseteq \mathrm{N} \subseteq \mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0).$$

D'après [18, lemme 3.2], on a le fait suivant.

Fait 3.8. — *La représentation de* N *sur l'espace des vecteurs* N^1*-invariants de* π *est isomorphe à la somme directe des conjugués de* ξ *sous le normalisateur* $\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0)$.

Notons $b = b(\pi)$ le nombre de conjugués de ξ sous N, c'est-à-dire l'indice de N dans $\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0)$, et $s = s(\pi)$ l'indice de $\mathrm{F}^\times \mathrm{N}^0$ dans N, deux entiers dont le produit vaut d. On a :

$$\mathrm{N} = \langle \mathrm{N}^0, \varpi \rangle, \quad \varpi = \varpi_{\mathrm{D}}^b. \tag{3.7}$$

L'action de ϖ_{D} par conjugaison sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$ induit un automorphisme de $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$, engendrant le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})$. Ainsi b est le nombre de conjugués de σ sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})$ et s est l'ordre du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de σ dans $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})$. Ces deux entiers sont indépendants du choix de σ.

Profitons-en pour introduire la définition suivante, qui nous sera utile dans la section 7.

Définition 3.9. — *L'*invariant de Hasse *de* D *est l'unique entier* $h \in \{1, \dots, d\}$ *premier à* d *tel que le* $\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$*-automorphisme de* $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$ *induit par la conjugaison par* ϖ_{D} *soit égal à :*

$$x \mapsto x^{q^h}$$

où q *est le cardinal de* $\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}$*. Il est indépendant du choix de* ϖ_{D}*.*

3.8. Niveau non nul

Supposons maintenant que π soit une représentation cuspidale de niveau quelconque de G. Il y a, d'après [3, 18, 26], un sous-groupe ouvert compact J^0 de G et une représentation irréductible λ^0 de J^0 possédant les propriétés suivantes :

(1) Les représentations irréductibles de G dont la restriction à J^0 contient λ^0 sont exactement les représentations cuspidales de G inertiellement équivalentes à π.
(2) Le groupe J^0 a un unique pro-p-sous-groupe distingué maximal J^1, et la restriction de λ^0 à J^1 est un multiple d'une représentation irréductible η.
(3) La représentation η se prolonge en une représentation κ de J^0, et il y a une représentation irréductible ξ^0 de J^0 triviale sur J^1 telle que λ^0 soit isomorphe à $\kappa \otimes \xi^0$.
(4) Il y a une extension finie E de F dans $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ telle que :
 (a) si B est le centralisateur de E dans $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$, alors J^0 est égal à $(\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times)\mathrm{J}^1$ et il existe un entier $r \geqslant 1$, une E-algèbre à division centrale C de degré réduit c et un isomorphisme de E-algèbres :

$$\phi : \mathrm{B} \simeq \mathrm{M}_r(\mathrm{C}), \quad rc = \frac{md}{[\mathrm{E}:\mathrm{F}]}, \quad c = \frac{d}{(d, [\mathrm{E}:\mathrm{F}])}, \tag{3.8}$$

 envoyant $\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times$ sur le sous-groupe compact maximal standard $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\mathrm{C})$ et $\mathrm{J}^1 \cap \mathrm{B}^\times$ sur son unique pro-p-sous-groupe distingué maximal $1 + \mathrm{M}_r(\mathfrak{p}_\mathrm{C})$,
 (b) si $\boldsymbol{k}_\mathrm{C}$ est le corps résiduel de C, et si l'on identifie le groupe :

$$\mathrm{J}^0/\mathrm{J}^1 \simeq (\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times)/(\mathrm{J}^1 \cap \mathrm{B}^\times) \tag{3.9}$$

 à $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$ via un isomorphisme (3.8), la représentation ξ^0 est l'inflation d'une représentation cuspidale σ de $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$, et
 (c) la représentation de $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$ sur l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta, \pi)$ définie par :

$$g \cdot f = \pi(g) \circ f \circ \kappa(g)^{-1}, \quad g \in \mathrm{J}^0, \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta, \pi),$$

 est isomorphe à la somme directe des conjugués de σ sous le groupe $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{C}/\boldsymbol{k}_\mathrm{E})$.

De façon analogue au fait 3.7, on a le fait suivant ([17, paragraphe 6.1]).

Fait 3.10. — *La représentation π est supercuspidale si et seulement si σ est supercuspidale.*

Comme au paragraphe 3.7, on note $s(\pi)$ l'ordre du stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{C}/\boldsymbol{k}_\mathrm{E})$ de la classe d'isomorphisme de σ. On définit aussi :

$$f(\pi) = \frac{n}{e_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}}, \quad q(\pi) = q^{f(\pi)}. \tag{3.10}$$

D'après [18, (3.6)], on a la propriété suivante, liant les invariants $s(\pi)$, $f(\pi)$ et le nombre de torsion $t(\pi)$ défini au paragraphe 3.6. On note ℓ l'exposant caractéristique de R.

Fait 3.11. — *Il y a un entier* $v \geqslant 0$ *tel que* $f(\pi) = t(\pi)s(\pi)\ell^v$*.*

Comme en niveau 0, il existe un unique prolongement λ de λ^0 au normalisateur dans G de sa classe d'isomorphisme, dont l'induite compacte à G soit isomorphe à π, mais nous n'utiliserons pas ce fait.

Remarque 3.12. — Si π est de niveau 0, on a $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, $\mathrm{J}^0 = \mathrm{N}^0$, $\mathrm{J}^1 = \mathrm{N}^1$ et $\lambda^0 = \xi^0$ avec les notations du paragraphe 3.7. L'entier $f(\pi)$ est donc simplement égal à n dans ce cas, et le nombre de torsion $t(\pi)$, premier à ℓ par définition, est le plus grand diviseur de $mb(\pi)$ premier à ℓ.

3.9. Support supercuspidal d'une représentation cuspidale

Il sera utile de préciser les faits 3.7 et 3.10. Le résultat suivant vient de [17, section 6] (et en particulier de [17, théorème 6.14]).

Proposition 3.13. — *Soit* π *une représentation irréductible cuspidale de* G*.*

(1) *Il y a un unique diviseur* $k = k(\pi)$ *de* m *et une représentation irréductible supercuspidale* ρ *de* $\mathrm{GL}_{m/k}(\mathrm{D})$ *tels que :*

$$\mathrm{scusp}(\pi) = \rho + \rho\nu + \cdots + \rho\nu^{k-1}. \tag{3.11}$$

(2) *L'induite parabolique* $\rho \times \rho\nu \times \cdots \times \rho\nu^{k-1}$ *ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal non isomorphe à* π*, et elle contient* π *avec mutiplicité* 1*.*

D'après [19, théorèmes 2.4 et 2.5], on a un analogue fini de la proposition 3.13.

Proposition 3.14. — *Soit* σ *une représentation irréductible cuspidale de* $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$*.*

(1) *Il existe un unique diviseur* $k(\sigma)$ *de* m *et une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible supercuspidale* α *de* $\mathrm{GL}_{m/k(\sigma)}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$*, unique à isomorphisme près, tels que :*

$$\mathrm{scusp}(\sigma) = \alpha + \cdots + \alpha.$$

(2) *L'induite parabolique* $\alpha \times \cdots \times \alpha$ *ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal non isomorphe à* σ*, et elle contient* σ *avec mutiplicité* 1*.*

D'après [20, lemme 3.2], on a le fait suivant, qui généralise les faits 3.7 et 3.10.

Fait 3.15. — *Si* π *et* σ *sont comme au paragraphe 3.8, alors les entiers* $k(\pi)$ *et* $k(\sigma)$ *sont égaux.*

3.10. Relèvement d'une représentation cuspidale

Précisons maintenant les résultats du paragraphe 3.6. Soient μ, π des représentations comme dans la proposition 3.6, et écrivons le support supercuspidal de π sous la forme (3.11). D'après [18, équation (3.9)] et [17, proposition 6.4, corollaire 6.12], on a le fait suivant.

Fait 3.16. — *On a $s(\pi) = as(\mu)$ et $s(\rho) = s(\pi)$.*

Le résultat suivant, que nous n'énonçons que dans le cas où la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation π est supercuspidale, donne une réciproque à la proposition 3.6.

Proposition 3.17. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G *et soit un entier $a \geqslant 1$. Pour qu'il y ait une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de* G *dont la réduction mod ℓ contienne π et soit de longueur a, il faut et suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(1) *ou bien $a = 1$,*
(2) *ou bien $\epsilon(\pi)$ divise $s(\pi)$ et a est un diviseur de $s(\pi)$ de la forme $a = \epsilon(\pi)\ell^u$ pour un $u \geqslant 0$.*

Démonstration. — Voir [17, théorème 6.11] si $a = 1$, et [20, proposition 1.6] si $a \neq 1$. □

Comme $\epsilon(\pi)$ est l'ordre de $q^{t(\pi)}$ mod ℓ d'après (3.6), le fait que $\epsilon(\pi)$ divise $s(\pi)$ équivaut à ce que ℓ divise $q^{t(\pi)s(\pi)} - 1$, ce qui, d'après le fait 3.11 et compte tenu de (3.10), équivaut à :

$$\ell \text{ divise } q(\pi) - 1.$$

On en déduit les corollaires suivants.

Corollaire 3.18. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale de* G *et soit $j \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il y ait une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de* G *dont la réduction mod ℓ contienne à la fois π et $\pi\nu^j$, il faut et suffit que π et $\pi\nu^j$ soient isomorphes ou que ℓ divise $q(\pi) - 1$.*

Démonstration. — La condition est nécessaire : si une telle représentation existe, et si π et $\pi\nu^j$ ne sont pas isomorphes, la proposition 3.6 assure que la longueur a de sa réduction mod ℓ est un multiple de $\epsilon(\pi)$, et le résultat suit du fait 3.16.

Inversement, si les représentations π et $\pi\nu^j$ sont isomorphes, le résultat suit de la proposition 3.17 appliquée avec $a = 1$. Si π et $\pi\nu^j$ ne sont pas isomorphes mais $\epsilon(\pi)$ divise $s(\pi)$, le résultat suit de la proposition 3.17 appliquée avec $a = \epsilon(\pi)$. □

Corollaire 3.19. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G.

(1) *Si ℓ divise $q(\pi)-1$, alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les représentations π et $\pi\nu^j$ sont dépendantes.*
(2) *Supposons que ℓ ne divise pas $q(\pi)-1$, et soit μ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de* G *dont la réduction mod ℓ contient π. Alors $\mathbf{r}_\ell(\mu)$ est irréductible, isomorphe à π.*

Démonstration. — Le point (1) est une conséquence du corollaire 3.18 et du lemme 3.5. Le point (2) est une conséquence de la proposition 3.6(2) et du fait 3.16. □

Remarque 3.20. — D'après [18, proposition 4.40 et lemme 4.45], ℓ divise $q(\pi)-1$ si et seulement si l'induite parabolique $\pi \times \pi$ est réductible.

3.11. Une relation d'équivalence

Avant de mettre fin à cette section, discutons de la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière quelconque de G. Introduisons la définition suivante.

Définition 3.21. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de* G, *dont on écrit :*

$$\mathrm{scusp}(\pi) = \rho_1 + \cdots + \rho_r$$

le support supercuspidal. On note $\mathrm{B}(\pi)$ *l'ensemble des représentations irréductibles π' de* G *dont le support supercuspidal est de la forme :*

$$\mathrm{scusp}(\pi') = \rho_1\nu^{j_1} + \cdots + \rho_r\nu^{j_r}, \quad j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z},$$

où, pour chaque $k = 1, \dots, r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k)-1$.

Remarque 3.22. — Pour que $\mathrm{B}(\pi)$ contienne des représentations de supports supercuspidaux différents, il faut et suffit donc qu'il y ait un entier $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\epsilon(\rho_k) \neq 1$ et ℓ divise $q(\rho_k)-1$.

Si G est déployé, c'est-à-dire si d est égal à 1, cela ne se produit jamais : on a $s(\rho_k) = 1$ pour tout k, donc le fait que ℓ divise $q(\rho_k)-1$ implique que $\epsilon(\rho_k) = 1$.

Si π est supercuspidale de niveau 0, cela se produit si ℓ divise q^n-1 mais pas $q^{n/s(\rho)}-1$, sachant que $s(\rho)$ divise d et est premier à m (voir [20, corollaire 3.9]). En particulier, pour le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$, cela se produit si ℓ divise q^d-1 mais pas $q-1$.

La relation $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$ équivaut à $\mathrm{B}(\pi') = \mathrm{B}(\pi)$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G.

Proposition 3.23. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Pour que les ensembles* $\mathrm{B}(\pi)$ *et* $\mathrm{B}(\pi')$ *soient égaux, il faut et suffit qu'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* G *dont la réduction mod ℓ contienne à la fois π et π'.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, choisissons une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière μ_i de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ dont la réduction mod ℓ contienne à la fois ρ_i et $\rho_i\nu^{j_i}$, dont l'existence est assurée par le corollaire 3.18. Soient maintenant $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D}), \dots, \mathrm{GL}_{m_r}(\mathrm{D})$ à valeurs dans $1 + \mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$) et considérons l'induite parabolique :

$$\mu_1\varphi_1 \times \dots \times \mu_r\varphi_r. \tag{3.12}$$

Par construction, sa réduction mod ℓ contient à la fois π et π', l'induction parabolique étant compatible à la réduction mod ℓ (voir [17, 1.2.3] ou [30, II.4.14]). Nous allons prouver que, pour un choix convenable des φ_i, cette induite est irréductible, ce qu'on va prouver par récurrence sur r.

