

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Kieu Hieu NGUYEN

Un cas PEL de la conjecture de Kottwitz

Tome 73, n° 6 (2023), p. 2239-2304.

<https://doi.org/10.5802/aif.3577>

Article mis à disposition par son auteur selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE



<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>



Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org e-ISSN : 1777-5310

UN CAS PEL DE LA CONJECTURE DE KOTTWITZ

par Kieu Hieu NGUYEN (*)

RÉSUMÉ. — La conjecture de Kottwitz décrit la cohomologie des espaces de Rapoport–Zink basiques à l’aide des correspondances de Langlands locales. Dans cet article, par voie globale via l’étude de la géométrie de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz, on prouve cette conjecture pour des espaces de Rapoport–Zink de type PEL unitaires non ramifiés simples basiques de signature $(1, n - 1)$.

ABSTRACT. — The Kottwitz conjecture describes the cohomology of basic Rapoport–Zink spaces using local Langlands correspondences. In this paper, via geometrical studies of some Kottwitz-type Shimura varieties, we prove this conjecture for basic simple unramified unitary PEL type Rapoport–Zink spaces of signature $(1, n - 1)$.

Introduction

Les variétés de Shimura jouent un rôle important dans le programme de Langlands global qui prédit un lien entre représentations automorphes des groupes linéaires et représentations galoisiennes. Rapoport et Zink ont introduit des analogues p -adiques définis comme des espaces de modules de groupes p -divisibles munis de structures additionnelles ([35]). La cohomologie ℓ -adique ($\ell \neq p$) de ces espaces devrait fournir l’incarnation locale des correspondances de Langlands, c’est le sujet de la conjecture de Kottwitz [36].

Selon la terminologie de [35], les cas abordés jusqu’à présent sont tous de type EL : le cas Lubin–Tate a été entièrement traité dans [5, 6, 14] ; par dualité [9, 11, 38], on obtient aussi le cas de Drinfeld et le cas EL général est démontré par [10, 41].

Mots-clés : Espaces de Rapoport–Zink, Conjecture de Kottwitz, Formes automorphes.
Classification Mathématique (2020) : 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

(*) Je remercie l’ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

Dans cet article on traite un cas PEL unitaire non ramifié simple basique où une donnée de Rapoport–Zink est un uplet

$$\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, G, \mu, b)$$

auquel on associe un groupe p -divisible muni de structures additionnelles. On suppose de plus

- $[F_p : \mathbb{Q}_p] = 2d$ avec d impair,
- $\dim_{F_p} V = n$ impair et $\mu = (1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$.

Via la notion de structure de niveau, à $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}$ est associée une tour d’espaces rigides $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ indexée par les sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{Q}_p)$. Le groupe $J_b(\mathbb{Q}_p)$ des quasi-isogénies du groupe p -divisible avec structures additionnelles est, dans le cas où b est basique, une forme intérieure du groupe unitaire quasi-déployé p -adique G . La tour $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ est alors munie d’une action de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ et pour $\ell \neq p$

$$H_c^i(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \lim_{\overrightarrow{K_p}} H_c^i(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$, où W_{E_p} est le groupe de Weil du corps de définition E_p de $\mu^{(1)}$. Pour l’expliciter, on utilise les paramètres de Langlands discrets $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{SU}(2) \rightarrow {}^L G$.

Pour un tel φ on note $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ (respectivement $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$) le paquet de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ (respectivement de $J_b(\mathbb{Q}_p)$) associé (cf. théorème 2.18 et proposition 2.28). Les éléments de $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ sont en bijection avec l’ensemble $\mathrm{Irr}(S_\varphi^\natural, \chi)$ des caractères de S_φ^\natural dont le tiré en arrière via $Z(\widehat{G}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)}) \hookrightarrow S_\varphi \twoheadrightarrow S_\varphi^\natural$ induit le caractère χ (où S_φ est le centralisateur de φ dans \widehat{G} et χ est le caractère de $Z(\widehat{G}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)})$ associé à $G(\mathbb{Q}_p)$). Contrairement au cas EL, ces paquets ne sont pas en général des singletons ce qui sera à la source des difficultés techniques nouvelles de cet article. Rappelons que φ est dit cuspidal s’il est trivial sur le facteur $\mathrm{SU}(2)$ auquel cas le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales (cf. proposition 2.26).

D’après [24], à μ est associé une représentation r_μ de $\widehat{G} \rtimes W_{E_p}$ et on note $r_\mu \circ \varphi_{E_p}$ la représentation de $S_\varphi \times W_{E_p}$ définie par la formule

$$(s, w) \in S_\varphi \times W_{E_p} \mapsto r_\mu(s \cdot \varphi(w))$$

CONJECTURE (Kottwitz). — *Fixons un L -paramètre φ cuspidal. Soit $\pi'_p \otimes \pi_p \otimes \sigma$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$*

(1) Le corps de définition du cocaractère $\mu = (1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$ est F_p .

qui contribue de manière non triviale dans $H_c^*(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Alors π'_p appartient au L -paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ si et seulement si π_p appartient au L -paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$.

De plus la contribution (au signe près) du L -paquet associé à φ est donnée par la formule suivante :

$$\sum_{(\pi'_p, \pi_p) \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p)) \times \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes \pi_p^\vee \otimes \text{Hom}_{S_\varphi}(\tau_{\pi'_p} \otimes \tau_{\pi_p}, r_\mu \circ \varphi_{E_p})$$

où $\tau_{\pi'_p}$ et τ_{π_p} sont respectivement des représentations de S_φ correspondant à π'_p et π_p et où π_p^\vee signifie la représentation contragrédiente.

Remarque. — Puisque n est impair on a $G(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$.

Pour π_p une représentation irréductible supercuspidale de $J_b(\mathbb{Q}_p)$, on écrit

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K_p}} \text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}(H_c^i(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \pi_p)_{\text{cusp}} = \sum_{\pi'_p} \pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \pi'_p}^i$$

où π'_p parcourt l'ensemble des classes d'équivalences de représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$. On note également $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \sigma_{\pi_p, \pi'_p}^{n-1}$.

Considérons un paramètre de Langlands cuspidal $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow {}^L G$. La restriction de φ sur W_{E_p} se décompose en une somme de représentations irréductibles : $\varphi_{E_p} = \varphi_1^{n_1} \oplus \dots \oplus \varphi_r^{n_r}$. On a donc $S_\varphi = S_\varphi^\natural = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ (cf. (2.7)). Parmi les 2^{r-1} éléments de $\text{Irr}(S_\varphi^\natural, \chi)$, il y a r éléments $\{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ (cf. définition 3.1) qui jouent un rôle privilégié. Le théorème suivant est alors une version explicite de la conjecture de Kottwitz dans le cas considéré.

THÉORÈME A. — Pour $[F_p : \mathbb{Q}_p] = 2$, n impair et $\mu = (1, n-1)$, soit φ un paramètre de Langlands cuspidal et $\pi'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))^{(2)}$. Alors pour π_p supercuspidale, la représentation σ_{π_p, π'_p}^i est nulle dans chacun des cas suivants

- (i) $i \neq n-1$,
- (ii) $\pi_p \notin \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$
- (iii) Pour $\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p)) = \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ (puisque $G(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$) et $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} \notin \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$.

De plus pour $\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ et $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} = \tau_i$, on a

$$\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_{\mu_i} \circ \varphi_i^{n_i}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

où $\mu_i = (1, \dim \varphi_i^{n_i} - 1)$ pour $1 \leq i \leq r$.

(2) On rappelle que φ étant cuspidal alors π'_p est nécessairement supercuspidale

Remarques.

- Les représentations du groupe de Weil ci-dessus sont Frobenius semi-simples.
- Pour chaque $1 \leq i \leq r$, il y a 2^{r-1} couples $(\pi_p, \pi'_p) \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p)) \times \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} = \tau_i$ pour lesquels on a $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_{\mu_i} \circ \varphi_i^{n_i}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$.
- Il y a $r2^{r-1}$ couples (π_p, π'_p) parmi $(2^{r-1})^2$ couples pour lesquels $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} \neq 0$.

Le principe de la démonstration repose sur l'étude des variétés de Shimura Sh/E définies sur leur corps reflex $E = F$ où F est quadratique imaginaire et plus particulièrement sur la géométrie de la fibre spéciale en une place p inerte dans E d'un modèle Sh/\mathcal{O}_p où \mathcal{O}_p est l'anneau des entiers de E_p .

Dans un premier temps, on considère une variété de Shimura *non compacte* Sh associée à un groupe algébrique \dot{G} unitaire quasi-déployé en toutes les places finies avec $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ et où la signature associée est de la forme $(1, n - 1)$. On note aussi I la forme intérieure de \dot{G} qui est quasi-déployé en toutes les places finies et où la signature associée est $(0, n)$. D'après [10], on a une uniformisation du lieu basique de Sh par des \mathcal{M}_K avec une suite spectrale :

$$E_2^{t,q} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} \left(\lim_{\overrightarrow{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n - 1)), \Pi_p) \right) \otimes (\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H^{t+q}((\text{Sh})_K^{\text{an}}(\text{basic}), \mathcal{L}_\rho^{\text{an}}).$$

Lorsqu'on considère la partie $G(\mathbb{Q}_p)$ -supercuspidale, d'après [23, 29, 39] on a :

$$H^{t+q}((\text{Sh})(\text{basic}), \mathcal{L}_\rho)_{p\text{-cusp}} = H^{t+q}((\text{Sh}), \mathcal{L}_\rho)_{p\text{-cusp}}.$$

En outre lorsque Π_p est $J_b(\mathbb{Q}_p)$ -supercuspidale, on a :

$$\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^i (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n - 1)), \Pi_p) = 0$$

dès que $i > 0$.

La suite spectrale ci-dessus dégénère donc

$$\begin{aligned}
 |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \dot{\rho}}} \left(\lim_{\overrightarrow{K}} \text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \otimes (\Pi^{\infty, p}) \\
 = (H^q(\text{Sh}, \mathcal{L}_\rho))_{p\text{-cusp}}.
 \end{aligned}$$

Par un argument de globalisation, on en déduit que

$$(\star) \quad \sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_\mu \circ \varphi_{E_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} = \sum_{i=1}^r (r_{\mu_i} \circ \varphi_i^{n_i}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Dans le but d'identifier chacun des termes de la somme à gauche de (\star) avec l'un des termes dans la somme à droite, on devra considérer des formes automorphes provenant d'un groupe endoscopique de \dot{G} . Afin de mener à bien cette stratégie, on utilise la formule de multiplicité pour les groupes unitaires [17] pour construire des formes automorphes satisfaisant des propriétés particulières ainsi que les résultats de [34] pour obtenir des informations plus fines sur la cohomologie de variétés de Shimura.

Remarque. — Un ingrédient important de la démonstration est le théorème 7.2.2 de [34] sur la composante isotypique dans la cohomologie d'intersection de variétés de Shimura de type PEL unitaires non compactes sur un corps CM F . Dans cet article l'auteur a supposé $F^+ = \mathbb{Q}$ et c'est la raison pour laquelle on suppose $d = 1$. Toutefois si on disposait d'une formule analogue à [34, 7.2.2], notre méthode permettrait d'obtenir le théorème précédent pour d quelconque.

Il est en revanche possible, en utilisant les variétés de type Kottwitz-Harris-Taylor, de prouver la formule (\star) , cf. appendice 4, théorème 4.2.

Remerciements

Je remercie profondément Pascal Boyer et Laurent Fargues tant pour leur aide mathématique déterminante que pour leurs constants encouragements. Je remercie chaleureusement Sophie Morel, Colette Moeglin, Tasho Kaletha et Sug Woo Shin de m'avoir expliqué leurs travaux.

1. Données géométriques

1.1. Espaces de Rapoport–Zink d’après [35]

Fixons un nombre premier p . Soit $\check{\mathbb{Q}}_p := \widehat{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} = \text{Frac } W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ le complété de l’extension maximale non ramifiée de \mathbb{Q}_p et σ l’automorphisme de Frobenius géométrique de $\check{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$.

DÉFINITION 1.1. — *Étant donné un groupe réductif G défini sur \mathbb{Q}_p , deux éléments b_1, b_2 sont dits σ -conjugués s’il existe $g \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $b_1 = gb_2g^{-\sigma}$. On note $B(G)$ l’ensemble des classes de σ -conjugaisons dans $G(\check{\mathbb{Q}}_p)$.*

Remarque 1.2. — D’après Kottwitz [20, section 6.2], on s’intéressera dans la suite à un sous-ensemble $B(G, \mu)$ de $B(G)$ associé à un cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ (un cocaractère qui ne possède que des poids 0 et 1). Il existe un ordre partiel sur $B(G, \mu)$.

DÉFINITION 1.3. — *Une donnée de Rapoport–Zink de type PEL unitaire non ramifiée simple $(F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \text{GU}, \mu, b)$ consiste en la donnée :*

- d’une extension F_p de degré $2d$ de \mathbb{Q}_p non ramifiée munie d’une involution non triviale $*$,
- d’un F_p -espace vectoriel de dimension finie V ,
- d’un produit hermitien symplectique $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_p$ pour lequel il existe un réseau auto-dual Λ ,
- d’une classe de conjugaison de cocaractères minuscules $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow \text{GU}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ où GU est le groupe des similitudes unitaires défini sur \mathbb{Q} par

$$\text{GU}(R) = \{g \in \text{GL}(V \otimes R) \mid \langle gv, gw \rangle = \nu(g)\langle v, w \rangle, v, w \in V \otimes R\}$$

pour toute \mathbb{Q} -algèbre R et $\nu(g) \in R^\times$.

- d’une classe de σ -conjugaison $b \in B(\text{GU}, \mu)$. On suppose de plus que $c \circ \mu(z) = z$ où c est le facteur de similitude. Avec ces hypothèses, un tel μ est déterminé par des couples $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \Phi \amalg \Phi^*}$ où $(p_\tau, q_\tau) = (q_{\tau^*}, p_{\tau^*})$ et où Φ est un type CM p -adique de F_p/\mathbb{Q}_p .

À une telle donnée, on associe l’isocrystal $N = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{\mathbb{Q}}_p, b \circ (\text{Id} \otimes \sigma))$ muni d’une action $\iota : \mathcal{O}_{F_p} \rightarrow \text{End}(N)$ et une forme alternée non dégénérée $\langle \cdot | \cdot \rangle : N \times N \rightarrow \check{\mathbb{Q}}_p(n)$ où $n = \text{val}_p(c(b))$. Par la théorie de Dieudonné, l’isocrystal N correspond à un groupe p -divisible $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$ défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d’une action de \mathcal{O}_{F_p} et d’une polarisation λ .

THÉOREME 1.4 ([35, théorème 3.25]). — Soit \mathcal{M} le foncteur qui associe à chaque $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ -schéma S sur lequel p est localement nilpotent l'ensemble des couples (X, ρ) où :

- X est un groupe p -divisible sur S muni d'une polarisation p -principale λ_X et d'une action ι_X telles que l'involution de Rosati induite par λ_X induit $*$ sur \mathcal{O}_{F_p} .
- Une quasi-isogénie \mathcal{O}_{E_p} -linéaire $\rho : X \times_S \bar{S} \rightarrow \mathbb{X} \times_{\text{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)} \bar{S}$ telle que $\rho^V \circ \lambda_X \circ \rho$ est un \mathbb{Q}_p -multiple de λ_X dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{E_p}}(X, X^V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. (Ici, \bar{S} est la réduction modulo p de S).

On demande également que (X, ι_X) satisfasse la condition de déterminant de Kottwitz. Plus précisément, sous l'action de F_p , on a une décomposition : $\text{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau} \text{Lie}(X)_{\tau}$ alors $\text{Lie}(X)_{\tau}$ est localement libre de rang p_{τ} . Ce foncteur est alors représenté par un schéma formel $\mathcal{M}(\mu, b)$ défini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p})$.

Remarque 1.5. — Dans [35], les auteurs considèrent également les espaces de Rapoport–Zink de type EL. Les lecteurs intéressés pourront consulter *loc. cit.* pour plus de détails.

Notation 1.6. — On pose $C_0 = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g\Lambda = \Lambda\}$, un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Afin d'introduire les structures de niveau usuelles comme dans le cas $\text{GL}(2)$ on travaille avec les espaces analytiques \mathcal{M}^{an} de \mathcal{M} sur \mathbb{Q}_p .

DÉFINITION 1.7. — Soit $\mathcal{T}/\mathcal{M}^{\text{an}}$ le système local défini par le module de Tate p -adique du groupe p -divisible universel sur \mathcal{M} . Pour $K \subset C_0$ on définit \mathcal{M}_K comme le revêtement étale de \mathcal{M}^{an} qui classe les \mathcal{O}_{F_p} trivialisations modulo K de \mathcal{T} par Λ . Dans le cas PEL on demande de plus que les trivialisations préservent la forme alternée à \mathbb{Q}_p^{\times} près.

On a $\mathcal{M}^{\text{an}} = \mathcal{M}_{C_0}$. D'autre part il y a une tour $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ d'espaces analytiques sur \mathbb{Q}_p munis de morphismes de transition étales finis pour $K'_p \subset K_p$:

$$\Phi_{K'_p, K_p} : \mathcal{M}_{K'_p} \rightarrow \mathcal{M}_{K_p}$$

d'oubli de la structure de niveau. Le morphisme $\Phi_{K'_p, K_p}$ est galoisien de groupe de Galois K_p/K'_p si K'_p est normal dans K_p .

PROPOSITION 1.8 ([10, p. 16]). — La dimension d_{K_p} de \mathcal{M}_{K_p} est donnée par la formule $d_{K_p} = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in I_F} p_{\tau} q_{\tau}$.

DÉFINITION 1.9. — Soit $J(\mathbb{Q}_p)$ le groupe des quasi-isogénies \mathcal{O}_{F_p} -linéaires g de \mathbb{X} telles que $\lambda \circ g$ est une \mathbb{Q}^\times -multiple de $g^\vee \circ \lambda$. Le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur \mathcal{M} (dans le cas EL et PEL) par la formule

$$\forall g \in J(\mathbb{Q}_p) \forall (X, \rho) \in \mathcal{M} \quad (X, \rho) \cdot g = (X, \rho \circ g^{-1}).$$

DÉFINITION 1.10. — Une donnée de Rapoport–Zink non ramifiée simple $(F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, G, \mu, b)$ est basique si le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ associé est une forme intérieure de G . La donnée ci-dessus est basique si et seulement si b est l'élément minimal dans $B(G, \mu)$. Dans ce cas, on dit également que b est basique.

Soit $\ell \neq p$ un nombre premier.

Notation 1.11. — Soit $K_p \subset C_0$ un niveau. On pose :

$$H_c^\bullet(\mathcal{M}_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell) := \lim_{\overrightarrow{V}} \left(\lim_{\overleftarrow{n}} H_c^\bullet(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \right)$$

où V parcourt les ouverts relativement compacts de \mathcal{M}_{K_p} .

Le groupe $J_b(\mathbb{Q}_p)$ agit sur \mathcal{M}_{C_0} et cette action s'étend à \mathcal{M}_{K_p} de sorte que $J_b(\mathbb{Q}_p)$ agit sur les $H_c^\bullet(\mathcal{M}_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell)$. On peut aussi définir une action du groupe de Weil W_{E_p} sur ces groupes de cohomologie grâce à la donnée de descente de Rapoport–Zink définie comme suit.

Soit $\sigma_{E_p} : \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$ l'automorphisme de Frobenius relatif au corps de définition E_p de μ (où $\mathbb{Q}_p = \widehat{E_p^{nr}}$). On note $\bar{\sigma}_{E_p}$ le morphisme de Frobenius induit sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Pour \mathbb{X} un groupe p -divisible défini sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, on note $F_{E_p} : \mathbb{X} \rightarrow \bar{\sigma}_{E_p}^* \mathbb{X}$ le morphisme de Frobenius relatif. On construit un isomorphisme de foncteurs : $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \sigma_{E_p}^* \mathcal{M}$ comme suit.

Pour S un $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ -schéma sur lequel p est nilpotent ainsi qu'un point $(X, \rho) \in \mathcal{M}(S)$, le point (X^α, ρ^α) associé dans $\sigma_{E_p}^* \mathcal{M}(S)$ est défini de la manière suivante :

- $X^\alpha := X$ avec l'action de $\iota_{X^\alpha} := \iota_X$ (et avec la polarisation $\lambda_{X^\alpha} := \lambda_X$ dans le cas PEL)
- $\rho^\alpha := \rho \circ F_{E_p}^{-1}$.

L'isomorphisme de foncteurs $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \sigma_{E_p}^* \mathcal{M}$ est la donnée de descente de Rapoport–Zink associée à \mathcal{M} . Étant donné que la donnée de descente commute à l'action de $J_b(\mathbb{Q}_p)$, les groupes $H_c^\bullet(\mathcal{M}_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont munis d'une action de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$. De plus, lorsque K_p varie, le système $(H_c^\bullet(\mathcal{M}_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell))_{K_p}$ est muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$.

PROPOSITION 1.12 ([29, théorème 8]). — Soit ρ une représentation ℓ -adique admissible de $J_b(\mathbb{Q}_p)$.

- Les groupes

$$H^{i,j}(\mathcal{M}^\infty)_\rho := \varinjlim_{\overline{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^j(H^i(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(d_K)), \rho)$$

sont nuls pour presque tous $i, j \geq 0$.

- Les représentations $H^{i,j}(\mathcal{M}^\infty)_\rho$ sont admissibles.

1.2. Variétés de Shimura de type PEL unitaire

On considère la donnée de Shimura de type PEL simple suivante : $\mathcal{D} = (F, B, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, G, \Lambda, h)$ où :

- F est un corps CM non ramifié au-dessus de p .
- B est une algèbre semi-simple sur F , déployée en toutes les places de F au-dessus de p .
- $*$ est une involution positive sur $B : \forall b \in B \text{ tr}(bb^*) > 0$.
- $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un B -module hermitien où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une \mathbb{Q} -forme alternée telle que $\langle xv, w \rangle = \langle v, x^*w \rangle$ pour tous $v, w \in V$ et $x \in B$.
- G est le groupe algébrique défini sur \mathbb{Q} par

$$G(R) = \{g \in \text{GL}_{B \otimes_{\mathbb{Q}} R}(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) \mid \langle gv, gw \rangle = c(g)\langle v, w \rangle; c(g) \in R^*\}$$

On suppose de plus que $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au groupe des similitudes unitaires de signature $(1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$ où $n = [B : F]^{1/2} \text{rg}_B V$.

- Λ est un \mathcal{O}_{F_p} réseau \mathcal{O}_B -invariant dans $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ tel que la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ induit une \mathbb{Z}_p forme non dégénérée sur Λ . On pose également $C_0 = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda) = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g\Lambda = \Lambda\}$.
- Enfin, h est un morphisme de groupes algébriques

$$h : \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

qui définit une \mathbb{Q} -structure de Hodge $V = V_0 \oplus V_1$.

On lui associe un morphisme

$$\mu_h : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \hookrightarrow \prod_{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = (\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}))_{\mathbb{C}} \xrightarrow{hc} G_{\mathbb{C}}$$

Notation 1.13. — Soit E le corps reflex de cette donnée de type PEL, à savoir le corps de définition de la classe de conjugaison de μ_h . Lorsque $n > 2$ on a $F = E$.

