ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DENY

Familles fondamentales. Noyaux associés

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 73-101

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__73_0>

FAMILLES FONDAMENTALES. NOYAUX ASSOCIÉS

par **Jacques DENY** (à Strasbourg).

La considération des moyennes sphériques joue un rôle essentiel dans la théorie du potentiel newtonien et des fonctions harmoniques; or la fonction $f_r(x)$, valeur moyenne de la fonction f[1] sur la sphère de centre x et de rayon r, peut s'écrire $f * \sigma_r(x)$ produit de composition de f par la mesure σ_r, distribution homogène de la masse $+1$ sur la sphère de centre o et de rayon r.

Examinons d'un peu près les relations entre cette famille de mesures σ_r (avec $r > 0$) et le noyau newtonien $K(x) = |x|^{2-m}$ (dans l'espace euclidien R^m avec $m > 2$). La valeur moyenne $K_r(x) = K * \sigma_r(x)$ vaut $|x|^{2-m}$ si $|x| \geqslant r$ et r^{2-m} si $|x| \leqslant r$; d'où ces deux propriétés :

1° quelle que soit σ_r la fonction $K(x) - K * \sigma_r(x)$ est $\geqslant 0$, $\not\equiv 0$ et nulle hors d'un compact;

2° quel que soit le voisinage V de l'origine o, il existe une σ_r telle que $K(x) - K * \sigma_r(x) = 0$ hors de V.

Bien entendu toute fonction de la forme $h|x|^{2-m} + H$ ($h =$ constante > 0, $H =$ fonction harmonique) satisfait également à ces deux conditions 1° et 2° (rappelons en passant que les fonctions harmoniques positives sont constantes); mais on peut montrer que $|x|^{2-m}$ est, à un facteur > 0 près, la seule fonction $\geqslant 0$ semi-continue inférieurement vérifiant ces deux conditions et la suivante :

3° $\lim\limits_{p \to \infty} K * \sigma_r^p(x) = 0$ quelle que soit σ_r (ici, comme dans toute la suite, μ^p désigne le produit de composition de p mesures identiques à μ).

Il existe d'autres familles de mesures positives associées à une fonction $K(x)$ par les conditions 1°-3°; voici un exemple extrêmement simple : $K(x) = \exp(-a|x|)$ dans $R^1 (a > 0)$; $\sigma_r =$ mesure constituée par deux masses égales à $1/2 \operatorname{ch} ar$, placées aux points

[1] Si on suppose f sommable sur tout compact, $f_r(x)$ est définie presque partout.

$+r$ et $-r$. Cette fois-ci la fonction $\geqslant 0$ continue la plus générale satisfaisant aux conditions 1° et 2° est

$$h \exp(-a|x|) + k \exp(-ax) + k' \exp(-ax) (h > 0 ;\ k,\ k' \geqslant 0) ;$$

pour qu'une telle fonction satisfasse également à 3° il faut et il suffit que $k = k' = 0$ (observons que $k \exp(ax) + k' \exp(-ax)$, solution de $a^2y - y'' = 0$, peut être dite harmonique pour le noyau $\exp(-a|x|)$, qui est à un facteur près la solution élémentaire de cette équation différentielle).

Plus généralement il est montré dans [5] que pour tout noyau $K(x)$ d'une théorie du potentiel, satisfaisant à diverses hypothèses de régularité, l'existence d'un « principe du maximum » est équivalente à celle d'une famille de mesures $\geqslant 0$ attachées à $K(x)$ par les conditions 1° et 2° (une telle famille est mise en évidence par M. Riesz dans le cas du noyau d'ordre α, avec $0 < \alpha \leqslant 2$; voir [8]) et il serait facile de voir que la condition 3° est également vérifiée.

De telles familles seront appelées *fondamentales* ; nous sommes tout naturellement conduits aux définitions suivantes (nous nous placerons désormais dans un groupe abélien localement compact G, donné une fois pour toutes) :

DÉFINITION 1. — *Nous appellerons famille fondamentale tout ensemble* (Σ) *de mesures* $\sigma \geqslant 0$ *auquel on peut associer une mesure* $\varkappa \geqslant 0$, *appelée base de* (Σ), *de façon que soient vérifiés les axiomes suivants :*

(S_1) : $\varkappa * \sigma$ *a un sens pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$; $\varkappa - \varkappa * \sigma$ *est* $\geqslant 0$, *non nulle et à support compact.*

(S_2) *A tout voisinage* V *de l'origine* o *de* G *on peut faire correspondre une* $\sigma \in (\Sigma)$ *telle que le support de* $\varkappa - \varkappa * \sigma$ *soit contenu dans* V.

DÉFINITION 2. — *Toute mesure réelle* U, *telle que* $U * \sigma$ *ait un sens pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$ *et soit* $\leqslant U$ (*resp.* $= U$) *sera dite surharmonique* (*resp. harmonique*) *pour la famille* (Σ) (2).

Si $\varkappa$ est une base de (Σ), $h\varkappa$ est évidemment une base quel que soit $h > 0$, mais il peut en exister bien d'autres. Par contre nous verrons qu'il existe une base, et une seule à un facteur > 0 près, telle qu'on ait en outre :

(S_3) *Pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$, $\varkappa * \sigma^p \to 0$ *vaguement* (*pour* $p \to \infty$).

Une telle base sera dite *noyau associé* à (Σ). Si K est un noyau

(2) On verra des exemples très simples de familles fondamentales par rapport auxquelles il existe des mesures harmoniques qui ne sont pas des fonctions (c'est-à-dire qui ne sont pas de la forme $f(x)\,dx$, où dx est la mesure invariante sur G) ; voir § 13.

associé, la base de (Σ) la plus générale est $\varkappa = hK + H$, où h est une constante > 0 et H une mesure harmonique $\geqslant 0$ quelconque.

Les familles fondamentales sont introduites en toute généralité dans [7] (sous le nom de familles (Σ), et avec la restriction $\int d\sigma \leqslant 1$), mais on y suppose *a priori* l'existence d'un noyau associé (c'est-à-dire d'une base pour laquelle la condition (S_3) est satisfaite) ; elles y sont étudiées surtout dans un cas très particulier (3), en vue de construire une classe de noyaux pour lesquels il existe un théorème du balayage.

Dans cet article nous avons un double but : tout d'abord faire une étude précise de ces familles fondamentales, des noyaux associés, des mesures harmoniques et surharmoniques (nous établirons notamment un théorème de décomposition du type de F. Riesz par une méthode qui semble nouvelle, même dans le cas newtonien) ; d'autre part améliorer les résultats de [7] concernant le problème du balayage ; donnons quelques renseignements comparatifs :

DÉFINITION 3. — *Une mesure* $K \geqslant 0$ *étant donnée, nous dirons que le balayage est possible pour le noyau* K *si, à toute mesure* $\mu \geqslant 0$ *à support compact, et à tout ouvert borné* ω (4), *on peut associer une* $\mu' \geqslant 0$ *portée par l'adhérenee* $\bar{\omega}$ *et telle que* :

(B_1) $K * \mu' \leqslant K * \mu$.

(B_2) $K * \mu' = K * \mu$ *dans* ω (*les restrictions à* ω *de* $K * \mu'$ *et* $K * \mu$ *coïncident*).

Nous verrons que *le balayage est possible pour tout élément de la classe* (K_a) *des noyaux associés*, c'est-à-dire pour tous les noyaux associés aux diverses familles fondamentales (5) ; en particulier pour la sous-classe (K_e) :

DÉFINITION 4. — *Nous appellerons classe élémentaire et nous désignerons par* (K_e) *l'ensemble des noyaux de la forme* :

$$K = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \ (6)$$

(3) Celui d'une famille fondamentale constituée par *une seule* mesure σ, de masse totale $\leqslant 1$.

(4) C'est-à-dire d'adhérence compacte.

(5) Pour ces noyaux on peut lever certaines restrictions (μ à support compact compact, ω borné) et définir canoniquement la balayée sur tout ouvert de toute $\mu \geqslant 0$ dont le « potentiel » $K * \mu$ est défini.

(6) On a posé $\sigma^0 = \varepsilon$, mesure de Dirac (constituée par la masse $+1$ à l'origine). La définition de (K_e) se trouve dans [7], avec la restriction : $\int d\sigma \leqslant 1$.

où a est une constante $\geqslant 0$ quelconque, et σ une mesure $\geqslant 0$ quelconque (telle que la série ci-dessus soit vaguement convergente).

Or nous montrerons d'une part que *l'ensemble des noyaux pour lesquels le balayage est possible* (selon la définition 3) *est fermé pour la topologie vague* ; d'autre part que (K_e) *est partout dense dans* (K_a). L'adhérence vague de (K_e) fournit donc une classe très vaste et très simple de noyaux pour lesquels le balayage est possible. Ces noyaux ne sont pas nécessairement de type positif (ni même symétriques) comme ceux qu'on considère habituellement en théorie du potentiel.

Voici en quoi consiste essentiellement le progrès sur [7] : 1°) dans la définition du balayage on imposait en outre une condition (B_3) $\int d\mu' \leqslant \int d\mu$, ce qui simplifiait la démonstration du théorème de fermeture mais excluait a priori certains noyaux ; 2°) la possibilité du balayage (avec cette définition plus restrictive) n'était établie que pour la sous-classe de (K_e) constituée par les noyaux construits à partir d'une σ *symétrique* et de masse totale < 1 (7).

Pour obtenir cette seconde extension, une méthode utilisant les bornes inférieures d'ensembles de mesures surharmoniques (8) remplacera avantageusement des considérations plus ou moins délicates sur la notion d'énergie.

Signalons ici que la lecture de cet article ne suppose aucune connaissance préalable de la Théorie du Potentiel (9) : les démonstrations font seulement appel aux propriétés fondamentales de la topologie vague sur l'ensemble des mesures de Radon positives, définies dans G (10).

1. — Préliminaires.

Nous nous sommes placés dans un groupe abélien localement compact G ; $\mathcal{C}^+(G)$ désignera l'ensemble des fonctions continues $\geqslant 0$, à support compact (nulles hors d'un compact) ; $\mathfrak{M}$ l'ensemble des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur G (ensemble des formes linéaires $\geqslant 0$ sur $\mathcal{C}^+(G)$), muni de la topologie vague ; rappelons qu'une base de

(7) Cet ensemble est appelé dans [7] la classe restreinte et noté (Kr).

(8) C'est au fond la méthode des « familles de Perron », utilisées systématiquement en théorie newtonienne par M. Brelot ; les paragraphes 8 et 10 de ce travail sont d'ailleurs inspirés par [2].

(9) Si, au cours du texte, quelques renvois sont faits à des articles spécialisés, c'est uniquement pour en comparer les résultats avec les nôtres.