Posons $l = r - 1$, et supposons que $l \geqslant 1$ et que l'induite $\mu_1\varphi_1 \times \dots \times \mu_l\varphi_l$ soit irréductible. Pour que (3.12) le soit, il faut et suffit (d'après [17, corollaire 7.32] par exemple) de choisir φ_r de sorte que, pour tout $i < r$, l'induite $\mu_i\varphi_i \times \mu_r\varphi_r$ soit irréductible, c'est-à-dire (voir [25, section 4]) que $\mu_r\varphi_r$ n'appartienne pas à la réunion :

$$\left\{\mu_1\varphi_1\nu^{s(\mu_1)}, \mu_1\varphi_1\nu^{-s(\mu_1)}\right\} \cup \dots \cup \left\{\mu_l\varphi_l\nu^{s(\mu_l)}, \mu_l\varphi_l\nu^{-s(\mu_l)}\right\}$$

(les entiers $s(\mu_i)$ et $t(\mu_i)$ sont introduits au paragraphe 3.6), c'est-à-dire que :

$$\left(\varphi_r\chi_i\varphi_i^{-1}\nu^{s(\mu_i)}\right)^{t(\mu_i)} \neq 1 \quad \text{et} \quad \left(\varphi_r\chi_i\varphi_i^{-1}\nu^{-s(\mu_i)}\right)^{t(\mu_i)} \neq 1$$

à chaque fois que μ_r et μ_i sont inertiellement équivalents, χ_i étant un caractère non ramifié tel que μ_r soit isomorphe à $\mu_i\chi_i$. Cette condition n'interdit qu'un nombre fini de valeurs pour φ_r, alors que $1 + \mathfrak{m}$ est infini.

Supposons maintenant que π et π' apparaissent dans la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G, dont on note $\mu_1 + \dots + \mu_u$ le support cuspidal, μ_i étant une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathrm{D})$ pour chaque $i = 1, \dots, u$, avec $n_1 + \dots + n_u = m$. Les représentations π et π' apparaissent donc dans la réduction mod ℓ de l'induite parabolique :

$$\mu_1 \times \dots \times \mu_u.$$

Pour chaque i, écrivons $\mathbf{r}_\ell(\mu_i)$ sous la forme $\pi_i \oplus \pi_i\nu \oplus \dots \oplus \pi_i\nu^{a_i-1}$ d'après la proposition 3.6, et écrivons $\mathrm{scusp}(\pi_i)$ sous la forme $\rho_i + \rho_i\nu + \dots + \rho_i\nu^{k_i-1}$

d'après la proposition 3.13. Il y a des entiers c_i et c'_i dans $\{0,\dots,a_i-1\}$ tels que :

$$\mathrm{scusp}(\pi)=\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=0}^{k_i-1}\rho_i\nu^{j+c_i},\quad \mathrm{scusp}(\pi')=\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=0}^{k_i-1}\rho_i\nu^{j+c'_i}.$$

En outre, si ℓ ne divise pas $q(\rho_i)-1$, on a $a_i=1$ d'après la proposition 3.17, ce qui entraîne que $c'_i=c_i$. Par conséquent, on a $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$. □

Par ailleurs, le lemme 3.5 assure que des représentations irréductibles π, π' apparaissant dans la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G — ou, ce qui est équivalent d'après la proposition 3.23, telles que $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$ — sont dépendantes. L'objet des sections 4 à 6 est de prouver la réciproque (voir le théorème 6.2 et la proposition 6.5).

4. Le cas cuspidal de niveau zéro

Cette section est consacrée à la preuve du résultat suivant.

Proposition 4.1. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations cuspidales de niveau* 0 *de* G. *Supposons que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi,\pi')$ *soit non nul. Alors* $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$.

Le cas des représentations cuspidales de niveau quelconque fera l'objet de la section suivante.

4.1. Étape 1

Dans cette section, on fixe une représentation cuspidale π de niveau 0 de G, à coefficients dans un corps algébriquement clos R de caractéristique différente de p qu'on suppose quelconque jusqu'au paragraphe 4.4. Comme au paragraphe 3.7 dont on reprend les notations, on fixe une paire (N,ξ) dont l'induite à G est isomorphe à π. En particulier, la restriction de ξ à N^0 est irréductible, et est l'inflation d'une représentation cuspidale σ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$. L'ordre du stabilisateur de σ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$, égal à l'indice de $\mathrm{F}^\times\mathrm{N}^0$ dans N, est noté $s=s(\pi)$.

Par ailleurs, d'après la proposition 3.13, il y a un unique diviseur $k=k(\pi)$ de m et une représentation irréductible supercuspidale ρ de $\mathrm{GL}_{m/k}(\mathrm{D})$ tels que :

$$\mathrm{scusp}(\pi)=\rho+\rho\nu+\dots+\rho\nu^{k-1},$$

et toute représentation cuspidale de G de même support supercuspidal que π est isomorphe à π.

4.2. Étape 2

Prouvons d'abord le lemme général suivant. Si V est une représentation de G, on notera V^{N^1} l'espace de ses vecteurs invariants par N^1. Le sous-groupe N^1 étant distingué dans N, cet espace définit une représentation de N triviale sur N^1.

Lemme 4.2. — *Soit* V *une représentation de* G*. Pour tout* $i \geqslant 0$*, on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \mathrm{V}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{V}^{\mathrm{N}^1})$$

de R*-espaces vectoriels.*

Démonstration. — Notons X la restriction de V à N. Par adjonction (voir [30, A.2]), il y a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \mathrm{V}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{X})$$

de R-espaces vectoriels. Comme N^1 est un pro-p-groupe et p est inversible dans R, il existe une unique décomposition $X = Y \oplus Z$, où Y est la représentation de N sur V^{N^1} et Z est une représentation de N dont aucun composant irréductible n'est invariant par N^1. On a donc :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{X}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Y}) \oplus \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Z})$$

et le résultat vient de ce que l'espace $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Z})$ est nul, car ξ est trivial sur le pro-p-groupe N^1 et aucun composant de Z ne l'est. □

4.3. Étape 3

Soit π' une représentation irréductible cuspidale de G telle que l'espace $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ soit non nul pour un $i \geqslant 0$.

Lemme 4.3. — *Il existe un caractère non ramifié* χ *de* G *tel que* π' *soit isomorphe à* $\pi\chi$*.*

Démonstration. — Le théorème 3.1 assure que le support supercuspidal de π est inertiellement équivalent à celui de π'. Si l'on écrit ce dernier sous la forme $\tau + \tau\nu + \dots + \tau\nu^{l-1}$, où l est un diviseur de m et τ une représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_{m/l}(\mathrm{D})$, on trouve que l est égal à k et que τ et ρ sont inertiellement équivalentes. Il y a donc un caractère non ramifié χ de G tel que $\pi'\chi^{-1}$ et π aient le même support supercuspidal. □

Fixons donc un caractère non ramifié χ de G tel que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi)$ soit non nul. La représentation π étant isomorphe à l'induite compacte de ξ à G, il s'ensuit que $\pi\chi$ est isomorphe à l'induite compacte de $\xi\chi$ à G.

(Les représentations π et $\pi\chi$ ayant en outre même caractère central d'après le lemme 3.2, on a même $\chi^n = 1$, mais nous n'aurons pas besoin de cette précision.)

Selon le fait 3.8, la représentation de N sur l'espace des vecteurs N^1-invariants de $\pi\chi$ est isomorphe à la somme directe des conjugués de $\xi\chi$ sous le normalisateur de N^0 dans G. Appliquant le lemme 4.2 à la représentation $\pi\chi$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.4. — *Il y a un isomorphisme de* R*-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi) \simeq \bigoplus_u \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{N}}(\xi, \xi^u\chi)$$

où u décrit un système de représentants de $\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0)$ mod N*.*

Nous pouvons donc reformuler la proposition 4.1 de la façon suivante : si χ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié de G tel que l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \xi^u\chi)$ soit non nul pour un $u \in \mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}^0)$, il y a un entier $j \in \mathbb{Z}$, qu'on peut prendre égal à 0 si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, tel que les caractères χ et ν^j coïncident sur N. Nous le prouverons dans les paragraphes 4.7 à 4.11, et nous prouverons au passage (corollaire 4.15) qu'un tel u doit être égal à 1.

Avant d'aller plus loin, nous allons prouver que ξ admet une enveloppe projective.

4.4. Existence d'enveloppes projectives

Plus généralement, nous allons prouver que toute représentation irréductible de N triviale sur N^1 admet une enveloppe projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$.

Soit ζ une représentation irréductible de N triviale sur N^1. Une *enveloppe projective* de ζ dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$ est une représentation projective P de cette catégorie, munie d'un morphisme surjectif $f : \mathrm{P} \to \zeta$ trivial sur toute sous-représentation propre de P (voir par exemple [30, I.A.4]). La représentation ζ étant irréductible, le noyau de f est alors l'unique sous-représentation propre maximale de P, de sorte que f est déterminé à un scalaire non nul près. Aussi omettra-t-on la référence à f et dira-t-on par abus de langage que P est une enveloppe projective de ζ. Réciproquement, si P est une représentation projective de $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$ ayant une unique sous-représentation propre maximale M, et si le quotient de P par M est isomorphe à ζ, alors

P est une enveloppe projective de ζ. Prouvons d'abord le lemme général suivant.

Lemme 4.5. — *Soit* X *une représentation de longueur finie de* N*. Il y a des sous-représentations* X_1 *et* X_0 *de* X*, uniques, telles que* $X = X_1 \oplus X_0$ *et :*

(1) *la représentation* X_1 *est invariante par* $\langle N^1, \varpi_F \rangle$*,*

(2) *aucun des composants irréductibles de* X_0 *n'est invariant par le sous-groupe* $\langle N^1, \varpi_F \rangle$*.*

Démonstration. — Comme dans la preuve du lemme 4.2, du fait que N^1 est un pro-p-groupe et que p est inversible dans R, il y a une unique décomposition $X = Y \oplus Z$ en sous-représentations telles que $Y = X^{N^1}$ et aucun des composants irréductibles de Z ne soit invariant par N^1.

Puis, comme au lemme 3.2, il existe des scalaires $z_1, \dots, z_r \in R^\times$ deux à deux distincts et une décomposition :

$$Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_r$$

telle que, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, l'uniformisante ϖ_F agisse sur chaque composant irréductible de Y_i par le scalaire z_i. Si aucun des z_i n'est égal à 1, on pose $X_1 = \{0\}$ et $X_0 = X$. Sinon, on peut renuméroter de sorte que $z_1 = 1$, et on pose $X_1 = Y_1$ et $X_0 = Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_r \oplus Z$. □

On sait que N est engendré par N^0 et l'élément ϖ défini au paragraphe 3.7. Comme $\varpi^s = \varpi_F$, le quotient :

$$\mathsf{H} = N/\langle N^1, \varpi_F \rangle$$

est un groupe fini. D'autre part, la restriction de ζ à $F^\times$, le centre de N, est un multiple d'un caractère ω_ζ. Fixons un caractère ω de N trivial sur N^0 tel que $\omega(\varpi_F) = \omega_\zeta(\varpi_F)$ et posons :

$$\zeta_1 = \zeta\omega^{-1}.$$

C'est une représentation de N triviale sur $\langle N^1, \varpi_F \rangle$. Elle peut donc être vue comme une représentation de H. D'après [29, proposition 41], elle a une enveloppe projective P_1 dans la catégorie des représentations de longueur finie de H, unique à isomorphisme près. Elle est indécomposable et sa restriction à $F^\times$ est un multiple du caractère $\omega_\zeta\omega^{-1}$.

Lemme 4.6. — *La représentation* P_1 *vue comme représentation de* N *est une enveloppe projective de* ζ_1 *dans* $\mathbf{rep}_R(N)$*.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que P_1 est projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{P}_1 \arrow[r, "v"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des représentations de longueur finie de N. Écrivons :

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_0, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 \oplus \mathrm{Y}_0,$$

les décompositions de X et Y données par le lemme 4.5. Comme P_1 est triviale sur $\langle \mathrm{N}^1, \varpi_{\mathrm{F}} \rangle$, on a $\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Y}_1$, c'est-à-dire que $v = v_1 \oplus 0$. Écrivons $g = g_1 \oplus g_0$ avec :

$$g_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1), \quad g_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0).$$

Par projectivité de P_1 dans la catégorie des R-représentations de H, il y a un morphisme w_1 de P_1 dans X_1 tel que $g_1 \circ w_1 = v_1$. Posant $w = w_1 \oplus 0$, on obtient $g \circ w = v$, ce qui prouve que P_1 est projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. $\square$

Montrons à présent un lemme qui affirme que la projectivité résiste à la torsion par un caractère.

Lemme 4.7. — *Soit* Q *une représentation projective de* N, *et soit* ψ *un caractère de* N.

(1) *La représentation* $\mathrm{Q}\psi$ *est une représentation projective de* N.
(2) *Si* Q *est une enveloppe projective d'une représentation irréductible* W *de* N, *alors* $\mathrm{Q}\psi$ *est une enveloppe projective de* $\mathrm{W}\psi$.

Démonstration. — Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Q}\psi \arrow[r, "v"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. Tordant par ψ^{-1}, et Q étant projective, on a un morphisme $w \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}, \mathrm{X}\psi^{-1})$ tel que $g \circ w = v$. L'assertion (1) se déduit du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}, \mathrm{X}\psi^{-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}\psi, \mathrm{X})$. L'assertion (2) en découle immédiatement. $\square$

Proposition 4.8. — *La représentation* ζ *admet une enveloppe projective dans* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$.

