ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

WOLFHARD HANSEN

Fegen und Dünnheit mit Anwendungen auf die Laplace-und Wärmeleitungsgleichung

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 1 (1971), p. 79-121
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_79_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 79-121

FEGEN UND DUNNHEIT MIT ANWENDUNGEN AUF DIE LAPLACE-UND WARMELEITUNGSGLEICHUNG

par Wolfhard HANSEN

Einleitung.

In der Arbeit "On the Dirichlet problem for the heat equation" von Effros und Kazdan ([5]) werden für die Wärmeleitungsgleichung Regularitätskriterien für offene Mengen mit hinreichend glattem Rand untersucht. Entscheidend ist dabei der folgende Satz, der mit einigem analytischen Aufwand bewiesen wird : Ist B_0 eine offene Kugel im $\mathbf{R}^m$ und $B = \{(\alpha x, -\alpha^2) : \alpha > 0, x \in B_0\}$, so ist B nicht dünn in 0.

Die vorliegende Arbeit beruht auf dem Versuch, prozesstheoretisch motivierte Überlegungen zu benutzen und damit einen Satz über harmonische Räume zu beweisen, dessen Spezialisierung auf die Wärmeleitungsgleichung eine Verschärfung des obigen Satzes ist. Dazu ist zunächst ein über bisherige Untersuchungen hinausgehendes Studium des Fegens von Massen notwendig, das unabhängig von dieser Motivation von Interesse ist. Insbesondere ergibt sich dabei ein kurzer Beweis dafür, dass ein auf eine Menge B gefegtes Mass auf dem feinen Abschluss dieser Menge sitzt.

In vielen Fällen sind die Sätze wohl am ehesten verständlich, wenn man sich vor Augen führt, dass für einen zugehörigen Prozess die Verteilung der ersten Treffer an einer Menge das zugehörige gefegte Mass ist, bei Start in einer Absorptionsmenge diese nicht mehr verlassen und eine polare Menge niemals getroffen wird (vgl. [2]). Vor allem der Beweis des wichtigen Satzes 3.3 beruht auf solchen Überlegungen. Darin wird für eine Menge B und einen Punkt z ein Zusammenhang hergestellt zwischen Dünnheit von B in z einerseits und Polarität von B und der Beziehung zwischen Fegen auf B und Fegen auf $B \backslash A_n$ für eine gewisse Folge (A_n) von Absoprtionsmengen andererseits.

Für die Wärmeleitungsgleichung ergibt sich daraus, dass eine in einem Punkt z parabolisch zusammenziehbare Menge (s.S.) genau dann nicht dünn ist in z, wenn ihr "unterhalb" von z gelegener Anteil nicht polar ist.

Es erweist sich aber, dass das Vorhandensein von geeigneten Absorptionsmengen dafür gar nicht entscheidend ist. Wichtig ist nur, dass die Menge B im Punkt z durch Homomorphismen des harmonischen Raumes zusammengezogen werden kann. Es ergibt sich ein Satz (Korollar 5.6), der in gleicher Weise auf die Wärmeleitungsgleichung wie auf die Laplace-Gleichung angewendet werden kann.

Für die Laplace-Gleichung erhält man, dass eine in einem Punkt zusammenziehbare Menge (s.S.) genau dann nicht dünn ist in diesem Punkt, wenn sie nicht polar ist.

In einem letzten Abschnitt werden als Ergänzung zu den gefegten auch reduzierte Masse eingeführt, die bei den vorherigen Betrachtungen schon etwas im Hintergrund standen. Dabei ergeben sich Approximationssätze für das Reduzieren (Fegen) auf Borelsche Mengen durch Reduzieren (Fegen) auf offene Obermengen bzw. kompakte Teilmengen.

1. Einige Eigenschaften des Fegens von Massen.

Es sei $(E, \mathcal{H})$ ein streng harmonischer Raum im Sinne von H. Bauer (s. [1]). ${}^*\mathcal{H}^+$ sei die Menge aller positiven hyperharmonischen, $\mathcal{S}^+$ die Menge aller positiven superharmonischen Funktionen auf E. $\mathcal{P}_0$ sei die Menge aller stetigen reellen Potentiale, die ausserhalb einer kompakten Menge harmonisch sind, und $\mathcal{M}_0$ die Menge aller positiven Radonschen Masse auf E, für die alle Funktionen aus $\mathcal{P}_0$ integrierbar sind.