(10) Presque tous les résultats auxquels on fera appel se trouvent dans [1], chap. 1, et dans [4], §§ I et II.

voisinage d'une $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ est constituée par les ensembles $V(f_1, \ldots, f_n, h)$ de mesures $\mu \in \mathfrak{M}$ satisfaisant à $|\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| \leqslant h$ ($f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^+(G)$, $h =$ constante > 0).

Nous envisagerons constamment des produits de composition de mesures à support non compact. Lorsqu'il s'agit de mesures $\geqslant 0$, un tel produit, s'il a un sens, est associatif et distributif. Si λ, μ, ν sont des mesures *réelles* quelconques, $\lambda * \mu * \nu$ « a un sens » si λ, μ, ν peuvent s'écrire respectivement $\lambda_1 - \lambda_2$, $\mu_1 - \mu_2$, $\nu_1 - \nu_2$ ($\lambda_i, \mu_j, \nu_k \geqslant 0$), chacun des $\lambda_i * \mu_j * \nu_k$ ayant un sens. Un tel produit est alors associatif et distributif, mais, lorsqu'on utilisera les opérations d'algèbre correspondantes, il faudra bien prendre garde à ne pas mettre les mesures données sous une forme telle que certains des $\lambda_i * \mu_j * \nu_k$ n'aient pas de sens.

Nous ferons un fréquent usage de trois lemmes simples concernant le produit de composition de mesures de $\mathfrak{M}$:

Lemme A. — *Soient λ, μ, ν trois mesures $\geqslant 0$ convergeant vaguement (suivant un même filtre $\mathcal{F}$) vers les mesures respectives λ_0, μ_0, ν_0 ; si $\lambda * \mu$ a un sens et est majoré par ν, $\lambda_0 * \mu_0$ a un sens et est majoré par ν_0.*

Démonstration sommaire : soit $f \in \mathcal{C}^+(G)$; posons

$$F_\mu(x) = \int f(x+y)\,d\mu(y), \qquad F_0(x) = \int f(x+y)\,d\mu_0(y)\,;$$

il s'agit de montrer que $\int F_0\,d\lambda_0 \leqslant \int f\,d\nu_0$.

Or la fonction continue $F_\mu(x)$ converge vers $F_0(x)$ uniformément sur tout compact; on a donc, quelle que soit $g \in \mathcal{C}^+(G)$, $g \leqslant 1$:

$$\int F_0 g\,d\lambda_0 = \lim_{\mathcal{F}} \int F_\mu g\,d\lambda \leqslant \lim_{\mathcal{F}} \int F_\mu\,d\lambda = \lim \int f\,d\nu = \int f\,d\nu_0\,;$$

d'où le résultat, car $\int F_0\,d\lambda_0 = \sup \int F_0 g\,d\lambda_0$ ($g \in \mathcal{C}^+$, $g \leqslant 1$).

Lemme B. — *Soient $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ deux suites monotones (toutes deux croissantes ou décroissantes) convergeant vaguement vers λ_0 et μ_0 respectivement; si $\lambda_n * \mu_n$ a un sens et est majoré par une mesure fixe, $\lambda_0 * \mu_0$ a un sens et est limite vague de $\lambda_n * \mu_n$.*

Il résulte des hypothèses que $\{\lambda_n * \mu_n\}$ est monotone et converge vaguement vers une mesure $\alpha \geqslant 0$; d'après le lemme A, $\lambda_0 * \mu_0$ a un sens et est majorée par α ; évidemment si les suites sont croissantes, $\lambda_0 * \mu_0 \geqslant \lambda_n * \mu_n$ d'où $\lambda_0 * \mu_0 \geqslant \alpha$, d'où le résultat. Si elles sont décroissantes, il suffit de considérer $\lambda'_n = \lambda_1 - \lambda_n$, $\mu'_n = \mu_1 - \mu_n$.

Remarque. — Le lemme B est encore valable si on remplace les suites monotones par des ordonnés filtrants.

Lemme C. — *Soit $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$ un ensemble compact* (*pour la topologie vague*) *de mesures positives, ne contenant pas* o (*la mesure nulle*)*; à toute $\mu \in \mathcal{A}$ associons une $\nu \in \mathfrak{M}$ telle que $\mu * \nu$ ait un sens; alors, si l'ensemble des $\mu * \nu$ est relativement compact, il en est de même de l'ensemble des ν.*

Soit en effet C un compact de G ; l'ensemble des mesures $\check{\mu} * \varepsilon^{-x} (\mu \in \mathcal{A},\ x \in C)$ (11), est *compact* et ne contient pas la mesure nulle o ; il ne contient donc aucun élément d'un voisinage de o, et par conséquent il existe une $f \in \mathcal{C}^+(G)$ telle que :

$$\check{\mu} * \varepsilon^{-x}(f) > 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \check{\mu} * \check{f}(x) > 1$$

pour toute $\mu \in \mathcal{A}$ et tout $x \in C$.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{C}^+(G)$, $m = \sup \varphi(x) (x \in G)$; soit C le support (compact) de φ et soit f associée comme il vient d'être vu à $\mathcal{A}$ et C ; on a évidemment $\varphi(x) \leqslant m \check{\mu} * \check{f}(x)$ partout, d'où :

$$\int \varphi d\nu \leqslant m \int (\check{\mu} * \check{f}) d\nu = m \mu * \nu (\check{f}),$$

quantité uniformément bornée (quelle que soit $\mu \in \mathcal{A}$) puisque $\check{f} \in \mathcal{C}^+(G)$ et que l'ensemble des $\mu * \nu$ est relativement compact par hypothèse, donc vaguement borné (12). $\int \varphi d\nu$ est donc uniformément borné, et par suite l'ensemble des ν est relativement compact.

Cas particulier. Soit $\varkappa$ une mesure $\geqslant 0$ différente de la mesure nulle ; soit $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ un ensemble de mesures $\mu \geqslant 0$ telles que $\varkappa * \mu$ ait un sens ; si l'ensemble des $\varkappa * \mu$ est relativement compact, il en est de même de $\mathcal{E}$.

2. — Propriétés élémentaires des mesures surharmoniques.

Les mesures surharmoniques et harmoniques par rapport à une famille fondamentale donnée (Σ) jouissent des propriétés suivantes.

(11) $\check{\mu}$ = mesure symétrique de μ (par rapport à l'élément-origine de G) ; ε^{-x} = mesure constituée par la masse $+1$ placée au point $-x$; $\check{f}(x) = f(-x)$.

(12) Pour qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de mesures $\mu \geqslant 0$ soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il soit *vaguement borné*, c'est-à-dire que, pour toute $g \in \mathcal{C}^+(G)$, on ait : $\sup_{\mu \in \mathcal{E}} \int g\, d\mu < \infty$.

qui sont des conséquences immédiates des définitions 1 et 2 de l'introduction :

a) *La mesure nulle est harmonique. Pour que toute constante soit harmonique, il faut et il suffit que* $\int d\sigma = 1$ *pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$ *; pour que toute constante* $\geqslant 0$ *soit surharmonique, il faut et il suffit que* $\int d\sigma \leqslant 1$ *pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$ [13].

b) *Si* U *et* V *sont surharmoniques,* $aU + bV$ *est surharmonique quelles que soient les constantes* a *et* $b \geqslant 0$ *;* même énoncé pour des mesures harmoniques a et b étant des constantes quelconques.

c) *Toute limite vague de mesures surharmoniques* $\geqslant 0$ *est surharmonique*. Cela résulte du lemme A.

d) *Soient* U *surharmonique (harmonique)* $\geqslant 0$, *et* $\mu \geqslant 0$ *; si* $U * \mu$ *a un sens, c'est une mesure surharmonique (harmonique).*

Il est clair que toute base $\varkappa$ de (Σ) est surharmonique ; un produit de composition tel que $\varkappa * \mu (\mu \geqslant 0)$, s'il a un sens, est donc surharmonique.

e) *La borne inférieure* U *d'une famille quelconque* $(\mathfrak{U})$ *de mesures surharmoniques réelles bornées inférieurement est surharmonique pourvu que* $U * \sigma$ *ait un sens pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que $(\mathfrak{U})$ admette une minorante surharmonique, ce qui a lieu notamment dans les deux cas suivants :

1° $(\mathfrak{U})$ *est finie* [14].

2° $(\mathfrak{U})$ *est constituée par des mesures* $\geqslant 0$.

3. — Mesure positive associée à une mesure surharmonique.

Soit σ un élément de la famille fondamentale donnée (Σ), de base $\varkappa$; nous utiliserons les notations suivantes :

a_σ est le nombre > 0 tel que la mesure $\geqslant 0$ à support compact $\alpha_\sigma = a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * \varkappa$ ait pour masse totale 1 ; l'existence de a_σ est assurée par la condition (S_1) de la définition 1. On verra plus loin comment a_σ et α_σ dépendent de la base choisie $\varkappa$ (corollaire *b* du théorème 6).

[13] La constante a est identifiée ici avec la mesure $a\,dx$, où dx est la mesure invariante sur G.

[14] Il suffit de montrer que si $U * \sigma$ et $V * \sigma$ ont un sens (U, V mesures réelles), $W * \sigma$ a un sens $(W = \inf(U, V))$; or $W = (U + V - |U - V|)/2$, et les produits $(U + V) * \sigma$, $(U - V) * \sigma$, $|U - V| * \sigma$ ont un sens ($|U - V| =$ variation totale de $U - V$).

Posons : $D_\sigma = a_\sigma(\varepsilon - \sigma)$; on peut définir ainsi les mesures surharmoniques (harmoniques) : ce sont les mesures U telles que $D_\sigma * U$ ait un sens et soit $\geqslant 0$ (resp. $= 0$) pour toute $\sigma \in (\Sigma)$.

En particulier : $D_\sigma * \varkappa = \alpha_\sigma$.

Posons encore :

$$K_\sigma^{(p)} = \frac{1}{a_\sigma} \sum_{n=0}^{p-1} \sigma^n$$

(avec la convention $\sigma^0 = \varepsilon$) ; on a :

$$(1) \qquad D_\sigma * K_\sigma^{(p)} = \varepsilon - \sigma^p$$

$$(2) \qquad \alpha_\sigma * K_\sigma^{(p)} = \varkappa - \varkappa * \sigma^p.$$

La suite des mesures $\varkappa * \sigma^p$ est décroissante ; elle admet donc une limite vague qu'on appellera provisoirement ρ_σ :

$$\rho_\sigma = \lim_p \varkappa * \sigma^p.$$

Nous allons montrer maintenant qu'à toute mesure surharmonique réelle U on peut associer canoniquement une mesure positive, comme il est bien connu en théorie newtonienne (où cette mesure est parfois désignée sous le nom de « masses associées à U »).