Démonstration. — D'après les lemmes 4.6 et 4.7, la représentation $\mathrm{P}_1\omega$ est une enveloppe projective de ζ dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. □

Par unicité de l'enveloppe projective à isomorphisme près, la classe d'isomorphisme de $\mathrm{P}_1\omega$ est indépendante du choix du caractère ω qui a servi à sa construction.

4.5. Relèvement d'enveloppes projectives

On reprend les notations du paragraphe précédent, en supposant que R est le corps $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. On a donc une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible ζ de N triviale sur N^1.

PROPOSITION 4.9. — *Soit* P *l'enveloppe projective de* ζ *dans* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$.

(1) *Il y a, à isomorphisme près, une unique $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective* $\widetilde{\mathrm{P}}$ *dans* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{N})$ *telle que* $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ *soit isomorphe à* P.

(2) *Pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière δ de* N, *la multiplicité de δ dans* $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *est égale à celle de ζ dans* $\mathbf{r}_\ell(\delta)$.

Démonstration. — Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. D'après la proposition 42 et le paragraphe 15.4 de [29], on a les faits suivants :

- il y a, à isomorphisme près, une unique $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective $\widetilde{\mathrm{P}}_1$ dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathsf{H})$ telle que $\widetilde{\mathrm{P}}_1 \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit isomorphe à P_1, et
- pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible δ_1 de H, la multiplicité de δ_1 dans $\widetilde{\mathrm{P}}_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est égale à la multiplicité de ζ_1 dans $\mathbf{r}_\ell(\delta_1)$.

Fixons un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-caractère $\widetilde{\omega}$ de N tel que $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\omega}) = \omega$ et posons :

$$\widetilde{\mathrm{P}} = \widetilde{\mathrm{P}}_1\widetilde{\omega}. \tag{4.1}$$

C'est une représentation projective d'après le lemme 4.7, et $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est isomorphe à P. Si Q est une $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{N})$ ayant la même propriété, alors, par projectivité, tout isomorphisme entre $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ et $\mathrm{Q} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ se relève en un isomorphisme entre $\widetilde{\mathrm{P}}$ et Q.

Afin de prouver la seconde partie de la proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 4.10. — *Soit δ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière du groupe* N. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La représentation δ est triviale sur* N^1.

(2) *La représentation* $\mathbf{r}_\ell(\delta)$ *est triviale sur* N^1.

(3) *La représentation* $\mathbf{r}_\ell(\delta)$ *contient un facteur irréductible trivial sur* N^1.

Démonstration. — Bien sûr, (1) implique (2), lui-même impliquant (3). Prouvons que (3) implique (1). Le groupe N^1 étant distingué dans N et δ étant irréductible, il nous suffit de prouver que la restriction de δ à N^1 contient le caractère trivial. Comme N^1 est un pro-p-groupe avec $p \neq \ell$, le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère trivial de N^1 est une représentation projective ; le résultat s'ensuit. □

Soit δ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N. Si elle n'est pas triviale sur N^1, alors elle n'apparaît pas dans $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (car $\widetilde{\mathrm{P}}$ est triviale sur N^1 par construction) et $\mathbf{r}_\ell(\delta)$ ne contient aucun facteur irréductible trivial sur N^1 d'après le lemme 4.10. Supposons maintenant que δ soit triviale sur N^1. Sa restriction à $\mathrm{F}^\times$ est un multiple d'un caractère ω_δ. Si la réduction mod ℓ de ω_δ n'est pas égale à ω_ζ, alors ζ n'apparaît pas dans $\mathbf{r}_\ell(\delta)$ et δ n'apparaît pas dans $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Sinon, on peut choisir le caractère $\widetilde{\omega}$ de (4.1) tel que $\delta_1 = \delta\widetilde{\omega}^{-1}$ soit triviale en ϖ_F. Alors :

- la multiplicité de ζ dans $\mathbf{r}_\ell(\delta)$ est égale à la multiplicité de ζ_1 dans $\mathbf{r}_\ell(\delta_1)$,
- la multiplicité de ζ_1 dans $\mathbf{r}_\ell(\delta_1)$ est égale à la multiplicité de δ_1 dans $\widetilde{\mathrm{P}}_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$,
- et la multiplicité de δ_1 dans $\widetilde{\mathrm{P}}_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est égale à la multiplicité de δ dans $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$,

ce dont on déduit le résultat voulu. □

Remarques 4.11.

(1) L'unicité de $\widetilde{\mathrm{P}}$ implique que, pour tout $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-caractère χ de N dont la réduction mod ℓ est triviale, $\widetilde{\mathrm{P}}\chi$ et $\widetilde{\mathrm{P}}$ sont isomorphes.

(2) La seconde assertion de la proposition 4.9 implique en particulier qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N apparaît comme facteur de $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si et seulement si sa réduction mod ℓ contient ζ.

4.6. Sous-quotients d'enveloppes projectives

On reprend les notations du paragraphe 4.5 : on considère une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible ζ de N triviale sur N^1, et on note P son enveloppe projective dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$.

LEMME 4.12. — *Soit* ζ' *une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible de* N *telle que* $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{N}(\zeta, \zeta')$ *soit non nul. Alors* ζ' *est un sous-quotient irréductible de* P.

Démonstration. — Soit M une extension non triviale de ζ par ζ'. Notons v la surjection de M sur ζ. Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \zeta' \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r, "v"] & \zeta \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathrm{P} \arrow[u, two heads, "f"'] \arrow[ul, dotted, "g"] & \end{tikzcd}$$

(où f est une surjection de P sur ζ) montre que ζ' apparaît comme sous-quotient de P. En effet, par projectivité de P, il y a un morphisme g de P dans M tel que $v \circ g = f$, et il est surjectif, sans quoi son image serait incluse dans $\zeta' = \mathrm{Ker}(v)$, qui est l'unique sous-représentation propre maximale de M car M est non scindée. $\square$

Lemme 4.13. — *Soit ζ' un sous-quotient irréductible de* P*. Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière δ de* N *triviale sur* N^1 *dont la réduction mod ℓ contienne ζ et ζ'.*

Démonstration. — Il existe des sous-représentations $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ de P telles que le quotient X/Y soit isomorphe à ζ'. Soit Q l'enveloppe projective de ζ' dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$. Comme tout morphisme de Q vers ζ' se relève vers $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{P}$, l'espace $\mathrm{Hom}_\mathrm{N}(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$ est non nul. Notons $\widetilde{\mathrm{P}}$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}$ les $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentations projectives de N relevant P et Q données par la proposition 4.9. La projectivité de $\widetilde{\mathrm{Q}}$ entraîne que $\mathrm{Hom}_\mathrm{N}(\widetilde{\mathrm{Q}}, \widetilde{\mathrm{P}})$ est non nul. Puis, $\widetilde{\mathrm{P}}$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}$ étant libres sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, on en déduit que :

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{N}\left(\widetilde{\mathrm{Q}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right) \neq \{0\}.$$

Par conséquent, il existe un facteur irréductible entier δ commun à $\widetilde{\mathrm{Q}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'après la proposition 4.9, les représentations ζ et ζ' apparaissent dans $\mathbf{r}_\ell(\delta)$. Enfin, le fait que la représentation δ soit triviale sur N^1 découle du lemme 4.10. $\square$

4.7. Étape 4

Revenons maintenant au paragraphe 4.3, en supposant que R est le corps $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ et que i est égal à 1. On fixe donc un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié χ de G tel que l'espace $\mathrm{Ext}^1_\mathrm{N}(\xi, \xi^u\chi)$ soit non nul pour un $u \in \mathscr{N}_\mathrm{G}(\mathrm{N}^0)$. Selon les lemmes 4.12 et 4.13, il y a donc une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière δ de N triviale sur N^1 dont la réduction mod ℓ contienne ξ et $\xi' = \xi^u\chi$. Rappelons que, pour prouver la proposition 4.1, il s'agit de prouver qu'il y a un $j \in \mathbb{Z}$, qu'on peut prendre égal à 0 si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, tel que

χ et ν^j coïncident sur N. Compte tenu de (3.7), l'ordre de la restriction de ν à N est égal à celui de $\nu(\varpi) = q^{-mb}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$, et celui-ci vaut $\epsilon(\pi)$ d'après (3.6) et la remarque 3.12.

Lemme 4.14. — *L'entier $\epsilon(\pi)$ est un multiple de $(s(\pi), \epsilon(\rho))$.*

Démonstration. — C'est évident si π est supercuspidale, car alors $\rho = \pi$. Si π n'est pas supercuspidale, c'est une conséquence de [20, lemme 3.16], qui dit que $\epsilon(\pi)$ est égal à $(s(\rho), \epsilon(\rho))$, et du fait 3.16, qui dit que $s(\rho) = s(\pi)$. □

Dans les paragraphes 4.8 à 4.10, nous allons prouver que l'ordre de $\chi(\varpi)$ divise $s(\pi)$ et $\epsilon(\rho)$. Il divisera donc $\epsilon(\pi)$ d'après le lemme 4.14. Le groupe N/N^0 étant cyclique, on en déduira l'existence d'un $j \in \mathbb{Z}$ tel que χ et ν^j coïncident sur N. Puis nous prouverons au paragraphe 4.11 que, si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, les représentations π et $\pi\chi$ sont isomorphes.

4.8. Étape 5

Fixons un facteur irréductible W de la restriction de δ à N^0. Celui-ci est l'inflation d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible γ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, elle-même sous-quotient irréductible d'une induite :

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_r \tag{4.2}$$

où τ_i est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{m_i}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, avec $m_1 + \cdots + m_r = m$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons σ_i la réduction mod ℓ de τ_i. D'après [19, théorème 2.9], c'est une représentation irréductible cuspidale. Par hypothèse sur δ, les représentations σ et σ^u (la définition de σ étant rappelée au paragraphe 4.1) apparaissent dans $\mathbf{r}_\ell(\gamma)$, donc dans l'induite :

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r, \tag{4.3}$$

ce qui entraîne que σ et σ^u ont le même support supercuspidal. D'après la proposition 3.14, on en déduit d'une part que σ et σ^u sont isomorphes, c'est-à-dire que $u \in \mathrm{N}$, et d'autre part que σ apparaît avec multiplicité 1 dans (4.3), donc *a fortiori* dans $\mathbf{r}_\ell(\gamma)$. On tire immédiatement de la proposition 4.4 le corollaire suivant.

Corollaire 4.15. — *Il y a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}^1_\mathrm{G}(\pi, \pi\chi) \simeq \mathrm{Ext}^1_\mathrm{N}(\xi, \xi\chi)$$

de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels.

4.9. Étape 6

Revenons à la représentation W, dont on note S le normalisateur dans N. Par la théorie de Clifford, il existe un prolongement de W à S, que l'on note encore W, dont l'induite à N soit isomorphe à δ. Comme σ apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathbf{r}_\ell(\gamma)$, il y a un unique composant irréductible X de $\mathbf{r}_\ell(\mathrm{W})$ dont la restriction à N^0 contienne l'inflation ξ^0 de σ. Les représentations ξ et $\xi' = \xi\chi$ apparaissent donc toutes deux dans l'induite de X à N.

Notons S′ le normalisateur de X dans N, et fixons un prolongement X′ de X à S′. L'induite de X′ à N est irréductible, et les composants irréductibles de l'induite de X à N sont de la forme :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{S}'}^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}'\varphi)$$

où φ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère de S′ trivial sur S. Choisissons X′ de façon que son induite à N soit isomorphe à ξ. La restriction de ξ à S′ étant irréductible, on en déduit que $\mathrm{S}' = \mathrm{N}$, puis qu'il existe un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère φ de N trivial sur S tel que ξ' soit isomorphe à $\xi\varphi$. Par conséquent, χ est trivial sur S, c'est-à-dire que l'ordre de $\chi(\varpi)$ divise (N : S), qui lui-même divise $s(\pi)$, celui-ci étant par définition l'indice de $\mathrm{F}^\times\mathrm{N}^0$ dans N.

4.10. Étape 7

Plus précisément, l'ordre de $\chi(\varpi)$ étant premier à ℓ, il divise le plus grand diviseur de (N : S) premier à ℓ, que l'on note e dans ce paragraphe. Nous allons prouver que e divise $\epsilon(\rho)$.

Rappelons que $\mathbf{r}_\ell(\gamma)$ contient σ. D'après [16, proposition 5.8], la représentation γ est donc générique (au sens où sa restriction au groupe des matrices triangulaires unipotentes supérieures contient le caractère :

$$x \mapsto \psi(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{m-1,m})$$

pour n'importe quel caractère non trivial ψ de $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}$). C'est donc l'unique sous-quotient irréductible générique de (4.2), où γ apparaît avec multiplicité 1. Par conséquent, le nombre de conjugués de γ sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$, ou de façon équivalente sous N, nombre égal à (N : S), divise le plus grand multiple commun à $a_1, \dots, a_r$, où l'entier a_i est le nombre de conjugués de τ_i sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$. Il suffit donc de prouver que e_i, le plus grand diviseur de a_i premier à ℓ, divise $\epsilon(\rho)$. Appliquant la proposition 3.14, et compte tenu du fait 3.15, on a :

$$\mathrm{scusp}(\sigma) = \alpha + \cdots + \alpha$$

où α est une représentation supercuspidale de $\mathrm{GL}_{m/k}(\mathrm{D})$. D'après [20, Lemmes 3.10, 3.13], l'entier e_i est égal soit à 1, soit à l'ordre de q^{bm_i} mod ℓ. Par ailleurs, la représentation σ apparaissant dans l'induite (4.3), on déduit de l'unicité du support supercuspidal que le support supercuspidal de σ_i est une somme de copies de α. Par conséquent, m_i est un multiple de m/k, donc e_i divise l'ordre de $q^{bm/k}$ mod ℓ, qui est égal à $\epsilon(\rho)$.