Fixons $\Phi \subset \text{Hom}(E, \mathbb{C})$ un type CM de E . Chaque élément $\tau \in \Phi$ fournit un plongement $\nu \circ \tau : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ où ν est un isomorphisme abstrait entre \mathbb{C} et $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soient $(w_i)_{i \in I}, (w_j)_{j \in J}$ les places de E divisant p associées à tous ces plongements et où on suppose que $\forall i \in I w_i \neq w_i^c$ et $\forall j \in J w_j = w_j^c$. On a alors :

- $G_{\mathbb{Q}_p} \simeq \prod_{i \in I} \text{GL}_n(E_{w_i}) \times G \left(\prod_{j \in J} \text{GU}(E_{w_j}, n) \right)$ où le G devant le produit signifie que l'on prend le sous-groupe du produit formé des uplets ayant le même facteur de similitude.
- $B_{\mathbb{Q}_p} \simeq \prod_i \left(M_d(E_{w_i}) \times M_d(E_{w_i})^{\text{opp}} \right) \times \prod_j M_d(E_{w_j})$.

L'équivalence de Morita permet de supposer qu'en chaque place on est dans l'un des cas suivant :

(i) *Cas EL*

- $B_{\mathbb{Q}_p} = E_{w_i} \times E_{w_i}, \mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{E_{w_i}} \times \mathcal{O}_{E_{w_i}}$ et $(x, y)^* = (y, x)$.
- $V_{\mathbb{Q}_p} = V_i \oplus V_i^\vee$ où V_i^\vee est l'espace dual de V_i .
- $\langle x \oplus \phi, x' \oplus \phi' \rangle = \phi'(x) - \phi(x')$.

Remarque 1.14. — Pour chaque $b \in B(\text{GL}_n(E_{w_i}), \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$, on obtient une donnée de Rapoport–Zink simple de type EL de la forme $\{E_{w_i}, *, V_i, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, b\}$.

(ii) *Cas PEL*

- $B_{\mathbb{Q}_p} = E_{w_j}, \mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{E_{w_j}}$ et l'involution $*$ est égale à $\sigma^{[E_{w_j}/\mathbb{Q}_p]/2}$ où σ est le morphisme de Frobenius de l'extension non ramifiée E_{w_j}/\mathbb{Q}_p .
- V est un E_{w_j} -espace vectoriel de dimension n .
- Dans une base convenable de V , la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donnée par la formule :

$$\forall X, Y \in V \quad \langle X, Y \rangle = \text{Tr}_{E_{w_j}/\mathbb{Q}_p}(\alpha^t X^* J Y)$$

où $\alpha \in E_{w_j}$ est tel que $\sigma(\alpha) = -\alpha$, et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

si n est pair et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{(n-1)/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ I_{(n-1)/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si n est impair.

Remarque 1.15. — Pour chaque $b \in B(\mathrm{GU}(E_{w_j}, n), \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$, on obtient une donnée de Rapoport–Zink simple de type PEL de la forme $\{E_{w_j}, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, b\}$.

Soit K un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit de $G(\mathbb{A}_f)$ et soit Sh_K le foncteur qui associe à chaque F -schéma S l'ensemble des quadruplets $(A, \lambda, \iota, \bar{\kappa})$ où

- A est un S -schéma abélien à isogénie près.
- λ est une polarisation \mathbb{Q}^\times -homogène de A .
- $\iota : B \rightarrow \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme d'algèbres tel que $*$ correspond à l'involution de Rosati associée à λ .
- $\bar{\kappa} : V \otimes \mathbb{A}_f \rightarrow H_1(A, \mathbb{A}_f)$ est un morphisme de $B \otimes \mathbb{A}_f$ -modules symplectiques définissant une structure de niveau K sur le module de Tate de A .
- On suppose de plus la condition suivante :

$$\forall b \in B \quad \det(b, \mathrm{Lie}(A)) = \det(b, V_0)$$

THÉORÈME 1.16 ([19, section 5, section 8]). — *Le foncteur (Sh_K) est représenté par une variété quasi-projective lisse définie sur F . De plus la tour de variétés $(\mathrm{Sh}_K)_K$ est munie d'une action de $G(\mathbb{A}_f)$ par action sur la structure de niveau.*

Maintenant on s'intéresse aux modèles entiers des variétés de Shimura.

Considérons un sous-groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$. Soit S_{K^p} le foncteur qui associe à un \mathcal{O}_{E_p} -schéma S , l'ensemble des couples $(A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\kappa})$, où :

- A est une variété abélienne sur S de dimension n .
- $\bar{\lambda}$ est une \mathbb{Q}^\times -classe de polarisations p -principales.
- $\iota : \mathcal{O}_B \rightarrow \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ est tel que l'involution de Rosati définie par $\bar{\lambda}$ sur $\mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ induit l'involution $*$ sur \mathcal{O}_B . On suppose de plus que A satisfait la condition de signature de Kottwitz.
- $\bar{\kappa} : H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$ est une K^p -structure de niveau.

THÉORÈME 1.17 ([19, section 5]). — *Le problème de module S_{K^p} est représenté par un \mathcal{O}_{E_p} schéma lisse, quasi-projectif. Le groupe $G(\mathbb{A}_f^p)$ opère sur la tour $(S_{K^p})_{K^p}$ par action sur la structure de niveau.*

Soit $C_0 = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé. Il y a alors des isomorphismes compatibles pour K^p variable :

$$S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} E_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{C_0 K^p} \otimes_E E_p.$$

Supposons que la variété de Shimura est *compacte*. On rappelle quelques constructions de modèles entiers de variétés de Shimura avec niveau en p (cf. [28, section 6]).

Pour $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$, on définit pour tout $m \geq 0$

$$K^p(m) = K^p \times V_m \subset G(\mathbb{A}_f)$$

où $V_m = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g(\Lambda) = \Lambda, c(g) \in \mathbb{Z}_p^\times, g|_\Lambda \equiv 1 \pmod{p^m \Lambda}\}$. On remarque que $V_0 = G(\mathbb{Z}_p)$.

Lorsque K^p et m varient, les $K^p(m)$ forment un système direct de sous-groupes compacts ouverts suffisamment petits de $G(\mathbb{A}_f)$, cofinal au système de tous les sous-groupes compacts ouverts. Pour tout niveau K^p , d'après 1.17, on dispose d'un \mathcal{O}_{E_p} -schéma $S_{K^p(0)}$ classifiant des variétés abéliennes avec structures additionnelles. Soit $\mathcal{G} := \mathcal{A}[p^\infty]$ le groupe p -divisible muni de structures additionnelles associé à la variété abélienne universelle de $S_{K^p(0)}$. Pour $m > 0$, on définit le foncteur $S_{K^p(m)}$ qui associe à un $S_{K^p(0)}$ -schéma T l'ensemble des morphismes de groupes

$$\alpha : p^{-m}\Lambda/\Lambda \longrightarrow \mathcal{G}[p^m](T)$$

satisfaisant les conditions

- $\{\alpha(x) \mid x \in p^{-m}\Lambda/\Lambda\}$ est un « full set of sections » de $\mathcal{G}[p^m]_T/T$,
- α est $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}}$ -équivariant,
- α envoie $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur l'accouplement de Weil de $\mathcal{G}[p^m](T)$, à un facteur dans $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ près.

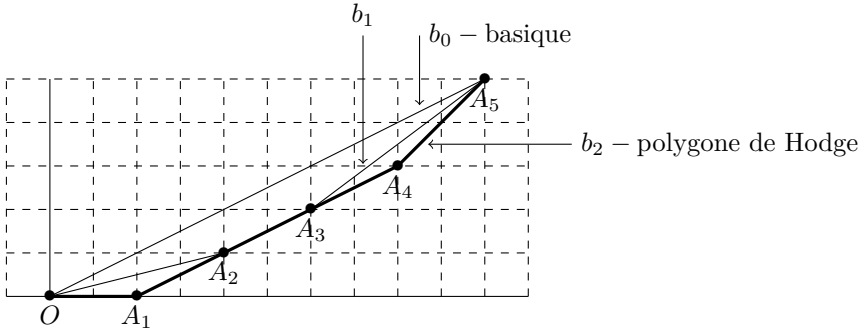
THÉORÈME 1.18 ([28, proposition 15]). — *Le foncteur $S_{K^p(m)}$ est représentable par un $S_{K^p(0)}$ -schéma fini.*

Lorsque K^p et m varient, les schémas $S_{K^p(m)}$ forment un système projectif muni d'une action de $G(\mathbb{A}_f^p) \times V_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$. En général, on ne peut pas étendre cette action en une action de $G(\mathbb{A}_f)$, faute de bon modèles entiers en p . Afin de contourner cette difficulté, Mantovan considère une classe plus grande de modèles entiers de variétés de Shimura telle que l'action de $G(\mathbb{A}_f^p) \times V_0$ s'étend en une action d'un sous-monoïde $G(\mathbb{A}_f)^+$ vérifiant $G(\mathbb{A}_f) = \langle G(\mathbb{A}_f)^+, p \rangle$.

Remarque 1.19. — Dans le cas où la variété de Shimura n'est plus compacte, les modèles entiers avec niveau en p existent encore grâce au travail de Kai Wen Lan et Benoît Stroh. Pour K un niveau, pas forcément maximal en p , il existe un modèle entier $S_K \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{E_p})$ comme dans le cas (Nm) de [23, 2.1] (consulter également la section 6 de [22]). Lorsque le niveau K varie, les schémas S_K forment un système projectif muni d'une action de $G(\mathbb{A}_f)$. (Consulter [23, p. 33–34] pour plus de détails).

À toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation algébrique irréductible de dimension finie ξ de G , on associe, cf. [14, p. 96], un système local \mathcal{L}_ξ sur la tour de variétés de Shimura $(\text{Sh}_K)_K$. En particulier, lorsque $\xi = 1$, on retrouve le système local $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Nous allons utiliser la stratification de Newton afin de calculer la cohomologie de la variété de Shimura. Nous ne considérons que la signature $\mu = (1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$. Dans ce cas, $B(G, \mu) = \{b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$ et de plus $b_0 \prec \dots \prec b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ où b_0 est l'unique classe basique. Rappelons que l'on associe à μ un polygone de Hodge et à chaque $b \in B(G, \mu)$ un polygone de Newton, en particulier le polygone de Newton correspondant à $b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ coïncide avec le polygone de Hodge. *Remarquons que tous les polygones de Newton non basiques touchent le polygone de Hodge en dehors des points extrémaux.* On a un diagramme des polygones avec $n = 5$.



Notation 1.20. — Pour tout entier $i \geq 0$ on notera

$$H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \varinjlim_{\overline{K}} H_c^i(\text{Sh}_K \times_{E_p} \overline{E}_p, \mathcal{L}_\xi).$$

C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel muni d'une action linéaire de $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$. En notant Ψ_η le foncteur cycles proches on a

$$H_c^i(\overline{\text{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) := \varinjlim_{K^p, m} H^i R\Gamma_c(\overline{S}_{K^p(m)}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Pour $b \in B(G, \mu)$ on notera

$$H_c^i(\overline{\text{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) := \varinjlim_{K^p, m} H^i R\Gamma_c(\overline{S}_{K^p(m)}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)|_{\overline{S}_{K^p(m)}(b)}).$$

THÉORÈME 1.21 ([23, 28, 30]). — On a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariante

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\text{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \implies H_c^{p+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi).$$

Remarque 1.22. — On ne suppose pas que la variété de Shimura soit compacte.

Démonstration. — La stratification de Newton de la fibre spéciale de la variété de Shimura induit une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariante ([28, théorème 22], [30, théorème 3.1], dans le cas où la variété de Shimura est compacte et [23, théorème 6.32] lorsque la variété de Shimura n'est pas compacte) :

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\text{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \implies H_c^{p+q}(\overline{\text{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Or on a un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariant suivant

$$R\Gamma_c(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \simeq R\Gamma_c(\overline{\text{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Lorsque la variété de Shimura est compacte, c'est un fait standard de la théorie de cycles proches ; lorsque la variété de Shimura n'est plus compacte, c'est le corollaire 5.20 de [23].

Finalement on a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariante :

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\text{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \implies H_c^{p+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi). \quad \square$$

THÉORÈME 1.23 ([23, 28, 29, 30, 39]). — *On suppose que b est une strate non basique telle que son polygone de Newton touche son polygone de Hodge à un point de rupture du polygone de Newton en dehors des points extrémaux. Alors les groupes de cohomologie $\sum_i (-1)^i H_c^i(\overline{\text{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))$ ne contiennent pas de représentation automorphe dont la composante en p est une représentation supercuspidale de $G(\mathbb{Q}_p)$.*

Démonstration. — Tout d'abord on exprime la cohomologie de la strate b en fonction de celle de la variété d'Igusa et de l'espace de Rapoport–Zink associé :

$$\begin{aligned} & \sum_i (-1)^i H_c^i(\overline{\text{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \\ &= \sum_{t,s,r} (-1)^{t+s+r} \lim_{\overline{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^s(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(D_K)), H_c^r(Ig(b))). \end{aligned}$$

Lorsque la variété de Shimura est compacte, cette formule est démontrée dans [28, théorème 13 et p. 28] et [30, théorème 3.2]. Lorsque la variété de Shimura n'est pas compacte, la formule est le théorème 6.26 de [23].

La deuxième étape consiste à montrer que les représentations

$$\lim_{\overline{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^s(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(D_K)), H_c^r(Ig(b)))$$

sont des induites paraboliques ([39, corollaire 7.1] et [29, théorème 41]). \square

DÉFINITION 1.24. — Pour H un groupe réductif p -adique et V un H -module. On définit la partie supercuspidale de V par la formule $V_{\text{cusp}} = \bigoplus_e e \cdot V$ où e parcourt les idempotents du centre de Bernstein de H associés aux classes d'équivalences inertielles des représentations supercuspidales de H .

Dans la suite, on notera $H_c^i(\overline{\text{Sh}}(b_0), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}}$ et $H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}}$ pour les parties $G(\mathbb{Q}_p)$ -supercuspidales de la cohomologie. Le corollaire suivant est une conséquence du théorème 1.23 et du théorème 1.21.

COROLLAIRE 1.25. — On a des isomorphismes :

$$H_c^i(\overline{\text{Sh}}(b_0), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}} \simeq H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}}$$

où b_0 désigne la classe basique.

1.3. Uniformisation rigide

Soit $\overline{S}_{K^p} = S_{K^p} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{E_p})} \mathbb{F}_{p^2}$ la fibre spéciale de S_{K^p} . Le schéma \overline{S}_{K^p} est alors stratifié par le polygone de Newton du cristal muni de structures additionnelles. Plus précisément, pour chaque point $x = (A_0, \overline{\lambda}_0, \iota_0, \overline{\eta}_0)$ dans $\overline{S}_{K^p}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, on note (X_x, ι, λ) le groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O}_E et d'une polarisation p -principale, associé à x ainsi que $(N_x, \iota, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ l'isocrystal associé. Si $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})$ on pose alors :

$$\overline{S}_{K^p}(b) = \{x \in \overline{S}_{K^p}(\overline{\mathbb{F}}_p) | (N_x, \iota, \langle \cdot | \cdot \rangle) \simeq (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{\mathbb{Q}}_p, b \otimes \sigma, \langle \cdot | \cdot \rangle)\}$$

On a la stratification :

$$\overline{S}_{K^p} = \coprod_{b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})} \overline{S}_{K^p}(b)$$

et si $y \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})$ est fixé alors $\coprod_{b < y} \overline{S}_{K^p}(b)$ est un fermé dans \overline{S}_{K^p} .

Soient maintenant $y = (A_y, \overline{\lambda}_y, \iota_y, \overline{\eta}_y)$ un point géométrique dans la strate basique (cf. définition 1.10) ainsi que $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$ le groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O}_E et d'une polarisation p -principale associé.

Nous notons \mathcal{M} le problème de module associé au groupe p -divisible $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$. Par définition, le groupe $J(\mathbb{Q}_p) := J_{b_y}(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur \mathcal{M} .

On pose ϕ la classe d'isogénie du triplet $(A_y, \overline{\lambda}_y, \iota_y)$ et $I^\phi = \text{Aut}(A_y, \lambda_y, \iota_y)$ le groupe réductif sur \mathbb{Q} associé. Le groupe $I^\phi(\mathbb{Q})$ agit par quasi-isogénies sur le groupe p -divisible $(A_y[p^\infty], \lambda, \iota)$, ce qui donne une injection $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p)$, en particulier, $I^\phi(\mathbb{Q})$ agit sur \mathcal{M} . De plus, l'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur le module de Tate $H_1(A_y, \mathbb{A}_f^p)$ donne une injection $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{A}_f^p)$.

A ϕ est associé l'ensemble

$$\tilde{S}(\phi)(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{z \in \overline{S}(b)(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid \text{la classe d'isogénie de } (A_z, \lambda_z, \iota_z) \in \phi\}.$$

On peut munir $\tilde{S}(\phi)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ d'une structure de sous-schéma fermé réduit.

THÉORÈME 1.26 ([35, 6.23]). — *Il y a une uniformisation de schémas formels sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{\mathbb{Q}}_p})$*

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{M} \times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p) \xrightarrow{\sim} (S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} \mathcal{O}_{\check{\mathbb{Q}}_p}) / \tilde{S}(\phi)$$

Lorsque K^p varie les différents isomorphismes d'uniformisation sont compatibles et commutent à l'action de $G(\mathbb{A}_f)$.

En suivant [10], on travaille avec les espaces rigides dès qu'on n'est plus en niveau maximal. Pour chaque $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ on note :

- $S_{K^p}^\wedge$ le complété p -adique du schéma $S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} \mathcal{O}_{\check{\mathbb{Q}}_p}$ ainsi que $(S_{K^p}^\wedge)^{\mathrm{an}}$ l'espace analytique associé.
- $\mathrm{Sh}_{C_0 K^p}^{\mathrm{an}}$ l'espace analytique sur $\check{\mathbb{Q}}_p$ associé à la variété algébrique $\mathrm{Sh}_{C_0 K^p} \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p}$.

DÉFINITION 1.27. — *Nous noterons $\mathrm{Sh}_{C_0 K^p}^{\mathrm{an}}(\phi) = ((S_{K^p}^\wedge) / \tilde{S}(\phi))^{\mathrm{an}}$ la fibre générique du schéma formel complété de S le long de $\tilde{S}(\phi)$.*

Si $K_p \subset C_0$, $K = K_p K^p$ nous noterons $\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi) = \Theta_{C_0 K^p, K}^{-1}(\mathrm{Sh}_{C_0 K^p}^{\mathrm{an}}(\phi))$ (un ouvert analytique de $(\mathrm{Sh}_K)^{\mathrm{an}}$) où $\Theta_{C_0 K^p, K}$ est le morphisme de changement de niveau.

THÉORÈME 1.28. — *Pour $K = K_p K^p$ variable il y a des isomorphismes compatibles d'espaces analytiques sur $\check{\mathbb{Q}}_p$:*

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{M}_{K_p} \times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(\phi).$$

Remarquons que la variété de Shimura n'est pas nécessairement compacte.

Soit comme précédemment b_0 la classe basique dans $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}})$. Pour chaque classe d'isogénie du triplet $\phi = (A_y, \bar{\lambda}_y, \iota_y)$, on note $b(\phi)$ l'unique élément dans $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}})$ correspondant à la classe d'isogénie du groupe p -divisible avec structures additionnelles de $(A_y, \bar{\lambda}_y, \iota_y)$. Rappelons les faits suivants (cf. [35, (6.34)]) :

- l'ensemble $\{\phi \mid b(\phi) = b_0\}$ est fini,
- $\forall \phi$ tel que $b(\phi) = b_0$, I^ϕ est une forme intérieure de G , plus précisément
 - $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$ et $\forall \ell \neq p$ on a $I^\phi(\mathbb{Q}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell)$,

– $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme intérieure compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{A}(I^\phi)$ l'espace des représentations automorphes de I^ϕ (on tient compte des multiplicités) ainsi que \mathcal{A}_ξ^ϕ l'espace des formes automorphes sur I^ϕ de type $\check{\xi}'$ à l'infini au sens où

$$\mathcal{A}_\xi^\phi = \text{Hom}_{I^\phi(\mathbb{R})}(\check{\xi}', \mathcal{A}(I^\phi))$$

où $\xi' : I^\phi(\mathbb{R}) \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C}) \xrightarrow{\xi} \text{GL}(V)$.

Supposons maintenant que ξ est irréductible. Le groupe de Lie $I^\phi(\mathbb{R})$ étant anisotrope modulo son centre, pour un sous-groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$ on a

$$(\mathcal{A}_\xi^\phi)^{K^p} = \bigoplus_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\xi}}} \Pi_p \otimes (\Pi^p)^{K^p}$$

THÉOREME 1.29 ([10]). — *Il y a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariante*

$$E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\xi}}} \left(\lim_{\overrightarrow{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(D)), \Pi_p) \right)_{p\text{-cusp}} \otimes (\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est $(H_c^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}}$ et où D est la dimension de la variété de Shimura.

Démonstration. — Tout d'abord on a un isomorphisme pour tous t et q ([10, p. 75])

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), (\mathcal{A}_\xi^\phi)^{K^p}) \\ \simeq \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\xi}}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \Pi_p) \otimes (\Pi^p)^{K^p}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 4.3.15 de [10], on a la suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$ -équivariante

$$E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\xi}}} \left(\lim_{\overrightarrow{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(D)), \Pi_p) \right) \otimes (\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est $\lim_{\overrightarrow{K}} H^{t+q}(\text{Sh}_K^{\text{an}}(b_0), \mathcal{L}_\xi^{\text{an}})$.

D'autre part la strate basique est propre, en utilisant la proposition 6.9.4 de [10] on a une égalité de groupes de cohomologie

$$\varinjlim_{\overline{K}} H^{t+q}(\mathrm{Sh}_K^{\mathrm{an}}(b_0), \mathcal{L}_\xi^{\mathrm{an}}) = \varinjlim_{\overline{K}} H_c^{t+q}(\overline{S}_K(b_0), R\Psi(\mathcal{L}_\xi)) = H_c^{t+q}(\mathrm{Sh}(b_0), \mathcal{L}_\xi).$$

Or le corollaire 1.25 donne une égalité

$$H_c^{t+q}(\mathrm{Sh}(b_0), \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}} = H_c^{t+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}}.$$

On en déduit alors la suite spectrale voulue. □

2. Classification des représentations automorphes pour les groupes unitaires

Le but de cette section est de rappeler, dans le cas des groupes unitaires, les formules de multiplicité locales et globales dans [17] et [32], cf. les théorèmes 2.18 et 2.23. Nous nous intéresserons aux paquets cuspidaux lesquels sont classifiés dans [31]. Notons que pour passer des groupes unitaires aux groupes de similitudes unitaires, on devra supposer que n est impair. Le résultat nouveau de cette section est la proposition 2.30 qui sera utilisée dans la preuve du théorème principal dans la section 3.

2.1. Groupes unitaires et leurs formes intérieures

Soit F un corps local ou global de caractéristique 0 et \overline{F} une clôture algébrique. On note Γ le groupe de Galois de \overline{F}/F . On se donne un groupe réductif G défini sur F .