THÉORÈME 1. — *Soit une mesure surharmonique réelle* U ; *posons* $\mu_\sigma = D_\sigma * U$; *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *et une seule telle que*

$$\mu_\sigma = \alpha_\sigma * \mu$$

pour toute $\sigma \in (\Sigma)$; μ *sera dite mesure associée à* U (*pour la base* $\varkappa$).

Soient en effet σ et $\sigma' \in (\Sigma)$. Le produit de composition

$$D_\sigma * D_{\sigma'} * \varkappa = a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * a_{\sigma'}(\varepsilon - \sigma') * \varkappa$$

a un sens (puisque $\varkappa * \sigma$, $\varkappa * \sigma'$ et $\varkappa * \sigma * \sigma'$ ont un sens). En utilisant l'associativité il vient, d'après $D_\sigma * \varkappa = \alpha_\sigma$ et $D_{\sigma'} * \varkappa = \alpha_{\sigma'}$:

$$\alpha_\sigma * D_{\sigma'} = \alpha_{\sigma'} * D_\sigma.$$

Comme $D_\sigma * U$, $D_{\sigma'} * U$ ont un sens, et que α_σ et $\alpha_{\sigma'}$ sont à support compact, on peut composer les deux membres de cette relation avec U ; l'associativité des produits ainsi obtenus donne :

$$\alpha_\sigma * \mu_{\sigma'} = \alpha_{\sigma'} * \mu_\sigma.$$

Prenons alors pour σ' une mesure σ_v associée au voisinage compact v

de o, origine de G (voir la définition de (S_2)). Il résulte de la relation ci-dessus que, lorsqu'on fait « tendre » v vers o, μ_{σ_v} converge vaguement (suivant le filtre des sections) vers une certaine mesure μ [15] et on a à la limite (car $\alpha_{\sigma_v} \to \varepsilon$, et on peut le supposer porté par un compact fixe)

$$\alpha_\sigma * \mu = \mu_\sigma.$$

Il reste à vérifier qu'une telle μ est unique ; or s'il existait deux telles mesures μ et μ', on aurait $\alpha_{\sigma_v} * \mu = \alpha_{\sigma_v} * \mu'$ d'où, à la limite, $\mu = \mu'$.

Remarques : a) La mesure μ associée à U semble dépendre de la base $\varkappa$; on verra plus loin (§ 6) qu'elle est unique à un facteur > 0 près.

b) *Pour qu'une mesure surharmonique réelle soit harmonique, il faut et il suffit que sa mesure associée soit nulle.* C'est évident.

c) *La mesure associée à* $\varkappa$ *est* ε *; plus généralement, si* $\varkappa * \mu$ *a un sens* ($\mu \geqslant 0$), *la mesure associée est* μ. Cela résulte de $D_\sigma * \varkappa = \alpha_\sigma$.

d) Soient τ une mesure $\geqslant 0$ et b un nombre > 0 tels que $\beta = b(\varepsilon - \tau) * \varkappa$ soit $\geqslant 0$, à support compact et de masse totale 1 ; *si* U *est surharmonique*, $U * \tau$ *a un sens et* $b(\varepsilon - \tau) * U = \mu * \beta$.

En effet la méthode suivie pour établir le théorème 1 montre que, pour toute $\sigma \in (\Sigma)$, on a :

$$\alpha_\sigma * b(\varepsilon - \tau) = \beta * D_\sigma ;$$

comme $D_\sigma * U$ a un sens et que α_σ et β sont à support compact, $(\alpha_\sigma * \tau) * U$ a un sens, donc $\tau * U$ a un sens. Les produits obtenus en composant avec U les deux membres de la relation précédente sont donc associatifs ; il en résulte : $\alpha_\sigma * b(\varepsilon - \tau) * U = \beta * \alpha_\sigma * \mu$, d'où la relation à démontrer (en faisant $\alpha_\sigma \to \varepsilon$).

Nous avons ainsi établi le résultat suivant : soit (Σ') la famille obtenue en ajoutant à (Σ) un ensemble quelconque de mesures $\tau \geqslant 0$ telles que $\varkappa - \varkappa * \tau$ soit $\geqslant 0$, $\neq 0$ et à support compact : (Σ') est une famille fondamentale (elle satisfait évidemment aux conditions (S_1) et (S_2) avec la base $\varkappa$) ; *toute mesure harmonique (surharmonique) par rapport à* (Σ) *est harmonique (surharmonique) par rapport à* (Σ') ;

[15] En effet, lorsque v « tend » vers l'origine, $\alpha_\sigma * \mu_{\sigma_v}$ converge (vers μ_σ) ; donc $\mu_{\sigma_v}(g)$ converge pour toute g de la forme $f * \alpha_\sigma$, où $f \in \mathcal{C}^+(G)$; or ces g sont partout denses dans $\mathcal{C}^+(G)$, d'où le résultat, qui peut également s'obtenir simplement à l'aide du lemme C (dans le cas particulier signalé à la fin du § 1).

la réciproque est d'ailleurs évidente ; deux telles familles fondamentales seront dites *équivalentes* ; nous y reviendrons au § 7.

Voici maintenant un résultat utile concernant la mesure associée à une mesure surharmonique :

LEMME. — *Soit* U *une mesure surharmonique réelle, de mesure associée* μ ; *si* U *admet une minorante harmonique (en particulier si* $U \geqslant 0$), $U * \sigma^p$ *converge vaguement* [16] *quelle soit* $\sigma \in (\Sigma)$, *et on a :*

$$(3) \qquad (\varkappa - \rho_\sigma) * \mu = U - \lim_p U * \sigma^p.$$

La première partie est évidente : en effet si $U \geqslant H$ (H harmonique), on a $U * \sigma^p \geqslant H * \sigma^p = H$; la suite $U * \sigma^p$ est décroissante et majore une mesure fixe ; elle est donc vaguement convergente.

Pour établir la relation (3), composons avec U les deux membres de (1), Le produit $D_\sigma * K_\sigma^{(p)} * U$ a un sens (car tous les $U * \sigma^n$ ont un sens) ; on a donc :

$$\mu_\sigma * K_\sigma^{(p)} = U - U * \sigma^p,$$

où $\mu_\sigma = D_\sigma * U$. Il vient alors, d'après le théorème 1 et la relation (2) :

$$U - U * \sigma^p = K_\sigma^{(p)} * (\varkappa_\sigma * \mu) = (K_\sigma^{(p)} * \alpha_\sigma) * \mu = (\varkappa - \varkappa * \sigma^p) * \mu.$$

Comme la suite $\{\varkappa - \varkappa * \sigma^p\}$ est croissante et converge vaguement vers $\varkappa - \rho_\sigma$ (par définition de ρ_σ), que d'autre part $(\varkappa - \varkappa * \sigma^p) * \mu$ est majorée par la mesure fixe $U - H$, il résulte du lemme B que ce dernier produit de composition converge vaguement vers $(\varkappa - \rho_\sigma) * \mu$, d'où le résultat.

4. — Noyaux associés à une famille fondamentale.

Soit (Σ) une famille fondamentale donnée, de base $\varkappa$, Le résultat suivant est capital pour notre objet :

THÉORÈME 2. — $\varkappa$ *peut se mettre d'une façon et d'une seule sous la forme* $\varkappa = K + \rho$, *où* ρ *est harmonique* $\geqslant 0$, $K \geqslant 0$, *et* $K * \sigma^p \to 0$

[16] La convergence vague concerne en principe les mesures $\geqslant 0$; mais il est naturel de dire qu'une μ réelle, majorant une α réelle *fixe*, converge vaguement vers μ_0 si la mesure *positive* $\mu - \alpha$ converge vaguement vers $\mu_0 - \alpha$; pour cela il faut et il suffit que $\mu(f) \to \mu_0(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}^+(G)$.

vaguement pour toute $\sigma \in (\Sigma)$. *On a d'ailleurs* $\rho = \lim \varkappa * \sigma^p$ *quelle que soit* $\sigma \in (\Sigma)$. K *sera appelé noyau associé à* (Σ) *pour la base* $\varkappa$.

Ce théorème résultera d'une étude précise de la mesure $\rho_\sigma = \lim \varkappa * \sigma^p$; nous allons montrer successivement :

1° ρ_σ *est surharmonique*. Cela résulte des propriétés *c* et *d* du § 2, car ρ_σ est limite vague de la mesure surharmonique $\varkappa * \sigma^p$.

2° $\rho_\sigma * \sigma = \rho_\sigma$. En effet on peut appliquer la relation (3) à la mesure surharmonique $x * \sigma$, qui est $\geqslant 0$ et a pour mesure associée σ ; il vient :

$$(\varkappa - \rho_\sigma) * \sigma = \varkappa * \sigma - \lim_p x * \sigma^p = \varkappa * \sigma - \rho_\sigma,$$

d'où le résultat. Bien entendu on en déduit : $\rho_\sigma * \sigma^n = \rho_\sigma$ pour tout $n > 0$.

3° ρ_σ *est harmonique*. Appliquons maintenant la relation (3) à la mesure surharmonique positive ρ_σ ; si μ est sa mesure associée, il vient :

$$(\varkappa - \rho_\sigma) * \mu = \rho_\sigma - \lim_p \rho_\sigma * \sigma^p = 0 ;$$

mais $\varkappa - \rho_\sigma$ est $\geqslant 0$ et *non nulle* (puisque $\geqslant \varkappa - \varkappa * \sigma, \neq 0$ d'après (S_1)) ; donc $\mu = 0$, et ρ_σ est bien harmonique.

4° ρ_σ *est indépendant de* σ. Soient en effet σ et $\sigma' \in (\Sigma)$, ρ_σ et $\rho_{\sigma'}$ correspondants ; ces dernières mesures sont harmoniques, donc :

$$\rho_\sigma = \rho_\sigma * \sigma'^q \leqslant \varkappa * \sigma^p * \sigma'^q$$

quels que soient p et $q > 0$. Faisons $q \to \infty$; la suite $\{\varkappa * \sigma'^q\}$ étant décroissante, il vient, d'après le lemme B :

$$\rho_\sigma \leqslant \lim_q (\varkappa * \sigma'^q) * \sigma^p = \rho_{\sigma'} * \sigma^p = \rho_{\sigma'}.$$

Bien entendu, on démontrerait de même $\rho_{\sigma'} \leqslant \rho_\sigma$, d'où finalement $\rho_{\sigma'} = \rho_\sigma$.