4.11. Étape 8

Il ne nous reste plus qu'à prouver que, si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, alors χ est trivial sur N. On suppose donc que ℓ ne divise pas $q^n - 1$, c'est-à-dire que $\epsilon(\pi)$ ne divise pas $s(\pi)$. Il suit alors de [20, remarque 6.1] que σ, ou de façon équivalente π d'après le fait 3.7, est supercuspidale, et on déduit de [30, III.2.9] que γ est cuspidale. D'après [18, proposition 3.1], l'induite compacte μ de la représentation W (du groupe S du paragraphe 4.9) à G est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale dont la réduction mod ℓ contient π et $\pi\chi$. Mais le corollaire 3.19 dit que $\mathbf{r}_\ell(\mu)$ est irréductible, donc $\pi\chi$ est isomorphe à π.

5. Le cas cuspidal de niveau quelconque

Dans cette section, on étudie le cas des représentations cuspidales quelconques de G.

5.1. Préliminaires

Dans ce paragraphe, R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

Soit π une R-représentation irréductible cuspidale de G, et soit $\Omega = \Omega(\pi)$ sa classe inertielle. D'après le théorème 3.1, la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$, formée des représentations dont les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans Ω, est un facteur direct indécomposable de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$.

Fixons une paire $(\mathrm{J}^0, \lambda^0)$ comme au paragraphe 3.8, dont nous utiliserons les notations. Rappelons qu'on a une extension finie E de F, une E-algèbre B qu'on identifie à $\mathrm{M}_r(\mathrm{C})$ via un isomorphisme (3.8) fixé une fois pour toutes, que J^0 a un unique pro-p-sous-groupe distingué maximal J^1 et que la restriction de λ^0 à J^1 est un multiple d'une représentation irréductible η. Dans toute cette section, on pose :

$$G_0 = B^\times \simeq GL_r(C).$$

D'après [28, proposition 10.2], l'induite compacte $\mathrm{ind}_{J^0}^{G}(\lambda^0)$ appartient à $\mathbf{Rep}_R(G, \Omega)$.

5.2. Une équivalence de catégories

Nous allons maintenant décrire certains résultats dus à Chinello [6] que nous utiliserons pour nous ramener à un bloc de niveau 0 de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G_0^\times)$. Notons $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)$ la sous-catégorie pleine formée des représentations de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ engendrées par leur composante η-isotopique. La catégorie notée $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \Omega)$ au paragraphe précédent en est un facteur direct.

Notons $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)$ la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre des fonctions à support compact

$$\Psi \ : G \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\eta)$$

telles que $\Psi(xgy) = \eta(x) \circ \Psi(g) \circ \eta(y)$ quels que soient $x, y \in J^1$, munie du produit :

$$\Psi * \Psi' \ : g \mapsto \sum_h \Psi(h)\Psi'(h^{-1}g)$$

où h décrit un système de représentants de G/J^1. Notant $\mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta))$ la catégorie des modules à droite sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)$, on a un foncteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\eta \ : \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta) &\to \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)) \\ V &\mapsto \mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_{J^1}^{G}(\eta), V\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'action (à gauche) de $\Psi \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)$ sur $f \in \mathrm{ind}_{J^1}^{G}(\eta)$ est définie par la formule :

$$\Psi * f \ : g \mapsto \sum_h \Psi(h) f(h^{-1}g)$$

et l'action (à droite) de Ψ sur $\varphi \in \mathbf{M}_\eta(V)$ est donnée par $\varphi \cdot \Psi : f \mapsto \varphi(\Psi * f)$. On a le résultat important suivant.

Théorème 5.1 ([6, théorème 5.10]). — *Le foncteur $\mathbf{M}_\eta$ est une équivalence de catégories.*

Observons que, dans le cas particulier où π est de niveau 0, G_0 est égal à G et η est le caractère trivial du groupe $J^1 = N^1 = 1 + M_m(\mathfrak{p}_D)$. Le foncteur (5.1) définit alors une équivalence de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, N^1)$ des

$\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de G qui sont de niveau 0, c'est-à-dire qui sont engendrées par leurs vecteurs N^1-invariants, vers la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{N}^1))$ des modules à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre des fonctions de G dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ à support compact et bi-invariantes par N^1.

5.3. Un diagramme commutatif

Notons K^0 le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\mathrm{C})$ de G_0 et K^1 son pro-p-sous-groupe distingué maximal. Comme au paragraphe 5.2, on définit la sous-catégorie pleine $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0)$ formée des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations engendrées par leurs vecteurs K^1-invariants, la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ des fonctions de G_0 dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ à support compact et bi-invariantes par K^1, et le foncteur :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1\ :\ \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) &\to \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1))\\ \mathrm{V} &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_0}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{K}^1}^{\mathrm{G}_0}(1),\mathrm{V}\right)\end{aligned}$$

qui est une équivalence de catégories selon [5, théorème 3.2]. Dans [6], Chinello construit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres :

$$\theta\ :\ \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) \to \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)$$

dépendant du choix de la représentation κ prolongeant η au groupe J^0 fixée au paragraphe 3.8, et ayant la propriété suivante (voir [6, section 3], et en particulier [6, théorème 3.43]).

Fait 5.2. — *Soit ϖ_C une uniformisante de* C*, soit un entier $i \in \{0,\dots,r\}$ et soit la matrice diagonale :*

$$b = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\varpi_\mathrm{C},\dots,\varpi_\mathrm{C}) \in \mathrm{G}_0$$

où 1 *apparaît i fois. Si $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ est à support dans $\mathrm{K}^1b\mathrm{K}^1$, son image $\theta(\Psi_0)$ est à support dans $\mathrm{J}^1b\mathrm{J}^1$.*

Cet isomorphisme d'algèbres θ définit une équivalence de catégories :

$$\theta^*\ :\ \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)) \to \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)).$$

Composant les foncteurs $\mathbf{M}_\eta$ et θ^* avec un quasi-inverse de $\mathbf{M}_1$, Chinello obtient une équivalence de catégories :

$$\mathbf{F}\ :\ \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta) \to \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1).$$

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta) \arrow[r, "\mathsf{F}"] \arrow[d, "\mathsf{M}_\eta"'] & \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) \arrow[d, "\mathsf{M}_1"] \\
\mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)) \arrow[r, "\theta^*"'] & \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1))
\end{tikzcd}$$

résume la situation.

5.4. Comportement vis-à-vis des blocs

Considérons maintenant la représentation ξ^0 de J^0 triviale sur J^1 du paragraphe 3.8, telle que λ^0 soit isomorphe à $\kappa\otimes\xi^0$. Elle définit, par restriction, une représentation ξ_0^0 de $\mathrm{J}^0\cap\mathrm{G}_0\simeq\mathrm{K}^0$ triviale sur $\mathrm{J}^1\cap\mathrm{G}_0\simeq\mathrm{K}^1$, inflation de la représentation cuspidale σ du groupe :

$$\mathrm{J}^0/\mathrm{J}^1\simeq\mathrm{K}^0/\mathrm{K}^1\simeq\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C}). \tag{5.2}$$

Notons K le normalisateur de la classe d'isomorphisme de ξ_0^0 dans G_0, et fixons un prolongement ξ_0 de ξ_0^0 à K. D'après [18, proposition 3.1], l'induite compacte de ξ_0 à G_0, notée π_0, est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale de niveau 0 de G_0. Par construction de π_0, on a le résultat suivant.

Lemme 5.3. — *On a $q(\pi)=q(\pi_0)$.*

Comme au paragraphe 3.8, la représentation cuspidale π_0 définit un facteur direct indécomposable $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$ de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$, où Ω_0 est la classe inertielle de π_0, formé des représentations dont les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans Ω_0. D'après [6, théorème 5.15], on a le résultat suivant.

Proposition 5.4. — *Le foncteur F induit une équivalence entre les catégories $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ et $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$.*

5.5. Comportement vis-à-vis des représentations cuspidales

L'objet de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant.

Lemme 5.5. — *La représentation $\mathsf{F}(\pi)$ est cuspidale.*

Démonstration. — Notons V la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\mathsf{F}(\pi)$, et considérons l'espace $\mathrm{V}^{\mathrm{K}^1}$ des vecteurs de V invariants sous K^1, canoniquement isomorphe à :

$$\mathsf{M}_1(\mathrm{V}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_0}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{K}^1}^{\mathrm{G}_0}(1), \mathrm{V}\right).$$

C'est un module à droite sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0, \mathrm{K}^1)$. Si on le restreint à la sous-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{K}^0, \mathrm{K}^1)$ des fonctions à support dans K^0 et si on identifie celle-ci à l'algèbre de groupe de $\mathrm{K}^0/\mathrm{K}^1$, on obtient la représentation naturelle de $\mathrm{K}^0/\mathrm{K}^1$ sur $\mathrm{V}^{\mathrm{K}^1}$, que l'on voit *via* (5.2) comme une représentation du groupe $\mathsf{G} = \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_{\mathrm{C}})$, que l'on note $\mathscr{V}$.

Considérons maintenant l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta, \pi)$, canoniquement isomorphe à :

$$\mathsf{M}_\eta(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta), \pi\right)$$

par réciprocité de Frobenius. D'après la propriété (4.c) du paragraphe 3.8, cet espace définit une représentation cuspidale de G qui, en vertu du diagramme commutatif [6, (12)], est isomorphe à $\mathscr{V}$. Il s'ensuit que $\mathscr{V}$ est cuspidale.

Supposons maintenant que V ne soit pas cuspidale. Il existe donc un sous-groupe parabolique standard propre $\mathrm{P}_0 = \mathrm{M}_0\mathrm{U}_0$ de G_0 et une représentation irréductible W de M_0 tels que V soit un sous-quotient de l'induite parabolique de W à G_0. Notant respectivement P, M les images de $\mathrm{P}_0 \cap \mathrm{K}^0$, $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^0$ dans G, ainsi que $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{G}_0}$ et $\mathrm{Ind}_{\mathsf{P}}^{\mathsf{G}}$ les foncteurs d'induction parabolique correspondant à $(\mathrm{P}_0, \mathrm{M}_0)$ et (P, M), on a un isomorphisme :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{G}_0}(\mathrm{W})\right)^{\mathrm{K}^1} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathsf{P}}^{\mathsf{G}}\left(\mathrm{W}^{\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^1}\right), \tag{5.3}$$

de représentations de G, l'espace $\mathrm{W}^{\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^1}$ des vecteurs de W invariants par $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^1$ étant considéré comme une représentation de :

$$(\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^0)/(\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{K}^1) \simeq \mathsf{M}.$$

(L'isomorphisme (5.3) se déduit de l'identité $\mathrm{G}_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{K}^0$; c'est aussi un cas particulier de [28, proposition 5.6].) Enfin, le sous-groupe K^1 étant un pro-p-groupe, le foncteur des K^1-invariants est exact. La représentation $\mathscr{V}$ est donc un sous-quotient de (5.3), ce qui contredit le fait qu'elle est cuspidale. □

Les représentations $\mathsf{F}(\pi)$ et π_0 sont donc toutes deux cuspidales, et leurs supports supercuspidaux sont inertiellements équivalents. Raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.3, on en déduit qu'elles sont tordues l'une de l'autre par un caractère non ramifié de G_0. Nous pouvons donc choisir ξ_0 de sorte que $\mathsf{F}(\pi)$ et π_0 soient isomorphes, ce que nous ferons dorénavant.

5.6. Comportement vis-à-vis de la torsion par un caractère non ramifié

Nous allons montrer que $\mathbf{F}$ se comporte bien vis-à-vis de la torsion par un caractère non ramifié, afin d'utiliser les résultats de la section précédente.

Lemme 5.6. — *Soit χ un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié de* G, *et soit χ_0 la restriction de χ à* G_0. *Alors $\mathbf{F}(\pi\chi)$ est isomorphe à $\pi_0\chi_0$.*

Posons $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)$. Si $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$ et si χ est un caractère non ramifié de G, on note χf la fonction $g \mapsto \chi(g)f(g)$ de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$. Si $\Psi \in \mathcal{H}$, on note $\chi\Psi$ la fonction $f \mapsto \chi(g)\Psi(g)$ de $\mathcal{H}$.

Remarque 5.7. — On observera que, si $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$ a pour support $\mathrm{J}^1 g$ pour un $g \in \mathrm{G}$, alors χf est simplement égale à $\chi(g)f$. De façon analogue, si $\Psi \in \mathcal{H}$ a pour support $\mathrm{J}^1 g \mathrm{J}^1$ pour un $g \in \mathrm{G}$, alors $\chi\Psi$ est simplement égale à $\chi(g)\Psi$.

Il est commode d'introduire la définition suivante.

Définition 5.8. — *Si* M *est un $\mathcal{H}$-module à droite et si χ est un caractère non ramifié de* G, *on note* $\mathrm{M}\chi$ *le $\mathcal{H}$-module à droite d'espace sous-jacent* M, *muni de l'action de $\mathcal{H}$ donnée par :*

$$(v,\Psi) \mapsto v \cdot (\chi^{-1}\Psi), \quad v \in \mathrm{M}, \quad \Psi \in \mathcal{H},$$

où $\cdot$ désigne l'action de $\mathcal{H}$ sur M.