Une forme intérieure de G est un groupe réductif G_1 défini sur F et muni d'un isomorphisme $\varrho : G \times \overline{F} \rightarrow G_1 \times \overline{F}$ tel que pour tout $\sigma \in \Gamma$, l'automorphisme $\varrho^{-1}\sigma(\varrho) = \varrho^{-1} \circ \sigma \circ \varrho \circ \sigma^{-1}$ est intérieur. L'application $\varrho \mapsto \varrho^{-1}\sigma(\varrho)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des formes intérieures de G avec $H^1(\Gamma, G_{\mathrm{ad}})$ où $G_{\mathrm{ad}} = G/Z$ et Z est le centre de G .

Soit E/F une extension quadratique de corps, notons $U_{E/F}(n)$ le groupe unitaire quasi-déployé en n variables associé. On a :

- Lorsque F est un corps p -adique alors $H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)_{\mathrm{ad}}) = \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ où $\delta = 1$ si n est impair et $\delta = 2$ si n est pair.
- Lorsque $F = \mathbb{R}$ alors

$$H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)_{\mathrm{ad}}) = \{ \{p, q\} \mid 0 \leq p, q \leq n, p + q = n \}.$$

Une forme intérieure pure est un couple $(\varrho, z) : G \rightarrow G_1$ où $\varrho : G \rightarrow G_1$ est une forme intérieure et z est un cocycle dans $Z^1(\Gamma, G)$ tels que $\varrho^{-1}\sigma(\varrho) = \text{Ad}(z_\sigma)$. L'application $(\varrho, z) \mapsto z$ établit alors une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de formes intérieures pures et $H^1(\Gamma, G)$.

On aura besoin de la notion de *forme intérieure étendue*. La définition étant technique, on donne seulement une description explicite dans le cas qui nous intéresse. En fait, dans [21], Kottwitz a construit un ensemble $B(F, G)$ pour F un corps local ou global ainsi qu'un sous-ensemble $B(F, G)_{\text{bs}}$ contenant les éléments basiques. Les classes d'isomorphisme des *formes intérieures étendues* de G sont en bijection avec $B(F, G)_{\text{bs}}$ ([17, p. 16, ligne 23]). Par la suite, on essaie de caractériser $B(F, G)_{\text{bs}}$.

Pour F un corps local il y a une application canonique :

$$(2.1) \quad \kappa_G : B(F, G)_{\text{bs}} \rightarrow X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$$

qui est une bijection si F est un corps p -adique.

Lorsque F est un corps global, pour chaque place v de \overline{F} , il y a un morphisme de localisation $B(F, G) \rightarrow B(F_v, G)$ qui préserve le caractère d'être basique.

Si l'on choisit une place de \overline{F} sur chaque place de F , les morphismes de localisation donnent un morphisme :

$$(2.2) \quad B(F, G)_{\text{bs}} \rightarrow \prod_v B(F_v, G)_{\text{bs}}$$

où \prod désigne l'ensemble des éléments dans le produit direct dont les composantes à presque toutes les places v sont égales à l'élément neutre de $B(F_v, G)_{\text{bs}}$. On peut montrer que le noyau de (2.2) est en bijection avec $\ker^1(F, G)$. De plus, l'image de (2.2) est égale au noyau de la composition suivante :

$$(2.3) \quad \prod_v B(F_v, G)_{\text{bs}} \xrightarrow{(2.1)} \bigoplus_v X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v}) \xrightarrow{\sum} X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma).$$

Exemple 2.1 ([17, section 0.3.3] *Formes intérieures étendues de groupes unitaires*). — Pour $U_{E/F}(n)$ un groupe unitaire en n variables on a :

$$X^*(Z(\widehat{U_{E/F}(n)})^\Gamma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On suppose tout d'abord que F est un corps local et dans ce cas-là on a une bijection

$$H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)) \rightarrow B(F, U_{E/F}(n))_{\text{bs}}.$$

- Lorsque F est p -adique on a :

$$H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)) \simeq B(F, U_{E/F}(n))_{\text{bs}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- Lorsque $F = \mathbb{R}$, on a $H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)) = \{(p, q) \mid 0 \leq p, q \leq n, p + q = n\}$ et $H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)_{\text{ad}})$ est le quotient de cet ensemble par la relation $(p, q) \sim (q, p)$. Le morphisme (2.1) est donné par

$$H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (p, q) \longmapsto \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + q \right) \bmod 2.$$

De plus pour le groupe linéaire général, l'application (2.1) devient un isomorphisme

$$B(F, \text{GL}_n)_{\text{bs}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Pour E un corps de nombres CM dont F est le sous-corps totalement réel, on peut donc montrer que (2.2) est injectif ([17, p. 18, ligne 2]). L'ensemble $B(F, U_{E/F}(n))_{\text{bs}}$ s'identifie avec le noyau de (2.3). D'après la discussion pour les groupes linéaires et unitaires locaux, on a la description suivante.

Pour chaque place v de F , on note Ξ_v la classe d'isomorphisme des formes intérieures étendues de $U_{E/F}(n)$ dont a_v est l'invariant. On a alors $a_v \in \mathbb{Z}$ si v est finie et décomposée; $a_v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si v est finie et inerte; $a_v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si v est réelle.

PROPOSITION 2.2 ([17, section 0.3.3]). — *La collection $(\Xi_v)_v$ est dans l'image de (2.2), i.e. la localisation d'une forme intérieure étendue globale si et seulement si $a_v = 0$ pour presque tout v et la somme des images de $a_v \bmod 2$ est égale à $0 \bmod 2$.*

2.2. Formalisme des paramètres

On commence par considérer le cas d'un corps local F . Considérons le groupe de Langlands local $L_F := W_F$ si F est archimédien et $W_F \times \text{SU}(2)$ dans le cas non archimédien. On pose également ${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_F$ comme un groupe topologique où \widehat{G} est le groupe dual de Langlands de G .

DÉFINITION 2.3. — *Un L -paramètre local pour un groupe réductif connexe G défini sur F , est un morphisme continu $\phi : L_F \longrightarrow {}^L G$ qui commute avec les projections canoniques de L_F et ${}^L G$ sur W_F et tel que ϕ envoie les éléments semisimples sur des éléments semisimples.*

Deux L -paramètres sont équivalents s'ils sont conjugués par un élément de \widehat{G} . On note $\Phi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de L -paramètres.

Notation 2.4. — Soit $\phi \in \Phi(G)$ un L -paramètre.

- ϕ est borné si son image dans ${}^L G$ se projette dans un sous-ensemble relativement compact de \widehat{G} .
- ϕ est discret (ou de carré intégrable) si son image n'est contenue dans aucun sous-groupe parabolique propre de ${}^L G$.

On note $\Phi_{\text{bdd}}(G)$ (resp. $\Phi_2(G)$) le sous-ensemble des L -paramètres bornés (resp. discrets). On considérera aussi l'ensemble $\Phi_{2,\text{bdd}} := \Phi_{\text{bdd}}(G) \cap \Phi_2(G)$. On note $\Pi_{\text{temp}}(G)$ (resp. $\Pi_2(G)$) l'ensemble des représentations tempérées (resp. essentiellement de carré intégrable) de $G(F)$. De manière similaire on pose $\Pi_{2,\text{temp}} := \Pi_2(G) \cap \Pi_{\text{temp}}(G)$ l'ensemble des représentations de carré intégrable.

On aura besoin de la notion de A -paramètres qui joueront le rôle des composantes locales dans la classification globale.

DÉFINITION 2.5. — *Un A -paramètre local pour un groupe réductif connexe G défini sur F est un morphisme continu $\psi : L_F \times \text{SU}(2) \rightarrow {}^L G$ tel que $\psi|_{L_F}$ est un L -paramètre borné.*

Comme pour les L -paramètres, la condition d'équivalence entre les A -paramètres est définie par \widehat{G} -conjugaison. On note $\Psi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de A -paramètres. On note également $\Psi^+(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de morphismes continus ψ comme ci-dessus mais où $\psi|_{L_F}$ n'est pas nécessairement borné. Un A -paramètre ψ (ou $\psi \in \Psi^+(G)$) est générique si $\psi|_{\text{SU}(2)}$ est trivial.

Donnons une description plus en détails de ces notions pour $G = \text{GL}(n)$. Afin d'alléger les notations, on notera $\Phi(n) := \Phi(\text{GL}(n))$, $\Pi(n) := \Pi(\text{GL}(n))$ et de même pour les autres ensembles de représentations. On posera $\Phi_{\text{sim}}(n) := \Phi_2(n)$. La correspondance de Langlands locale peut s'écrire de manière informelle comme suit.

THÉORÈME 2.6 ([14, 15, 25]). — *Il y a une unique bijection « arithmétique » $\phi \mapsto \pi$ de $\Phi(n)$ dans $\Pi(n)$ dite de Langlands locale qui respecte en particulier les sous-ensembles suivants*

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{sim,bdd}}(n) &\subset \Phi_{\text{bdd}}(n) \subset \Phi(n) \\ \Pi_{2,\text{temp}}(n) &\subset \Pi_{\text{temp}}(n) \subset \Pi(n) \end{aligned}$$

Remarque 2.7. — « Arithmétique » signifie respecter facteurs L et ϵ de paires.

Pour les groupes unitaires, les L -paramètres et A -paramètres dans le cas quasi-déployé $U_{E/F}(n)$ sont reliés à ceux du groupe $\text{GL}(n)$ via un morphisme de changement de base.

Pour chaque $\kappa \in \{\pm 1\}$, on peut définir un ensemble \mathcal{Z}_E^κ (cf. [32, p. 8, (2.1.5), (2.1.6)]). Choisissons $\chi_\kappa \in \mathcal{Z}_E^\kappa$, on a un morphisme de changement de base (cf. [32, p. 9]) :

$$(2.4) \quad \eta_{\chi_\kappa} : {}^L U_{E/F}(n) \longrightarrow {}^L G_{E/F}(n)$$

où $G_{E/F}(n) = \text{Res}_{E/F}(\text{GL}_E(n))$.

On obtient donc une application :

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa,*} : \Phi(U_{E/F}(n)) &\longrightarrow \Phi(G_{E/F}(n)) = \Phi_E(n) \\ \phi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \phi \end{aligned}$$

et de même pour les A -paramètres

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa,*} : \Psi(U_{E/F}(n)) &\longrightarrow \Psi(G_{E/F}(n)) = \Psi_E(n) \\ \psi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \psi. \end{aligned}$$

Pour $\phi \in \Phi(U_{E/F}(n))$, le L -paramètre dans $\Phi_E(n)$ qui correspond à $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$, est $\phi|_{L_E} \otimes \chi_\kappa$. En particulier, si $\kappa = 1$ et $\chi_\kappa = 1$ alors $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$ est juste la restriction de ϕ sur L_E .

Les applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ ci-dessus sont injectives et on cherche à décrire leurs images. Soit c un morphisme dans W_F relevant le morphisme non trivial de $\text{Gal}(E/F)$. Il y a une inclusion $W_F \hookrightarrow L_F$ et on peut faire agir c sur L_E par conjugaison. On définit $\rho^c(g) := \rho(cgc^{-1})$ et de plus on pose $\rho^* := (\rho^c)^\vee$ pour toute représentation $\rho : L_E \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

DÉFINITION 2.8. — *Un paramètre $\psi \in \Psi_E(n)$ est appelé conjugué auto-dual si $\psi = \psi^*$. Les ensembles des paramètres conjugués auto-duaux dans $\Phi_E(n)$ et $\Psi_E(n)$ sont notés $\tilde{\Phi}_E(n)$ et $\tilde{\Psi}_E(n)$ respectivement.*

Désormais nous notons simplement $\Phi(n)$ au lieu de $\Phi_E(n)$ (et similairement pour les autres ensembles de paramètres) lorsque le contexte est clair.

DÉFINITION 2.9. — *Un paramètre auto-dual ρ est de parité η où $\eta = \pm 1$ s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $B\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur V de sorte que $B\langle \rho^c(g)x, \rho(g)y \rangle = B\langle x, y \rangle$ et que $B\langle x, y \rangle = \eta B\langle y, \rho(c^2)x \rangle$.*

Il est clair que les images des applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ consistent en des paramètres conjugués auto-duaux.

PROPOSITION 2.10 ([17, lemme 1.2.5]). — *Les applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ induisent une bijection entre la pré image de $\Phi_{\text{sim}}(n)$ (resp. de $\Psi_{\text{sim}}(n)$) et l'ensemble des paramètres conjugués auto-duaux avec parité $(-1)^{n-1\kappa}$ dans $\Phi_{\text{sim}}(n)$ (resp. dans $\Psi_{\text{sim}}(n)$).*

Notation 2.11. — On pose

$$\Phi_{\text{sim}}(U_{E/F}(n)) := \eta_{\chi_\kappa}^{-1}(\Phi_{\text{sim}}(n)) \left(\text{resp. } \Psi_{\text{sim}}(U_{E/F}(n)) := \eta_{\chi_\kappa}^{-1}(\Psi_{\text{sim}}(n)) \right),$$

l'ensemble des L -paramètres simples (resp. l'ensemble des A -paramètres simples).

Pour chaque A -paramètre $\psi \in \Psi^+(G)$ on définit des groupes centralisateurs comme ci-dessous, qui jouent un rôle important dans la classification locale et globale :

$$\begin{aligned} S_\psi &:= \text{Cent}(\text{Im } \psi, \widehat{G}), & \bar{S}_\psi &:= S_\psi / Z(\widehat{G})^\Gamma, & \mathcal{S}_\psi &:= \pi_0(S_\psi), \\ \bar{\mathcal{S}}_\psi &:= \pi_0(\bar{S}_\psi), & S_\psi^{\text{rad}} &:= (S_\psi \cap \widehat{G}_{\text{der}})^0, & S_\psi^\natural &:= S_\psi / S_\psi^{\text{rad}}. \end{aligned}$$

On va maintenant donner une description explicite du centralisateur S_ψ pour $\psi \in \Psi^+(U_{E/F}(n))$. Posons $\psi^n := \eta_{\chi_\kappa, *}(\psi)$ qui s'écrit sous la forme

$$\psi^n = \bigoplus_{k \in K} \ell_k \psi_k^{n_k}$$

où les $\psi_k^{n_k}$ sont des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes de L_E . Puisque ψ^n est auto-dual, il y a une involution $*$ de K telle que $\psi_{k^*}^{n_{k^*}} = (\psi_k^{n_k})^*$. Alors ψ^n s'écrit sous la forme :

$$\psi^n = \left(\bigoplus_{i \in I_{\psi^n}} \ell_i \psi_i^{n_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J_{\psi^n}} \ell_j (\psi_j^{n_j} \oplus (\psi_j^{n_j})^*) \right).$$

où I_{ψ^n} est l'ensemble des points fixes dans K de l'involution $*$. On voit alors que :

$$S_\psi = \prod_{i \in I_{\psi^n}^+} O(\ell_i, \mathbb{C}) \times \prod_{i \in I_{\psi^n}^-} \text{Sp}(\ell_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J_{\psi^n}} \text{GL}(\ell_j, \mathbb{C})$$

où $i \in I_{\psi^n}$ appartient à $I_{\psi^n}^+$ si la parité de ψ_i est égale à $\kappa(-1)^{n-1}$ et à $I_{\psi^n}^-$ sinon.

D'autre part le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans le membre de droite ci-dessus de sorte que :

$$\mathcal{S}_\psi \simeq S_\psi^\natural \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_{\psi^n}^+|} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{S}}_\psi \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_{\psi^n}^+|} & \text{si } \forall i \in I_{\psi^n}^+ \ 2 \mid \ell_i, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_{\psi^n}^+|-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{C}$, $L_{\mathbb{C}} = W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$, rappelons la description des paramètres discrets. Comme précédemment on a un morphisme de changement de base

$$(2.5) \quad \eta_{\chi_\kappa} : {}^L U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n) \longrightarrow {}^L G_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)$$

via lequel on associe à $\phi \in \Phi(U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n))$ un paramètre $\phi^n = \eta_{\chi_\kappa} * \phi : L_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $\phi \in \Phi_2(U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n))$ alors ϕ^n s'écrit sous la forme $\phi^n = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$ où les η_i sont des caractères auto-duaux deux à deux disjoints de \mathbb{C}^\times . En général, un tel caractère est de la forme $\eta : z \mapsto (z/\bar{z})^a$ avec $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Si $\eta_i(z) = (z/\bar{z})^{a_i}$ alors on introduit le n -tuple $\mu_{\phi^n} := (a_1, \dots, a_n)$ appelé le caractère infinitésimal de ϕ^n . Si $\chi_\kappa(z) = (z/\bar{z})^c$ alors le caractère infinitésimal de ϕ est donné par la formule $\mu_\phi := (b_1, \dots, b_n)$ où $b_i = a_i - c$.

DÉFINITION 2.12. — Notons $d(\mu_\phi) = \min \{ \min_i(b_i), \min_{i \neq j} (|b_i - b_j|) \}$ et de même pour μ_{ϕ^n} . Le caractère infinitésimal de ϕ est suffisamment régulier si $d(\mu_\phi) > 0$.

Supposons désormais que F est un corps de nombres et E une extension quadratique de F . On va définir de manière formelle les notions de L -paramètre pour le groupe unitaire quasi déployé $U_{E/F}(n)$ en partant des représentations cuspidales des groupes linéaires généraux.

On commence par définir $\Psi_{\text{glb,sim}}(n)$ comme l'ensemble des produits tensoriels formels $\pi \boxtimes \nu$ où π est une représentation automorphe cuspidale de $\text{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ et ν une représentation algébrique de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension d et on demande de plus que $n = m \cdot d$. Plus généralement on définit $\Psi_{\text{glb}}(n)$ comme l'ensemble des objets sous forme d'une somme directe formelle non ordonnée

$$\pi = \ell_1(\pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \dots \boxplus \ell_r(\pi_r \boxtimes \nu_r)$$

où $\ell_i \geq 1$ est un entier, les $\pi_i \boxtimes \nu_i \in \Psi_{\text{glb,sim}}(n_i)$ sont deux à deux distincts et $n = \ell_1 \cdot n_1 + \dots + \ell_r \cdot n_r$.

Un paramètre global sera dit *générique* si pour chaque facteur simple $\pi_i \boxtimes \nu_i$, le facteur ν_i est la représentation triviale de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. On note $\Phi_{\text{glb}}(n)$ l'ensemble des paramètres globaux génériques.

Soit π une représentation automorphe cuspidale de $\text{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, on pose $\pi^* := (\pi^c)^\vee$ où $\pi^c := \pi \circ c$ avec c le morphisme de conjugaison de Galois de E sur F et $(\pi^c)^\vee$ est la contragrédiente de π^c . Plus généralement, si $\pi = \pi_1 \boxtimes \nu_1 \in \Psi_{\text{glb,sim}}(n)$ alors on pose $(\pi)^* := \pi_1^* \boxtimes \nu_1$ et un $\pi \in \Psi_{\text{glb,sim}}(n)$ est dit autodual si $\pi = (\pi)^*$.

Maintenant si $\pi = (\ell_1 \pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \dots \boxplus (\ell_r \pi_r \boxtimes \nu_r) \in \Psi_{\text{glb}}(n)$, on dit que π est autodual s'il existe une involution $i \mapsto i^*$ de $\{1, \dots, r\}$ telle que $(\pi_i \boxtimes \nu_i)^* = \pi_{i^*} \boxtimes \nu_{i^*}$ et $\ell_i = \ell_{i^*}$.

L'ensemble des paramètres autoduaux (resp. autoduaux simples) de $\Psi_{\text{glb}}(n)$ (resp $\Psi_{\text{glb,sim}}(n)$) sera noté $\tilde{\Psi}_{\text{glb}}(n)$ (resp $\tilde{\Psi}_{\text{glb,sim}}(n)$).

On a besoin de la construction suivante qui nous servira de substitution au groupe de Langlands global : pour la construction détaillée, voir [32, p. 22–23] et [17, p. 68].

CONSTRUCTION 2.13 ([17, 32]). — Soit $\psi \in \tilde{\Psi}_{\text{glob}}(n)$ comme ci-dessus, il existe un groupe \mathcal{L}_ψ et un morphisme⁽³⁾ :

$$\tilde{\psi} : \mathcal{L}_\psi \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G_{E/F}(n).$$

DÉFINITION 2.14. — On définit l'ensemble des paramètres $\Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ comme l'ensemble des couples $(\psi^n, \tilde{\psi})$ où $\psi^n \in \tilde{\Psi}_{\text{glob}}(n)$ et $\tilde{\psi} : \mathcal{L}_{\psi^n} \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L(U_{E/F}(n))$ est un morphisme tel que $\tilde{\psi}^n = \eta_{\chi_\kappa} \circ \tilde{\psi}$. Un paramètre $\psi = (\psi^n, \tilde{\psi})$ est générique si ψ^n l'est.

Notons que $\tilde{\psi}$ est entièrement déterminé par η_{χ_κ} et $\tilde{\psi}^n$.

Comme auparavant on peut définir le centralisateur et ses variantes pour un paramètre $\psi = (\psi^n, \tilde{\psi})$. On note ϵ_ψ le caractère d'Arthur de $\bar{\mathcal{S}}_\psi$, cf. [2, p. 15].

Afin de décrire ces groupes en détails, on considère la décomposition de ψ^n sous la forme

$$(2.6) \quad \psi^n = \left(\bigoplus_{i \in I_{\psi^n}^+} \ell_i \psi_i^{n_i} \right) \boxplus \left(\bigoplus_{i \in I_{\psi^n}^-} \ell_i \psi_i^{n_i} \right) \boxplus \left(\bigoplus_{j \in J_{\psi^n}} \ell_j (\psi_j^{n_j} \boxplus \psi_{j^*}^{n_{j^*}}) \right)$$

où $i \in I_{\psi^n}$ appartient à $I_{\psi^n}^+$ ou à $I_{\psi^n}^-$ selon la parité de $\psi_i^{n_i}$ (ce qui est lié à sa fonction L d'Asai). ([17, p. 69]).

On a alors :

$$S_\psi = \prod_{i \in I_{\psi^n}^+} O(\ell_i, \mathbb{C}) \times \prod_{i \in I_{\psi^n}^-} \text{Sp}(\ell_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J_{\psi^n}} \text{GL}(\ell_j, \mathbb{C}).$$

D'autre part le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans le membre de droite ci-dessus. Alors on voit que ([17, p. 69])

$$(2.7) \quad \mathcal{S}_\psi \simeq S_\psi^\natural \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_\psi^+|} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{S}}_\psi \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_{\psi^n}^+|} & \text{si } \forall i \in I_{\psi^n}^+ \quad 2 \mid \ell_i, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_{\psi^n}^+| - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notation 2.15. — On pose $\Psi_2(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ le sous-ensemble des paramètres discrets, i.e. de la forme $\psi = (\psi^n, \tilde{\psi})$ où $\forall i \in I_{\psi^n}^+, \ell_i = 1$ et $\forall j \in I_{\psi^n}^- \cup J_{\psi^n}, \ell_j = 0$ (cf. (2.6)).

⁽³⁾ On rappelle que $G_{E/F}(n) = \text{Res}_{E/F}(\text{GL}_E(n))$.