A l'avenir nous pourrons donc désigner par ρ la mesure harmonique ρ_σ qui ne dépend pas de σ. La démonstration du théorème 2 est maintenant immédiate : posons en effet $K = \varkappa - \rho$; K est une mesure $\geqslant 0$ (d'ailleurs non nulle) et on a

$$K * \sigma^p = \varkappa * \sigma^p - \rho * \sigma^p = \varkappa * \sigma^p - \rho \to 0.$$

Il reste à montrer que la décomposition de l'énoncé est unique ; or si on avait $K' + \rho' = K + \rho$ avec ρ' harmonique et $\lim K' * \sigma^p = 0$, il viendrait, en composant avec σ^p et faisant $p \to \infty$: $\rho = \rho'$, d'où finalement $K = K'$.

Remarques. — *a*) K *est surharmonique*; *sa mesure associée* (*pour la base* $\varkappa$) *est* ε; c'est évident.

b) K *est une base de* (Σ). Parmi les bases $\varkappa$ de (Σ), les noyaux associés sont caractérisés par $\lim x * \sigma^p = 0$. La définition suivante est donc équivalente à la définition 1 :

Définition 1′ : *une famille fondamentale est un ensemble* (Σ) *de mesures* $\sigma \geqslant 0$ *auquel on peut associer une mesure* $K \geqslant 0$, *appelée noyau associé à* (Σ), *de façon que soient vérifiées les conditions* (S_1), (S_2) *et* (S_3).

On verra d'ailleurs (théorème 6) qu'un tel noyau est unique, à un facteur > 0 près; *l'ensemble des noyaux associés aux diverses familles fondamentales sera désigné par* (K_a).

c) K *est la plus petite mesure* $\geqslant 0$ *telle que* $\varkappa - K$ *soit harmonique.* Soit en effet K' avec $0 \leqslant K' = \varkappa - \rho'$, ρ' étant harmonique ; on a : $0 \leqslant K' * \sigma^p = \varkappa * \sigma - \rho'$, d'où, pour $p \to \infty$, $0 \leqslant \rho - \rho'$; finalement ; $K' = \varkappa - \rho' \geqslant \varkappa - \rho = K$.

d) *Soit* τ *une mesure* $\geqslant 0$ *telle que* $\varkappa - \varkappa * \tau$ *soit* $\geqslant 0$, $\neq 0$, *et à support compact; alors:* $\lim\limits_p K * \tau^p = 0$. Considérons en effet la famille fondamentale (Σ') obtenue en adjoignant τ à (Σ) (voir § 3, remarque *d*) ; d'après le théorème 2, le noyau K' associé à (Σ') pour la base $\varkappa$ est $\varkappa - \lim\limits_p \varkappa * \sigma'^p$, où σ' est un élément quelconque de (Σ') ; en prenant σ' dans (Σ), on en déduit $K' = K$, et en faisant $\sigma' = \tau$ il vient $\lim K * \tau^p = 0$.

5. — Théorème de décomposition. Potentiels.

Soient une famille fondamentale (Σ) de base $\varkappa$, et K le noyau associé correspondant.

Théorème 3. — *Toute mesure surharmonique réelle* U *admettant une minorante harmonique peut s'écrire d'une façon et d'une seule :*

$$U = K * \mu + H,$$

où H *est harmonique et* $\mu \geqslant 0$; μ *n'est autre que la mesure associée à* U, *et* $H = \lim\limits_p U * \sigma^p$ *quelle que soit* $\sigma \in (\Sigma)$.

Soit en effet μ la mesure associée à U ; la relation (3) du paragraphe 3 s'applique à U ; elle donne, en remplaçant $\varkappa - \rho$ par K et posant $\lim U * \sigma^p = H$ (pour une σ arbitraire de (Σ)) :

$$K * \mu = U - H.$$

H est harmonique : en effet, en composant les deux membres avec D_σ, il vient :

$$D_\sigma * (U - H) = D_\sigma * K * \mu = \alpha_\sigma * \mu$$

(l'associativité de $D_\sigma * K * \mu$ a déjà été utilisée § 3, remarque *b*). Mais $D_\sigma * U = \mu_\sigma = \alpha_\sigma * \mu$ (théorème 1). Finalement le produit $D_\sigma * H$ se trouve avoir un sens et être nul, d'où le résultat.

L'unicité d'une telle décomposition est évidente : si en effet $K * \mu + H = K * \mu' + H'$, avec $\mu' \geqslant 0$ et H' harmonique, il vient, en composant avec D_σ : $\alpha_\sigma * \mu = \alpha_\sigma * \mu'$ pour toute $\sigma \in (\Sigma)$, d'où $\mu = \mu'$ et $H = H'$.

Le produit de composition du noyau K par une mesure μ quelconque, s'il a un sens, sera appelé *potentiel (par rapport au noyau* K) *engendré par la mesure* μ. Toute mesure surharmonique admettant une minorante harmonique est donc la somme d'une mesure harmonique et du potentiel engendré par une mesure $\geqslant 0$. On reconnaît, dans le cas newtonien, un énoncé classique de F. Riesz[17].

Notons ici deux propriétés immédiates des potentiels par rapport à un noyau associé à une famille fondamentale :

a) *Tout potentiel* $K * \mu (\mu \geqslant 0)$ *est surharmonique et sa mesure associée est* μ (voir § 3, remarque *b*). Pour qu'un tel potentiel soit harmonique, il faut et il suffit que $\mu = 0$.

b) *Si* $K * \mu = K * \nu$ (μ *et* ν *réelles*), $\mu = \nu$. Si μ et $\nu \geqslant 0$, cela résulte de l'unicité de la décomposition du théorème 3 ; dans le cas général ($\mu = \overset{+}{\mu} - \overset{-}{\mu}$, $\nu = \overset{+}{\nu} - \overset{-}{\nu}$), on a

$$K * (\overset{+}{\mu} + \overset{-}{\nu}) = K * (\overset{-}{\mu} + \overset{+}{\nu}), \qquad \text{d'où} \qquad \overset{+}{\mu} + \overset{-}{\nu} = \overset{-}{\mu} + \overset{+}{\nu},$$

d'où finalement $\mu = \nu$. Ce résultat simple mais important est bien connu en théorie newtonienne sous le nom *d'unicité des masses engendrant un potentiel donné.*

Nous allons maintenant tirer les premières conséquences du théorème 3 :

THÉORÈME 4. — *Toute mesure surharmonique* $\geqslant 0$ *majorée par un potentiel est un potentiel,* le potentiel engendré par la mesure associée.

En effet la mesure donnée U est de la forme $U = K * \mu + H$,

[17] En réalité nous avons seulement montré qu'une fonction surharmonique au sens classique, admettant une minorante harmonique, est *presque partout* la somme d'un potentiel newtonien et d'une fonction harmonique ; on en déduit facilement le résultat plus précis de F. Riesz en « régularisant » par des médiations sphériques.

où μ est la mesure associée à U et $H = \lim U * \sigma^p$ est harmonique $\geqslant 0$. D'autre part $U \leqslant K * \nu$, et la mesure ν peut être supposée $\geqslant 0$, donc $H \leqslant K * \nu$ et $H = H * \sigma^p \leqslant K * \nu * \sigma^p$ quelle que soit $\sigma \in (\Sigma)$. Si on fait alors $p \to \infty$ il vient $\lim K * \nu * \sigma^p = 0$ (d'après le lemme B, car $\{K * \sigma^p\}$ est décroissante et $\to 0$ vaguement) ; d'où $H = 0$.

Corollaire : *La borne inférieure de deux potentiels engendrés par des mesures $\geqslant 0$ est un potentiel de même nature.* Autrement dit, si $K * \lambda$ et $K * \mu$ ont un sens (λ et $\mu \geqslant 0$), il existe une $\nu \geqslant 0$ telle que $K * \nu = \inf (K * \lambda, K * \mu)$.

Remarque : si la mesure réelle U *est un potentiel, sa variation totale* $|U|$ *est un potentiel*(18). En effet U est de la forme $K * \lambda - K * \mu (\lambda, \mu \geqslant 0)$; soit ν telle que $K * \nu = \inf (K * \lambda, K * \mu)$; on a :

$$\sup (K * \lambda, K * \mu) = K(\lambda + \mu - \nu),$$

d'où : $|U| = \sup (K * \lambda, K * \mu) - \inf (K * \lambda, K * \mu) = K * (\lambda + \mu - 2\nu)$. De même $U^+ = K * (\lambda - \nu)$ et $U^- = K * (\mu - \nu)$ sont des potentiels.

Théorème 5. — *Pour que les noyaux associés à une famille fondamentale* (Σ) *soient de masse totale finie, il faut et il suffit que la masse totale de toute* $\sigma \in (\Sigma)$ *soit strictement* < 1 (19).

Nécessité : si $\int dK < \infty$, toute constante $C \geqslant 0$ est le potentiel engendré par une mesure $\geqslant 0$ (la mesure de densité constante $C / \int dK$) ; C est donc surharmonique, mais non harmonique (voir la propriété *a* qui suit le théorème 3) ; on a donc $\int d\sigma < 1$ pour toute $\sigma \in (\Sigma)$ (voir § 2, *a*).

Suffisance : si $\int d\sigma \leqslant 1$ pour toute $\sigma \in (\Sigma)$, toute constante $C > 0$ est surharmonique, donc de la forme $C = K * \mu + H$, où $H = \lim C * \sigma^p$ quelle que soit $\sigma \in (\Sigma)$. Si *une* des σ est de masse totale strictement < 1, on a : $H = \lim C * \sigma^p = 0$ (car $C * \sigma^p$ est la mesure de densité $C \int d\sigma^p = C\left(\int d\sigma\right)^p$), et par conséquent C est un potentiel $K * \mu (\mu \neq 0)$. Toute mesure déduite de μ par translation engendre évidemment le même potentiel C, donc (unicité des « masses » engendrant un potentiel donné) μ *est invariante par translation* ; c'est donc une mesure à densité constante $\neq 0$, et comme $K * \mu$ a un sens, $\int dK < \infty$.

(18) Résultat mis en évidence par M. Brelot ([3]) dans le cas newtonien.

(19) Ce résultat m'a été communiqué personnellement par M. H. Cartan, dans le cas des familles fondamentales étudiées dans [5].

Remarques. — *a*) Il résulte de la seconde partie de la démonstration que si $\int d\sigma \leqslant 1$ pour toute $\sigma \in (\Sigma)$, on a soit $\int d\sigma < 1$ pour toute σ, soit $\int d\sigma = 1$ pour toute σ (et toute constante $\geqslant 0$ est un potentiel dans le premier cas, une mesure harmonique dans le second). Mais on peut donner un énoncé plus général : *étant donnée une famille fondamentale* (Σ), *le nombre* $1 - \int d\sigma$ (qui est fini ou éventuellement $= -\infty$) *a le même signe pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$.