Zu jeder Teilmenge B von E und jedem $\mu \in \mathcal{M}_0$ gibt es dann bekanntlich genau ein Mass $\mu^B \in \mathcal{M}_0$ mit $\int p \, d\mu^B = \int \hat{R}_p^B \, d\mu$ für alle $p \in \mathcal{P}_0$, das zu μ und B gehörige gefegte Mass. Für scharfe Aussagen über solche gefegten Masse ist das folgende Lemma nützlich.

Lemma 1.1. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E, K *eine kompakte Teilmenge von* $\complement B$ *und* $s \in \mathcal{S}^+$ *reellwertig. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine fein-offene Obermenge* H *von* B *mit*

$$R_s^H \leqslant \hat{R}_s^B + \varepsilon \quad \textit{auf} \quad K .$$

Beweis. – Sei $\varepsilon > 0$ und $(\mathcal{O}_n)$ eine antitone Folge offener Teilmengen von E mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = K$. Für $n \in \mathbf{N}$ sei $B_n = B \setminus \mathcal{O}_n$. Dann ist $\overline{B}_n \cap K = \emptyset$ und daher

$$\{ R_s^G : G \text{ fein-offen}, B_n \subset G, \overline{G} \cap K = \emptyset \}$$

eine absteigend filtrierende Familie von auf K stetigen reellen Funktionen, deren Infimum $R_s^{B_n}$ ebenfalls auf K stetig ist. Daher existiert eine fein-offene Obermenge G_n von B_n mit

$$R_s^{G_n} \leqslant R_s^{B_n} + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{auf} \quad K . \tag{1}$$

Es sei nun

$$H_n = \bigcup_{m \leqslant n} G_m .$$

Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist dann

$$R_s^{H_n} \leqslant R_s^{B_n} + \sum_{m \leqslant n} \frac{\varepsilon}{2^m} \quad \text{auf} \quad K . \tag{2}$$

Für $n = 1$ ist das Ungleichung (1). Es gelte Ungleichung (2) für ein $n \geqslant 1$. Dann ist auf K wegen (1) und $B_n \subset H_n \cap G_{n+1}$

$$\begin{aligned} R_s^{H_{n+1}} &\leqslant R_s^{H_n} + R_s^{G_{n+1}} - R_s^{H_n \cap G_{n+1}} \\ &\leqslant R_s^{B_n} + \sum_{m \leqslant n} \frac{\varepsilon}{2^m} + R_s^{B_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - R_s^{B_n} \\ &= R_s^{B_{n+1}} + \sum_{m \leqslant n+1} \frac{\varepsilon}{2^m} . \end{aligned}$$

Für die fein-offene Obermenge $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ von $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ gilt also auf K

$$R_s^H = \sup R_s^{H_n} \leqslant \sup R_s^{B_n} + \varepsilon \leqslant R_s^B + \varepsilon = \hat{R}_s^B + \varepsilon .$$

Bemerkung. – Ist s sogar stetig, so können wir offenbar alle G_n und damit auch H offen wählen.

Zusammen mit der in [4], S.278 bewiesenen Charakterisierung der Punkte, in denen eine Menge dünn ist, liefert dieses Lemma zum

Beispiel einen kurzen Beweis für die erstmals in [4] mit rein potentialtheoretischen Methoden bewiesene Tatsache, dass die auf eine Menge B gefegten Masse auf dem feinen Abschluss von B sitzen, nämlich den

SATZ 1.2. – *Für alle Teilmengen* B *von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ *hat das Komplement des feinen Abschlusses von* B *ein inneres* μ^B-Mass *Null.*

Beweis. – Sei B eine Teilmenge von E und $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Es sei K eine kompakte Teilmenge von E, die disjunkt ist zum feinen Abschluss von B, und p ein strenges reelles Potential mit $\int p \, d\mu < \infty$. Dann ist nach [4], Korollar 1.2

$$K \subset \complement B \cap [\hat{R}_p^B < p] .$$

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ existiert nach Lemma 1.1 eine fein-offene Obermenge H_n von B mit

$$p_n := R_p^{H_n} \leqslant \hat{R}_p^B + \frac{1}{n} \quad \text{auf} \quad K . \tag{1}$$

Da p_n ein Potential ist und auf B mit p übereinstimmt, ist

$$\hat{R}_{p_n}^B = \hat{R}_p^B$$

und

$$\int (p - p_n) \, d\mu^B = \int (\hat{R}_p^B - \hat{R}_{p_n}^B) \, d\mu = 0 . \tag{2}$$