Le lemme suivant justifie la définition précédente.

Lemme 5.9. — *Soit π une représentation dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)$, et soit χ un caractère non ramifié de* G. *Les $\mathcal{H}$-modules $\mathbf{M}_\eta(\pi\chi)$ et $\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour tout vecteur w dans l'espace de η, on note $\boldsymbol{i}_w$ l'élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$ de support J^1 prenant la valeur w en 1. Par réciprocité de Frobenius, il correspond à tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi\chi)$ le morphisme :

$$w \mapsto \varphi(\boldsymbol{i}_w)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$. Réciproquement, à tout $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$ correspond le morphisme :

$$f \mapsto \sum_g \chi(g)^{-1}\pi(g)^{-1}\psi(\boldsymbol{i}_{f(g)})$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi\chi)$, où g décrit un système de représentants de $\mathrm{J}^1\backslash\mathrm{G}$. Les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi)$ étant égaux, on peut associer à φ le morphisme :

$$\varphi^* \ : f \mapsto \sum_g \pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{f(g)})$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi)$. On définit de cette façon un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi\mapsto\varphi^*$ de $\mathbf{M}_\eta(\pi\chi)$ vers $\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi$, et nous allons vérifier que c'est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.

Soit $\Psi\in\mathcal{H}$. Il s'agit de prouver que, pour tout w dans l'espace de η, on a :

$$(\varphi\cdot\Psi)(\boldsymbol{i}_w) = (\varphi^*\cdot\chi^{-1}\Psi)(\boldsymbol{i}_w). \tag{5.4}$$

Posons $f=\Psi*\boldsymbol{i}_w\in\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$, qui n'est autre que la fonction $g\mapsto\Psi(g)w$. On a :

$$\chi^{-1}\Psi(\boldsymbol{i}_w) = (\chi^{-1}\Psi)*\boldsymbol{i}_w = \chi^{-1}f.$$

Le membre de droite de (5.4) donne :

$$\varphi^*(\chi^{-1}f) = \sum_g \pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{\chi(g)^{-1}f(g)}) = \sum_g \chi(g)^{-1}\pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{f(g)}) = \varphi(f)$$

ce qui prouve le résultat escompté. □

Posons $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$. On a une propriété analogue au lemme 5.9 pour les $\mathcal{H}_0$-modules.

Prouvons maintenant le lemme 5.6. Raisonnant comme au paragraphe 5.5, le fait que $\mathbf{F}(\pi\chi)$ soit une représentation cuspidale de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$ entraîne qu'il existe un caractère non ramifié μ_0 de G_0 tel que $\mathbf{F}(\pi\chi)$ soit isomorphe à $\pi_0\mu_0$. Appliquant $\mathbf{M}_1$, et compte tenu du lemme 5.9, on obtient un isomorphisme $\theta^*(\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi)\simeq\theta^*(\mathbf{M}_\eta(\pi))\mu_0$ de $\mathcal{H}_0$-modules. Par définition, cela signifie que :

$$\theta(\mu_0\Psi_0) = \chi\theta(\Psi_0)$$

pour tout $\Psi_0\in\mathcal{H}_0$.

Supposons maintenant que Ψ_0 soit la fonction caractéristique de la double-classe $\mathrm{K}^1b\mathrm{K}^1$ avec $b=\mathrm{diag}(1,\dots,1,\varpi_{\mathrm{C}})\in\mathrm{G}_0$. D'après la remarque 5.7, on a $\mu_0\Psi_0=\mu_0(b)\Psi_0$. Ensuite, d'après le fait 5.2, la fonction $\Psi=\theta(\Psi_0)$ a pour support $\mathrm{J}^1b\mathrm{J}^1$. D'après la remarque 5.7 à nouveau, on a donc $\chi\Psi=\chi(b)\Psi$. On en déduit que $\mu_0(b)=\chi(b)$.

Le caractère χ est de la forme $\alpha\circ\mathrm{Nrd}$ où α est un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$ et Nrd désigne la norme réduite de $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ sur F. De façon analogue, le caractère μ_0 est de la forme $\alpha_0 \circ \mathrm{Nrd}_{\mathrm{B}}$ où α_0 est un caractère non ramifié de $\mathrm{E}^\times$ et $\mathrm{Nrd}_{\mathrm{B}}$ est la norme réduite de B sur E. On a :

$$\begin{aligned}\chi(b) &= \alpha \circ \mathrm{Nrd}(b)\\ &= \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}} \circ \mathrm{Nrd}_{\mathrm{B}}(b)\\ &= \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}(\mathrm{Nrd}_{\mathrm{C}}(\varpi_{\mathrm{C}}))\end{aligned}$$

et $\varpi_{\mathrm{E}} = \mathrm{Nrd}_{\mathrm{C}}(\varpi_{\mathrm{C}})$ est une uniformisante de E. Un calcul analogue donne $\mu_0(b) = \alpha_0(\varpi_{\mathrm{E}})$. On en déduit que $\alpha_0 = \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}$, donc que μ_0 est égal à χ_0, la restriction de χ à G_0.

5.7. Conclusion

On utilise notre travail ci-dessus pour obtenir la proposition suivante qui généralise la proposition 4.1.

Proposition 5.10. — *Soient π, π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations cuspidales de* G. *Supposons que l'espace* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ *soit non nul. Alors* $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$.

Démonstration. — Comme les représentations π' et π sont dans le même bloc de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, on en déduit que π' est dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$. On peut donc appliquer $\mathbf{F}$, ce qui donne :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathbf{F}(\pi), \mathbf{F}(\pi')) \neq \{0\}$$

dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0, \Omega_0)$, et $\mathbf{F}(\pi)$ est isomorphe à π_0. D'après la proposition 4.1, ceci entraîne que :

(1) il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{F}(\pi')$ soit isomorphe à $\pi_0\nu_0^j$,
(2) si ℓ ne divise pas $q(\pi_0) - 1$, alors $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à π_0,

où ν_0 est le caractère non ramifié « valeur absolue de la norme réduite » de G_0. D'après le lemme 5.3, on a $q(\pi_0) = q(\pi)$. D'après le lemme 5.6, et comme la restriction de ν à G_0 est égale à ν_0, on a donc :

(1) il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{F}(\pi')$ soit isomorphe à $\mathbf{F}(\pi\nu^j)$,
(2) si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, alors $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à $\mathbf{F}(\pi)$.

Le foncteur $\mathbf{F}$ étant une équivalence de catégories, on trouve le résultat annoncé. □

6. Le cas général

Dans cette section, on décompose la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ en blocs.

6.1. Un résultat préliminaire

On considère à présent une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible quelconque π de G. D'après la définition 3.21, il lui correspond un ensemble $\mathrm{B}(\pi)$. Rappelons que, si le support supercuspidal de π est $\rho_1+\dots+\rho_r$, alors $\mathrm{B}(\pi)$ est l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G dont le support supercuspidal est de la forme :

$$\rho_1\nu^{j_1}+\dots+\rho_r\nu^{j_r}, \quad j_1,\dots,j_r\in\mathbb{Z}, \tag{6.1}$$

où, pour chaque $k=1,\dots,r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k)-1$. Nous allons prouver le résultat suivant, qui généralise la proposition 5.10. Pour cela, nous nous inspirons de la preuve de [13, théorème 3.2.13].

Proposition 6.1. — *Soient π, π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G*. Supposons que l'espace* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\pi)$ *soit non nul. Alors* $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$*.*

Démonstration. — Si π et π' sont cuspidales, le résultat est donné par la proposition 5.10. Supposons maintenant que π' soit cuspidale mais pas π. Il y a une représentation irréductible cuspidale τ d'un sous-groupe de Levi standard propre M de G et un sous-groupe parabolique standard P de G de facteur de Levi M tels que π se plonge dans $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)$. On a une suite exacte courte :

$$0\to\pi\to\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)\to\delta\to0$$

qui définit δ, et on en déduit la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi',\delta)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\pi)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)). \tag{6.2}$$

Notant U le radical unipotent de P et π'_{U} le module de Jacquet de π' relativement au triplet parabolique $(\mathrm{P},\mathrm{M},\mathrm{U})$, on a par adjonction un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau))\simeq\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{M}}(\pi'_{\mathrm{U}},\tau) \tag{6.3}$$

et le membre de droite est nul car π' est cuspidale. Par conséquent, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi',\delta)$ est non nul : on en déduit que π' a le même support supercuspidal que π, donc que $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$. Si π est cuspidale mais pas π', on se ramène au cas précédent par passage aux contragrédientes *via* l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\pi)\simeq\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi^\vee,\pi'^\vee).$$

Supposons enfin que ni π ni π' ne soient cuspidales, et formons à nouveau la suite exacte (6.2). Si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi',\delta)$ est non nul, on a $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$. Sinon, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau))$ est non nul et un argument de dévissage standard implique, compte tenu de (6.3), qu'il y a un sous-quotient irréductible α de π'_{U} tel que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{M}}(\alpha,\tau)$ soit non nul. Identifions M à un produit $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D})\times\cdots\times\mathrm{GL}_{m_l}(\mathrm{D})$ pour des entiers $m_1,\dots,m_l\geqslant 1$ de somme m, et écrivons :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{M}}(\alpha,\tau)\simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D})}(\alpha_1,\tau_1)\otimes\cdots\otimes \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_{m_l}(\mathrm{D})}(\alpha_l,\tau_l)$$

où $\alpha\simeq\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_l$ et $\tau\simeq\tau_1\otimes\cdots\otimes\tau_l$. Pour chaque $i\in\{1,\dots,l\}$, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})}(\alpha_i,\tau_i)$ est non nul. Comme la représentation τ_i est cuspidale, un des cas précédemmment traités implique que $\alpha_i\in\mathrm{B}(\tau_i)$. Par ailleurs, d'après le lemme géométrique ([7, 2.8]), on a :

$$\sum_{i=1}^{l}\mathrm{scusp}(\alpha_i)=\mathrm{scusp}(\pi').$$

Il s'ensuit que $\pi'\in\mathrm{B}(\pi)$. Ceci met fin à la démonstration de la proposition 6.1. □

6.2. Le théorème de décomposition

Notons $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathrm{G})$ l'ensemble des $\mathrm{B}(\pi)$ quand π parcourt les représentations irréductibles du groupe G. Énonçons le premier résultat principal de l'article.

Théorème 6.2. — *On a une décomposition en blocs :*

$$\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})=\bigoplus_{\mathrm{B}}\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B}) \tag{6.4}$$

où B *décrit les éléments de* $\mathscr{B}$, *et où* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ *formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B. *En d'autres termes, toute* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation de longueur finie* V *de* G *admet une unique décomposition :*

$$\mathrm{V}=\bigoplus_{\mathrm{B}}\mathrm{V}(\mathrm{B}) \tag{6.5}$$

où V(B) *désigne la plus grande sous-représentation de* V *dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la longueur de V, le cas de longueur 1 étant immédiat puisque les $\mathrm{B}\in\mathscr{B}$ sont disjoints grâce à l'unicité du support supercuspidal.

Soit V une représentation de longueur finie $\geqslant 2$ de G, soit π une sous-représentation irréductible de V et posons $\mathrm{B}=\mathrm{B}(\pi)$. La proposition 6.1 assure que, pour toute représentation $\pi'\in\mathrm{B}$ et toute représentation $\sigma\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G})-\mathrm{B}$, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi',\sigma)$ est nul. Par conséquent, d'après le lemme 3.4, la représentation V se décompose en $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{B}) \oplus \mathrm{W}$ où W est la plus grande sous-représentation de V dont les sous-quotients irréductibles sont hors de B. Comme V(B) est non nul, la longueur de W est strictement moindre que celle de V. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Enfin, le fait que les facteurs $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$ sont indécomposables est une conséquence de la proposition 3.23 et du lemme 3.5. □

Remarque 6.3. — Si $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, la remarque 3.22 montre que des représentations irréductibles sont dans le même bloc si et seulement si elles ont le même support supercuspidal.

On déduit du théorème 6.2 le résultat suivant, qui généralise la proposition 6.1.

Corollaire 6.4. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Supposons qu'il y ait un entier $i \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi)$ soit non nul. Alors $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$.*

6.3. Un corollaire

Comme annoncé à la fin de la section 3, nous terminons cette section par le résultat suivant.

Proposition 6.5. — *Soient π, π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* G *dont la réduction mod ℓ contienne à la fois π et π'.*
(2) *Les ensembles* $\mathrm{B}(\pi)$ *et* $\mathrm{B}(\pi')$ *sont égaux.*
(3) *Les représentations π et π' sont dépendantes.*

Démonstration. — Les première et seconde assertions sont équivalentes selon la proposition 3.23, et la première implique la troisième selon le lemme 3.5. Il ne reste donc plus qu'à prouver que la troisième implique l'une des deux autres. Or il suit du théorème 6.2 que, si des représentations π et π' sont dépendantes, alors $\mathrm{B}(\pi') = \mathrm{B}(\pi)$. □

7. Blocs supercuspidaux

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Notons Ω sa classe inertielle, et posons $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\pi)$. L'objectif de cette section est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 7.1. — *Il existe un corps localement compact non archimédien* F' *et une* F'*-algèbre à division centrale* D' *tels que les blocs* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ *et* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\Omega')$ *soient équivalents, où* Ω' *est la classe inertielle du caractère trivial de* $\mathrm{D}'^\times$.