Cela résulte très simplement de la relation fondamentale

$$\alpha_\sigma * D_{\sigma'} = \alpha_{\sigma'} * D_\sigma,$$

point de départ de la démonstration du théorème 1 ; elle s'écrit

$$a_{\sigma'}(\varepsilon - \sigma') * \alpha_\sigma = a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * \alpha_{\sigma'} ;$$

comme α_σ et $\alpha_{\sigma'}$ sont $\geqslant 0$ et à support compact, et que σ et σ' sont $\geqslant 0$, les masses totales des deux membres sont bien déterminées (finies ou $= -\infty$) ; leurs signes sont ceux de $1 - \int d\sigma$ et $1 - \int d\sigma'$ respectivement, d'où le résultat.

b) *Si* G *est un groupe compact, on a* $\int d\sigma < 1$ *pour toute* $\sigma \in (\Sigma)$. En effet toute mesure est de masse totale finie, et $\int d\mathrm{K} < \infty$ entraîne $\int d\sigma < 1$ (théorème 5). Dans un tel groupe il n'existe évidemment aucune mesure harmonique, à l'exception de la mesure nulle.

6. — Unicité à un facteur positif près du noyau associé à une famille fondamentale.

Théorème 6. — *Soient* $\varkappa$ *et* $\varkappa'$ *deux bases d'une famille fondamentale* (Σ) *donnée ; les noyaux carrespondants* K *et* K′ *sont proportionnels*.

En effet $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont surharmoniques. La mesure associée à $\varkappa'$ pour la base $\varkappa'$ est ε ; soit $\mu \geqslant 0$ la mesure associée à $\varkappa'$ pour la base $\varkappa$; d'après le théorème 3 on a, quelle que soit $\sigma \in (\Sigma)$:

$$\varkappa' = \mathrm{K} * \mu + \lim_p \varkappa' * \sigma^p,$$
$$\varkappa' = \mathrm{K}' + \lim_p \varkappa' * \sigma^p,$$

d'où $\mathrm{K}' = \mathrm{K} * \mu$. Mais $D_\sigma * \varkappa' = \alpha_\sigma * \mu$ (théorème 1) et comme $\varkappa'$ est une base on peut choisir σ de façon que $D_\sigma * \varkappa'$ soit portée par un voisinage « arbitrairement petit » de l'origine. Il en résulte que μ est portée par l'origine, donc est de la forme $\mu = h\varepsilon (h > 0)$. D'où finalement $K' = hK$.

Corollaires. a) *Si* K *est un noyau associé à une famille fondamentale, la base la plus générale est* $\varkappa = hK + H$, *où* h *est une constante* > 0 *et* H *une mesure harmonique* $\geqslant 0$.

Les théorèmes 2 et 6 montrent en effet que toute base est de cette forme ; inversement une telle mesure est évidemment une base.

b) *La mesure* α_σ *attachée à l'élément* $\sigma \in (\Sigma)$ (voir le début du paragraphe 3) *est indépendante de la base choisie.*

Soient en effet $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux bases de (Σ), K et K' les noyaux correspondants ; à toute $\sigma \in (\Sigma)$ on fait correspondre les mesures $\geqslant 0$ de masse totale 1 :

$$\alpha_\sigma = a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * \varkappa = a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * K,$$
$$\alpha'_\sigma = a'_\sigma(\varepsilon - \sigma) * \varkappa' = a'_\sigma(\varepsilon - \sigma) * K' ;$$

comme $K' = hK$, les mesures α_σ et α'_σ sont proportionnelles, donc égales (puisque de même masse totale $= 1$).

On en déduit que *le quotient* a_σ / a'_σ *est indépendant de* σ ; *en effet*

$$a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * K = a'_\sigma(\varepsilon - \sigma) * K' = ha'_\sigma(\varepsilon - \sigma) * K,$$

d'où $a_\sigma = ha'_\sigma$ $\left(\text{car } (\varepsilon - \sigma) * K \neq 0\right)$.

c) *La mesure associée à une mesure surharmonique réelle* U *est définie à un facteur* > 0 *près* (lorsque la base varie).

Soient en effet μ et μ' les mesures associées à U surharmonique quelconque (n'admettant pas nécessairement de minorante harmonique) pour les bases $\varkappa$ et $\varkappa'$; avec les notations du corollaire précédent, on a (théorème 1) :

$$a_\sigma(\varepsilon - \sigma) * U = \alpha_\sigma * \mu, \qquad a'_\sigma(\varepsilon - \sigma) * U = \alpha'_\sigma * \mu' ;$$

comme $\alpha_\sigma = \alpha'_\sigma$ et $a_\sigma = ha'_\sigma$ il vient : $\alpha_\sigma * \mu = h\alpha_\sigma * \mu'$ d'où (pour $\alpha_\sigma \to \varepsilon$) $\mu = h\mu'$.

7. — Familles fondamentales équivalentes.

On dira que deux familles fondamentales sont *équivalentes* si toute mesure surharmonique (ou harmonique) par rapport à l'une est surharmonique (ou harmonique) par rapport à l'autre.

Observons tout de suite que, *une famille fondamentale* (Σ) *étant* *donnée, il existe une famille fondamentale équivalente dont aucun élément ne charge l'origine.* En effet, à toute $\tau \in (\Sigma)$ associons le plus grand nombre h tel que $\sigma - h\varepsilon$ soit une mesure $\geqslant 0$. Evidemment $0 \leqslant h < 1$ (d'après la condition (S_1)), et on constate aisément que la famille constituée par les mesures $(\varepsilon - h\sigma)/(1 - h)$ convient.

Théorème 7. — *Pour que deux familles fondamentales soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient une base commune. Leurs noyaux associés sont alors les mêmes.*

Suffisance : Soient deux familles fondamentales données (Σ) et (Σ'), admettant une même base $\varkappa$. La famille (Σ'') constituée par la réunion des éléments de (Σ) et (Σ') est une famille fondamentale (elle satisfait évidemment aux conditions (S_1) et (S_2) relativement à la base $\varkappa$). Or on a vu (§ 3, remarque *d*) que toute mesure surharmonique (harmonique) par rapport à (Σ) est surharmonique (harmonique) par rapport à (Σ''), donc *a fortiori* par rapport à (Σ') ; (Σ) et (Σ') sont donc équivalentes.

Nécessité : Soient deux familles fondamentales équivalentes (Σ) et (Σ'), K un noyau associé à (Σ), K' un noyau associé à (Σ'). K est surharmonique par rapport à (Σ), donc par rapport à (Σ'), d'où $K = K' * \mu + H$, où μ est $\geqslant 0$ et H harmonique $\geqslant 0$. De même $K' = K * \mu' + H'$, où μ' est $\geqslant 0$ et H' harmonique $\geqslant 0$. On en déduit :

$$K = K * \mu * \mu' + H' * \mu + H ;$$

mais $H' * \mu$ est harmonique (§ 2, *d*), d'où (unicité de la décomposition du théorème 3) : $\mu * \mu' = \varepsilon$, $H' * \mu + H = 0$; il en résulte que μ est nécessairement de la forme $\mu = h\varepsilon (h > 0)$ et que $H = H' = 0$. Finalement $K = hK'$ et, d'après le théorème 6, (Σ) et (Σ') ont mêmes noyaux associés et par suite mêmes bases.

Remarque. — On peut définir d'une façon évidente une *relation d'ordre* dans l'ensemble des familles fondamentales ; nous ne chercherons pas ici à tirer les conséquences de cette notion.

8. — Le balayage.

Dans ce paragraphe et dans les deux suivants on suppose donnée une fois pour toutes une famille fondamentale (Σ) dont K est un noyau associé.

Définition 5. — *Soient* U *une mesure surharmonique* $\geqslant 0$ *et* F *un fermé de* G ; *nous appellerons extrémale de* U *pour* F *la borne inférieure* U′ *des mesures surharmoniques* $\geqslant 0$ *majorant* U *dans l'ouvert* G-F [20].

Evidemment U′ est surharmonique $\geqslant 0$ (§ 2, *e*). $U' = U$ dans G-F, $U' \leqslant U$ partout.

Théorème 8. — *Soient* ω *un ouvert de* G, *et* $K*\mu$ *le potentiel d'une mesure* $\geqslant 0$; *l'extrémale de* $K*\mu$ *pour* G-ω *est un potentiel* $K*\mu'$, *engendré par une mesure* $\mu' \geqslant 0$ *portée par* $\bar{\omega}$ (*adhérence de* ω), *appelée balayée de* μ *sur* ω [21].

L'extrémale de $K*\mu$ étant une mesure surharmonique $\geqslant 0$ majorée par un potentiel, c'est un potentiel de mesure positive $K*\mu$ (théorème 4). Il s'agit de montrer que μ' est portée par $\bar{\omega}$.

Or soit $a \notin \bar{\omega}$ et v un voisinage compact de a, disjoint de ω ; désignons par μ'_1 la restriction de μ' à v, et posons. $\mu'_2 = \mu' - \mu'_1$; quelle que soit $\sigma \in (\Sigma)$ on a $K*\sigma*\mu'_1 \leqslant K*\mu'_1$, d'où :

$$K*(\sigma*\mu'_1 + \mu'_2) \leqslant K*\mu' \leqslant K*\mu.$$

Choisissons σ associée à un voisinage w de l'origine o (voir la condition (S_2)) tel que $\bigcup_{x\in\bar{\omega}} \check{w}^x$ soit disjoint de v ($\check{w}^x$ désigne le translaté par x de $\check{w}$, symétrique de w par rapport à o). Evidemment $K*\sigma*\mu'_1 = K*\mu'_1$ dans ω, d'où :

$$K*(\sigma*\mu'_1 + \mu'_2) = K*\mu' = K*\mu \text{ dans } \omega.$$

Ces deux propriétés montrent que $K*(\sigma*\mu_1 + \mu'_2) = K*\mu'$ (par définition de μ'), d'où $K*\sigma*\mu'_1 = K*\mu'_1$, c'est-à-dire $K*(\varepsilon - \sigma)*\mu'_1 = 0$, ou encore $\alpha_\sigma*\mu'_1 = 0$, ce qui montre bien que $\mu'_1 = 0$(α_σ et μ'_1 sont $\geqslant 0$ et $\alpha_\sigma \neq 0$) donc que le support de μ' est contenu dans $\bar{\omega}$.

Remarque. — Dans le cas classique (cas newtonien dans R^m), μ' est exactement la balayée de μ sur l'ouvert ω, ce qui justifie notre terminologie. On pourrait chercher à étendre la notion de balayage sur un compact en s'appuyant sur ce résultat : *soient* C *un compact et* $K*\mu$ *le potentiel d'une mesure* $\geqslant 0$; *la borne inférieure des potentiels* $K*\nu$ ($\nu \geqslant 0$) *majorant* $K*\mu$ *dans un voisinage de* C *est un potentiel* $K*\mu'$; μ' *est portée par* C *et on a* $K*\mu' \leqslant K*\mu$, $K*\mu' = K*\mu$ *sur* C (les restrictions à C de $K*\mu$ et $K*\mu'$ sont identiques).