Localisation d'un paramètre global

• On commence avec les groupes $GL(n)$. Considérons une représentation automorphe cuspidale π de $GL(n)$ et v une place de F . La correspondance de Langlands local associée à π_v un A -paramètre générique $\psi_{\pi_v} \in \Psi^+(GL(n, F_v))$. Ce processus nous permet de définir une application de localisation

$$\Psi_{\text{glob}}(n) \longrightarrow \Psi_v^+(n)$$

$$\ell_1(\pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus \ell_r(\pi_r \boxtimes \nu_r) \longmapsto \ell_1(\psi_{(\pi_1)_v} \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus \ell_r(\psi_{(\pi_r)_v} \boxtimes \nu_r).$$

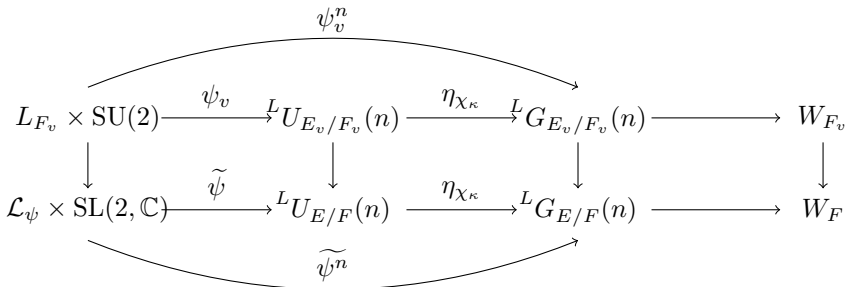
• Considérons maintenant les groupes $U_{E/F}(n)$. Fixons $\kappa \in \{\pm 1\}$ avec un caractère $\chi_+ \in \mathcal{Z}_E^+$ et $\chi_- \in \mathcal{Z}_E^-$. Soit $\psi = (\psi^n, \tilde{\psi}) \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ un paramètre global.

PROPOSITION 2.16 ([17, proposition 1.3.3]). — Pour chaque $\psi \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$, il existe un paramètre local $\psi_v \in \Psi^+(U_{E_v/F_v}(n))$ tel que $\psi_v^n = \eta_{\chi_\kappa} \circ \psi_v$

$$\psi_v^n = L_{F_v} \times SU(2) \xrightarrow{\psi_v} {}^L U_{E_v/F_v}(n) \xrightarrow{\eta_{\chi_\kappa}} {}^L G_{E_v/F_v}(n).$$

Le paramètre local ψ_v est unique à isomorphisme près.

On peut utiliser cette proposition pour définir le diagramme commutatif suivant



Le diagramme commutatif ci-dessus nous permet de définir les morphismes de localisation pour les centralisateurs. Le second morphisme vertical envoie $\text{Im}(\psi_v)$ dans $\text{Im}(\tilde{\psi})$ induisant alors

$$S_\psi \longrightarrow S_{\psi_v}, \quad \mathcal{S}_\psi \longrightarrow \mathcal{S}_{\psi_v}, \quad S_\psi^\natural \longrightarrow S_{\psi_v}^\natural.$$

Remarques 2.17.

- Si $\psi \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ est un paramètre global générique alors les paramètres locaux ψ_v le sont pour toute place v .
- Les deux premiers morphismes de localisation sont injectifs.

2.3. Formules de multiplicité pour les groupes unitaires

Soient F un corps local et E/F une extension quadratique. On a un unique groupe unitaire quasi-déployé $U^* := U_{E/F}(n)$. Considérons une forme intérieure étendue $(\varrho, z) : U^* \rightarrow U$. La donnée (ϱ, z) définit un caractère $\chi_z \in X^*(Z(\widehat{U})^\Gamma)$ via (2.1). Considérons un paramètre $\psi \in \Psi(U^*)$ et les centralisateurs associés

$$(2.8) \quad Z(\widehat{U})^\Gamma \hookrightarrow S_\psi \twoheadrightarrow S_\psi^\natural$$

On note $\text{Irr}(S_\psi^\natural, \chi_z)$ l'ensemble des caractères de S_ψ^\natural dont le tiré en arrière via (2.8) induit le caractère χ_z . Rappelons également que $\Pi_{\text{unit}}(U)$ (resp. $\Pi_{\text{temp}}(U)$, resp. $\Pi_{2,\text{temp}}(U)$) est l'ensemble des représentations unitaires (resp. tempérées, resp. de carré intégrable).

THÉORÈME 2.18 ([17, théorème 1.6.1]).

- (i) Soit $\psi \in \Psi(U^*)$. Il existe un ensemble fini $\Pi_\psi(U, \varrho)$ muni d'un morphisme vers $\Pi_{\text{unit}}(U)$. L'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ ne dépend pas de z et est muni d'une application

$$\Pi_\psi(U, \varrho) \longrightarrow \text{Irr}(S_\psi^\natural, \chi_z), \quad \pi \mapsto \langle \pi, \cdot \rangle_{\varrho, z}$$

L'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ ainsi que $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\varrho, z}$ dépendent seulement de la classe d'équivalence Ξ de (ϱ, z) . Pour ψ un paramètre générique (i.e. $\psi \in \Phi_{\text{bdd}}(U^*)$), l'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ est non vide si et seulement si ψ est (U, ϱ) -relevant.

- (ii) Supposons que $\psi \in \Phi_{\text{bdd}}(U^*)$, i.e. ψ est générique, alors le morphisme $\Pi_\psi(U, \Xi) \rightarrow \Pi_{\text{unit}}(U)$ est injectif et d'image contenue dans $\Pi_{\text{temp}}(U)$. Si F est non archimédien alors l'application $\Pi_\psi(U, \Xi) \rightarrow \text{Irr}(S_\psi^\natural, \chi_z)$ est une bijection.
- (iii) On a

$$\Pi_{\text{temp}}(U) = \coprod_{\psi \in \Phi_{\text{bdd}}(U^*)} \Pi_\psi(U, \Xi) \quad \text{et} \quad \Pi_{2,\text{temp}}(U) = \coprod_{\psi \in \Phi_{2,\text{bdd}}(U^*)} \Pi_\psi(U, \Xi).$$

Intéressons nous à présent à classification globale. Soient E/F une extension quadratique d'un corps global F et (U, ϱ) une forme intérieure du groupe unitaire quasi-déployé $U^* := U_{E/F}(n)$. On peut choisir z tel que (U, ϱ, z) est une forme intérieure étendue. On aimerait associer des paquets globaux $\Pi_\psi(U, \varrho)$ à chaque paramètre $\psi \in \Psi(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$. Il existe un morphisme de localisation $\psi \mapsto \psi_v$ de $\Psi(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$ à $\Psi_{\text{unit}}^+(U_v^*)$. D'après le théorème 2.18, pour chaque $\psi_v \in \Psi(U_v^*)$, on a un paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ muni d'une application

$$\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v) \longrightarrow \text{Irr}(S_{\psi_v}^\natural, \chi_z), \quad \pi_v \mapsto \langle \pi_v, - \rangle_{\varrho_v, z_v}.$$

Pour un A -paramètre $\psi_v \in \Psi_{\text{unit}}^+(U_v^*) \setminus \Psi(U_v^*)$, on peut définir un paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$. L'idée de la construction consiste à descendre à un sous-groupe de Levi M_v de U_v de sorte que $(\psi_v)_{M_v}$ appartienne à $\Psi(M_v^*)$ (pas seulement à $\Psi^+(M_v^*)$) et on applique le théorème 2.18 pour M_v et $(\psi_v)_{M_v} \in \Psi(M_v^*)$. Pour plus de détails, voir [32, p. 32–33] ou [17, section 1.6.4].

Remarques 2.19.

- Lorsque ψ_v n'est pas (U_v, ϱ_v) -relevant alors le paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ est vide.
- Lorsque $(U_v, \varrho_v) = (U_v^*, 1)$ est quasi-déployé alors ψ_v est toujours (U_v, ϱ_v) -relevant. Si de plus ψ_v est générique alors le paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ est non vide.

On pose

$$\Pi_{\psi}(U, \varrho) := \left\{ \bigotimes_v \pi_v : \pi_v \in \Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v), \langle \pi_v, \cdot \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1 \text{ pour presque tout } v \right\}.$$

Remarque 2.20. — L'ensemble $\Pi_{\psi}(U, \varrho)$ peut être vide, notamment lorsque U n'est pas quasi-déployé et ψ n'est pas générique.

Pour chaque $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_{\psi}(U, \varrho)$, on lui associe un caractère de S_{ψ}^{\natural} par la formule

$$\langle \pi, s \rangle_{\varrho} := \prod_v \langle \pi_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v}, \quad s \in S_{\psi}^{\natural}$$

où s_v désigne l'image de s par le morphisme naturel $S_{\psi}^{\natural} \rightarrow S_{\psi_v}^{\natural}$.

Remarque 2.21. — Pour $s \in Z(\widehat{U}^*)^{\Gamma}$, on a $\langle \pi, s \rangle_{\varrho} = 1$ ([17, p. 89, premier paragraphe]).

DÉFINITION 2.22. — Soit $\Pi_{\psi}(U, \varrho, \epsilon_{\psi}) := \{\pi \in \Pi_{\psi}(U, \varrho) : \langle \pi, - \rangle_{\varrho} = \epsilon_{\psi}\}$ où ϵ_{ψ} est le caractère d'Arthur. Pour ψ un paramètre générique, $\epsilon_{\psi} \equiv 1$.

THÉORÈME 2.23 ([17, théorème 1.7.1]). — Soient E/F une extension quadratique d'un corps global F et $\kappa \in \{\pm 1\}$ ainsi que $\chi_{\kappa} \in \mathcal{Z}_E^{\kappa}$. Soit (U, ϱ) une forme intérieure pure de U^* . Il existe un isomorphisme de $U(\mathbb{A}_F)$ -modules

$$L_{\text{disc}}^2(U(F) \backslash U(\mathbb{A}_F)) \simeq \bigoplus_{\psi \in \Psi(U^*, \eta_{\chi_{\kappa}})} L_{\text{disc}, \psi}^2(U(F) \backslash U(\mathbb{A}_F)).$$

Si $\psi = \phi$ est générique alors

- $L_{\text{disc}, \phi}^2(U(F) \backslash U(\mathbb{A}_F)) = 0$ si $\psi \notin \Psi_2(U^*, \eta_{\chi_{\kappa}})$.

- $L^2_{\text{disc},\phi}(U(F) \backslash U(\mathbb{A}_F)) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_\phi(U,\varrho,\epsilon_\psi)} \pi$ si $\psi \in \Psi_2(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$.

En particulier si π est une représentation automorphe du groupe unitaire (U, ϱ) appartenant à un paquet global générique alors $m_\pi = 1$.

Démonstration. — Ce théorème est le résultat global principal de [17]. Pour la première décomposition consulter p. 151 et pour la deuxième décomposition, consulter p.205–206 de *loc. cit.* □

Résumons à présent les résultats principaux de Mœglin dans [31], en particulier la classification des représentations supercuspidales des groupes unitaires p -adiques.

Soit ψ un homomorphisme de $W_E \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que ψ est semi-simple borné sur W_E et continu. On suppose qu’il se décompose en une somme de représentations irréductibles $\psi = \bigoplus_{\rho,a} \rho \otimes \sigma_a$ où ρ est une représentation irréductible de W_E et σ_a est l’unique représentation irréductible de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension a .

On dit que ψ est θ -discret s’il est sans multiplicité et pour toute ρ , la classe de conjugaison de ρ est invariante sous l’action de $g \mapsto J_\rho {}^t \bar{g}^{-1} J_\rho^{-1}$ où J_ρ est la matrice antidiagonale de taille $d_\rho = \dim \rho$ avec à la place i l’élément $(-1)^{(i+1)}$. On dit que ψ est stable si elle se prolonge en un homomorphisme de $W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ dans le groupe dual de $U_{E/F}(n)$.

En fait, le morphisme $\eta_{\chi_\kappa,*}$ (voir 2.4) réalise une bijection entre $\Phi_{2,\text{bdd}}(U_{E/F}(n))$ et l’ensemble des morphismes θ -discrètes stables. De plus, si on note $\bar{\psi} = \eta_{\chi_\kappa,*}^{-1}(\psi)$ alors on a $S_{\bar{\psi}}^h = (\text{Cent}_{\text{GL}_n(\mathbb{C})} \psi)^\theta$. On a la classification suivante des séries discrètes des groupes unitaires p -adiques.

THÉORÈME 2.24 ([31, 5.7]). — *Il y a une bijection entre l’ensemble des paquets stables de séries discrètes de $U_{E/F}(n)$ et l’ensemble des classes de conjugaison des morphismes θ -discrètes et stables de $W_E \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Ensuite on voudrait déterminer quels paquets contiennent des représentations supercuspidales. On aura donc besoin de la notion d’un morphisme sans trou et la construction d’un sous-groupe $A(\psi)$ de $(\text{Cent}_{\text{GL}_n(\mathbb{C})} \psi)^\theta$.

Soit ψ un morphisme θ -discret et stable. On note $\psi[a]$ la composante isotypique de la représentation ψ , vue comme une représentation de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, pour la représentation irréductible de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension a . Pour tout a , $\psi[a]$ est une représentation de W_E . On dit que ψ est sans trou si pour tout $a > 2$, $\psi[a]$ est une sous-représentation de $\psi[a-2]$ en tant que représentation de W_E .

On décompose ψ en représentations irréductibles et on considère un couple (ρ, a) de sorte que $\rho \otimes \sigma_a$ soit une sous-représentation de ψ . On

suppose qu'il existe $0 \leq b < a$ tel que $b = 0$ si a est pair et si $b \neq 0$, $\rho \otimes \sigma_b$ soit aussi une sous-représentation de ψ . On note alors a_- le plus grand b vérifiant cette propriété. On note $z_{\rho,a}$ l'élément du centralisateur de ψ dans $GL_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres -1 ont exactement pour espace propre la somme $\rho \otimes \sigma_a \oplus \rho \otimes \sigma_{a_-}$. On note $A(\psi)$ le sous-groupe du centralisateur de ψ engendré par ces éléments $z_{\rho,a}$.

THÉORÈME 2.25 ([31, 8.4.4]). — *Le paquet stable correspondant à ψ contient une représentation supercuspidale si et seulement si ψ est sans trou. Lorsque ψ est sans trou alors il existe un unique caractère ϵ_{alt} de $A(\psi)$ tel que le nombre de représentations supercuspidales est le cardinal de l'ensemble des caractères de $(\text{Cent}_{GL_n(\mathbb{C})} \psi)^\theta / \{\text{Id}, -\text{Id}\}$ dont la restriction à $A(\psi)$ vaut ϵ_{alt} .*

Enfin, lorsque $\psi : W_E \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est trivial sur $SL_2(\mathbb{C})$, on voit que ψ est une somme de représentations de la forme $\rho \otimes \sigma_1$, en particulier $A(\psi)$ est trivial. On en déduit le résultat suivant qui nous sera utile pour la suite.

PROPOSITION 2.26 (C. Mœglin). — *Soit*

$$\phi : W_F \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L U_{E/F}(n)$$

un L -paramètre discret trivial sur $SL_2(\mathbb{C})$, alors le L -paquet $\Pi_\phi(U_{E/F})(n)$ ne contient que des représentations supercuspidales.

2.4. Une application à la globalisation des représentations locales

Dans ce paragraphe, tous les groupes et paramètres globaux sont notés par un point \bullet au dessus. On suppose n impair. Le but est de montrer l'existence de représentations automorphes satisfaisant des propriétés particulières.

Décrivons tout d'abord le passage du groupe unitaire au groupe de similitudes unitaires. Soit F un corps totalement réel ainsi que E/F une extension quadratique. Supposons que V est un espace hermitien de dimension n relatif à l'extension E/F . Considérons $\dot{G} = \text{GU}(V)$ le groupe de similitudes unitaires défini sur \mathbb{Q} par

$$\dot{G}(R) = \{g \in GL(V \otimes R) \mid \langle gv, gw \rangle = \nu(g) \langle v, w \rangle, v, w \in V \otimes R\}$$

pour toute \mathbb{Q} -algèbre R et $\nu(g) \in R^\times$. Notons $\dot{U} = U(V)$ le groupe unitaire associé.

PROPOSITION 2.27 ([8, section CHL.IV.C, proposition 1.1.4]). — Supposons que n est impair. Soit π une représentation automorphe irréductible de $\dot{G}(\mathbb{A})$ dont la restriction à $\dot{U}(\mathbb{A})$ contient une représentation automorphe irréductible σ . Si σ apparaît avec multiplicité 1 dans le spectre discret de \dot{U} alors π apparaît avec multiplicité 1 dans le spectre discret de \dot{G} . De plus, si χ est le caractère central de π alors π est la seule représentation automorphe de $\dot{G}(\mathbb{A})$ contenant σ avec le caractère central χ .

Soit G un groupe de similitudes unitaires non ramifié en $n = 2k + 1$ variables défini sur \mathbb{Q}_p et $U \subset G$ le groupe unitaire noyau du facteur de similitudes. Soit K/\mathbb{Q}_p l'extension quadratique non ramifiée. On a une inclusion $K^\times \hookrightarrow Z_G$.

PROPOSITION 2.28. — On a une bijection entre les représentations irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ et les couples (π, χ) où π est une représentation irréductible du groupe unitaire $U(\mathbb{Q}_p)$ et χ un caractère de K^\times tel que $\omega_{\pi|K^\times \cap U(\mathbb{Q}_p)} = \chi|_{K^\times \cap U(\mathbb{Q}_p)}$.

Soit U_p^* le groupe unitaire p -adique quasi-déployé en n variables associé à l'extension quadratique E_p/\mathbb{Q}_p puis $\phi_p \in \Phi_2(U_p^*)$ un L -paramètre discret.

PROPOSITION 2.29 ([17, proposition 4.4.1]). — Supposons qu'il existe un corps CM de la forme $\dot{E} = F^+ \mathcal{K}$ où \mathcal{K} est un corps quadratique imaginaire et tel que $\dot{E}_p = E_p$. Alors il existe une place inerte w et un paramètre global $\dot{\phi} \in \Phi_2(U^*)$ du groupe unitaire quasi-déployé \dot{U}^* en n variables associé à \dot{E}/F^+ tels que :

- (i) $\dot{\phi}_p = \phi_p$ et $\dot{\phi}_w \in \Phi_{\text{bdd}}(U_w^*)$
- (ii) $\dot{\phi}_u$ est un paramètre discret pour toute u infinie.
- (iii) Les morphismes canoniques $S_{\dot{\phi}} \rightarrow S_{\phi_p}$ et $S_{\dot{\phi}} \rightarrow S_{\phi_w}$ sont des isomorphismes.

On utilise la même construction que celle décrite dans la proposition 4.4.1 de [17]. Dans la proposition 4.4.1 et 4.3.1 de *loc. cit.*, les auteurs globalisent également les groupes unitaires réels et ils supposent donc que le corps global possède au moins deux places infinies. Dans notre cas cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Démonstration. — On donne seulement les étapes principales.

Écrivons $\eta_{\chi \kappa^*} \phi_p = \phi_p^n$ sous la forme d'une somme de paramètres simples de groupes linéaires généraux $\phi_p^n = \phi_{1,p}^{n_1} \oplus \dots \oplus \phi_{r,p}^{n_r}$.

À chaque $\phi_{i,p}^{n_i}$ on peut associer un groupe global $\dot{U}(n_i)$ et un morphisme $\dot{\eta}_{\chi_{\kappa_i}}$ avec un unique signe κ_i de sorte que $\phi_{i,p}^{n_i}$ provient d'un L -paramètre $\phi_{i,p}$ dans $\Phi_{2,\text{bdd}}(\dot{U}_p(n_i))$ via le morphisme $(\dot{\eta}_{\chi_{\kappa_i}})_p$.

Fixons une place inerte w et des paramètres simples deux à deux distincts $\phi_{1,w}, \dots, \phi_{r,w}$ de sorte que $\dim \phi_{i,w} = \dim \phi_{i,p}$.

D'après le lemme 4.3.1 de *loc. cit.*, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe un paramètre global simple $\dot{\phi}_i$ de sorte que

- $(\dot{\phi}_i)_p = \phi_{i,p}$ et $(\dot{\phi}_i)_w = \phi_{i,w}$,
- $(\dot{\phi}_i)_u$ est un paramètre discret régulier et suffisamment régulier dans le sens de la définition 2.12 si u est une place infinie.

Construisons ensuite un L -paramètre global de $\text{GL}(n)$ de la manière suivante

$$\dot{\phi}^n = \dot{\phi}_1^{n_1} \boxplus \dots \boxplus \dot{\phi}_r^{n_r}.$$

On montre que $\dot{\phi}^n$ s'étend en un L -paramètre $\dot{\phi}$ dans $\Phi_2(\dot{U}^*)$ en utilisant la compatibilité des signes κ_i avec la parité des $\dot{\phi}_i$. On démontre enfin les propriétés (i), (ii) et (iii) par le même argument que celui de la proposition 4.4.1 de [17]. Remarquons enfin que la condition imposée sur les places infinies assure que le paramètre global est générique. \square

Soit π_p une représentation de carré intégrable d'un groupe unitaire U_p p -adique⁽⁴⁾ et $\tilde{\pi}_p$ une représentation du groupe de similitudes unitaires correspondant telle que $(\tilde{\pi}_p)|_{U_p} \simeq \pi_p$. Supposons que \dot{U} est une forme intérieure de \dot{U}^* tel que $\dot{U}_p = U_p$ et \dot{U} est quasi-déployé en toutes les places finies. Étendons \dot{U} en une forme intérieure pure. D'après la proposition 2.2, il suffit d'étendre les groupes unitaires locaux en formes intérieures pures satisfaisant une certaine condition de parité.

Comme n est impair, d'après l'exemple 2.1, pour chaque place v il y a deux manières d'étendre le groupe unitaire local en une forme intérieure pure. Pour v une place infinie de F^+ , si le groupe \dot{U}_v est de signature $(i, n - i)$ avec $i < n - i$, on choisit $a_v = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n - i)) \bmod 2$. Si v est une place finie différente de p , on choisit $a_v = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et finalement, on choisit a_p l'unique élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de sorte que la somme des a_v s'annule.

PROPOSITION 2.30. — *Il existe alors une représentation automorphe Π de \dot{U} telle que $\Pi_p \simeq \pi_p$. De plus s'il existe une représentation automorphe*

⁽⁴⁾ On rappelle que n étant impair alors U_p est quasi-déployé.

Π' de \dot{U} satisfaisant $(\Pi')^p \simeq (\Pi)^p$ alors $\Pi \simeq \Pi'$. On a le même résultat pour les groupes de similitudes unitaires, à un caractère non ramifié près. Plus précisément, il existe une représentation automorphe $\tilde{\Pi}$ de \dot{G} telle que $\tilde{\Pi}_p \simeq \tilde{\pi}_p \otimes (\omega \circ c)$ où $c : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ est le caractère de similitudes et ω est un caractère non ramifié de \mathbb{Q}_p^\times . De plus s'il existe une représentation automorphe $\tilde{\Pi}'$ de \dot{G} satisfaisant $(\tilde{\Pi}')^p \simeq (\tilde{\Pi})^p$ alors $\tilde{\Pi} \simeq \tilde{\Pi}'$.

Démonstration. — Le cas des groupes de similitudes unitaires se déduit de celui pour les groupes unitaires auquel on se ramène donc. Montrons l'existence de Π .