7.1. Un corollaire

Indiquons immédiatement comment déduire du théorème 7.1 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 7.2. — *Notons* B' *l'ensemble des représentations irréductibles de* $\mathrm{D}'^\times$ *dépendantes du caractère trivial. Alors les blocs* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ *et* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}')$ *sont équivalents.*

Démonstration. — L'équivalence de catégories du théorème 7.1 préserve le fait d'être de longueur finie. Elle envoie donc $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ sur un bloc de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times)$ contenu dans la catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\Omega')$. Un tel bloc est de la forme $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}'')$, où B'' est égal à $\mathrm{B}(\chi)$ pour un caractère non ramifié χ de $\mathrm{D}'^\times$. Il suffit alors d'appliquer le foncteur de torsion par χ^{-1}, qui induit une équivalence entre $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}'')$ et $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}')$. ☐

En outre, la proposition 5.4 montre que, pour prouver le théorème 7.1, il suffit de le faire dans le cas où π est de niveau 0, ce que nous supposerons désormais.

Nous allons construire un progénérateur de type fini du bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ et calculer l'algèbre de ses endomorphismes.

7.2. Un progénérateur

Fixons un type (N,ξ) dont l'induite compacte à G soit isomorphe à π, comme au paragraphe 3.7. Soit ξ^0 la restriction de ξ à N^0, et soit P^0 l'enveloppe projective de ξ^0 dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N}^0)$.

LEMME 7.3. — *L'induite compacte :*

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{G}}(\mathrm{P}^0) \tag{7.1}$$

est projective et de type fini dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$.

Démonstration. — Elle est projective en tant qu'induite compacte d'une représentation projective, et de type fini en tant qu'induite compacte d'une représentation de dimension finie.

Il reste à prouver que cette représentation, qu'on note Π, appartient au bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$. Soit π' un de ses sous-quotients irréductibles. Celui-ci est de niveau 0 : la représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ sur l'espace des vecteurs de π' invariants par N^1 est non nulle. Fixons-en une sous-représentation irréductible τ, ce qui est possible car π' est admissible. La restriction de Π à N^0 se décompose en la somme directe :

$$\bigoplus_g \mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0\cap\mathrm{N}^{0g}}^{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^{0g})$$

où g décrit les matrices diagonales de G de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_\mathrm{D}^{k_1},\dots,\varpi_\mathrm{D}^{k_m})$ où $k_1,\dots,k_m$ sont des entiers relatifs tels que $k_1\geqslant\dots\geqslant k_m$. Il y a donc un g tel que τ apparaisse comme sous-quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0\cap\mathrm{N}^{0g}}^{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^{0g})$. Pour que cette induite ait des vecteurs non nuls invariants par N^1, il faut et suffit que l'induite $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0\cap\mathrm{N}^{0g}}^{\mathrm{N}^0}(\xi^{0g})$ en ait également (rappelons que les sous-quotients de P^0 sont tous isomorphes à ξ^0 d'après [30, III.2.9]). La représentation σ du groupe $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ dont ξ^0 est l'inflation étant cuspidale (elle est même supercuspidale), ceci n'est possible que si g normalise N^0, c'est-à-dire si $k_1=\dots=k_m$. Supposons que ce soit le cas, c'est-à-dire qu'on ait $g=\varpi_\mathrm{D}^k$ pour un $k\in\mathbb{Z}$. Alors τ est un sous-quotient irréductible de P^{0g}, donc τ est isomorphe à ξ^{0g} et π' est un sous-quotient irréductible de l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{G}}(\xi^0)$. Le résultat voulu suit maintenant de [28, proposition 8.1] (voir aussi la fin du paragraphe 5.1). □

Rappelons (voir par exemple [21, 4.11]) qu'un objet projectif et de type fini Π de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ est un progénérateur si toute représentation irréductible de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$, c'est-à-dire toute représentation irréductible inertiellement équivalente à π, est isomorphe à un quotient de Π.

Proposition 7.4. — *La représentation* $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{G}}(\mathrm{P}^0)$ *est un progénérateur de* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$.

Démonstration. — Étant donné un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié χ de G, il s'agit de prouver que $\pi\chi$ est un quotient de (7.1). La représentation ξ^0 étant un quotient de P^0, et le foncteur d'induction compacte étant exact, il suffit de prouver que $\pi\chi$ est un quotient de l'induite compacte de ξ^0 à G, ce qui suit de ce que π est un quotient de ladite induite et χ est trivial sur N^0. □

Remarque 7.5. — Dans le cas particulier où π est le caractère trivial de $\mathrm{G}=\mathrm{D}^\times$, la représentation P^0 est l'induite à $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ du caractère trivial de $\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$, le plus petit sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ dont l'indice est une puissance de ℓ. Le progénérateur (7.1) de la proposition 7.4 est donc l'induite compacte du caractère trivial de $\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$ à $\mathrm{D}^\times$.

Nous allons maintenant calculer l'algèbre des endomorphismes du progénérateur $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{G}}(\mathrm{P}^0)$.

7.3. Structure de l'algèbre des endomorphismes

Notons G le groupe réductif fini $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}})$ et σ la représentation supercuspidale de G dont ξ^0 est l'inflation. Fixons une extension $\boldsymbol{t}$ de $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$ dans $\mathrm{M}_m(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}})$ de degré m, de façon à voir le groupe multiplicatif $\mathsf{T} = \boldsymbol{t}^\times$ comme un tore de G. Notons a la valuation ℓ-adique de $q^n - 1$. La composante ℓ-primaire S de T est donc cyclique d'ordre ℓ^a. Soit Σ la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective de G telle que la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\Sigma \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit une enveloppe projective de σ dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathsf{G})$. On a le résultat suivant (Dat [8, proposition B.1.2]).

Proposition 7.6. — *Il y a un isomorphisme :*

$$\mathrm{End}(\Sigma) \simeq \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{S}]$$

de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-algèbres.

Plus précisément, une fois fixé un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})$-régulier θ de T correspondant à σ par la théorie de Deligne–Lusztig, la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation Σ considérée par Dat est munie d'une action $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-linéaire de T commutant à celle de G. Il y a donc un homomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-algèbres de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{T}]$ dans $\mathrm{End}(\Sigma)$, induisant par restriction un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-algèbres :

$$j\ : \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{S}] \to \mathrm{End}(\Sigma). \tag{7.2}$$

Par ailleurs, il y a une décomposition canonique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $\mathsf{G} \times \mathsf{T}$:

$$\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_\alpha \mathrm{V}_\alpha \tag{7.3}$$

indexée sur les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractères α de S, où V_α est isomorphe à $\pi_\alpha \otimes \theta\alpha$, la représentation π_α étant l'unique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale de G relevant σ correspondant au $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère $\theta\alpha$ (où θ désigne, par abus de notation, l'unique relèvement de θ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de même ordre que θ) par la théorie de Deligne–Lusztig. Étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dans (7.2), on obtient l'isomorphisme canonique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbres :

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{S}] \to \mathrm{End}(\Sigma) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]}(\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui, compte tenu de (7.3), associe à tout élément $f \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{S}]$ l'endomorphisme de $\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ agissant sur le facteur V_α par le scalaire :

$$\sum_{x \in \mathsf{S}} f(x)(\theta\alpha)(x) = \sum_{x \in \mathsf{S}} f(x)\alpha(x)$$

l'égalité provenant de ce que θ est d'ordre premier à ℓ et x d'ordre divisant ℓ^a.

Fixons un générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$, et notons t son image dans $\mathrm{End}(\Sigma)$. On a :

$$\mathrm{End}(\Sigma) = \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{t}], \quad \mathsf{t}^{\ell^a} = 1. \tag{7.4}$$

Étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, l'endomorphisme t agit sur le facteur V_α par le scalaire $\alpha(\varsigma) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$.

7.4. Structure de l'algèbre des endomorphismes (suite)

Notons $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective de N telle que $\widetilde{\mathrm{P}}^0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit isomorphe à P^0. À isomorphisme près, c'est l'inflation à N^0 de la représentation Σ du paragraphe 7.3. On déduit de la proposition 7.6 le résultat suivant.

Corollaire 7.7. — *Il y a un isomorphisme :*

$$\mathrm{End}(\mathrm{P}^0) \simeq \overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathsf{S}]$$

de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres.

Démonstration. — Le résultat suit de la proposition 7.6 et du fait que la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre $\mathrm{End}(\mathrm{P}^0)$ est isomorphe à $\mathrm{End}(\widetilde{\mathrm{P}}^0) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. □

La classe d'isomorphisme de $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ est normalisée par N car ξ^0 l'est. Rappelons qu'on a fixé une uniformisante ϖ_D de D telle que $\varpi_\mathrm{D}^d = \varpi_\mathrm{F}$ et que le groupe N est engendré par N^0 et $\varpi = \varpi_\mathrm{D}^b$, où b est le cardinal de l'orbite de σ sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$. Fixons un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentations de N :

$$\mathsf{a} \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathrm{N}]}(\widetilde{\mathrm{P}}^0, \widetilde{\mathrm{P}}^{0\varpi}) \tag{7.5}$$

ce qui équivaut à fixer un prolongement de $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ à N prenant la valeur a en ϖ. Étendons les scalaires et restreignons à N^0 dans (7.5). Compte tenu de (7.3), pour tout caractère α de S, il existe un unique caractère β de S tel que a envoie V_α sur V_β, c'est-à-dire tel que le conjugué de π_α par ϖ soit isomorphe à π_β. Ceci définit une permutation $\alpha \mapsto \beta$ entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères de S.

Rappelons qu'on a défini (voir la définition 3.9) l'invariant de Hasse h de D, qui est un entier de $\{1,\dots,d\}$ premier à d. La conjugaison par ϖ, qui est égal à ϖ_{D}^{b}, induit donc sur le corps résiduel $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$ l'automorphisme :

$$x \mapsto x^{q^{hb}}.$$

La représentation cuspidale π_α correspondant au caractère $\theta\alpha$, sa conjuguée par ϖ correspond au caractère :

$$(\theta\alpha)^{q^{hb}}$$

qui est conjugué sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}})$ à $\theta\beta$ pour un unique caractère β de S, c'est-à-dire que :

$$(\theta\alpha)^{q^{hb}} = (\theta\beta)^{q^{di}}$$

pour un $i \in \mathbb{Z}$. Séparant les facteurs d'ordre premier à ℓ des facteurs d'ordre une puissance de ℓ, on obtient :

$$\theta^{q^{hb-di}} = \theta \quad \text{et} \quad \beta = \alpha^{q^{hb-di}}.$$

D'après [20, paragraphe 3.4], l'ordre de q modulo l'ordre de θ est égal à mb, et m est premier à l'entier $s = d/b$. Ainsi mb divise $hb - di$, c'est-à-dire que i est solution de l'équation $si \equiv h \bmod m$. Il sera commode de choisir i tel que :

$$h' = \frac{h - si}{m} \in \{1,\dots,s\} \tag{7.6}$$

ce qui détermine i de façon unique. On observe que l'entier h' ainsi défini est premier à s, car h est premier à d. On en déduit le résultat suivant. Soit t le générateur de $\mathrm{End}(\widetilde{\mathrm{P}}^0)$ tel que $\mathsf{t}^{\ell^a} = 1$ provenant du générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$ fixé au paragraphe 7.3 (voir (7.4)).

Lemme 7.8.

(1) *Pour tout caractère α de S, on a :*

$$\beta = \alpha^{q^{hb-di}} = \alpha^{q^{mbh'}}.$$

(2) *On a l'égalité* $\mathsf{ata}^{-1} = \mathsf{t}^{q^{mbh'}}$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la discussion qui précède. Ensuite, d'après le paragraphe 7.3, l'élément t agit sur le facteur V_α par le scalaire $\alpha(\varsigma)$, tandis que ata^{-1} agit sur V_α comme t agit sur V_β, c'est-à-dire par le scalaire $\beta(\varsigma)$. L'endomorphisme $\mathsf{ata}^{-1} - \mathsf{t}^{q^{mbh'}}$ agissant par 0 sur chaque facteur V_α, il est nul. □

Remarque 7.9. — Ceci ne dépend du choix ni de θ, ni du générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$, ni de a.

7.5. Structure de l'algèbre des endomorphismes (fin)

Notons P l'induite compacte de P^0 à N.