[20] Cette définition est adaptée de [2], § 3.
[21] L'opération qui fait passer de μ à μ' est appelée « extrémisation » dans [2].

Pour le démontrer on observe d'abord que la balayée μ'_V de μ sur le voisinage ouvert V de C converge vers μ' (suivant le filtre des sections) ([22]). Alors, par passage à la limite, on voit bien que μ' est portée par C, et que $K*\mu' \leqslant K*\mu$; il reste à prouver que $K*\mu' = K*\mu$ sur C ; or si g_C désigne la fonction caractéristique de C, on a, pour toute $f \in \mathcal{C}^+(G)$, compte tenu de la semi-continuité supérieure de fg_C :

$$\int fg_C d(K*\mu') \geqslant \lim \int fg_C d(K*\mu'_V) = \int fg_C d(K*\mu)$$

c'est-à-dire $g_C K*\mu' \geqslant g_C K*\mu$, d'où le résultat.

Il semblerait logique d'appeler cette μ', associée canoniquement à μ et C, la balayée de μ sur C. Cependant, dans le cas newtonien, μ' n'est effectivement la balayée (au sens usuel) que si μ ne charge pas l'ensemble des points « irréguliers » de C.

Nous n'entrerons pas dans ces détails techniques et nous nous bornerons à considérer le balayage sur des ouverts. Voici deux applications du théorème 8 :

Corollaires. — *a) Soit $\{v\}$ un système fondamental de voisinages compacts de l'origine ; les mesures ε_v, balayées de ε sur les ouverts* G-v *constituent une famille fondamentale équivalente à* (Σ).

En effet $K*(\varepsilon - \varepsilon_v)$ est $\geqslant 0$ et à support contenu dans v ; elle n'est pas nulle sinon (théorème d'unicité des masses engendrant un potentiel donné) on aurait $\varepsilon = \varepsilon_v$, ce qui est absurde puisque le support de ε_v ne contient pas o ; les ε_v constituent donc une famille fondamentale de base K, d'où le résultat, d'après le théorème 7.

L'ensemble des ε_v (correspondants à tous les voisinages compacts v de o) est souvent avantageux à considérer dans les applications ; on pourrait l'appeler la *famille fondamentale canonique* équivalente à la famille fondamentale donnée (Σ). Bien entendu ε_v ne dépend pas du noyau particulier K associé à (Σ) ([23]).

b) Si deux mesures harmoniques sont égales hors d'un compact elles sont identiques.

Soient en effet U et U' harmoniques (par rapport à la famille fondamentale donnée), égales hors d'un compact C ; soit v un ouvert relativement compact contenant o, assez grand pour que $C \subset v^x$ quel

([22]) A cet effet il suffit d'observer que, quelle que soit $\nu \geqslant 0$ avec $K*\nu \geqslant K*\mu$ dans un voisinage ouvert W de C, il existe une μ'_V telle que $K*\mu'_V \leqslant K*\nu$; or μ'_W convient, par définition.

([23]) Plus généralement, il est évident que la balayée d'une $\mu \geqslant 0$ quelconque sur un ouvert quelconque est indépendant du noyau particulier K.

que soit $x \in C$ (v^x désigne le translaté de v par x); soit σ la balayée de ε sur $G - \bar{v}\,(\sigma = \varepsilon_{\bar{v}})$.

Comme le support de σ^x (translatée de σ par x) est disjoint de C quel que soit $x \in C$ (d'après le théorème 8), on a $U * \sigma = U' * \sigma$ sur C; mais la famille obtenue en adjoignant σ à (Σ) étant équivalente à (Σ), (d'après le théorème 7), on a $U * \sigma = U$, $U' * \sigma = U'$. D'où $U = U'$ sur C, donc partout.

9. — Le second principe du maximum.

Théorème 9. — *Soient μ une mesure $\geqslant 0$ à support compact S_μ et* U *une mesure surharmonique $\geqslant 0$; si $K * \mu \leqslant U$ dans un voisinage de S_μ, $K * \mu \leqslant U$ partout.*

D'après le théorème 4 il existe une $\nu \geqslant 0$ telle que

$$\inf(U,\, K * \mu) = K * \nu\,;$$

il suffit donc de montrer le théorème 9 lorsque U est un potentiel de mesure $\geqslant 0$, soit $K * \nu$. On va voir que l'hypothèse entraîne $K * \mu \leqslant K * \nu$ au voisinage de tout point, ou encore: quel que soit $x \in G$ il existe un voisinage $v = v(x)$ de l'origine o tel que

$$K * \mu * \varepsilon^{-x} \leqslant K * \nu * \varepsilon^{-x} \qquad \text{dans } v\ (^{24}).$$

A cet effet soit V un ouvert contenant S_μ et dans lequel $K * \mu \leqslant K * \nu$; soit W un ouvert tel que $S_\mu \subset W \subset \overline{W} \subset V$; soit enfin ε'_x la balayée de ε^x sur W, *balayée relativement au noyau $\check{K}$ symétrique de K par rapport à o* ($\check{K}$ est évidemment associé à la famille fondamentale $(\check{\Sigma})$ constituée par les mesures symétriques des éléments de (Σ)); le théorème 8 s'applique à ce noyau $\check{K}$ et donne:

1° $\check{K} * \varepsilon'_x \leqslant \check{K} * \varepsilon^x$ partout, d'où $K * \check{\varepsilon}'_x \leqslant K * \varepsilon^{-x}$, d'où enfin:

$$K * \nu * \check{\varepsilon}'_x \leqslant K * \nu * \varepsilon^{-x}.$$

2° $\check{K} * \varepsilon'_x = \check{K} * \varepsilon^x$ dans W, d'où (compte tenu de $S_\mu \subset W$):

$$K * \check{\varepsilon}'_x * \mu = K * \varepsilon^{-x} * \mu \qquad \text{dans un voisinage } v_1 \text{ de } o.$$

3° ε'_x est portée par $\overline{W}$, d'où (compte tenu de $\overline{W} \subset V$ et de $K * \mu \leqslant K * \nu$ dans V):

$$(K * \mu) * \check{\varepsilon}'_x \leqslant (K * \nu) * \check{\varepsilon}'_x \qquad \text{dans un voisinage } v_2 \text{ de } o.$$

(24) ε^a désigne la mesure constituée par la masse $+1$ placée au point a; $\check{\mu}$ désigne la mesure symétrique de la mesure μ par rapport à l'origine o.

En rapprochant ces trois relations on voit bien que, dans $v = v_1 \cap v_2$, on a $K * \mu * \varepsilon^{-x} \leqslant K * \nu * \varepsilon^{-x}$, d'où le résultat.

Le théorème 9 constitue l'extension, aux noyaux associés à une famille fondamentale, du second principe du maximum (25). On ne peut espérer l'améliorer, dans le cas général envisagé ici, en remplaçant la condition « $K * \mu \leqslant U$ dans un voisinage de S_μ » par « $K * \mu \leqslant U$ sur S_μ ».

Corollaire. — *Si une mesure $\mu \geqslant 0$ ne charge pas le complémentaire d'un ouvert ω elle est identique à sa balayée μ' sur ω.*

Soit en effet μ_C la restriction de μ à un compact $C \subset \omega$. $K * \mu_C$ converge vaguement vers $K * \mu$ (d'après la remarque suivant le lemme B); mais $K * \mu_C \leqslant K * \mu'$ dans le voisinage ω de C, donc partout (théorème 9). A la limite, il vient $K * \mu \leqslant K * \mu'$, d'où $K * \mu = K * \mu'$ et enfin $\mu = \mu'$.

10. — Extrémale pour le complémentaire d'un ouvert borné. L'équilibre.

Théorème 10. — *L'extrémale d'une mesure surharmonique $U \geqslant 0$ pour le complémentaire d'un ouvert borné ω est un potentiel (le potentiel d'une mesure $\geqslant 0$ portée par $\bar{\omega}$).*

Il suffit de montrer que U coïncide sur ω avec un potentiel $K * \mu (\mu \geqslant 0)$; car l'extrémale U' ne sera alors que $K * \mu'$, où μ' est la balayée de μ sur ω.

Or c'est évident si U est à densité continue $U(x)$: comme $\bar{\omega}$ est compact il existe en effet une $f \in \mathcal{C}^+(G)$ avec $K * f(x) \geqslant U(x)$ sur $\bar{\omega}$, et il suffit de prendre pour μ la mesure $\geqslant 0$ définie par

$$K * \mu = \inf(K * f,\ U).$$

Si U est quelconque, considérons sa « régularisée » $U_v = U * f_v$ par une fonction $f_v \in \mathcal{C}^+(G)$ nulle hors du voisinage v de o, telle que $\int f_v dx = 1$. U_v étant continue, on peut, d'après ce qui précède, lui associer une $\mu_v \geqslant 0$ portée par $\bar{\omega}$ telle que $K * \mu_v = U_v$ dans ω,

(25) Cette propriété semble avoir été utilisée systématiquement en théorie du potentiel pour la première fois par H. Cartan : voir [4] § VI, où on trouvera, sous le nom de « principe du maximum », un énoncé plus précis, mais qui s'applique seulement à des noyaux plus particuliers et à des « potentiels d'énergie finie » ; il fait intervenir les « fonctions-potentiel » et non des mesures. La terminologie du texte est en accord avec celle de [5], où l'on a voulu distinguer ce principe de celui de Maria-Frostman, ou « premier principe du maximum », *qui n'en est pas une conséquence,* comme nous le verrons plus loin.

$K*\mu_v \leqslant U_v$ partout. Supposons v contenu dans un compact fixe; alors l'ensemble des mesures U_v est *vaguement borné* [26], donc relativement compact; d'après le lemme C (cas particulier signalé au paragraphe 1) l'ensemble des μ_v est, lui aussi, relativement compact; soit alors μ une limite vague de μ_v; μ convient, car $K*\mu = U$ dans ω, comme on le voit par passage à la limite (car U_v converge vaguement vers U et $K*\mu_v \to K*\mu$ puisque les μ_v sont portées par un même compact).