On suppose que π_p appartient à $\Pi_{\phi_p}(U_p^*, \varrho)$ pour un paramètre discret ϕ_p . On note alors $\dot{\phi} \in \Phi_2(\dot{U}^*)$ le paramètre global qui existe d'après le lemme 2.29. En particulier, il existe une place inerte w telle que $\dot{\phi}_w \in \Phi_{\text{bdd}}(U_w^*)$ et les morphismes canoniques $S_{\dot{\phi}} \rightarrow S_{\dot{\phi}_p}$ et $S_{\dot{\phi}} \rightarrow S_{\dot{\phi}_w}$ sont des isomorphismes.

On montre que les paquets $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ sont non vides. En effet, si $v = p$, $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ contient π_p . D'autre part, comme $\dot{\phi}_u$ est un paramètre discret si u est une place infinie, on en déduit qu'il existe toujours une représentation dans le paquet correspondant.

Considérons une place finie $v \neq p$. Comme $\dot{\phi}$ est générique, le paramètre localisé $\dot{\phi}_v$ l'est également (remarque 2.17). Comme \dot{U} est quasi-déployé en v alors $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ est non vide d'après la remarque 2.19.

Pour chaque $v \notin \{p, w\}$, choisissons une représentation $\pi_v \in \Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$. On va choisir une représentation $\pi_w \in \Pi_{\dot{\phi}_w}(\dot{U}_w^*, \varrho)$ de sorte que la représentation $\bigotimes_v \pi_v$ soit automorphe. D'après le théorème 2.23 il faut donc choisir π_w satisfaisant la relation :

$$(2.9) \quad \langle \pi, s \rangle_{\varrho} := \prod_v \langle \pi_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_{\dot{\phi}}^{\natural}$$

Comme $S_{\dot{\phi}} \simeq S_{\dot{\phi}_w} \simeq S_{\dot{\phi}_w}^{\natural}$ (le dernier isomorphisme résulte du fait que $\dot{\phi}_w$ est un paramètre discret) et d'autre part les caractères $\langle s_v, \pi_v \rangle$ sont fixés (pour $v \neq w$), il existe un unique caractère dans $\text{Irr}(S_{\dot{\phi}_w}^{\natural}, \chi_{z_w})$ satisfaisant l'égalité au-dessus. Le point (ii) du théorème 2.18 affirme l'existence d'une représentation π_w satisfaisant (2.9).

Supposons maintenant qu'on a une représentation Π' telle que $(\Pi')^p \simeq (\Pi)^p$. Montrons que Π et Π' sont dans le même paquet. Supposons que $\Pi' \in \Pi \cdot \dot{S}_{\phi'}(\dot{U}, \varrho, \epsilon_\phi)$ et on veut montrer que $\dot{\phi}' = \dot{\phi}$.

À presque toutes les places finies non ramifiées v où π_v est non ramifiée, les localisations $\dot{\phi}_v$ et $\dot{\phi}'_v$ sont égales. En effet, notre hypothèse suffisamment régulière implique que ces paramètres sont génériques. D'après [32, p. 189], ces paramètres locaux sont factorisés via ${}^L M$ où M est le sous-groupe de Levi minimal de U_v et correspondent au même paramètre sphérique de M . Cela implique que $\dot{\phi}^n$ et $(\dot{\phi}')^n$ ont la même "Hecke string". Alors, par [16], [1, théorème 4.3] on voit que $\dot{\phi}$ et $\dot{\phi}'$ sont égaux.

Comme Π et Π' sont des représentations automorphes, on a les égalités suivantes :

$$\langle \Pi, s \rangle_\varrho = \prod_v \langle \Pi_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = \langle \Pi_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} \prod_{v \neq p} \langle \Pi_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_{\phi}^{\natural},$$

et

$$\langle \Pi', s \rangle_\varrho = \prod_v \langle \Pi'_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = \langle \Pi'_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} \prod_{v \neq p} \langle \Pi_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_{\phi}^{\natural}.$$

On en déduit donc que :

$$\langle \Pi_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} = \langle \Pi'_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} \quad \forall s \in S_{\phi}^{\natural}.$$

D'autre part, le morphisme $S_{\phi} \longrightarrow S_{\phi_p}$ est un isomorphisme et on a

$$\langle \Pi_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} = \langle \Pi'_p, s_p \rangle_{\varrho_p, z_p} \quad \forall s \in S_{\phi_p}^{\natural}.$$

Le point (ii) du théorème 2.18 implique que $\Pi_p \simeq \Pi'_p$, autrement dit on a $\Pi \simeq \Pi'$.

Considérons le cas des groupes de similitudes unitaires. Par le lemme 4.1.2 de [12], nous pouvons étendre Π à une représentation automorphe cuspidale algébrique $\bar{\Pi}$ de $G(\mathbb{A})$. De plus, nous pouvons supposer que $\bar{\Pi}$ est cohomologique puisque Π l'est.

Considérons la suite exacte

$$1 \longrightarrow \dot{U} \longrightarrow \dot{G} \xrightarrow{c} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

Comme $(\bar{\Pi}_p)_{|\dot{U}(\mathbb{Q}_p)} \simeq (\tilde{\pi}_p)_{|\dot{U}(\mathbb{Q}_p)}$, il existe donc un caractère $\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $\bar{\Pi}_p \otimes (\lambda \circ c) \simeq \tilde{\pi}_p$.

Il y a un isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \times \prod \mathbb{Z}_v^\times \longrightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{A})$$

$$(r, t, (u_v)) \longmapsto (rt, ru_2, ru_3, \dots).$$

D'où il y a un caractère $\bar{\Lambda}$ de $\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \times \prod \mathbb{Z}_v^\times$ tel que $\bar{\Lambda}$ est trivial sur $\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$, $\bar{\Lambda}|_{\mathbb{Z}_p^\times} \equiv \lambda|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ et $\bar{\Lambda}(-1, 1, (-1)) = 1$. Ce caractère descend en un caractère de Hecke Λ de $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{G}_m(\mathbb{A})$ tel que $\Lambda_p = \lambda \otimes \omega$ où $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère non ramifié et Λ_∞ est trivial. En particulier si on note $\tilde{\Pi} := \bar{\Pi} \otimes (\Lambda \circ c)$ alors il est également cohomologique (puisque $\bar{\Pi}$ l'est) et $\tilde{\Pi}_p \simeq \tilde{\pi}_p \otimes (\omega \circ c)$.

Grâce à la proposition 2.27, la dernière assertion se déduit de celui pour les groupes unitaires. □

3. Un cas PEL de la conjecture de Kottwitz

3.1. Notations

Dans cette section, nous précisons les notations du Théorème A de l'introduction, concernant r_μ puis les τ_i . En vue du théorème 4.2 de l'appendice, on ne suppose pas pour l'instant que $d = 1$.

Rappelons que $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \mu, b)$ est une donnée de Rapoport–Zink basique de type PEL unitaire non ramifiée simple de signature $(1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$. On note G le groupe de similitudes unitaires p -adique quasi-déployé (en n variables) associé ainsi que $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ la tour d'espaces de Rapoport–Zink. La cohomologie de cet espace est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ ⁽⁵⁾ où on rappelle que F_p est aussi le corps de définition de μ , autrement dit $E_p = F_p$.

La représentation r_μ de ${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_{F_p}$ a une action triviale de W_{F_p} , et $r_\mu|_{\widehat{G}}$ est donnée par la formule

$$r_\mu|_{\widehat{G}} = \bigotimes_{\tau \in \Phi} \left(\bigwedge^{p_\tau} \text{St}_n \right)^* \otimes (\text{St}_1)^{-1} = (\text{St}_n)^* \otimes (\text{St}_1)^{-1}$$

où St_i désigne la représentation standard de dimension i . En particulier, on notera que $\dim r_\mu = n$.

⁽⁵⁾ Puisque b est basique et n est impair, on a $G(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$

Notons U_p le groupe unitaire défini sur \mathbb{Q}_p noyau du facteur de similitude. Le groupe de Langlands dual est ${}^L U_p = \left(\prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$. On a également un morphisme de L -groupes

$${}^L G_p = \left(\prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \left(\prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p} = {}^L U_p$$

Étant donné un L -paramètre discret $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \left(\prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}(V) \times \mathbb{C}^\times\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ où $V \simeq \mathbb{C}^n$, on obtient un L -paramètre discret $\tilde{\varphi} : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \left(\prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}(V)\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ de U_p .

Puisque $U_p = \mathrm{Res}_{F_p^+/\mathbb{Q}_p}(U_{F_p/F_p^+})$ (où F_p^+ est le sous-corps de F_p fixé par l'involution $*$) le lemme de Shapiro

$$H^1\left(W_{\mathbb{Q}_p}, \prod_{\tau \in \Phi} \mathrm{GL}(V)\right) \simeq H^1(W_{F_p^+}, \mathrm{GL}(V))$$

nous donne un L -paramètre de U_{F_p/F_p^+} :

$$\tilde{\varphi}_{F_p^+} : W_{F_p^+} \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \rtimes W_{F_p^+} = {}^L U_{F_p/F_p^+}.$$

D'après la proposition 2.26, le L -paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ est un paquet cuspidal. Comme dans la section précédente, pour chaque $\kappa \in \{\pm 1\}$ et $\chi_\kappa \in \mathcal{Z}_{F_p}^\kappa$, il y a un morphisme de changement de base (cf. [32, p. 9])

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa, *}: \Phi(U_{F_p/F_p^+}) &\longrightarrow \Phi(\mathrm{GL}_{F_p}(n)) \\ \phi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \phi \end{aligned}$$

de plus, si $\kappa = 1$ et $\chi_\kappa = 1$ alors $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$ est juste la restriction de ϕ sur $L_{F_p} = W_{F_p} \times \mathrm{SU}(2)$.

La restriction de $\tilde{\varphi}_{F_p^+}$ sur W_{F_p} se décompose donc en une somme de L -paramètres discrets simples de groupes linéaires généraux $\tilde{\varphi}_{F_p^+|_{F_p}} = \tilde{\varphi}_1^{n_1} \oplus \dots \oplus \tilde{\varphi}_r^{n_r}$. On a alors une décomposition de $W_{F_p^+|_{F_p}}$ -représentations $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ où V_i correspond à $\tilde{\varphi}_i^{n_i}$.

Cela implique une décomposition

$$r_\mu \circ \tilde{\varphi}_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^r r_{\mu_i} \circ \tilde{\varphi}_i^{n_i}$$

où $\mu_i = (1, n_i - 1), (0, n_i), \dots, (0, n_i)$.

D'autre part, on a

$$S_{\tilde{\varphi}} \simeq S_{\tilde{\varphi}_{F_p^+}} \simeq \prod_{i=1}^r O(1, \mathbb{C}) = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_{\tilde{\varphi}_{F_p^+}}^{\natural}.$$

DÉFINITION 3.1. — Pour $1 \leq i \leq r$, on définit un caractère τ_i de $S_{\tilde{\varphi}}$ par la formule

$$\tau_i(\underbrace{1, \dots, 1}_j, -1, 1, \dots, 1) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases}$$

L'action de $S_{\tilde{\varphi}}$ sur V_i se factorise par le caractère τ_i , on en déduit que $r_{\mu_i} \circ \tilde{\varphi}_i^{n_i} = \text{Hom}_{S_{\tilde{\varphi}}}(\tau_i, r_{\mu} \circ \tilde{\varphi}_{F_p})$ et donc

$$r_{\mu} \circ \tilde{\varphi}_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_{S_{\tilde{\varphi}}}(\tau_i, r_{\mu} \circ \tilde{\varphi}_{F_p}).$$

Au niveau du groupe de similitudes unitaires, puisque \mathbb{C}^{\times} est abélien, on a une décomposition de W_{F_p} -module

$$r_{\mu} \circ \varphi_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_{S_{\varphi}}(\tau_i, r_{\mu} \circ \varphi_{F_p}) = \bigoplus_{i=1}^r r_{\mu_i} \circ \varphi_{i, F_p}^{n_i}.$$

3.2. Cohomologie d'intersection des variétés de Shimura d'après [34]

Dans ce paragraphe, on va utiliser des résultats dans [34]. La lettre G désigne un groupe de similitudes unitaires en n variables associé à une forme hermitienne définie sur une extension quadratique imaginaire \dot{F}/\mathbb{Q} .

Pour tout $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit, on a une variété Sh_K . Lorsque G n'est pas anisotrope modulo son centre, Sh_K n'est pas compacte. Dans ce cas, on a la compactification minimale (ou de Satake-Baily-Borel) de Sh_K

$$j : \text{Sh}_K \longrightarrow \text{Sh}_K^*$$

telle que Sh_K^* est une variété projective normale dont Sh_K est un ouvert dense. En général Sh_K^* n'est pas lisse et on utilise la cohomologie d'intersection telle qu'elle est étudiée notamment dans [34].

Rappelons les relations entre la cohomologie étale (à support compact ou non), la cohomologie L^2 et la cohomologie d'intersection.

Comme auparavant, pour ξ une représentation algébrique irréductible de dimension finie de G , on peut définir un système local \mathcal{L}_{ξ} sur Sh_K ainsi qu'un faisceau d'intersection \mathcal{IC}_{ξ} sur Sh_K^* . On dispose donc des groupes de cohomologie étale $H_c^i(\text{Sh}_K, \mathcal{L}_{\xi})$, de L^2 -cohomologie $H_{(2)}^i(\text{Sh}_K, \mathcal{L}_{\xi})$ et de cohomologie d'intersection $IH^i(\text{Sh}_K, \mathcal{IC}_{\xi})$. En prenant la limite inductive sur les sous-groupes compacts ouverts suffisamment petits K , on dispose

des groupes de cohomologie étale (resp. de L^2 -cohomologie, resp. de cohomologie d'intersection) à niveau infini $H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$ (resp. $H_{(2)}^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$, resp. $IH^i(\text{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)$).

Il y a un diagramme commutatif entre ces groupes de cohomologie.

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) & \xrightarrow{(1)} & IH^i(\text{Sh}, \mathcal{IC}_\xi) \\
 & \searrow (2) & \downarrow \approx \\
 & & H_{(2)}^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)
 \end{array}$$

Ces morphismes sont $G(\mathbb{A}_f)$ -équivariants et le morphisme (1) est de plus Γ -équivariant (où \dot{E} est le corps de définition et $\Gamma = \text{Gal}(\overline{E}/\dot{E})$). D'après la conjecture de Zucker (démontrée par Looijenga [27], Looijenga-Rapoport [26] et Saper-Stein [37]), le morphisme vertical est en fait un isomorphisme.

On exploitera le morphisme (2) afin de comparer $H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$ et $IH^i(\text{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)$.

PROPOSITION 3.2. — *Supposons maintenant ξ régulier. Soit $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A})$ qui est ξ -cohomologique et que Π_v est supercuspidale pour une place finie v , alors $H^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$ est concentré en degré moitié et*

$$H_c^d(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx H_{(2)}^d(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f].$$

Puisque le morphisme (1) est Γ -équivariant, on en déduit qu'il y a un isomorphisme Γ -équivariant

$$H_c^d(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx IH^d(\text{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)[\Pi_f]$$

où d est la dimension de la variété de Shimura.

Dans [33, proposition 1], Mokrane et Tilouine ont montré ce résultat pour les groupes de similitudes symplectiques mais leur démonstration s'adapte au cas des groupes de similitudes unitaires. On va rappeler brièvement leur argument.

Démonstration. — Notons $\mathcal{C}^\infty(G_\mathbb{Q} \backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ l'espace des fonctions localement constantes et $\mathcal{C}_c^\infty(G_\mathbb{Q} \backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ son sous-espace des fonctions à support compact. On note aussi $L^2(G_\mathbb{Q} \backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ l'espace des fonctions de carré intégrable et $L_0^2(G_\mathbb{Q} \backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ son sous-espace consistant des fonctions cuspidales ainsi que $\mathcal{C}_{\text{cusp}}^\infty = \mathcal{C}_c^\infty \cap L_0^2$ et $\mathcal{C}_{(2)}^\infty = \mathcal{C}^\infty \cap L^2$.

L'inclusion d'espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{cusp}}^\infty(G_{\mathbb{Q}} G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) &\subset \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathbb{Q}} G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_{(2)}^\infty(G_{\mathbb{Q}} G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \\ &\subset \mathcal{C}^\infty(G_{\mathbb{Q}} G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

implique une application

$$H_{\text{cusp}}^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H_c^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H_{(2)}^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$$

qui est une injection d'après [4].

D'autre part on a

$$H_{\text{cusp}}^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \bigoplus_{\pi} \pi_f \otimes H^\bullet(\text{Lie } G(\mathbb{R}), K_\infty, \pi_\infty^{K_\infty} \otimes \mathcal{L}_\xi),$$

où $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ varie dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales.

Et de plus, on a

$$H_{(2)}^\bullet(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \bigoplus_{\pi} \pi_f \otimes H^\bullet(\text{Lie } G(\mathbb{R}), K_\infty, \pi_\infty^{K_\infty} \otimes \mathcal{L}_\xi)$$

où π varie dans le spectre discret de $L^2(Z_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{Q}} G_{\mathbb{A}}, \omega)$ et ω est le caractère central de ξ^\vee .

Comme ξ est régulier alors π_∞ est une série discrète de caractère infinitésimal ξ , en particulier π_∞ est tempérée.

Puisque la composante en v de Π_f est supercuspidale, on en déduit que si $\pi_\infty \otimes \Pi_f$ est une représentation automorphe, elle est cuspidale. On a alors l'égalité

$$H_{\text{cusp}}^d(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx H_c^d(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx IH^d(\text{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)[\Pi_f]. \quad \square$$

Notation 3.3. — Pour $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, notons

$$\begin{aligned} H &= G(U^*(n_1) \times \dots \times U^*(n_r)) \\ &= \{(g_1, \dots, g_r) \in G^*(n_1) \times \dots \times G^*(n_r) \mid c(g_1) = \dots = c(g_r)\}, \end{aligned}$$

où $G^*(n_i)$ désigne le groupe de similitudes unitaires quasi-déployé en n_i variables. De plus on a

$$\widehat{H} = \mathbb{C}^\times \times \text{GL}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}_{n_r}(\mathbb{C}).$$

Tout d'abord, on voudrait donner une description des triplets endoscopiques elliptiques (H_1, s, η) de H au sens de [18, 7.3, 7.4].

PROPOSITION 3.4 ([34, proposition 2.3.1]). — *Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, soient $n_i^+, n_i^- \in \mathbb{N}$ tels que $n_i = n_i^+ + n_i^-$. Supposons que $n_1^- + \dots + n_r^-$ est*

pair. Posons

$$s = (1, \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1^+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_1^-}), \dots, \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_r^+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_r^-})) \in \widehat{H}$$

$$H_1 = G(U^*(n_1^+) \times U^*(n_1^-) \times \dots \times U^*(n_r^+) \times U^*(n_r^-))$$

et définissons

$$\eta : \widehat{H}_1 = \mathbb{C}^\times \times \text{GL}_{n_1^+}(\mathbb{C}) \times \text{GL}_{n_1^-}(\mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}_{n_r^+}(\mathbb{C}) \times \text{GL}_{n_r^-}(\mathbb{C})$$

$$\longrightarrow \widehat{H} = \mathbb{C}^\times \times \text{GL}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}_{n_r}(\mathbb{C})$$

par la formule

$$\eta((\lambda, g_1^+, g_1^-, \dots, g_r^+, g_r^-)) = (\lambda, \text{diag}(g_1^+, g_1^-), \dots, \text{diag}(g_r^+, g_r^-)).$$

Alors (H_1, s, η) est un triplet endoscopique elliptique pour H . De plus, les triplets endoscopiques elliptiques de H définis par $((n_1^+, n_1^-), \dots, (n_r^+, n_r^-))$ et $((m_1^+, m_1^-), \dots, (m_r^+, m_r^-))$ sont isomorphes si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $(n_i^+, n_i^-) = (m_i^+, m_i^-)$ ou $(n_i^+, n_i^-) = (m_i^-, m_i^+)$. Inversement, tout triplet endoscopique elliptique pour H est isomorphe à un des triplets définis ci-dessus.

DÉFINITION 3.5. — Posons $\mathcal{E}^0(G)$ l'ensemble des triplets endoscopiques elliptiques (H, s, η_0) pour G tels que H n'est pas une forme intérieure de G . Pour tout $(H, s, \eta_0) \in \mathcal{E}^0(G)$, fixons un L -morphisme $\eta : {}^L H \longrightarrow {}^L G$ étendant η_0 . On définit de même l'ensemble $\mathcal{E}^0(H)$ pour $H = G(U^*(n_1) \times \dots \times U^*(n_r))$. Posons \mathcal{F}_G l'ensemble des suites (e_1, \dots, e_r) avec $r \in \mathbb{N}^*$ où $e_1 = (H_1, s_1, \eta_{1,0}) \in \mathcal{E}^0(G)$ et pour $i \in \{2, \dots, r\}$, $e_i = (H_i, s_i, \eta_{i,0}) \in \mathcal{E}^0(H_{i-1})$.

Finalement, on pose

$$\eta_{\underline{e}} = \eta_1 \circ \dots \circ \eta_r : {}^L H_{\underline{e}} \longrightarrow {}^L G$$

le morphisme de L -groupes correspondant.

Considérons $(\underline{e}) = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{F}_G$. Supposons ensuite que $(e_1) = (H_1, s_1, \eta_1)$ est le triplet endoscopique elliptique défini par un couple (n^+, n^-) avec n^- pair. On écrit

$$H_{\underline{e}} = G(U^*(n_1^+) \times \dots \times U^*(n_r^+) \times U^*(n_1^-) \times \dots \times U^*(n_s^-))$$

où l'identification est faite de sorte que $\eta_2 \circ \dots \circ \eta_r$ envoie $\widehat{U^*(n_1^+) \times \dots \times U^*(n_r^+)}$ (resp. $\widehat{U^*(n_1^-) \times \dots \times U^*(n_s^-)}$) dans $\widehat{U^*(n^+)}$ (resp. $\widehat{U^*(n^-)}$).

Maintenant pour $p_1^+, \dots, p_r^+, p_1^-, \dots, p_s^- \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p_i^+ \leq n_i^+$ et $1 \leq p_i^- \leq n_i^-$, on définit un cocaractère de $H_{\underline{e}}$ par la formule

$$\mu = (\mu_{p_1^+} \times \dots \times \mu_{p_r^+} \times \mu_{p_1^-} \times \dots \times \mu_{p_s^-}) : \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \longrightarrow H_{\underline{e}, \mathbb{C}}.$$

où $\mu_{p_i^*}$ est le cocaractère de signature $(p_i^*, n_i^* - p_i^*)$.

DÉFINITION 3.6. — *Supposons G de signature $(p, n - p)$ à l'infini. Pour chaque (\underline{e}) on note $M_{\underline{e}}$ l'ensemble des cocaractères $\mu = \mu_{p_1^+, \dots, p_r^+, p_1^-, \dots, p_s^-}$ de sorte que $p = p_1^+ + \dots + p_r^+ + p_1^- + \dots + p_s^-$. Pour un tel cocaractère on note également $s(\mu) = (-1)^{p_1^- + \dots + p_s^-}$.*

Pour chaque (\underline{e}) , on peut définir les constantes $l(\underline{e})$, $\iota(\underline{e})$ ainsi que $\iota'(\underline{e})$. Ces constantes apparaîtront dans le théorème 3.8 ci-dessus mais pour notre but, nous n'aurons pas besoin de les calculer explicitement. Pour une définition précise, le lecteur pourra consulter [34, p. 108].