Théorème 7.10. — *La $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre* End(P) *est engendrée par deux générateurs* t,u *avec les relations :*

$$\mathsf{t}^{\ell^a}=1,\quad \mathsf{utu}^{-1}=\mathsf{t}^{q^{mbh'}}.$$

Démonstration. — Notons E et E^0 les algèbres d'endomorphismes de P et P^0 respectivement. Par définition de P, on a un morphisme naturel :

$$\mathrm{E}^0\to\mathrm{E} \tag{7.7}$$

de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres. Pour tout $h\in\mathrm{N}$ et tout vecteur v dans l'espace de P^0, on note $[h,v]$ l'élément de P de support N^0h et prenant la valeur v en h. Ainsi, si $e\in\mathrm{E}^0$, son image dans E est l'endomorphisme $[h,v]\mapsto[h,e(v)]$. On en déduit que (7.7) est injective. Identifions dorénavant E^0 à son image dans E. Notons encore a l'image de (7.5) dans $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell\mathrm{N}}(\mathrm{P}^0,\mathrm{P}^{0\varpi})$ par réduction de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ à $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ et définissons un endomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-modules u de P par :

$$\mathsf{u}([h,v])=[\varpi^{-1}h,\mathsf{a}(v)].$$

On vérifie que u commute à l'action de N, c'est-à-dire que $\mathsf{u}\in\mathrm{E}$. Soit maintenant $\mathsf{t}\in\mathrm{E}^0$ comme dans le corollaire 7.7. Calculons utu^{-1}. L'appliquant à la fonction $[h,v]$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathsf{utu}^{-1}([h,v])&=\mathsf{ut}([\varpi^{-1}h,\mathsf{a}^{-1}(v)])\\&=\mathsf{u}([\varpi^{-1}h,\mathsf{ta}^{-1}(v)])\\&=[h,\mathsf{ata}^{-1}(v)]\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, d'après le lemme 7.8, on a $\mathsf{utu}^{-1}=\mathsf{t}^{q^{mbh'}}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que E est engendré par E^0 et u. Par réciprocité de Frobenius et décomposition de Mackey, on a des isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{E}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^0,\mathrm{P})\simeq\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^0,\mathrm{P}^{0\varpi^i})=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathsf{a}^i\mathrm{E}_0.$$

Ceci se traduit de la façon suivante : étant donné un endomorphisme $f\in\mathrm{E}$, les applications :

$$f_i\ :v\mapsto\mathsf{a}^{-i}f([1,v])(\varpi^i),\quad v\in\mathrm{P}^0,\quad i\in\mathbb{Z},$$

appartiennent à E_0, ne sont non nulles que pour un nombre fini de i (car $f([1,v])\in\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{N}}(\mathrm{P}^0)$ est à support compact dans N) et f est égal à la somme des u^if_i. $\square$

Remarques 7.11.

(1) Le théorème 7.10 généralise des résultats de Dat [8] : voir la proposition B.1.2(ii.a) dans le cas où $d = 1$, et la proposition B.2.1(iv) dans le cas où $m = s = 1$.
(2) Dans le cas où $m = 1$, $s = n$, par exemple si π est le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$, la remarque 7.5 montre que End(P) est l'algèbre de groupe de $\mathrm{D}^\times/\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$, ce dernier étant isomorphe au produit semi-direct de S, la composante ℓ-primaire de $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}^\times$, par $\mathbb{Z}$, un entier $i \in \mathbb{Z}$ agissant sur S par l'automorphisme $x \mapsto x^{q^{hi}}$.

7.6. Structure des blocs supercuspidaux

Prouvons maintenant le théorème 7.1. Rappelons que P est l'induite compacte de P^0 à N.

LEMME 7.12. — *Notons* Π *l'induite compacte de* P *à* G.

(1) *La catégorie* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ *est équivalente à la catégorie des modules à droite sur* $\mathrm{End}(\Pi)$.
(2) *Le morphisme naturel de* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-algèbres de* End(P) *dans* $\mathrm{End}(\Pi)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La représentation Π étant un progénérateur de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ d'après la proposition 7.4, il suit par exemple de [21, 4.11] que le foncteur :

$$\mathrm{V} \mapsto \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\Pi, \mathrm{V}) \tag{7.8}$$

est une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ et la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathrm{End}(\Pi))$ des modules à droite sur $\mathrm{End}(\Pi)$. Ensuite, par adjonction, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{End}(\Pi) \simeq \bigoplus_g \mathrm{Hom}_\mathrm{N}(\mathrm{P}, \mathrm{P}^g) \tag{7.9}$$

où g décrit un système de représentants de doubles classes de G mod N. Soit $g \in \mathrm{G}$ tel que l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\mathrm{P}, \mathrm{P}^g)$ soit non nul. La restriction de P à N^0 étant une somme directe de copies de P^0, on trouve que l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0\cap\mathrm{N}^{0g}}(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}^{0g})$ est non nul, donc que g entrelace ξ^0, c'est-à-dire que $g \in \mathrm{N}$. Par conséquent, (7.9) donne un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres entre $\mathrm{End}(\Pi)$ et End(P). □

Remarque 7.13. — Dans le cas particulier où π est le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$ (voir les remarques 7.5 et 7.11), le foncteur (7.8) est le foncteur des invariants par $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{(\ell)}$, qui est distingué dans $\mathrm{D}^\times$. Par conséquent, si V est une représentation dans le bloc principal de $\mathrm{D}^\times$, c'est-à-dire dont tous les sous-quotients irréductibles sont des caractères non ramifiés, l'espace W de ses vecteurs invariants par $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{(\ell)}$ est stable par $\mathrm{D}^\times$, et le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{V}/\mathrm{W}$ n'a pas de vecteur $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{(\ell)}$-invariant non nul. Il s'ensuit que X est nul, donc que le foncteur (7.8) est le foncteur identité.

Soit maintenant F' un corps localement compact non archimédien dont le corps résiduel soit de cardinal $q' = q^{mb}$, et soit D' une F'-algèbre à division centrale de degré réduit s et d'invariant de Hasse égal à l'entier h' défini par (7.6), qui est premier à s. Soit Π' l'induite compacte à $\mathrm{D}'^\times$ du caractère trivial de $\mathrm{U}_{\mathrm{D}'}^{(\ell)}$ (remarque 7.5) et soit E' l'algèbre de ses endomorphismes. Comme q'^s est égal à q^n, la valuation ℓ-adique de $q'^s - 1$ est a. D'après la remarque 7.11, l'algèbre E' est engendrée par des générateurs t', u' avec les relations :

$$\mathsf{t}'^{\ell^a} = 1, \quad \mathsf{u}'\mathsf{t}'\mathsf{u}'^{-1} = \mathsf{t}'^{q^{mbh'}}.$$

Elle est donc isomorphe à E. D'après la remarque 7.13, les catégories $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times, \Omega')$ et $\mathbf{Mod}(\mathrm{E}')$ sont identiques. Le théorème 7.1 s'ensuit.

Remarque 7.14. — Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times, \Omega') \arrow[d] \\
\mathbf{Mod}(\mathrm{E}) \arrow[r] & \mathbf{Mod}(\mathrm{E}')
\end{tikzcd}$$

résume la situation : les équivalences de catégories verticales sont données par (7.8) et le foncteur identité $\mathrm{V}' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}'^\times}(\Pi', \mathrm{V}')$, l'équivalence horizontale inférieure est induite par l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres entre E' et E envoyant t' sur t et u' sur u, et l'équivalence horizontale supérieure est définie par le fait que le diagramme est commutatif.

Remarque 7.15. — On observe ici un phénomène qui ne se produit pas dans le cas complexe. Dans le cas complexe en effet, un bloc supercuspidal de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ est toujours équivalent au bloc de $\mathrm{F}^\times$ contenant le caractère trivial, c'est-à-dire qu'on peut choisir D' égal à F' (et même F' égal à F) dans le théorème 7.1. Dans le cas ℓ-modulaire en revanche, un bloc de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{F}^\times)$ contient une seule représentation irréductible, tandis que $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B}(\pi))$ contient tous les $\pi\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$.

7.7. Existence d'enveloppes projectives de représentations supercuspidales

En guise d'application du théorème 7.1 et du corollaire 7.2, nous prouvons le résultat suivant.

PROPOSITION 7.16. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G.

(1) *La représentation π admet une enveloppe projective Π dans* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$.

(2) *Les sous-quotients irréductibles de Π sont tous de la forme $\pi\nu^j$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et, si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, on peut même supposer que $j = 0$.*

Démonstration. — Par équivalence, il suffit de le prouver dans le cas où π est le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$, ce que nous supposons. Dans ce cas, π contient le type (N, ξ) où ξ est le caractère trivial de $\mathrm{N} = \mathrm{D}^\times$. La première partie de l'énoncé découle donc de la proposition 4.8.

Soit donc P l'enveloppe projective du caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$ dans la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}^\times)$. Il nous reste à prouver que ses sous-quotients irréductibles sont tous de la forme ν^j avec $j \in \mathbb{Z}$ et que, si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, on peut même supposer que $j = 0$. Soit ζ un sous-quotient irréductible de P. D'après le lemme 4.13, il y a une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible μ de $\mathrm{D}^\times$ dont la réduction mod ℓ contienne à la fois 1 et χ. Appliquant la proposition 3.6 et le corollaire 3.19 à μ, on trouve le résultat voulu. ☐

8. Le premier espace d'extension dans le cas supercuspidal

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Nous déterminons toutes les représentations irréductibles π' de G telles qu'il existe une extension non scindée de π par π'.

8.1. Extensions du caractère trivial

Dans ce paragraphe, on cherche les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de $\mathrm{D}^\times$ ayant une extension non triviale avec le caractère trivial 1. D'après le début de la section 4, de telles représentations doivent être des caractères non ramifiés de $\mathrm{D}^\times$ d'ordre divisant n.

Soit donc χ un caractère non ramifié de $\mathrm{D}^\times$ d'ordre divisant n. Si χ est trivial, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}^\times}(1,1)$ est toujours non trivial, car la représentation :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha(x)$ est l'image dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de la valuation de la norme réduite de x, est une extension non triviale de 1 par lui-même. Supposons donc χ non trivial. On pose :

$$z = \chi(\varpi_{\mathrm{D}}) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$$

qui vérifie $z^n = 1$ et $z \neq 1$. On cherche à quelle condition $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1, \chi)$ est nul, c'est-à-dire à quelle condition toute extension de 1 par χ est scindée.

Soit M une extension de 1 par χ, et soit (e_1, e_2) une base de M sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ telle que $\mathrm{D}^\times$ agisse sur la droite engendrée par e_1 par le caractère χ. On définit une application α de $\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ par :

$$x \cdot e_2 = e_2 + \alpha(x)e_1, \quad x \in \mathrm{D}^\times.$$

Comme M est une représentation de $\mathrm{D}^\times$, cette application α a la propriété de cocycle :

$$\alpha(xy) = \alpha(x) + \chi(x)\alpha(y), \quad x, y \in \mathrm{D}^\times, \tag{8.1}$$

et l'extension M est scindée si et seulement s'il y a un $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_\ell$ tel que $\mathrm{D}^\times$ agisse sur $e_2 - \lambda e_1$ par le caractère trivial, c'est-à-dire tel que :

$$\alpha(x) = \lambda(\chi(x) - 1), \quad x \in \mathrm{D}^\times. \tag{8.2}$$

Le caractère χ étant non ramifié, (8.1) entraîne que la restriction de α à $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^\times$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Lemme 8.1. — *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\alpha(\varpi_{\mathrm{D}}^k) = \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}) \cdot \frac{z^k - 1}{z - 1}.$$

Démonstration. — La formule est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ et, si elle est vraie pour un $k \geqslant 1$, l'identité :

$$\alpha(\varpi_{\mathrm{D}}^{k+1}) = \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}^k) + z^k \cdot \alpha(\varpi_{\mathrm{D}})$$

montre qu'elle est vraie pour $k+1$. Elle est donc vraie pour tout $k \geqslant 0$. De façon analogue, on vérifie qu'elle est vraie pour $k \leqslant 0$. □

Remarque 8.2. — On en déduit en particulier que $\alpha(\varpi_{\mathrm{D}}^n) = \alpha(\varpi_{\mathrm{F}})$ est nul.

Si α est nulle sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^\times$, l'extension M est scindée : en effet, le lemme 8.1 prouve qu'on a la relation (8.2) avec $\lambda = \alpha(\varpi_{\mathrm{D}})/(z-1)$.

Supposons maintenant que α ne soit pas nulle sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^\times$. Comme $\ell \neq p$, elle est nulle sur le pro-p-sous-groupe $1 + \mathfrak{p}_{\mathrm{D}}$; elle induit donc un morphisme non nul de groupes de $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}^{\times}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$, donc ℓ divise $q^n - 1$. La condition (8.1) entraîne pour tout $x \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$ les égalités :

$$\begin{aligned}\alpha(\varpi_{\mathrm{D}} x \varpi_{\mathrm{D}}^{-1}) &= \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}) + z \cdot (\alpha(x) + \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}^{-1})) \\ &= \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}) + z \cdot \alpha(x) + z \cdot \alpha(\varpi_{\mathrm{D}}) \cdot (z^{-1} - 1)/(z-1) \\ &= z \cdot \alpha(x).\end{aligned}$$

Or, si h désigne l'invariant de Hasse de $\mathrm{D}^{\times}$ (voir la définition 3.9), le conjugué de x par ϖ_{D} est congru à x^{q^h} mod $1+\mathfrak{p}_{\mathrm{D}}$. On en déduit que, pour qu'il existe une extension non scindée de 1 par χ, il faut que ℓ divise $q^n - 1$ et que :

$$z = q^h.$$

Nous allons prouver que la réciproque est vraie.