Définition 6. — *Nous dirons que l'équilibre est possible pour une mesure $K \geqslant 0$ donnée, si, quel que soit l'ouvert borné ω, il existe une $\mu \geqslant 0$ portée par $\overline{\omega}$ avec :*

$$K*\mu \leqslant 1\ ;\quad K*\mu = 1 \text{ dans } \omega.$$

Théorème 11. — *Pour que l'équilibre soit possible pour un noyau K associé à une famille fondamentale (Σ), il faut et il suffit que $\int d\sigma \leqslant 1$ pour toute $\sigma \in (\Sigma)$.*

En effet pour que la condition soit vérifiée, il faut et il suffit que la constante 1 soit surharmonique (voir § 2, *a*). Or si 1 est surharmonique, son extrémale $K*\gamma$ pour le complémentaire de l'ouvert borné ω donné convient, d'après le théorème 10. Inversement si l'équilibre est possible la constante 1 coïncide sur tout compact avec un potentiel de mesure $\geqslant 0$, donc est limite vague de tels potentiels et par suite est surharmonique (§ 2, *c*).

La mesure $\gamma \geqslant 0$, associée canoniquement à l'ouvert borné ω par ce procédé sera appelée la *distribution d'équilibre de* ω.

Remarques. Les résultats suivants, sur lesquels nous ne nous étendrons pas, *concernent exclusivement les noyaux associés à une famille fondamentale dont tous les éléments sont de masse totale* $\leqslant 1$:

a) *Si $\mu \geqslant 0$ est à support compact S_μ, et si $K*\mu \leqslant 1$ dans un voisinage de S_μ, $K*\mu \leqslant 1$ partout.* Cette remarque, qui résulte immédiatement dn théorème 9 et de ce que 1 est surharmonique, constitue l'extension aux noyaux envisagés ici du premier principe du maximum [27].

b) *Si μ' est la balayée d'une $\mu \geqslant 0$ sur un ouvert ω, on a $\int d\mu' \leqslant \int d\mu$.* On se ramène aisément au cas où ω est borné et on peut supposer $\int d\mu < \infty$. Il existe un ouvert ω_1 avec $\omega_1 \subset \omega$ et tel que la balayée μ'_1 de μ sur ω'_1 soit arbitrairement « voisine » de μ' (au sens de la topo-

(26) Cela résulte immédiatement de la définition, note (12).

(27) Voir note (25). Ce principe n'est pas vérifié pour les noyaux associés aux familles fondamentales dont les éléments sont de masse totale > 1.

logie vague), donc telle que $\int d\mu'_1$ et $\int d\mu'$ soient arbitrairement voisins. Soit γ la distribution d'équilibre de ω *pour le noyau* $\check{K}$ *symétrique de* K *par rapport à l'origine* ($\check{K}$ est du type considéré ici). On a $\check{K}*\gamma = 1$ dans le voisinage ω de $\bar{\omega}_1$, et comme μ'_1 est portée par $\bar{\omega}_1$: $K*\check{\gamma}*\mu'_1 = 1*\mu'_1 = \int d\mu'_1$ dans un voisinage de o.

D'autre part $K*\mu'_1 \leqslant K*\mu$ partout, d'où, compte tenu de $K*\check{\gamma} \leqslant 1$ partout (puisque $\check{K}*\gamma \leqslant 1$) :

$$(K*\check{\gamma})*\mu'_1 = (K*\mu'_1)*\check{\gamma} \leqslant (K*\mu)*\check{\gamma} = (K*\check{\gamma})*\mu \leqslant 1*\mu = \int d\mu.$$

En rapprochant ces deux relations on a bien $\int d\mu'_1 \leqslant \int d\mu$, d'où le résultat.

c) Appelons *capacité* de l'ouvert borné ω la masse totale de sa distribution d'équilibre; capacité du compact C la borne inférieure des capacités des ouverts bornés contenant C ([28]). La borne inférieure des mesures surharmoniques $\geqslant 0$ qui sont $\geqslant 1$ dans un voisinage de C est un potentiel $K*\gamma$, où $\gamma \geqslant 0$ est portée par C ; on vérifie sans peine que la capacité de C n'est autre que la masse totale de γ, mesure qui ne peut être appelée distribution d'équilibre de C ([29]).

On peut ensuite définir les capacités intérieures et extérieures d'un ensemble quelconque ; la capacité extérieure est une fonction d'ensemble satisfaisant aux conditions de convexité classiques et même à la *condition de convexité renforcée* de G. Choquet ([30]).

d) Dans le cas plus particulier où $\int dK < \infty$ (ce qui a toujours lieu si G est compact) tout ouvert ω admet une distribution d'équilibre qu'on peut obtenir en balayant sur ω la mesure $dx \int dK$, qui n'est autre que la distribution d'équilibre de G tout entier.

([28]) Contrairement à ce qui est fait d'habitude en théorie classique, il y a intérêt ici à définir la capacité des ouverts avant celle des compacts ; on vérifie aisément que la capacité d'un ouvert est la borne supérieure des capacités des compacts contenus (il s'agit là d'un théorème et non plus d'une définition).

([29]) On a d'ailleurs $K*\gamma \leqslant 1$ partout, $K*\gamma = 1$ sur C.

([30]) Si C_1 et C_2 sont deux compacts, $\text{cap}(C_1 \cup C_2) + \text{cap}(C_1 \cap C_2) \leqslant \text{cap}(C_1) + \text{cap}(C_2)$. On trouvera dans [6] des énoncés plus précis, dans le cas newtonien. Voici, sommairement, une démonstration simple ; soient ω_1 et ω_2 deux ouverts contenant C_1 et C_2 ; soient γ_1, γ_2, γ, Γ les distributions d'équilibre de ω_1, ω_2, $C_1 \cap C_2$ et $C_1 \cap C_2$; par application répétée du théorème 9, $K*\gamma + K*\Gamma \leqslant K*\gamma_1 + K*\gamma_2$ partout, d'où, en utilisant la remarque *b* : $\int d\gamma + \int d\Gamma \leqslant \int d\gamma_1 + \int d\gamma_2$ d'où le résultat, car $\int d\gamma = \text{cap}(C_1 \cap C_2)$, $\int d\Gamma = \text{cap}(C_1 \cup C_2)$, et $\int d\gamma_i = \text{cap}(\omega_i)$ peut être prise arbitrairement voisine de $\text{cap}(C_i)(i = 1, 2)$.

11. — Familles fondamentales constituées par une seule mesure. La classe élémentaire.

Remarque préliminaire. — Si σ est un élément d'une famille fondamentale, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^p$ est vaguement convergente.

Soit en effet K un noyau associé à la famille fondamentale donnée; soient a_σ, α_σ, $K_\sigma^{(p)} = \frac{1}{a_\sigma} \sum_{n=0}^{p-1} \sigma^n$ les éléments associés à σ et à la base K, définis au début du paragraphe 3. La relation (2) du paragraphe cité :

$$\alpha_\sigma * K_\sigma^{(p)} = K - K * \sigma^p$$

et la condition (S_3) montrent que $\alpha_\sigma * K_\sigma^{(p)}$ converge vaguement vers K (pour $p \to \infty$). Il en résulte facilement que la suite *croissante* $\{K_\sigma^{(p)}\}$ converge, d'où le résultat[31].

Nous poserons $K_\sigma = \lim K_\sigma^{(p)}$; d'après le lemme B, on a :

$$(4) \qquad \alpha_\sigma * K_\sigma = K.$$

THÉORÈME 12. — *Pour qu'une mesure $\sigma \geqslant 0$ constitue à elle seule une famille fondamentale, il faut et il suffit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ soit convergente.*

La condition est nécessaire, d'après la remarque précédente; si d'autre part la série converge, σ constitue une famille fondamentale dont les noyaux associés sont :

$$K = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \qquad (a > 0 \text{ quelconque})$$

car $a(\varepsilon - \sigma) * K = \varepsilon$ a pour support l'origine (donc les conditions (S_1) et (S_2) sont satisfaites), et $K * \sigma^p = K - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{p-1} \sigma^n$ converge vers 0 (donc (S_3) est satisfaite).

Les noyaux associés à de telles familles fondamentales ne sont autres que les noyaux de la classe élémentaire (K_e) (voir introduction,

[31] En effet, comme $\alpha_\sigma * K_\sigma^{(p)} \leqslant K$, les $K_\sigma^{(p)}$ forment un ensemble relativement compact (cas particulier du lemme C); la suite $\{K_\sigma^{(p)}\}$ admet donc au moins une valeur d'adhérence et, comme elle est croissante, elle converge.

définition 4). En désignant, comme nous l'avons déjà fait, par (K_a) l'ensemble des noyaux associés aux diverses familles fondamentales, on a donc : $(K_e) \subset (K_a)$; nous allons voir que $(K_a) \subset (\overline{K_e})$, adhérence vague de la classe élémentaire :

THÉORÈME 13. — *Tout noyau associé à une famille fondamentale appartient à l'adhérence vague de la classe élémentaire.*

Soit en effet K un noyau associé à une famille fondamentale (Σ) ; soit v_0 un voisinage compact de l'origine ; à tout voisinage v de o contenu dans v_0 associons une $\sigma_v \in (\Sigma)$ telle que $(\varepsilon - \tau_v) * K$ ait son support dans v ; soit enfin

$$K_{\sigma_v} = \lim K_{\sigma_v}^{(p)} = \frac{1}{a_{\sigma_v}} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_v^n ;$$

évidemment $K_v \in (K_e)$; d'autre part, d'après (4), on a :

$$(4') \qquad \alpha_{\sigma_v} * K_{\sigma_v} = K ;$$

mais les mesures α_{σ_v} forment un ensemble relativement compact de mesures $\geqslant 0$ (elles sont portées par le compact fixe v_0 et ont pour masse totale 1) auquel la mesure nulle n'est pas adhérente, donc, d'après le lemme C, l'ensemble des K_{σ_v} est relativement compact ; en faisant encore « converger » v vers o, il résulte de (4') que K_{σ_v} converge vers K (32), le noyau K est donc bien limite vague de noyaux de (K_e).

Remarque. — La réciproque du théorème 13 est inexacte (l'inclusion $(K_a) \subset (\overline{K_e})$ a lieu au sens strict). Ainsi pour $G = R^m$, par exemple, le noyau $K = 1$ est dans $(\overline{K_e})$ (33) mais ne peut être dans (K_a), car si $1 * \sigma = 1$ hors d'un compact, $1 * \sigma = 1$ partout et la condition (S_1) ne peut être satisfaite.

12. — Théorèmes de fermeture.

THÉORÈME 14. — *L'ensemble des noyaux pour lesquels le balayage est possible* (34) *est fermé pour la topologie vague ; il contient donc l'adhérence vague de la classe élémentaire.*

(32) En effet K_σ admet au moins une valeur d'adhérence K' (suivant le filtre $\mathcal{F}$ de sections de l'ensemble ordonné des v). Par passage à la limite, (4') donne $K' = K$ (car $\alpha_{\sigma_v} \to \varepsilon$ en restant portée par le compact fixe v_0) ; donc K_{σ_v} converge vers K (suivant $\mathcal{F}$).

(33) Voir [7], § 7.

(34) Voir la définition 3 de l'introduction.