DÉFINITION 3.7. — *Soit $\pi_f = \bigotimes'_p \pi_p$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_f)$ de sorte que $\pi_f^K \neq 0$ pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un niveau et soit $\underline{e} \in \mathcal{F}_G$. Notons $R_{\underline{e}}(\pi_f)$ pour l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles $\pi_{\underline{e}, f} = \bigotimes'_p \pi_{\underline{e}, f}$ de $H_{\underline{e}}(\mathbb{A}_f)$ telles que pour presque tout p où π_f et $\pi_{\underline{e}, p}$ sont non ramifiées, le morphisme $\eta_{\underline{e}} : {}^L H_{\underline{e}} \longrightarrow {}^L G$ envoie un paramètre de Langlands de $\pi_{\underline{e}, p}$ sur celui de π_p .*

Étant donné (\underline{e}) et $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_v))$, on note $f^{\underline{e}} = (((f^{H_1})^{H_2}) \dots)^{H_r} \in C_c^\infty(H_{\underline{e}}(\mathbb{Q}_v))$ un transfert endoscopique. Si $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ on notera de même $f^{\underline{e}} \in C_c^\infty(H_{\underline{e}}(\mathbb{A}_f))$.

Soient ξ une représentation algébrique de G ainsi que $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un niveau. Posons $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K(G(\mathbb{A}_f), K)$. Considérons les groupes de cohomologie suivant ($i \geq 0$)

$$W_i = H^i(\mathrm{Sh}_K^*, \mathcal{I}\mathcal{C}_\xi).$$

Ce sont des L -espaces vectoriels (où L est une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ , $\ell \neq p$) de dimension finie qui possèdent une action de $\mathcal{H}_K \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\dot{E})$ où \dot{E} est le corps reflex de la variété de Shimura. Soit $\iota : L \longrightarrow \mathbb{C}$ une immersion. Dans la suite, par abus de langage, on note également W_i la représentation $\iota_*(W_i)$. Dans le cas qui nous intéresse, la signature à l'infini du groupe G est $(1, n - 1)$ avec $n > 2$, donc le corps reflex \dot{E} est égale à \dot{F} . Comme W_i s'annule si i est assez grand, on définit alors

$$W = \sum_{i \geq 0} (-1)^i W_i$$

un objet dans le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathcal{H}_K \times \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\overset{\bullet}{F})$. On a une décomposition isotypique de W comme \mathcal{H}_K -module

$$W = \sum_{\pi_f} W(\pi_f) \otimes \pi_f^K,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles π_f de $G(\mathbb{A}_f)$ telles que $\pi_f^K \neq 0$ et où $W(\pi_f)$ est une \mathbb{C} -représentation virtuelle de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\overset{\bullet}{F})$.

Pour ξ une représentation algébrique fixée de G et pour π_f une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_f)$, on peut définir une constante $c_G(\pi_f)$ laquelle est liée aux multiplicités des représentations automorphes ($c_G(\pi_f)$ dépend éventuellement de ξ). De même, il y a une constante $c_{\underline{e}}(\pi_{\underline{e},f})$ associée à $\pi_{\underline{e},f}$ dont la définition est liée aux multiplicités des représentations automorphes.

Pour p un nombre premier non ramifié, on pose $\eta_{\underline{e},p} := \eta_{\underline{e}}|_{\widehat{H}_{\underline{e}} \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}}$. On écrit $(\eta_{\underline{e},p})_{\text{simple}} : {}^L H_{\underline{e}} \rightarrow {}^L G$ pour le L -morphisme défini dans [34, p. 109, troisième paragraphe]. On note également $\chi_{\underline{e},p}$ le caractère défini dans le même paragraphe de *loc. cit.*

Considérons un nombre premier p ainsi que \mathcal{P} une place de $\overset{\bullet}{F}$ au-dessus de p . Notons $\text{Fr}_{\mathcal{P}}$ un relèvement du Frobenius arithmétique. Le théorème suivant, dû à Sophie Morel, nous permet de calculer la trace de $\text{Fr}_{\mathcal{P}}$ sur $W(\pi_f)$ lorsque p est assez grand.

THÉORÈME 3.8 ([34, théorème 7.2.2]). — *Soit π_f une représentation irréductible admissible de $G(\mathbb{A}_f)$ telle que $\pi_f^K \neq 0$. Il existe alors une fonction $f^\infty \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ de sorte que pour presque tout nombre p premier et pour tout $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} (\star) \quad & \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathcal{P}}^m, W(\pi_f)) = (N\mathcal{P})^{-\frac{m(n-1)}{2}} c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) \text{Tr}(r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_{\mathcal{P}}}(\text{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) \\ & + (N\mathcal{P})^{md/2} \sum_{\underline{e} \in \mathcal{F}_G} (-1)^{l(\underline{e})} \iota(\underline{e}) \sum_{\pi_{\underline{e},f} \in R_{\underline{e}}(\pi_f)} c_{\underline{e}}(\pi_{\underline{e},f}) \text{Tr}(\pi_{\underline{e},f})(f^\infty)^{\underline{e}} \\ & \sum_{\mu \in M_{\underline{e}}} (1 - (-1)^{s(\mu)} \cdot \frac{\iota'(\underline{e})}{\iota(\underline{e})}) \text{Tr}(r_{\mu} \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}}(\text{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) \end{aligned}$$

où la somme est prise pour $\pi_{\underline{e},f}$ telle que $\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}$ est non ramifiée.

Remarque 3.9. — Les nombres premiers p tels que la formule (\star) du théorème 3.8 est vérifiée, sont ceux pour lesquels il existe un ensemble $p \notin T$ avec $f = h_T g^T$ où

- $T \supset \{q \mid G_q \text{ est ramifié, } K_q \text{ n'est pas maximal}\}.$

- $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$ est une fonction de la forme $h = h_T 1_{K^T}$ satisfaisant les propriétés décrites dans les lignes 14–15, p. 111 de [34] (i.e. h sépare les représentations dans R' de *loc. cit.*).
- $g^T \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^T), K^T)$ est une fonction satisfaisant les propriétés décrites dans les lignes 25–28, p. 111 de *loc. cit.* (i.e. g^T sépare les représentations dans R'_e de *loc. cit.*).
- $g_p^T = 1_{G(\mathbb{Z}_p)}$.

3.3. Détermination de $W(\pi_f)_\mathcal{P}$ dans un cas particulier

Le but de ce paragraphe est de montrer un corollaire du théorème 3.8.

LEMME 3.10. — *Soit p un nombre premier tel que K_p est hyper-spécial et G, π sont non ramifiés en p , alors il existe f^∞ telle que la formule (\star) est vraie pour p .*

Démonstration. — Tout d’abord, considérons l’ensemble R' des représentations irréductibles admissibles π'_f de $G(\mathbb{A}_f)$ satisfaisant les conditions suivantes

- $\pi'_f \not\cong \pi_f$,
- $(\pi'_f)^K \neq 0$,
- $W_\lambda(\pi'_f) \neq 0$ ou $c_G(\pi'_f) \neq 0$.

Comme R' est fini et π_p est non ramifiée, on peut choisir $h \in H(G(\mathbb{A}_f), K)$ telle que $h_p = 1_{G(\mathbb{Z}_p)}$ et

- $\text{Tr}(\pi_f(h)) = \text{Tr}(\pi_f(1_K))$.
- $\text{Tr}(\pi'_f(h)) = 0$ pour $\pi'_f \in R'$.

Maintenant, il existe un ensemble T_0 de nombres premiers ne contenant pas p mais qui satisfait toutes les conditions décrites dans lignes 16–20 p. 111 de [34].

Ensuite, pour chaque $e \in \mathcal{F}_G$, on définit un ensemble R'_e comme dans le paragraphe 5, p. 111 de *loc. cit.* Posons $T = T_0 \cup \{p\}$, le même argument que dans la p. 111 de *loc. cit.* montre qu’il existe une fonction $g^T \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^T), K^T)$ qui sépare les représentations dans R'_e .

Considérons $f^\infty = h_{T_0} g^{T_0}$ où $g^{T_0} = 1_{G(\mathbb{Z}_p)} g^T$, on voit que T_0 et f^∞ satisfont les trois premières propriétés dans la remarque 3.9 ainsi que $g_p^{T_0} = 1_{G(\mathbb{Z}_p)}$. On en déduit que la formule (\star) est vérifiée pour f^∞ et p . \square

COROLLAIRE 3.11. — *Supposons n impair et G quasi-déployé en toutes les places finies et de signature $(1, n - 1)$ à l’infini. Considérons une représentation automorphe $\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes'_p \pi_p$ de $G(\mathbb{A})$ satisfaisant les conditions suivantes*

- (i) Le L -paramètre de π est de la forme $\Psi = (\Psi^n, \tilde{\Psi})$ où $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ tel que $\Psi_i^{n_i}$ sont des paramètres globaux de dimension n_i correspondant à des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_F)$ (avec $i = 1, 2$).
- (ii) π_∞ est une série discrète de poids régulier.
- (iii) Il existe une place q de \mathbb{Q} qui est décomposée dans le corps quadratique imaginaire \dot{F} de sorte que π_q est non ramifiée et son L -paramètre local ϕ_q est de la forme $\phi_q^n = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots \oplus \chi_n$ où les χ_j sont deux à deux distincts.

Notons $\rho := W(\pi_f)$ la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\dot{F})$ associée à π_f dans la cohomologie de la variété de Shimura correspondant à G . Si $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i} = n_i$ ($i = 1$ ou $i = 2$) alors pour tout nombre premier p et toute place \mathcal{P} de \dot{F} au-dessus de p , on a

$$\rho_{\mathcal{P}} = (r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p)_{|W_{\mathcal{P}}} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

où $\mu_i = (1, n_i - 1)$ et $W_{\mathcal{P}}$ est le groupe de Weil de $\dot{F}_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. — On applique le théorème 3.8 pour π_f . Choisissons tout d’abord un sous-groupe compact suffisamment petit K de $G(\mathbb{A}_f)$ de sorte que $\pi_f^K \neq 0$, en particulier on peut choisir K tel que $K_q = G(\mathbb{Z}_q)$ car π_q est non ramifiée.

Comme le L -paramètre global Ψ de π satisfait $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ l’ensemble des $\underline{e} \in \mathcal{F}_G$ tels que $R_{\underline{e}}(\pi_f)$ soit non nul contient un seul élément $\underline{e} = (e_1)$ où e_1 est le triplet endoscopique correspondant à $G(U^*(n_1) \times U^*(n_2))$.

Par construction de $R_{\underline{e}}(\pi_f)$, pour un nombre premier p non ramifié on a $(\eta_{\underline{e},p})_{\mathrm{simple}} \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}} = \varphi_{(\pi_f)_p}$ (consulter les paragraphes avant le théorème 3.8 pour la définition de $\eta_{\underline{e},p})_{\mathrm{simple}}$) et de plus le changement de base quadratique de $\varphi_{(\pi_f)_p}$ s’écrit $\varphi_{(\pi_f)_p}^n = (\Psi_1^{n_1})_p \oplus (\Psi_2^{n_2})_p$. D’autre part, la signature à l’infini μ_G est $(1, n - 1)$ on voit alors que l’ensemble $M_{\underline{e}}$ contient exactement deux éléments $\mu_1 = (1, n_1 - 1) \times (0, n_2)$ et $\mu_2 = (0, n_1) \times (1, n_2 - 1)$. On en déduit que

$$r_{\mu} \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}} = \begin{cases} r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p & \text{si } \mu = (1, n_1 - 1) \times (0, n_2) \\ r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p & \text{si } \mu = (0, n_1) \times (1, n_2 - 1) \end{cases}$$

où $\mu_1 = (1, n_1 - 1)$ et $\mu_2 = (1, n_2 - 1)$.

D’après la description des représentations $r_{\mu_G}, r_{\mu_1}, r_{\mu_2}$ dans la section 3.1, on a l’identité suivante :

$$r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p} = r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p \oplus r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p.$$

D'autre part, on a

$$(N\mathcal{P})^{-\frac{m(n-1)}{2}} \operatorname{Tr}(r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p}(\operatorname{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) = \operatorname{Tr}(| \cdot |^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p}(\operatorname{Fr}_{\mathcal{P}}^m)).$$

Finalement le théorème 3.8 induit l'identité suivante pour presque tout p où π_p est non ramifiée.

$$(3.1) \quad \operatorname{Tr}(\operatorname{Fr}_{\mathcal{P}}^m, W(\pi_f)) = \alpha_p \cdot \operatorname{Tr}(| \cdot |^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p(\operatorname{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) \\ + \beta_p \cdot \operatorname{Tr}(| \cdot |^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p(\operatorname{Fr}_{\mathcal{P}}^m)).$$

Montrons ensuite que pour presque tous p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que π_{p_1} et π_{p_2} sont non ramifiées, on a $\alpha_{p_1} = \alpha_{p_2}$ et $\beta_{p_1} = \beta_{p_2}$.

En effet, pour notre représentation π_f , on a

$$\alpha_{p_i} = c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) \\ + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot \left(1 - (-1)^{s(\bar{\mu}_1)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)} \right) \\ \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \operatorname{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1}),$$

où la somme est prise pour $\pi_{e_1,f}$ telle que $\pi_{e_1,p_i} \otimes \chi_{e_1,p_i}$ est non ramifiée.

Or lorsque $\pi_{e_1,p_i} \otimes \chi_{e_1,p_i}$ est ramifiée, $\operatorname{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1})$ s'annule, on peut récrire la formule calculant α_{p_i} sous forme

$$\alpha_{p_i} = c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) \\ + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot \left(1 - (-1)^{s(\bar{\mu}_1)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)} \right) \\ \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \operatorname{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1})$$

où la somme est prise pour toute $\pi_{e_1,f}$. En particulier la formule calculant α_{p_i} ne dépend pas de p_i . On en déduit que $\alpha_{p_1} = \alpha_{p_2}$.

Par le même argument, on a $\beta_{p_1} = \beta_{p_2}$ en utilisant

$$\beta_{p_i} = c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) \\ + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot \left(1 - (-1)^{s(\bar{\mu}_2)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)} \right) \\ \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \operatorname{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1}).$$

Considérons maintenant le premier q décomposé. Puisque π_∞ est une série discrète de plus haut poids régulier, la cohomologie de la variété de Shimura se concentre en degré moitié, en particulier $W(\pi_f)$ est une vraie

représentation (à signe près). D'après le lemme précédent appliqué en q , la condition (iii) implique que $r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_q \oplus r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_q$ est sans multiplicité, ce qui implique que α_q et β_q sont de même signe. On peut supposer qu'ils sont positifs.

Supposons que α_q et β_q sont *strictement* positifs. Cela implique donc que $\dim \rho \geq \dim \Psi_1^{n_1} + \dim \Psi_2^{n_2} = n$ ce qui contredit l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i}$. Il y a alors exactement un coefficient non nul.

Maintenant, le fait que n est impair couplé avec l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i}$ implique alors que $\beta = 0$ si $i = 1$ et $\alpha = 0$ si $i = 2$. Autrement dit, on a

$$\text{Tr}(\text{Fr}_{\mathcal{P}}^m, W(\pi_f)) = \text{Tr}(|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p (\text{Fr}_{\mathcal{P}}^m)).$$

(ici $i = 1$ si $\dim \rho = \dim \Psi_1^{n_1}$ et $i = 2$ si $\dim \rho = \dim \Psi_2^{n_2}$).

Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour presque toute place \mathcal{P} de $\overset{\bullet}{F}$, le théorème de densité de Chebotarev implique que

$$\rho_{\mathcal{P}} = (r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p)|_{W_{\mathcal{P}}} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$$

pour toute place \mathcal{P} . □

Remarque 3.12. — Le corollaire est encore valable lorsque Ψ est un paramètre simple générique (ce qui équivaut à dire que $\dim \Psi_1^{n_1} = 0$ ou $\dim \Psi_2^{n_2} = 0$).

3.4. Preuve du théorème principal

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème principal de l'introduction. D'après le théorème 1.29, on a une suite spectrale reliant la partie supercuspidale des espaces de Rapoport–Zink à celle de la strate basique $\text{Sh}_{\infty}(\text{basic})$ des variétés de Shimura Sh_{∞} de la section 1.2 laquelle est déterminée par le corollaire 3.11. Afin d'identifier les σ_{π_p, π'_p} avec les $r_{\mu} \circ \varphi_{i, F_p}$, nous avons besoin d'une part de l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i$ dans le corollaire 3.11 et d'autre part de calculer $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$. Dans les deux cas, ce calcul repose sur un problème de comptage de caractères du groupe centralisateur des L-paramètres à l'infini. Plus précisément, la preuve est découpée en 4 étapes.

- Dans la première étape, on montre les points (i) et (ii) du théorème et on obtient des contraintes sur la dimension de σ_{π_p, π'_p} .
- Dans la deuxième étape, on établit une relation entre σ_{π_p, π'_p} et une représentation galoisienne bien choisie de la variété de Shimura

puis on ramène le problème du calcul de la dimension de la représentation au problème de comptage des caractères du groupe centralisateur à l'infini.

- Ensuite, on utilise des contraintes sur la dimension de σ_{π_p, π'_p} obtenues avant pour calculer les caractères du groupe centralisateur à l'infini.
- Enfin on utilise le corollaire 3.11 afin de calculer σ_{π_p, π'_p} .

Rappelons tout d'abord la construction des données globales à partir des données locales.

PROPOSITION 3.13 ([10]). — *Soit une donnée locale*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \mu, b)$$

de type PEL non ramifiée simple sur une extension finie de \mathbb{Q}_p . Supposons que $[F_p : \mathbb{Q}_p] = 2d$ n'est pas un multiple de 4, alors :

- il existe un corps CM de la forme $\overset{\bullet}{F} = K\mathcal{K}$ avec \mathcal{K} un corps quadratique imaginaire de sorte que p reste inerte dans $\overset{\bullet}{F}$ et $\overset{\bullet}{F}_p = F_p$.
- il existe une donnée globale $\mathcal{D} = (\overset{\bullet}{F}, B, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, h, \overset{\bullet}{G})$ de type PEL, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ tels que via ν , \mathcal{D} induise la donnée locale $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}$.

De plus

- Pour tout n , on peut imposer que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre à division qui est en toute place finie soit déployée, soit une algèbre à division.
- Pour n impair ou $n \equiv 2$ modulo 4, on peut imposer que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies.

Démonstration. — On raisonne comme dans la proposition 10.1.3 de [10]. Grâce à la proposition 10.1.1 dans *loc. cit.* on peut supposer que $\text{End}_B(V)$ satisfait les conditions annoncées ci-dessus. □

LEMME 3.14. — *Soit Π_p une représentation supercuspidale de $J_b(\mathbb{Q}_p)$. Alors pour tout $t > 0$ on a*

$$\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\bar{n} - 1)), \Pi_p) = 0$$

Démonstration. — On pose $\Delta = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z})$. Comme b est basique, $J_b(\mathbb{Q}_p)$ est une forme intérieure de $G(\mathbb{Q}_p)$, tout $\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}$ se transfère à $J_b(\mathbb{Q}_p)$ en un $\tilde{\chi} \in X^*(J_b(\mathbb{Q}_p))_{\mathbb{Q}_p}$.

Notons $J_b^1(\mathbb{Q}_p) = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} \ker |\tilde{\chi}|$ où $|\tilde{\chi}| : J_b(\mathbb{Q}_p) \rightarrow, x \mapsto v_p(\tilde{\chi}(x))$; en particulier, $J_b^1(\mathbb{Q}_p)$ a un centre compact.

Il y a une application $\pi_2 : \mathcal{M} \rightarrow \Delta$ qui est essentiellement la hauteur de la rigidification ρ ([35, 3.52]). On note encore $\Delta' \subset \Delta$ l'image de π_2 . On a donc une décomposition : $\mathcal{M}_{K_p} = \coprod_{i \in \Delta'} \mathcal{M}_{K_p}^{(i)}$ où $\mathcal{M}_{K_p}^{(i)} = \pi_2^{-1}(i)$. On en déduit

$$H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)) = \sum_{\bar{i} \in \Delta' / J_b(\mathbb{Q}_p)} c - \text{Ind}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}^{(i)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1))).$$

En utilisant la dualité de Frobenius, on dispose alors d'un isomorphisme de foncteurs :

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \bullet) \\ & \simeq \sum_{\bar{i} \in \Delta' / J_b(\mathbb{Q}_p)} \text{Hom}_{J_b^1} (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}^{(i)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \text{Res}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^{J_b(\mathbb{Q}_p)} \bullet). \end{aligned}$$

Il en résulte des isomorphismes :

$$\begin{aligned} & \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p) \\ & \simeq \sum_{\bar{i} \in \Delta' / J_b(\mathbb{Q}_p)} \text{Ext}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}^{(i)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \text{Res}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^{J_b(\mathbb{Q}_p)} \Pi_p). \end{aligned}$$

D'autre part la représentation Π_p est cuspidale, donc $\text{Res}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^{J_b(\mathbb{Q}_p)} \Pi_p$ est une représentation finie (les coefficients matriciels sont des fonctions à support compact), donc $\text{Res}_{J_b^1(\mathbb{Q}_p)}^{J_b(\mathbb{Q}_p)} \Pi_p$ est un objet projectif dans la catégorie des représentations lisse de $J_b^1(\mathbb{Q}_p)$. On obtient alors que pour tout $t > 0$

$$\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p) = 0. \quad \square$$

Soit $c : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ le caractère du facteur de similitudes. Pour b non basique, le groupe $J_b(\mathbb{Q}_p)$ est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi $M_b(\mathbb{Q}_p)$ de $G(\mathbb{Q}_p)$. Ensuite, le caractère du facteur de similitudes c restreint à $M_b(\mathbb{Q}_p)$ peut être transféré à $J_b(\mathbb{Q}_p)$. Donc par abus de langage, on note aussi c le caractère correspondant de $J_b(\mathbb{Q}_p)$. Le lemme suivant nous permet de comprendre le comportement de la cohomologie des espaces de Rapoport–Zink lorsque la représentation π est tordue par un caractère non ramifié :

LEMME 3.15. — *Soit $(F_p, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \mu, b)$ une donnée de Rapoport–Zink PEL unitaire non ramifiée, supposons que $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère non ramifié et π est une représentation irréductible de $J_b(\mathbb{Q}_p)$. On a alors un isomorphisme dans $\text{Groth}(G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p})$ entre*

$$\sum_{t,q} (-1)^{t+q} \lim_{\overrightarrow{K_p}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \pi \otimes (\omega \circ c))$$

et

$$\sum_{t,q} (-1)^{t+q} \lim_{\overrightarrow{K_p}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \pi) \otimes (\omega \circ c) \otimes (\omega \circ \text{Art}_{E_p}^{-1})$$

où E_p est le corps de définition de μ .

Démonstration. — Ce lemme est un analogue de [41, lemme 4.9] et la même preuve s’applique dans notre situation. Nous donnons donc brièvement une idée de la preuve.