Lemme 8.3. — *Supposons que ℓ divise $q^n - 1$, et notons χ_h le $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$-caractère non ramifié de $\mathrm{D}^{\times}$ prenant la valeur q^h en une uniformisante. Alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^{\times}}(1, \chi_h)$ est non nul.*

Démonstration. — Si le caractère χ_h est trivial, c'est-à-dire si ℓ divise $q-1$, le résultat découle du fait que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^{\times}}(1,1)$ n'est pas trivial, comme nous l'avons vu au début du paragraphe. Supposons maintenant que χ_h ne soit pas trivial. D'après ce qui précède, il suffit de prouver l'existence d'une application α de $\mathrm{D}^{\times}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ vérifiant (8.1) mais pas (8.2). Nous allons construire une application α vérifiant (8.1) et non nulle sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$: elle ne pourra donc pas vérifier (8.2). Comme ℓ divise $q^n - 1$, il y a un morphisme de groupes non nul de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$. Fixons-en un, qu'on note β. Tout $x \in \mathrm{D}^{\times}$ s'écrit de façon unique $u\varpi_{\mathrm{D}}^{k}$, où $k \in \mathbb{Z}$ est sa valuation et où $u \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$. Posons :

$$\alpha(x) = \beta(u) + \frac{z^k - 1}{z-1}, \quad \text{avec } z = q^h \neq 1.$$

Nous allons prouver que α vérifie (8.1). Si $y \in \mathrm{D}^{\times}$, écrivons-le $v\varpi_{\mathrm{D}}^{l}$ avec $l \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$. On a :

$$\alpha(xy) = \beta\left(u\varpi_{\mathrm{D}}^{k} v \varpi_{\mathrm{D}}^{-k}\right) + \frac{z^{k+l} - 1}{z-1}$$

tandis que :

$$\alpha(x) + \chi_h(x)\alpha(y) = \beta(u) + \frac{z^k - 1}{z-1} + z^k \cdot \left(\beta(v) + \frac{z^l - 1}{z-1}\right).$$

Pour que α vérifie l'identité (8.1), il faut et suffit donc que :

$$\beta\left(\varpi_{\mathrm{D}} v \varpi_{\mathrm{D}}^{-1}\right) = z \cdot \beta(v)$$

pour tout $v \in \mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$, ce qui découle immédiatement de ce que, comme remarqué plus haut, le conjugué de v par ϖ_{D} est congru à v^{q^h} mod $1+\mathfrak{p}_{\mathrm{D}}$. □

En résumé, on a le résultat suivant.

Proposition 8.4. — *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères χ de $\mathrm{D}^\times$ tels que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1,\chi)$ soit non nul est :*

1. *réduit au caractère trivial si ℓ ne divise pas q^n-1,*
2. *formé du caractère trivial et du caractère non ramifié $\chi_h : \varpi_{\mathrm{D}} \mapsto q^h$ si ℓ divise q^n-1.*

8.2. Extensions d'une représentation supercuspidale

Dans ce paragraphe, nous généralisons la proposition 8.4 au cas d'une représentation supercuspidale quelconque π de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Nous allons utiliser la description de π par la théorie des types simples donnée au paragraphe 3.8, dont nous utilisons les notations.

Notons $h(\pi)$ l'invariant de Hasse de l'algèbre à division C apparaissant dans (3.8). Si h est l'invariant de Hasse de D et si g est le degré de E sur F (avec les notations du paragraphe 3.8), alors $h(\pi)$ est le reste dans la division euclidienne de $gh/(g,d)$ par $c=d/(g,d)$. C'est un entier premier à c.

Proposition 8.5. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G. *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations supercuspidales π' de* G *telles que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi,\pi')$ soit non nul est :*

1. *réduit à π si ℓ ne divise pas $q(\pi)-1$,*
2. *formé de π et de la représentation $\pi\nu^{-h(\pi)}$ si ℓ divise $q(\pi)-1$.*

Démonstration. — Dans le cas où ℓ ne divise pas $q(\pi)-1$, le résultat découle de la proposition 5.10. Supposons désormais que ℓ divise $q(\pi)-1$. Selon la proposition 5.10, on peut supposer que π' est isomorphe à $\pi\nu^j$ pour un entier $j\in\mathbb{Z}$.

Supposons d'abord que le résultat soit vrai pour les représentations supercuspidales de niveau 0 : on va en déduire le résultat dans le cas de niveau non nul en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.10. Appliquons le foncteur $\mathbf{F}$ introduit au paragraphe 5.3, envoyant π sur la représentation supercuspidale π_0 de niveau 0 de G_0. On trouve que :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi,\pi') \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathbf{F}(\pi),\mathbf{F}(\pi')) \neq \{0\}\,.$$

D'après le cas de niveau 0, et comme $q(\pi_0) = q(\pi)$ d'après le lemme 5.3, la représentation $\mathsf{F}(\pi')$ est isomorphe à π_0 ou à $\pi_0\nu_0^{-h(\pi)}$, où ν_0 est le caractère non ramifié "valeur absolue de la norme réduite" de G_0. Par ailleurs, d'après le lemme 5.6, et comme la restriction de ν à G_0 est égale à ν_0, la représentation $\mathsf{F}(\pi\nu^{-h(\pi)})$ est isomorphe à $\pi_0\nu_0^{-h(\pi)}$. Le foncteur F étant une équivalence de catégories, on trouve le résultat annoncé.

Supposons maintenant que π soit de niveau 0. On a donc $q(\pi) = q^n$ et $h(\pi) = h$. Reprenons les notations du paragraphe 7.6, et notamment celles de la remarque 7.14. On a une équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$ et $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times, \Omega')$, que l'on note G, et un isomorphisme d'algèbres entre E et E'. Nous allons utiliser le même argument que ci-dessus : il suffit pour cela de vérifier que $\mathsf{G}(\pi\nu^j)$ est isomorphe à $\mathsf{G}(\pi)\nu'^j$, où ν' est la caractère "valeur absolue de la norme réduite" de $\mathrm{D}'^\times$. Pour cela, nous allons suivre le raisonnement de la preuve du lemme 5.6.

D'abord, par analogie avec le lemme 5.9, on a le résultat suivant : si on note M le E-module à droite $\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\Pi, \pi)$, alors $\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\Pi, \pi\nu^j)$ est le E-module obtenu en tordant M par le caractère de E défini par $\mathsf{t} \mapsto 1$ et $\mathsf{u} \mapsto \nu^j(\varpi)$.

Ensuite, il existe un unique caractère non ramifié μ' de $\mathrm{D}'^\times$ tel que $\mathsf{G}(\pi\nu^j)$ soit égal à $\mathsf{G}(\pi)\mu'$. Considéré comme un module sur E', il est obtenu en tordant $\mathsf{G}(\pi)$ par le caractère de E' défini par $\mathsf{t}' \mapsto 1$ et $\mathsf{u}' \mapsto \mu'(\varpi')$, où ϖ' est une uniformisante de D', ce qui entraîne $\mu'(\varpi') = \nu^j(\varpi)$. Or $\nu(\varpi)$ est égal à $q^{-mb} = q'^{-1}$. On en déduit que μ' est égal à ν'^j. □

Annexe A.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la preuve de [28, proposition 1.3] est incorrecte. (Dans la preuve de [28, lemme 1.4], un sous-quotient λ de ξ peut être cuspidal, ce qui empêche d'appliquer l'hypothèse de récurrence.) La preuve du théorème de décomposition [28, théorème 10.4] reposant sur cette proposition, nous devons expliquer pourquoi ce théorème reste valable. Plus précisément, dans l'article [28], le seul résultat de la section 1 utilisé dans la preuve du théorème 10.4 est le corollaire 1.15. Nous allons prouver que ce corollaire reste valable.

Dans tout cet appendice, G est un groupe linéaire général sur un corps fini de caractéristique p et R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

PROPOSITION A.1. — *Soient π et π' des représentations irréductibles de* G. *On suppose qu'il y a un entier $i \geqslant 0$ tel que* $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{G}}(\pi', \pi)$ *soit non nul. Alors π et π' ont même support supercuspidal.*

Démonstration. — Soit P l'enveloppe projective de π. Nous allons prouver que tout sous-quotient irréductible α de P a le même support supercuspidal que π. Si Q est l'enveloppe projective de α, on a un morphisme non nul de Q dans P. En relevant P, Q à $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et en étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on en déduit (comme au paragraphe 4.6 ci-dessus) qu'il y a une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible δ dont la réduction mod ℓ contienne π et α. Les représentations π et α ont donc le même support supercuspidal, qui est le support supercuspidal mod ℓ de δ.

Prouvons maintenant que π et π' ont même support supercuspidal. Le cas où $i = 0$ est immédiat. Supposons donc que $i \geqslant 1$. Soit Q l'enveloppe projective de π' et soit Q_1 la sous-représentation propre maximale de Q. Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}}(-, \pi)$, et Q étant projectif, on a :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{G}}(\pi', \pi) \simeq \mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathsf{G}}(\mathrm{Q}_1, \pi).$$

Il existe donc un sous-quotient irréductible α de Q_1 tel que $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathsf{G}}(\alpha, \pi)$ soit non nul. Par récurrence sur i, les représentations π et α ont le même support supercuspidal. Par ailleurs, α a le même support supercuspidal que π' car il est un sous-quotient de Q. $\square$

On en déduit (par exemple en utilisant le lemme 3.4) que les sous-quotients irréductibles d'une représentation indécomposable de longueur finie de G ont tous le même support supercuspidal. Par conséquent, les conclusions de [28, proposition 1.7, lemme 1.11] sont vraies pour le groupe G. Il s'ensuit que les théorèmes de décomposition [28, théorème 1.12, corollaire 1.15] sont vrais pour G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. N. BERNSTEIN, « Le "centre" de Bernstein », in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, Edited by P. Deligne, p. 1-32.

[2] P. BROUSSOUS, « Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras », *J. Algebra* **204** (1998), n° 1, p. 324-336.

[3] C. J. BUSHNELL & P. C. KUTZKO, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, xii+313 pages.

[4] W. CASSELMAN, « Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive group », 1995.

[5] G. CHINELLO, « Hecke algebra with respect to the pro-p-radical of a maximal compact open subgroup for $GL(n, F)$ and its inner forms », *J. Algebra* **478** (2017), p. 296-317.

[6] ———, « Blocks of the category of smooth ℓ-modular representations of $\mathrm{GL}(n, F)$ and its inner forms : reduction to level 0 », *Algebra Number Theory* **12** (2018), n° 7, p. 1675-1713.

[7] J.-F. Dat, « v-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case », *Duke Math. J.* **126** (2005), n° 3, p. 397-469.

[8] ———, « Théorie de Lubin–Tate non abélienne ℓ-entière », *Duke Math. J.* **161** (2012), n° 6, p. 951-1010.

[9] ———, « A functoriality principle for blocks of p-adic linear groups », in *Around Langlands correspondences*, Contemp. Math., vol. 691, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, p. 103-131.

[10] ———, « Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups », *Math. Ann.* **371** (2018), n° 1-2, p. 565-613.

[11] ———, « Simple subquotients of big parabolically induced representations of p-adic groups », *J. Algebra* **510** (2018), p. 499-507.

[12] O. Dudas, « Appendix : non-uniqueness of supercuspidal support for finite reductive groups », *J. Algebra* **510** (2018), p. 508-512.

[13] M. Emerton & D. Helm, « The local Langlands correspondence for GL_n in families », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **47** (2014), n° 4, p. 655-722.

[14] M. Grabitz, « Simple characters for principal orders in $\mathrm{M}_m(D)$ », *J. Number Theory* **126** (2007), n° 1, p. 1-51.

[15] M. Grabitz, A. J. Silberger & E.-W. Zink, « Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras », *J. Number Theory* **91** (2001), n° 1, p. 92-125.

[16] D. Helm, « The Bernstein center of the category of smooth $W(k)[\mathrm{GL}_n(F)]$-modules », *Forum Math. Sigma* **4** (2016), article no. e11 (98 pages).

[17] A. Mínguez & V. Sécherre, « Représentations lisses modulo ℓ de $\mathrm{GL}_m(D)$ », *Duke Math. J.* **163** (2014), n° 4, p. 795-887.

[18] ———, « Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **109** (2014), n° 4, p. 823-891, with an appendix by Vincent Sécherre and Shaun Stevens.

[19] ———, « Classification des représentations modulaires de $\mathrm{GL}_n(q)$ en caractéristique non naturelle », in *Trends in number theory*, Contemp. Math., vol. 649, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, p. 163-183.

[20] ———, « Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo ℓ », *Invent. Math.* **208** (2017), n° 2, p. 553-631.

[21] B. Pareigis, *Categories and functors*, Pure and Applied Mathematics, vol. 39, Academic Press, New York-London, 1970, translated from the German, viii+268 pages.

[22] V. Sécherre, « Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$. I. Caractères simples », *Bull. Soc. Math. France* **132** (2004), n° 3, p. 327-396.

[23] ———, « Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$. II. β-extensions », *Compos. Math.* **141** (2005), n° 6, p. 1531-1550.

[24] ———, « Représentations lisses de $\mathrm{GL}_m(D)$. III. Types simples », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), n° 6, p. 951-977.

[25] ———, « Proof of the Tadić conjecture (U0) on the unitary dual of $\mathrm{GL}_m(D)$ », *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 187-203.

[26] V. Sécherre & S. Stevens, « Représentations lisses de $\mathrm{GL}_m(D)$. IV. Représentations supercuspidales », *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), n° 3, p. 527-574.

[27] ———, « Smooth representations of $GL_m(D)$. VI : semisimple types », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2012), n° 13, p. 2994-3039.

[28] ———, « Block decomposition of the category of ℓ-modular smooth representations of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ and its inner forms », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **49** (2016), n° 3, p. 669-709.

[29] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, translated from the second French edition by Leonard L. Scott, x+170 pages.

[30] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, xviii+233 pages.

[31] ———, « Cohomology of sheaves on the building and R-representations », *Invent. Math.* **127** (1997), n° 2, p. 349-373.

[32] ———, « Induced R-representations of p-adic reductive groups », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), n° 4, p. 549-623.

[33] ———, « On highest Whittaker models and integral structures », in *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, p. 773-801.

Manuscrit reçu le 9 février 2021,
révisé le 8 décembre 2021,
accepté le 11 avril 2022.

Bastien DREVON
Lycée Edgar Quinet
63 rue des Martyrs
75009 Paris (France)
bastien.drevon@ac-paris.fr

Vincent SÉCHERRE
Laboratoire de Mathématiques de Versailles
UVSQ
CNRS
Université Paris-Saclay
78035 Versailles (France)
Institut Universitaire de France
vincent.secherre@uvsq.fr