Soit $(\mathcal{B})$ l'ensemble des noyaux pour lesquels le balayage est possible. Soit $\mu \geqslant 0$ à support compact, et ω un ouvert borné ; à tout $K \in (\mathcal{B})$ associons une $\mu'_K \geqslant 0$ portée par $\bar{\omega}$ et telle que :

$$(B_1): \quad K * \mu'_K \leqslant K * \mu \, ; \qquad (B_2): \quad K * \mu'_K = K * \mu \quad \text{dans } \omega.$$

$(\mathcal{B})$ contient évidemment la mesure nulle ; il suffit de montrer que toute mesure K_0 non nulle, adhérente à $(\mathcal{B})$, est dans $(\mathcal{B})$.

Soit C_1 un compact de G, tel que la restriction de K_0 à C_1 ne soit pas nulle ; soit $f_1 \in C^+(G)$, avec $f_1 \leqslant 1$ partout, $f_1 = 1$ en tout point de C_1 ; soit V_1 le voisinage de K_0 (dans l'espace $\mathfrak{M}$ des mesure de Radon $\geqslant 0$) défini par

$$|K(f_1) - K_0(f_1)| \leqslant h < K_0(f_1) \, ;$$

lorsque K parcourt V_1 les mesures $f_1 K$ forment évidemment un ensemble compact dans $\mathfrak{M}$ ne contenant pas la mesure nulle.

Pour tout $K \in V_1 \cap (\mathcal{B})$ la mesure $(f_1 K) * \mu'_K$ a son support contenu dans un compact indépendant de K (puisqu'il en est ainsi pour $f_1 K$ et μ'_K séparément) et est majorée par $K * \mu$ (d'après (B_1)). Comme μ est supposée à support compact, $(f_1 K) * \mu'_K$ est donc majorée par $(f_2 K) * \mu$, où f_2 est une fonction de $C^+(G)$ valant 1 sur un compact « assez grand ».

Soit alors V_2 le voisinage de K_0 dans $\mathfrak{M}$, défini par

$$|K(f_2) - K_0(f_2)| \leqslant 1 \, ;$$

lorsque K parcourt V_2, les mesures $f_2 K$ forment un ensemble compact, et il en est de même des $(f_2 K) * \mu$.

Finalement, lorsque K parcourt $V_1 \cap V_2 \cap (\mathcal{B})$, les

$$(f_1 K) * \mu'_K \leqslant (f_2 K) * \mu$$

forment un ensemble relativement compact, tandis que les $f_1 K$ appartiennent à un compact ne contenant pas la mesure nulle. Il résulte alors du lemme C que *l'ensemble des* μ'_K *est relativement compact.*

On achève alors aisément : soit μ'_0 une valeur d'adhérence de μ'_K lorsque $K \to K_0$; évidemment μ'_0 est portée par $\bar{\omega}$ et, à la limite, les relations (B_1) et (B_2) donnent respectivement : $K_0 * \mu'_0 \leqslant K_0 * \mu$; $K_0 * \mu'_0 = K_0 * \mu$ dans ω.

Problème. — D'après les théorèmes 8, 12, 13 et 14 on a :

$$(\overline{K_e}) = (\overline{K_a}) \subset (\mathcal{B}) \, ;$$

cette inclusion a-t-elle lieu au sens strict, ou bien a-t-on au contraire $\overline{(K_e)} = (\mathcal{B})$? Si la seconde hypothèse était exacte, le « problème du balayage » pourrait être considéré comme entièrement résolu.

Définition 7. — *Une mesure* $K \geqslant 0$ *étant donnée, nous dirons que la mesure* $U \geqslant 0$ *possède la propriété* (α) *pour le noyau* K *si, à tout ouvert borné* ω, *on peut associer une mesure* $\mu \geqslant 0$ *portée par* $\bar{\omega}$ *et telle que :* $K * \mu \leqslant U$ *partout,* $K * \mu = U$ *dans* ω (35).

Si $K \in (K_a)$, toute mesure surharmonique $\geqslant 0$ possède la propriété (α) pour K, d'après le théorème 10 ; inversement toute mesure $\geqslant 0$ possédant la propriété (α) est surharmonique, puisque c'est une limite vague de potentiels de mesures $\geqslant 0$.

Théorème 15. — *L'ensemble constitué par la mesure nulle et les noyaux pour lesquels une mesure donnée* $U \geqslant 0$ *possède la propriété* (α) *est fermé pour la topologie vague.*

La démonstration est toute semblable à celle du théorème 14, avec de notables simplifications.

Corollaire : *l'équilibre est possible pour tout élément non nul de l'adhérence vague de* (K_e^1), *où* (K_e^1) *est la sous-classe de* (K_e) *constituée par les noyaux construits à partir d'une mesure* σ *de masse totale* < 1.

En effet, pour que l'équilibre soit possible pour le noyau K, il faut et il suffit que la constante 1 possède la propriété (α) pour le noyau K (voir les définitions 6 et 7); d'où le résultat, d'après les théorèmes 11 et 15.

Observons que tout noyau associé à une famille fondamentale dont les éléments sont de masse totale $\leqslant 1$ appartient à l'adhérence vague de (K_e^1).

13. — Exemples.

Commençons par trois exemples très simples de noyaux de la classe élémentaire :

1° la mesure nulle $\sigma = 0$ constitue une famille fondamentale ; les noyaux associés sont proportionnels au noyau trivial ε. Toute mesure est un potentiel ; seule la mesure nulle est harmonique.

(35) Voir [5], § 3, où cette propriété (α) est introduite en même temps que deux autres toutes trois équivalentes lorsque le noyau K satisfait au second principe du maximum et à une condition de croissance portant sur sa transformée de Fourier, dont nous nous sommes passés dans cette étude.

2° Soit $x \in G$, tel que la suite $\{nx\}$ n'ait pas de point adhérent (ce qui suppose G non compact) ; ε^x, mesure constituée par la masse $+1$ en x, constitue une famille fondamentale, et $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{nx}$ est un noyau associé. Par rapport à ce noyau, le potentiel engendré par la mesure μ est la somme des translatées $\mu^{nx}(n=0, 1, \ldots)$. Les mesures harmoniques U sont caractérisées par $U = U * \varepsilon^x$: ce sont donc les mesures périodiques de période x. Cet exemple montre *l'existence de mesures harmoniques qui ne sont pas des fonctions.*

3° Plus généralement, toujours sous l'hypothèse que $\{nx\}$ n'a pas de point adhérent, $K = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \varepsilon^{nx}$ est dans la classe élémentaire, et ceci quel que soit le nombre $m > 0$; pour $m > 1$, on obtient ainsi un exemple de *noyau pour lequel le balayage est possible, mais non l'équilibre* (voir théorème 11) ; soit d'autre part un ouvert ω contenant x mais ne contenant pas o ni aucun des points nx avec $n \geqslant 2$; la balayée de $\mu = \varepsilon$ sur ω est $\mu' = m\varepsilon^x$ (car $mK * \varepsilon^x = K$ dans ω et $m\varepsilon^x$ ne charge pas le complémentaire de ω ; voir le corollaire du théorème 9) ; d'où un exemple pour lequel *la relation* $\int d\mu' \leqslant \int d\mu$ *n'est pas réalisée* (voir § 10, remarque *b*), et aussi pour lequel le second principe du maximum est vérifié, mais non le premier.

On trouvera dans [7] des exemples de noyaux dans R^n pour lesquels le balayage est possible ; ces noyaux sont tous obtenus comme limites vagues d'éléments de (K_r), sous-ensemble de (K_e) (voir note (7)). Ainsi le noyau K, transformé de Fourier de

$$k(x) = 1 \Big/ \int_0^2 |x|^\alpha d\mu(\alpha)$$

convient quelle que soit $\mu \geqslant 0$ telle que $k(x)$ soit sommable sur tout compact (ce qui a lieu pour toute $\mu \neq 0$ dès que $n > 2$),

En réalité on peut montrer que ce noyau est toujours dans la classe (K_a), bien qu'il ne soit pas aisé de déterminer explicitement une famille fondamentale à laquelle il est associé : on peut le faire cependant lorsque μ est une masse ponctuelle de l'intervalle $(0 < \alpha \leqslant 2)$, car K est alors proportionnel au noyau d'ordre α et on sait, avec M. Riesz, déterminer la balayée de ε sur l'extérieur de toute sphère de centre o (voir [8]).

Le procédé de construction utilisé dans [7] pourrait être appliqué à des éléments de (K_e) (au lieu de (K_r)), ce qui conduirait à de nouveaux exemples de noyaux dissymétriques pour lesquels le balayage est possible; mentionnons seulement, pour $G = R^1$, un exemple trivial ne nécessitant aucun calcul : la fonction

$$K(x) = \begin{matrix} 0 & \text{pour} & x < 0 \\ \exp(-ax) & \text{pour} & x \geqslant 0 \end{matrix} \quad (a \geqslant 0)$$

est évidemment le noyau associé à la famille fondamentale constituée par les mesures $\varepsilon^h \exp(-ah)$ (h parcourant l'ensemble des nombres > 0) ; les mesures harmoniques correspondantes sont les fonctions $C \exp(-ax)$; cet exemple est à rapprocher du second exemple donné dans l'introduction, mais il est à noter que dans le cas présent K est associé à une famille fondamentale même si la constante a est nulle.

Signalons pour terminer qu'on peut adapter facilement à T^n l'exemple général donné dans [7] dans le cas de R^n et rappelé plus haut ; d'autre part, pour $n = 1$ (groupe des réels modulo 2π), le noyau $K(x) = \log[1 + m/\sin^2(x/2)]$ (avec $m > 0$) est associé à une famille fondamentale, comme cela résulte aisément de la théorie élémentaire du potentiel par rapport à la fonction de Green du cercle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki. Topologie générale, chap. 1 (*Act. Sc. et Ind.* n° 858).

[2] M. Brelot. Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités (*J. de Math.*, 24, 1945, pp. 1-32).

[3] M. Brelot. Quelques propriétés et applications du balayage (*C. R.* 226, 1948, pp. 1499-1500).

[4] H. Cartan. Sur les fondements de la théorie du potentiel (*Bull. Soc. Math. de France*, 69, 1941, pp. 71-96).

[5] H. Cartan et J. Deny. Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique (*Acta de Szeged*, 12, 1950, p. 81-100).

[6] G. Choquet. Les capacités, fonctions alternées d'ensembles (*C. R.* 233, 1951, pp. 904-906).

[7] J. Deny. Le balayage (volume jubilaire de M. Riesz).

[8] M. Riesz. Intégrales de Riemann-Liouville et Potentiels (*Acta de Szeged*, 9, 1938, pp. 1-42).

(Parvenu aux Annales le 18 février 1952)