Définissons un caractère χ de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ par

$$\chi := (\omega \circ c) \otimes (\omega \circ c) \otimes (\omega \circ \text{Art}_{E_p}^{-1}).$$

Ensuite, nous prouvons qu’il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels

$$H_c^j(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H_c^j(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \chi$$

compatible avec l’action de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p}$.

Notons qu’il y a une application $\pi_2 : \mathcal{M}_{K_p} \rightarrow \Delta$ et de plus il existe une manière naturelle de définir une action de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ sur Δ telle que l’application π_2 soit équivariante par rapport à $J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p}$ ([10, remarque 2.6.11]).

On peut prouver le lemme en utilisant le fait que χ agit trivialement sur $(J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p})^1$ et

$$\begin{aligned} & \lim_{\overrightarrow{K_p}} H_c^j(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ & \simeq c - \text{Ind}_{(J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p})^1}^{J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p}} \left(\lim_{\overrightarrow{K_p}} H_c^j(\mathcal{M}_{K_p}^{(0)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right) \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_{K_p}^{(0)}$ est l’image inverse de 0 par π_2 et $(J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p})^1$ est le sous-groupe de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times (K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p) \times W_{E_p}$ qui agit trivialement sur Δ . □

Démonstration du théorème principal. — Soit

$$\mathcal{D} = (\overset{\bullet}{F}, B, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, h, \overset{\bullet}{G})$$

une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale de sorte que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies comme dans la proposition 3.13. Soit Sh la variété de Shimura associée : le groupe $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ est le groupe des similitudes unitaires quasi-déployé en n variables. En particulier, Sh est de signature $(1, n - 1)$ à l’infini.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l’espace de Rapoport–Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et $I := (I^\phi)$ le groupe réductif associé. On sait que $I(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I(\mathbb{A}_f^p) = \dot{G}(\mathbb{A}_f^p)$. D'après la proposition 1.29 il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ équivariante :

$$(3.2) \quad E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \xi}} \left(\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \otimes (\Pi^{\infty, p}) \\ \implies (H_c^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}}$$

où on a noté

$$\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p) := \lim_{\overline{K}} \text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p)$$

pour alléger les notations et où $p\text{-cusp}$ signifie que la composante en p est supercuspidale.

On choisit une représentation ξ de dimension finie de $I(\mathbb{C})$ qui est de poids régulier et suffisamment régulier au sens de la définition 2.12. Soit $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$ le L -paquet de séries discrètes de $\dot{G}(\mathbb{R})$ cohomologiques pour ξ .

Considérons $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \times \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ un paramètre discret qui est trivial sur $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. D'après la proposition 2.26, le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales. On peut exprimer la restriction de φ sur W_{F_p} sous la forme

$$\varphi_{F_p} = \varphi_1^{n_1} \oplus \varphi_2^{n_2} \oplus \dots \oplus \varphi_r^{n_r},$$

où les $\varphi_i^{n_i}$ sont des paramètres simples de $\text{GL}_{n_i}(F_p)$.

Puisqu'on utilisera dans la suite le théorème de classification des représentations automorphes pour I et \dot{G} (cf. théorème 2.23), il faut étendre I et \dot{G} en des formes intérieures pures. Pour ce faire, utilisons la proposition 2.2.

Comme $\dot{G}(\mathbb{R})$ est de signature $(1, n-1)$, son invariant est alors $a_\infty^G = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n-1) \bmod 2$. De même $I(\mathbb{R})$ est de signature $(0, n)$, son invariant est $a_\infty^I = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n \bmod 2$.

De plus pour $v \neq p$, $\dot{G}(\mathbb{Q}_v)$ est quasi-déployé. Or n étant impair, il y a donc deux manières d'étendre $\dot{G}(\mathbb{Q}_v)$ en une forme intérieure pure et on choisit alors la manière dont l'invariant vérifie $a_v = 0 \bmod 2$. De même, il y a deux manières d'étendre $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ en une forme intérieure pure et on choisit alors l'unique manière de sorte que $a_p^G + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (n-1) = 0 \bmod 2$.

Pour I on procède de même et en particulier on étend $J_b(\mathbb{Q}_p)$ en une forme intérieure de sorte que $a_p^I + \left[\frac{n}{2}\right] + n = 0 \pmod 2$.

Remarque 3.16. — On a $a_p^I + a_p^G = a_\infty^I + a_\infty^G = 1 \pmod 2$.

Étape 1 : Obtenir des contraintes sur $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$. — Considérons une représentation supercuspidale $\tilde{\pi}_p$ dans $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$. D’après [40, théorème 5.7], il existe une représentation automorphe $\tilde{\Pi}$ de $I(\mathbb{A})$ telle que $\tilde{\Pi}_\infty = \check{\xi}$ et $\tilde{\Pi}_{w_0}$ est supercuspidale pour une place w_0 décomposée et que $\tilde{\Pi}_p = \tilde{\pi}_p$ (Plus précisément $\tilde{\Pi}_p$ et $\tilde{\pi}_p$ sont dans la même classe d’équivalence d’inertie ; pourtant, grâce au lemme 3.15, il suffit de considérer une représentation dans chaque classe d’équivalence d’inertie. Nous pouvons donc supposer que $\tilde{\Pi}_p = \tilde{\pi}_p$). En particulier, le A -paramètre $\tilde{\Psi}$ de $\tilde{\Pi}$ est simple et on obtient son groupe centralisateur

$$S_{\tilde{\Psi}}^{\natural} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Par la suite, on va essayer d’appliquer le corollaire 3.11 et la remarque 3.12 pour $\tilde{\Psi}$. En prenant la partie $\tilde{\Pi}^{\infty, p}$ -isotypique de la suite spectrale (3.2) on a une suite spectrale $G(\mathbb{Q}_p) \times W_{F_p}$ -équivariante (remarquons que comme $\tilde{\Pi}_\infty = \check{\xi}$, la condition $\Pi_\infty = \check{\xi}$ est une conséquence de la condition $\Pi^p = (\tilde{\Pi}^p)$)

$$\begin{aligned} E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = (\tilde{\Pi})^p}} \left(\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusps}} \right) \\ \implies (H_c^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusps}} [\tilde{\Pi}^{\infty, p}]. \end{aligned}$$

Puisque le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales, le lemme 3.14 implique que

$$\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p) = 0 \text{ si } t > 0$$

et la suite spectrale ci-dessus dégénère en E_2 . On obtient donc des isomorphismes :

$$\begin{aligned} (3.3) \quad |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = (\tilde{\Pi})^p}} \left(\text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^i(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusps}} \right) \\ = (H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusps}} [\tilde{\Pi}^{\infty, p}]. \end{aligned}$$

D’autre part, la proposition 3.2 couplée avec la formule de Matsushima pour la L^2 -cohomologie, généralisée par Borel et Casselman ([3]), nous

donne une décomposition :

$$(3.4) \quad H_c^{n-1}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}}[\tilde{\Pi}^{\infty,p}] = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G})_\xi \\ \Pi_p \text{ supercuspidale} \\ \Pi^{\infty,p} = \tilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p \otimes \rho(\Pi^\infty).$$

$$(3.5) \quad H_c^i(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}}[\tilde{\Pi}^{\infty,p}] = 0 \quad (i \neq n - 1).$$

où $\rho(\Pi^\infty)$ est une représentation continue de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\mathcal{A}(\dot{G})_\xi$ est l'ensemble des représentations automorphes de \dot{G} cohomologiques pour ξ . De plus on a

$$(3.6) \quad \dim \rho(\Pi^\infty) = \sum_{\pi_\infty} m(\pi_\infty \otimes \Pi^\infty) \dim H^{n-1}(\text{Lie } \dot{G}(\mathbb{R}), K, \pi_\infty \otimes \xi)$$

où π_∞ varie dans le paquet cohomologique $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$.

Puisque ξ est de poids régulier et $\dot{G}(\mathbb{R})$ est le groupe de similitudes unitaires de signature $(1, n - 1)$, d'après le corollaire VI.2.7 de [14], on en déduit qu'il y a exactement n représentations π_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) cohomologiques pour ξ . On a également :

$$(3.7) \quad \dim H^{n-1}(\text{Lie } \dot{G}(\mathbb{R}), K, \pi_j \otimes \xi) = 1.$$

On en déduit que $\sigma_{\pi_p, \pi'_p}^i = 0$ si $i \neq n - 1$ de sorte que

$$\sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \tilde{\Pi}^p}} \left(\text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^{n-1}(\mathcal{M}), \Pi_p)_{p\text{-cusp}} \right) = \sum_{\substack{\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ (\Pi')^{\infty,p} = \tilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi'_p \otimes \rho((\Pi')^\infty)_p$$

En écrivant $\text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^{n-1}(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} = \sum_{\tilde{\Pi}'_p} \tilde{\Pi}'_p \otimes \sigma_{\Pi_p, \tilde{\Pi}'_p}$ où $\tilde{\Pi}'_p$ parcourt l'ensemble des classes d'équivalences de représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$, l'égalité ci-dessus s'écrit sous la forme

$$(3.8) \quad \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \tilde{\Pi}^p}} \left(\sum_{\tilde{\Pi}'_p} \tilde{\Pi}'_p \otimes \sigma_{\Pi_p, \tilde{\Pi}'_p} \right) = \sum_{\substack{\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ (\Pi')^{\infty,p} = \tilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi'_p \otimes \rho((\Pi')^\infty)_p$$

Or si $\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G})$ et $(\Pi')^{\infty,p} = \tilde{\Pi}^{\infty,p}$, on en déduit que Π'_p et $\tilde{\Pi}'_p$ sont dans le même paquet, à savoir le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$. De même on voit que $\Pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$. On en déduit que $\sigma_{\Pi_p, \tilde{\Pi}'_p} = 0$ si $\tilde{\Pi}'_p \notin \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$.

Or, le groupe centralisateur global $S_{\check{U}}^{\natural}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en particulier $S_{\check{U}}^{\natural} \simeq Z(\widehat{U^*})^{\Gamma}$ où Γ est le groupe de Galois, \check{U} est le groupe unitaire noyau du facteur de similitude de \check{G} et \check{U}^* est sa forme intérieure quasi-déployée. On en déduit que $\Pi_{\Psi}(I, \varrho, \epsilon) = \Pi_{\Psi}(I, \varrho)$ car la condition sur ϵ disparaît (consulter la remarque 2.21 et la définition 2.22). D'après le théorème 2.23, on voit que $\xi \otimes \pi_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}$ est toujours une forme automorphe lorsque π_p varie dans $\Pi_{\varphi}(J_b(\mathbb{Q}_p))$. L'égalité (3.8) se réécrit donc sous la forme

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_{\varphi}(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sum_{\pi'_p \in \Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \sum_{\pi'_p \in \Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes \rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p})_p.$$

En particulier pour $\pi'_p \in \Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))$ fixée, on a

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_{\varphi}(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p})_p.$$

D'après le résultat de multiplicité 1 (théorème 2.23 et proposition 2.27), on voit que $m(\pi_j \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p})$ est soit nulle soit égale à 1. Comme au-dessus, le théorème 2.23 implique que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}$ est toujours une forme automorphe lorsque π'_p varie dans $\Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))$ et i varie dans $\{1, \dots, n\}$.

Cela implique que $\dim \rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}) = n$. D'après le corollaire 3.11 et la remarque 3.12, on a alors

$$\rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p})_p = (r_{\mu} \circ \varphi|_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Autrement dit on a

$$(3.9) \quad \sum_{\pi_p \in \Pi_{\varphi}(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_{\mu} \circ \varphi|_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Étape 2 : Ramener au problème de comptage à l'infini. — Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_{\varphi}(J_b(\mathbb{Q}_p))$ et appliquons la proposition 2.30 pour I et la représentation π_p , on trouve un L -paramètre global discret générique Ω dont le L -paquet contient une représentation automorphe $\bar{\Pi} \in \mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\bar{\Pi}_p$ et π_p sont dans la même classe d'équivalence d'inertie,
- $\bar{\Pi}_{\infty} = \xi$,
- $\bar{\Pi} \cong \Pi'$ dès lors que $(\bar{\Pi})^p \cong (\Pi')^p$.

De plus, grâce au lemme 3.15, nous pouvons supposer $\bar{\Pi}_p = \pi_p$.

En prenant la partie $\bar{\Pi}^{\infty,p}$ -isotypique de la suite spectrale (3.2) on a :

$$E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \left(\text{Ext}_{\text{J}_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \pi_p)_{\text{cusp}} \right) \implies (H_c^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}} [\bar{\Pi}^{\infty,p}]$$

Comme dans la première partie, le lemme 3.14 simplifie la suite spectrale, on obtient donc l'égalité

$$\sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \bar{\Pi}^p}} \left(\text{Hom}_{\text{J}_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^{n-1}(\mathcal{M}), \bar{\Pi}_p)_{\text{cusp}} \right) = \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ \Pi^{\infty,p} = \bar{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p \otimes \rho(\Pi^\infty)_p$$

Or $\bar{\Pi} \cong \Pi'$ dès lors que $(\bar{\Pi})^p \cong (\Pi')^p$, l'égalité au-dessus se réécrit donc sous la forme

$$\sum_{\tilde{\pi}'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \tilde{\pi}'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \tilde{\pi}'_p} = \sum_{\tilde{\pi}'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \tilde{\pi}'_p \otimes \rho(\tilde{\pi}'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p})_p.$$

En prenant la partie $[\pi'_p]$ -isotypique, on en déduit en particulier que $\pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \pi'_p \otimes \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p})_p$ et donc que $\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}) = \dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$.

D'après (3.6) et (3.7), on a $\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}) = \sum_{i=1}^n m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p})$. La formule de multiplicité (théorème 2.23 et proposition 2.27) implique alors que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$ est égale au nombre de représentations π_i telles que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}$ est une forme automorphe. D'après le théorème 2.23 cela équivaut à demander l'égalité suivante :

$$\langle \pi_i, s_\infty \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle \pi'_p, s_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \prod_{v \neq \infty, p} \langle \bar{\Pi}_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^{\natural}$$

Or $\check{\xi} \otimes \pi_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}$ étant une forme automorphe dans $\mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$, on a l'égalité suivante :

$$\langle \check{\xi}, s_\infty \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle \pi_p, s_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \prod_{v \neq \infty, p} \langle \bar{\Pi}_v, s_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^{\natural}.$$

On en déduit que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}$ est une forme automorphe si et seulement si

$$(3.10) \quad \langle \pi_i, s_\infty \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle \pi'_p, s_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \cdot \langle \check{\xi}, s_\infty \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle \pi_p, s_p \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^{\natural}.$$

Donc, afin de calculer la dimension des représentations galoisiennes, on doit calculer les caractères du groupe centralisateur à l'infini.

Étape 3 : Calcul de caractères à l'infini. — Considérons les L -paquets $\Pi_{(\xi)}(I(\mathbb{R}))$ et $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$. Comme ξ est un L -paramètre discret, on peut écrire $\xi^n := \eta_{\chi_\kappa} * \xi$ sous la forme $\xi^n = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$ où les ξ_i sont deux à deux distincts. Le groupe centralisateur est donné par

$$S_\xi^\natural \cong \prod_{i=1}^n O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans S_ξ^\natural .

Le L -paquet $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$ est constitué par n représentations π_i qui correspondent à n caractères τ_{π_i} de S_ξ^\natural dont la restriction sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est un caractère de $Z(\widehat{G})^\Gamma$ calculé en fonction de a_∞^G . De même le L -paquet $\Pi_{(\xi)}(I(\mathbb{R}))$ est constitué par la représentation $\check{\xi}$ qui correspondent à un caractère $\tau_{\check{\xi}}$ de S_ξ^\natural dont la restriction sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est calculé par a_∞^I . On va calculer les n caractères $\tau_{\check{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ où $i \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque 3.17. — Puisque $a_\infty^G + a_\infty^I \equiv 1 \pmod{2}$, la restriction de $\tau_{\check{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est le caractère non trivial. On en déduit que pour tout i , on a

$$\prod_{j=1}^n \tau_{\check{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}(1, \dots, 1, \underbrace{-1}_j, 1, \dots, 1) = \tau_{\check{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}(-1, \dots, -1) = -1.$$

Choisissons un L -paramètre supercuspidal ψ de $G(\mathbb{Q}_p)$ de sorte que $\eta_{\chi_\kappa} * \psi = \psi_{F_p} = \psi_1^{n_1} \oplus \psi_2^{n_2}$ avec $\dim \psi_1^{n_1} = 1$ et $\dim \psi_2^{n_2} = n - 1$. On a

$$S_\psi \cong \prod_{i=1}^2 O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^2 (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_\psi^\natural.$$

Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_\psi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ et choisissons une représentation $\pi'_p \in \Pi_\psi(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que le caractère $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}$ de S_ψ^\natural est donné par

$$\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}(-1, 1) = -1 \quad \tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}(1, -1) = 1.$$

En utilisant la même construction que celle dans la proposition 2.29 (et aussi le lemme 3.15), il existe, pour tout i_0 fixé, un paramètre global discret générique $\Phi(i_0)$ de la forme $\Phi(i_0)^n = \Phi_1^{n_1}(i_0) \boxplus \Phi_2^{n_2}(i_0)$ de sorte que

- $\Phi_j^{n_j}(i_0)$ est un L -paramètre global discret générique pour $j = 1, 2$,
- $(\Phi(i_0))_\infty = \xi$ et $(\Phi_1^{n_1}(i_0))_\infty = \xi_{i_0}$,
- $(\Phi_1^{n_1}(i_0))_p = \psi_1^{n_1}$ et $(\Phi_2^{n_2}(i_0))_p = \psi_2^{n_2}$,
- Le morphisme canonique

$$S_{\Phi(i_0)}^\natural \longrightarrow S_\psi^\natural$$

est un isomorphisme.

Détaillons maintenant les groupe centralisateurs ainsi que les morphismes de localisation

$$S_{\Phi(i_0)} \cong \prod_{i=1}^2 O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^2 (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_{\Phi(i_0)}^{\natural}.$$

Les morphismes de localisation $S_{\Phi(i_0)} \rightarrow S_{\psi}$ et $S_{\Phi(i_0)} \rightarrow S_{\xi}$ sont donnés par les formules ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} S_{\Phi(i_0)}^{\natural} & \longrightarrow & S_{\psi}^{\natural} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S_{\Phi(i_0)}^{\natural} & \longrightarrow & S_{\xi}^{\natural} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (\underbrace{x_2, \dots, x_2}_{i_0-1}, \underbrace{x_1, x_2 \cdots x_2}_{n-i_0}) \end{array}$$

Notation 3.18. — Si on a une représentation irréductible τ de S_{ψ}^{\natural} ou de S_{ξ}^{\natural} , on note $\bar{\tau}^{i_0}$ la représentation induite sur $S_{\Phi(i_0)}^{\natural}$ par les morphismes de localisation.

Utilisons la proposition 2.30 et le lemme 3.15 pour I et la représentation π_p et le L -paramètre $\Phi(i_0)$, on trouve une représentation automorphe $\bar{\Pi}(i_0) \in \Pi_{\Phi(i_0)}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\bar{\Pi}(i_0)_p = \pi_p, \bar{\Pi}(i_0)_{\infty} = \check{\xi},$
- $\bar{\Pi}(i_0) \cong \Pi'$ dès lors que $(\bar{\Pi}(i_0))^p \cong (\Pi')^p.$

En prenant la partie $\bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p}$ -isotypique de la suite spectrale (3.2) on a :

$$(3.11) \quad E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \check{G})| \left(\text{Ext}_{\mathbb{J}_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \pi_p)_{\text{cusp}} \right) \implies (H_c^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_{\xi}))_{p\text{-cusp}} [\bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p}]$$

Comme dans l'étape 2, on obtient l'égalité $\pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \pi'_p \otimes \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p})_p$ et donc $\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p}) = \dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}.$

D'une part, l'égalité (3.9) couplée avec le fait que $\psi_{F_p} = \psi_1^{n_1} \oplus \psi_2^{n_2}$ avec $\dim \psi_1^{n_1} = 1$ et $\dim \psi_2^{n_2} = n - 1$ implique que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} \in \{0, 1, n - 1, n\}.$

De plus $\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p}) = \sum_{i=1}^n m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \bar{\Pi}(i_0)^{\infty \cdot p}).$ Comme dans la fin de l'étape 2, la formule de multiplicité implique que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$ est égale au nombre de représentations π_i telles que $\bar{\tau}_{\xi}^{i_0} \cdot \bar{\tau}_{\pi_i}^{i_0} = \bar{\tau}_{\pi_p}^{i_0} \cdot \bar{\tau}_{\pi'_p}^{i_0}.$

Montrons que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = 1.$ Supposons le contraire, il y a 3 possibilités.

Cas 1 : $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = 0.$ — Dans ce cas on a $\bar{\tau}_{\xi}^{i_0} \cdot \bar{\tau}_{\pi_i}^{i_0} \neq \bar{\tau}_{\pi_p}^{i_0} \cdot \bar{\tau}_{\pi'_p}^{i_0}$ pour tout $i.$ La description des morphismes de localisation implique que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) = 1.$$

En faisant varier i_0 , on en déduit que tous les $\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i}$ coïncident, contradiction.

Cas 2 : $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = n$. — La description des morphismes de localisation implique que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) = -1.$$

Comme précédemment en faisant varier i_0 , on en déduit que les $\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i}$ sont égaux pour tout i , contradiction.

Cas 3 : $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = n - 1$. — La description des morphismes de localisation implique qu'il y a exactement $n - 1$ indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) = -1.$$

Comme i_0 est arbitraire, on en déduit que

$$\prod_{i_0=1}^n \prod_{i=1}^n \tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) = (-1)^{(n-1) \cdot n} = 1.$$

Or d'après la remarque 3.17 et le fait que n est impair, on en déduit que

$$\begin{aligned} \prod_{i_0=1}^n \prod_{i=1}^n \tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) &= \prod_{i=1}^n \tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (-1, \dots, -1) \\ &= (-1)^n = (-1). \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction.

On en déduit que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = 1$, autrement dit pour tout i_0 , il y a exactement un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i} (1, \dots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \dots, 1) = -1.$$

En utilisant la remarque 3.17, on vérifie aisément que les n caractères $\tau_{\xi} \cdot \tau_{\pi_i}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ sont les caractères λ_i où

$$(3.12) \quad \lambda_i (1, \dots, \underbrace{-1}_j, \dots, 1) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Étape 4 : Fin de la démonstration.

LEMME 3.19. — Il existe un paramètre global générique $\Psi = (\Psi^n, \tilde{\Psi})$ où $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ avec $\Psi_i^{n_i}$ des paramètres simples génériques de sorte que

- (i) $(\Psi_1^{n_1})_p = \varphi_1^{n_1}$
- (ii) $(\Psi_2^{n_2})_p = \varphi_2^{n_2} \oplus \dots \oplus \varphi_r^{n_r}$.
- (iii) Il y a une place q de \mathbb{Q} décomposée dans le corps quadratique imaginaire \dot{F} telle que

$$(\Psi_1^{n_1})_q = \chi_1 \oplus \dots \oplus \chi_{n_1} \qquad (\Psi_2^{n_2})_q = \chi_{n_1+1} \oplus \dots \oplus \chi_n$$

où les χ_i sont non ramifiées et deux à deux distincts.

- (iv) $\Psi_\infty = \xi$.

Démonstration. — On utilise la même construction que celle dans la proposition 2.29. □

On fixe une représentation $\pi_p \in \Pi_\varphi(\mathbb{J}_b(\mathbb{Q}_p))$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.30 (et aussi le lemme 3.15), il existe une représentation automorphe $\tilde{\Pi}$ de $I(\mathbb{A})$ dans le paquet $\Pi_\Psi(I)$ de sorte que $\tilde{\Pi}_p = \pi_p$ et $\tilde{\Pi}_\infty = \check{\xi}$ (mais $\Pi^p = \tilde{\Pi}^p$ n'implique pas forcément $\Pi = \tilde{\Pi}$).

Prenons la partie $[\tilde{\Pi}^{\infty,p}]$ de la suite spectrale (3.2). Grâce au lemme 3.14, la suite spectrale dégénère, on obtient donc des isomorphismes

$$|\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \tilde{\Pi}^p}} \left(\text{Hom}_{\mathbb{J}_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \otimes [\tilde{\Pi}^{\infty,p}] = (H_c^q(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}} [\tilde{\Pi}^{\infty,p}].$$

En utilisant la formule de Matsushima couplée avec la proposition 3.2, on en déduit que

$$(3.13) \quad \sum_{\substack{\bar{\Pi} \in \mathcal{A}(I) \\ \bar{\Pi}^p = \tilde{\Pi}^p}} \left(\text{Hom}_{\mathbb{J}_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^q(\mathcal{M}), \bar{\Pi}_p)_{\text{cusp}} \right) = \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ \Pi^{\infty,p} = \tilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p \otimes \rho(\Pi)_p.$$

D'après le calcul dans la section 2.2, on a

$$\begin{aligned} S_\Psi &\cong \prod_{i=1}^2 O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^2 (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_\Psi^\natural. \\ S_\varphi &\cong \prod_{i=1}^r O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^r (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_\varphi^\natural. \\ S_{\Psi_\infty} &\cong \prod_{i=1}^n O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_{\Psi_\infty}^\natural. \end{aligned}$$

Les morphismes de localisation $S_\psi \rightarrow S_\varphi$ et $S_\psi \rightarrow S_{\psi_\infty}$ sont donnés comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 S_\psi^{\natural} & \longrightarrow & S_\varphi^{\natural} & & S_\psi^{\natural} & \longrightarrow & S_{\psi_\infty}^{\natural} \\
 (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r-1}) & & (x_1, x_2) & \longmapsto & (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n_2})
 \end{array}$$

Si on a une représentation irréductible τ de S_φ^{\natural} ou de $S_{\psi_\infty}^{\natural}$, on note $\bar{\tau}$ la représentation induite sur S_ψ^{\natural} par les morphismes de localisation.

Pour $1 \leq i \leq r$, on note τ_i le caractère de S_φ^{\natural} défini par la définition 3.1.

Le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans S_φ^{\natural} . Les représentations dans le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ sont paramétrées par les éléments de $\text{Irr}(S_\psi^{\natural}, \chi_I)$ où χ_I est calculé en fonction de a_p^I (voir section 2.3 et exemple 2.1) et celles dans le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ sont paramétrées par les éléments de $\text{Irr}(S_\psi^{\natural}, \chi_G)$ où χ_G est calculé en fonction de a_p^G .

Puisque les rôles des τ_i pour $1 \leq i \leq r$ sont identiques, il suffit de montrer que $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$ pour $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} = \tau_1$.

Choisissons $\pi'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} = \tau_1$. D'après (3.10) et la description explicite des caractères $\tau_\xi \cdot \tau_{\pi_i}$ dans (3.12), on en déduit que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = n_1$.

Comme $\tilde{\Pi}$ est une représentation automorphe de $I(\mathbb{A})$, on en déduit que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}$ est une représentation automorphe de $\dot{G}(\mathbb{A})$ si et seulement si

$$\bar{\tau}_{\pi_i} \cdot \bar{\tau}_{\pi'_p} = \bar{\tau}_\xi \cdot \bar{\tau}_{\pi_p}.$$

Puisque $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p} = \tau_1$, l'égalité ci-dessus équivaut à

$$\bar{\tau}_\xi \cdot \bar{\tau}_{\pi_i} = \bar{\tau}_1.$$

D'après l'étape 3, on a $\bar{\tau}_\xi \cdot \bar{\tau}_{\pi_i} = \bar{\lambda}_i$, donc $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}$ est une représentation automorphe de $\dot{G}(\mathbb{A})$ si et seulement si $\bar{\lambda}_i = \bar{\tau}_1$. En utilisant la description des morphismes de localisation ainsi que la définition de τ_1 (cf. définition 3.1) et de λ_i (cf. (3.12)), on voit que $\bar{\lambda}_i = \bar{\tau}_1$ si et seulement si $i \in \{1, \dots, n_1\}$. On en déduit que $\dim \rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p}) = n_1$. Le corollaire 3.11 implique que

$$\rho(\pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty, p})_p = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Maintenant en prenant la partie $[\pi'_p]$ -isotypique dans (3.13), on voit que

$$\sum_{\substack{\bar{\pi}_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p)) \\ \bar{\pi}_p \otimes \tilde{\Pi}^p \in \mathcal{A}(I)}} \sigma_{\bar{\pi}_p, \pi'_p} \otimes \pi'_p = \pi'_p \otimes r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Comme $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = n_1 = \dim r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1})$, on en déduit que

$$\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}. \quad \square$$

4. Appendice

Dans cet appendice on démontre un analogue plus faible du Théorème A pour F^+ un corps totalement réel de degré impair strictement plus grand que 1. Le principe de la démonstration repose sur l'étude des variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor $\text{Sh}_{/E}^\bullet$ définies sur leur corps reflex $\dot{E} = \dot{F}$ où $\dot{F} = \mathcal{K}F^+$ avec \mathcal{K} un corps quadratique imaginaire et plus particulièrement sur la géométrie de la fibre spéciale en une place p inerte dans \dot{F} d'un modèle Sh/\mathcal{O}_p où \mathcal{O}_p est l'anneau des entiers de \dot{F}_p .

PROPOSITION 4.1. — Soit $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow (\prod_{\tau \in \Phi} \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ un L -paramètre discret de $G(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ et $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ le L -paquet (supercuspidal) respectivement de $G(\mathbb{Q}_p)$ et de $J_b(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à φ . Alors pour π'_p une représentation cuspidale dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ on a

- (i) $\sigma_{\pi_p, \pi'_p}^i = 0$ si $i \neq n - 1$.
- (ii) $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = 0$ si $\pi_p \notin \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$,
- (iii) $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \dim \text{Hom}_{S_\varphi}(\tau_{\pi'_p} \otimes \tau_{\pi_p}, r_\mu \circ \varphi_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{D} = (\dot{F}, B, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, h, \dot{G})$ une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale de sorte que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies comme dans la proposition 3.13. Soit Sh la variété de Shimura associée, le groupe $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ est le groupe des similitudes unitaires quasi-déployé en n variables. En particulier Sh est de signature $(1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$ à l'infini et Sh est donc compacte.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport–Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et $I := (I^\phi)$ le groupe réductif associé. On sait que $I(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I(\mathbb{A}_f^p) = \dot{G}(\mathbb{A}_f^p)$. D'après la proposition 1.29 il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ -équivariante :

$$(4.1) \quad E_2^{t,q} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \xi}} \left(\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t(H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \otimes (\Pi^{\infty, p}) \implies (H^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}}.$$

Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ et appliquons la proposition 2.30 (et aussi le lemme 3.15) pour I et la représentation π_p ; on trouve une représentation automorphe $\bar{\Pi} \in \mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\bar{\Pi}_p = \pi_p, \bar{\Pi}_\infty = \check{\xi},$
- $\bar{\Pi} \cong \Pi'$ dès lors que $(\bar{\Pi})^p \cong (\Pi')^p.$

En utilisant le même argument que dans l'étape 2 de la démonstration du théorème principal on en déduit que

$$\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}) = \dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p},$$

où $\rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p})$ est la partie $[\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}]$ -isotypique dans la cohomologie de Sh.

D'autre part on a

$$\dim \rho(\pi'_p \otimes \bar{\Pi}^{\infty,p}) = \sum_{i=1}^n m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty,p}).$$

La formule de multiplicité du théorème 2.23 couplée avec la proposition 2.27 implique alors que $m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty,p})$ est soit nulle soit égale à 1. On en déduit donc que $\dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p}$ est égale au nombre de représentations π_i telle que $\bar{\tau}_\xi \cdot \bar{\tau}_{\pi_i} = \bar{\tau}_{\pi_p} \cdot \bar{\tau}_{\pi'_p}$. Nous utilisons le calcul fait dans l'étape 3 de la démonstration du théorème principal pour conclure. □

THÉORÈME 4.2. — Soit $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow (\prod_{\tau \in \Phi} \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ un L -paramètre discret de $G(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ et $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ le L -paquet (supercuspidal) respectivement de $G(\mathbb{Q}_p)$ et de $J_b(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à φ . Alors pour π'_p une représentation cuspidale dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ on a

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_\mu \circ \varphi_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Démonstration. — Soit \mathcal{D} une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale comme dans la proposition 3.13 de sorte que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre à division qui est en toute place finie soit déployée, soit une algèbre à division. Soit Sh la variété associée, le groupe $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = \text{GU}^*(n)$ est le groupe de similitudes unitaires quasi-déployé en n variables. En particulier Sh est de signature $(1, n - 1), (0, n) \cdots (0, n)$ à l'infini et Sh est compacte car $\text{End}_B(V)$ est une algèbre à division.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport–Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et I^ϕ le groupe réductif associé. On sait que $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I^\phi(\mathbb{A}_f^p) = \dot{G}(\mathbb{A}_f^p)$. D'après

la proposition 1.29, il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ -équivariante

$$(4.2) \quad E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \xi}} \left(\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \otimes (\Pi^{\infty,p}) \\ \implies (H^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}}$$

On choisit une représentation ξ de dimension finie de $I^\phi(\mathbb{C})$. Soit $\Pi(\xi)$ le L -paquet des représentations de séries discrètes de $\dot{G}(\mathbb{R})$ cohomologiques pour ξ .

Considérons une représentation supercuspidale $\tilde{\pi}_p$ dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$. D'après [7], il existe une représentation automorphe $\tilde{\Pi}$ de \dot{G} telle que $\tilde{\Pi}_p = \tilde{\pi}_p$ et $\tilde{\Pi}_\infty \in \Pi(\xi)$ et que $\tilde{\Pi}_{w_0}$ est supercuspidale pour une place w_0 inerte. On peut supposer de plus que pour toute place finie décomposée v telle que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre à division, la composante $\tilde{\Pi}_v$ et $JL(\tilde{\Pi}_v)$ soient supercuspidales, où JL est l'application de Jacquet-Langlands.

Maintenant, en appliquant le cas (A) du théorème 3.1.6 de [13] pour les groupes de similitudes unitaires globaux \dot{G} et I^ϕ , on obtient une représentation automorphe $\tilde{\Pi}^*$ de I^ϕ telle que $(\tilde{\Pi}^*)_w = (\tilde{\Pi})_w$ pour toute place finie $w \neq p$ et $(\tilde{\Pi}^*)_\infty = \xi$.

En prenant la partie $\tilde{\Pi}^{\infty,p}$ -isotypique de la suite spectrale (4.2), on a

$$E_2^{tq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi^p = (\tilde{\Pi}^*)^p}} \left(\text{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\text{cusp}} \right) \\ \implies (H^{t+q}(\text{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}} [\tilde{\Pi}^{\infty,p}]$$

LEMME 4.3. — Soit $\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi)$ telle que $\Pi^p = (\tilde{\Pi}^*)^p$ alors Π_p est dans le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$.

Démonstration. — On pose S_0 l'ensemble des places finies décomposées telles que $\text{End}_B(V)$ est une algèbre à division et $S = S_0 \cup \{w_0\}$ où w_0 est la place inerte qu'on fixe auparavant. On peut supposer que $|S_0| \geq 2$.

D'après la proposition 10.1.1 de [10], il existe un groupe de similitudes unitaires global GU^1 tel que $(\text{GU}^1)_v$ est quasi-déployé si v est décomposée et $(\text{GU}^1)_w = (I^\phi)_w$ pour toute $w \notin S$.

D'après le cas (B) du théorème 3.1.6 de [13], il existe une représentation automorphe Π_1 de $\text{GU}^1(\mathbb{A})$ telle que $(\Pi_1)_w = \Pi_w$ pour toute $w \notin S$. On obtient en particulier $(\Pi_1)_p = \Pi_p$.

Par le même argument, on obtient un groupe de similitudes unitaires GU^2 tel que $(\mathrm{GU}^2)_v$ est quasi-déployé si v est décomposée et $(\mathrm{GU}^2)_w = (\dot{G})_w$ pour toute $w \notin S$ ainsi qu'une représentation automorphe Π_2 de $\mathrm{GU}^2(\mathbb{A})$ satisfaisant $(\Pi_2)_w = \tilde{\Pi}_w$ pour toute $w \notin S$. En particulier on a $(\Pi_2)_p = \tilde{\pi}_p$ et $(\Pi_2)_w = (\Pi_1)_w$ pour presque toute w .

Puisque GU^1 et GU^2 sont des formes intérieures pures, le théorème 2.23 implique que le L -paramètre global Ψ_1 de Π_1 et le L -paramètre global Ψ_2 de Π_2 sont identiques. Comme $(\Pi_2)_p = \tilde{\pi}_p$ est dans le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$, on en déduit alors que la représentation $(\Pi_1)_p = \Pi_p$ est dans le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$. □

Puisque le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales, d'après le lemme 4.3 on voit que Π_p est supercuspidale dès que $\Pi^p = (\tilde{\Pi}^*)^p$. D'autre part, le lemme 3.14 implique que

$$\mathrm{Ext}_{J_b(\mathbb{Q}_p)}^t (H_c^q(\mathcal{M}_{U_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p) = 0$$

si $t > 0$. Donc la suite spectrale ci-dessus dégénère. On obtient donc des isomorphismes :

$$(4.3) \quad |\ker^1 \mathbb{Q}, \dot{G}| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi^p = (\tilde{\Pi}^*)^p}} \left(\mathrm{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^i(\mathcal{M}), \Pi_p)_{\mathrm{cusp}} \right) = (H^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi))_{p\text{-cusp}} [\tilde{\Pi}^{\infty,p}].$$

D'autre part, la formule de Matsushima nous donne une décomposition :

$$(4.4) \quad H^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p\text{-cusp}} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G})_\xi \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} \Pi^\infty \otimes \rho_i(\Pi^\infty),$$

où $\rho_i(\Pi^\infty)$ est une représentation continue de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\mathcal{A}(\dot{G})_\xi$ est l'ensemble des représentations automorphes de \dot{G} cohomologiques pour ξ .

Puisque l'application $\eta_{\chi_{\kappa,*}}$ est injective (voir proposition 2.10) et Π_v est supercuspidale, le même argument que celui dans A.7.8 de [10] montre le résultat suivant :

$$\rho_i(\pi'_p \otimes \Pi^{\infty,p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n-1 = \dim \mathrm{Sh} \\ (r_\mu \circ \varphi_{F_p})^{m(\Pi)} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

En comparant les égalités (4.3) et (4.4) avec le calcul de $\rho_i(\pi'_p \otimes \Pi^{\infty,p})$, on en déduit que :

$$(4.5) \quad \sum_{\bar{\pi}_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \left(\text{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} (H_c^{n-1}(\mathcal{M}), \bar{\pi}_p)_{\text{cusp}} \right)^{a_{I^\phi}(\bar{\pi}_p)} \\ = \sum_{\pi'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes (r_\mu \circ \varphi_{F_p})^{a_{\dot{G}}(\pi'_p)} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$$

où $a_{I^\phi}(\bar{\pi}_p)$ est la multiplicité de $\check{\xi} \otimes \bar{\pi}_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty,p}$ dans l'espace des formes automorphes de I^ϕ et $a_{\dot{G}}(\pi'_p)$ est la multiplicité de $\pi_\xi \otimes \pi'_p \otimes \tilde{\Pi}^{\infty,p}$ dans l'espace des formes automorphes de \dot{G} (d'après le théorème 3.1.7 de [13], la multiplicité $a_{\dot{G}}(\pi'_p)$ ne dépend pas de $\pi_\xi \in \Pi(\rho)$).

Pour $\tilde{\pi}_p$ la représentation supercuspidale dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ fixée, on a en particulier l'égalité :

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} (\sigma_{\pi_p, \pi'_p})^{a_{I^\phi}(\pi_p)} = (r_\mu \circ \varphi_{F_p})^{a_{\dot{G}}(\tilde{\pi}_p)} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

De plus comme φ est un paramètre discret et μ est de signature $(1, n-1)$, $(0, n), \dots, (0, n)$ on en déduit que $(r_\mu \circ \varphi_{F_p})$ est une représentation de dimension n et est une somme (sans multiplicité) des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes. D'autre part on a $a_{\dot{G}}(\tilde{\pi}_p) > 0$ et d'après la proposition 4.1 on a $\sum_{\pi_p \in (\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p)))} \dim \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = n$, ce qui implique

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = (r_\mu \circ \varphi_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ARTHUR, « Classifying automorphic representations », in *Current developments in mathematics 2012*, International Press, Somerville, MA, 2013, p. 1-58.
- [2] ———, *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, xviii+590 pages.
- [3] A. BOREL & W. CASSELMAN, « L^2 -cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume », *Duke Math. J.* **50** (1983), n° 3, p. 625-647.
- [4] A. BOREL, « Stable real cohomology of arithmetic groups », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 235-272.
- [5] P. BOYER, « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math.* **138** (1999), n° 3, p. 573-629.
- [6] P. BOYER, « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples », *Invent. Math.* **177** (2009), n° 2, p. 239-280.
- [7] L. CLOZEL, « On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms », *Invent. Math.* **83** (1986), n° 2, p. 265-284.

- [8] L. CLOZEL, M. HARRIS, J.-P. LABESSE & B.-C. NGÔ (éds.), *On the stabilization of the trace formula*, Stabilization of the Trace Formula, Shimura Varieties, and Arithmetic Applications, vol. 1, International Press, Somerville, MA, 2011, xiv+527 pages.
- [9] G. FALTINGS, « A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld », in *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math., vol. 300, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, p. 115-129.
- [10] L. FARGUES, « Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de Langlands locales », in *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport–Zink et correspondances de Langlands locales*, Astérisque, n° 291, Société Mathématique de France, 2004, p. 1-199.
- [11] L. FARGUES, A. GENESTIER & V. LAFFORGUE, *L’isomorphisme entre les tours de Lubin–Tate et de Drinfeld*, Progress in Mathematics, vol. 262, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008, xxii+406 pages.
- [12] L. GUERBEROFF & J. LIN, « Galois Equivariance of critical values of L-Functions for Unitary groups », 2016.
- [13] M. HARRIS & J.-P. LABESSE, « Conditional base change for unitary groups », *Asian J. Math.* **8** (2004), n° 4, p. 653-683.
- [14] M. HARRIS & R. TAYLOR, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich, viii+276 pages.
- [15] G. HENNIART, « Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique », *Invent. Math.* **139** (2000), n° 2, p. 439-455.
- [16] H. JACQUET & J. A. SHALIKA, « On Euler products and the classification of automorphic representations. II », *Amer. J. Math.* **103** (1981), p. 777-815.
- [17] T. KALETHA, A. MINGUEZ, S. W. SHIN & P.-J. WHITE, « Endoscopic Classification of Representations : Inner Forms of Unitary Groups », <https://arxiv.org/abs/1409.3731>, 2014.
- [18] R. E. KOTTWITZ, « Stable trace formula : cuspidal tempered terms », *Duke Math. J.* **51** (1984), n° 3, p. 611-650.
- [19] ———, « Points on some Shimura varieties over finite fields », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), n° 2, p. 373-444.
- [20] ———, « Isocrystals with additional structure. II », *Compos. Math.* **109** (1997), n° 3, p. 255-339.
- [21] ———, « $B(G)$ for all local and global fields », <https://arxiv.org/abs/1401.5728>, 2014.
- [22] K.-W. LAN, « Compactifications of PEL-type Shimura varieties in ramified characteristics », *Forum Math. Sigma* **4** (2016), article no. e1 (98 pages).
- [23] K.-W. LAN & B. STROH, « Nearby cycles of automorphic étale sheaves », *Compos. Math.* **154** (2018), n° 1, p. 80-119.
- [24] R. P. LANGLANDS, « Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2* (Providence, R.I.), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, American Mathematical Society, 1979, p. 205-246.
- [25] ———, « On the classification of irreducible representations of real algebraic groups », in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Math. Surveys Monogr., vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989, p. 101-170.
- [26] E. LOOIJENGA & M. RAPOPORT, « Weights in the local cohomology of a Baily–Borel compactification », in *Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989)*,

- Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, p. 223-260.
- [27] E. LOOLJENGA, « L^2 -cohomology of locally symmetric varieties », *Compos. Math.* **67** (1988), n° 1, p. 3-20.
- [28] E. MANTOVAN, « On the cohomology of certain PEL-type Shimura varieties », *Duke Math. J.* **129** (2005), n° 3, p. 573-610.
- [29] ———, « On non-basic Rapoport–Zink spaces », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), n° 5, p. 671-716.
- [30] ———, « l -adic étale cohomology of PEL type Shimura varieties with non-trivial coefficients », in *WIN – women in numbers*, Fields Inst. Commun., vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, p. 61-83.
- [31] C. MØGLIN, « Classification et changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p -adiques », *Pacific J. Math.* **233** (2007), n° 1, p. 159-204.
- [32] C. P. MOK, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, vol. 235, Mem. Amer. Math. Soc., n° 1108, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, vi+248 pages.
- [33] A. MOKRANE & J. TILOUINE, « Cohomology of Siegel varieties with p -adic integral coefficients and applications », in *Cohomology of Siegel varieties*, Astérisque, n° 280, Société Mathématique de France, 2002, p. 1-95.
- [34] S. MOREL, *On the cohomology of certain noncompact Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 173, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, With an appendix by Robert Kottwitz, xii+217 pages.
- [35] M. RAPOPORT & T. ZINK, *Period spaces for p -divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996, xxii+324 pages.
- [36] M. RAPOPORT, « Non-Archimedean period domains », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)* (Basel), Birkhäuser, 1995, p. 423-434.
- [37] L. SAPER & M. STERN, « L_2 -cohomology of arithmetic varieties », *Ann. of Math. (2)* **132** (1990), n° 1, p. 1-69.
- [38] P. SCHOLZE & J. WEINSTEIN, « Berkeley lectures on p -adic geometry », 2020.
- [39] X. SHEN, « On the Hodge–Newton filtration for p -divisible groups with additional structures », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2014), n° 13, p. 3582-3631.
- [40] S. W. SHIN, « Automorphic Plancherel density theorem », *Israel J. Math.* **192** (2012), n° 1, p. 83-120.
- [41] ———, « On the cohomology of Rapoport–Zink spaces of EL-type », *Amer. J. Math.* **134** (2012), n° 2, p. 407-452.

Manuscrit reçu le 9 février 2019,
révisé le 2 juillet 2020,
accepté le 10 mars 2022.

Kieu Hieu NGUYEN
University of Münster (WWU)
Einsteinstrasse, 62.
48149 Münster (Germany)
nguyenkieu.hieu.dn@gmail.com