Sei

$$K_n = K \cap \left[\hat{R}_p^B + \frac{1}{n} < p\right] .$$

Auf K_n ist $p_n < p$ wegen Ungleichung (1). Also folgt aus (2)

$$\mu^B(K_n) = 0 .$$

Wegen $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ist daher auch

$$\mu^B(K) = 0 .$$

In unserem Zusammenhang ist Lemma 1.1 wichtig durch die folgende Konsequenz :

SATZ 1.3. – *Seien* B_1 , B_2 *Teilmengen von* E, B_1 *enthalten in einer kompakten Teilmenge von* $\complement B_2$. *Es sei* K *eine kompakte Teilmenge von* $\complement B_1$, $s \in \mathcal{S}^+$ *reellwertig und* $\varepsilon > 0$. Dann existieren fein-offene Obermengen G_1 von B_1 und G_2 von B_2 mit

$$R^{G_1}_{R_s^{G_2}} \leqslant R^{B_1}_{\hat{R}_s^{B_2}} + \varepsilon \quad \text{auf} \quad B_1 \cup K .$$

Beweis. – Sei $t \in \mathfrak{S}^+$ mit $0 < t < 1/2$ auf $B_1 \cup K$. Nach Lemma 1.1 existiert dann eine fein-offene Obermenge G_2 von B_2 mit

$$R_s^{G_2} \leqslant \hat{R}_s^{B_2} + \varepsilon t \quad \text{auf} \quad B_1 . \tag{1}$$

Ebenso existiert nach Lemma 1.1 eine fein-offene Obermenge G_1 von B_1 mit

$$R^{G_1}_{R_s^{G_2}} \leqslant R^{B_1}_{R_s^{G_2}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{auf} \quad K .$$

Also ist auf K

$$R^{G_1}_{R_s^{G_2}} \leqslant R^{B_1}_{\hat{R}_s^{B_2} + \varepsilon t} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant R^{B_1}_{\hat{R}_s^{B_2}} + \varepsilon t + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant R^{B_1}_{\hat{R}_s^{B_2}} + \varepsilon .$$

Auf B_1 ist aber nach (1)

$$R^{G_1}_{R_s^{G_2}} = R_s^{G_2} \leqslant \hat{R}_s^{B_2} + \varepsilon t \leqslant R^{B_1}_{\hat{R}_s^{B_2}} + \varepsilon .$$

Der folgende Satz zeigt, wieweit man das Innere aus Mengen herausnehmen kann, ohne darauf gefegte Masse zu verändern.

SATZ 1.4. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E *und* $\mathfrak{O}$ *eine offene Teilmenge von* B *mit* $\overline{\mathfrak{O}} \subset B$. *Dann ist für alle* $z \in E$, *die keine fein-inneren Punkte des feinen Abschlusses von* $\mathfrak{O}$ *sind,*

$$\varepsilon_z^B = \varepsilon_z^{B \setminus \mathfrak{O}} .$$

Beweis. – Sei $p \in \mathfrak{P}_0$ und $\nu \in {}^*\mathcal{H}^+$ mit $\nu \leqslant p$ und $\nu = p$ auf $B \setminus \mathfrak{O}$. Sei

$$w = \begin{cases} \nu & \text{in} \quad C\mathfrak{O} , \\ p & \text{in} \quad \mathfrak{O} . \end{cases}$$

Für $w \in {}^*\mathcal{H}^+$ genügt es zu zeigen, dass w in allen Punkten aus dem Rand $\mathfrak{O}^*$ nach unten halbstetig ist und für alle $x \in \mathfrak{O}^*$ und regulären Umgebungen U von x gilt

$$\int w \, d\mu_x^{\mathrm{U}} \leqslant w(x) \; .$$

Sei also $x \in \mathcal{O}^*$. Dann ist wegen $p \geqslant v$ auch $p \geqslant w \geqslant v$, also

$$\liminf_{y \to x} w(y) \geqslant \liminf_{y \to x} v(y) = v(x) = w(x) \; .$$

Weiter gilt für jede reguläre Umgebung U von x wegen $x \in \mathcal{O}^* \subset \mathrm{B} \setminus \mathcal{O}$

$$\int w \, d\mu_x^{\mathrm{U}} \leqslant \int p \, d\mu_x^{\mathrm{U}} \leqslant p(x) = v(x) = w(x) \; .$$

Also ist $w \in {}^*\mathcal{H}^+$ und $w = p$ auf B. Damit folgt

$$\mathrm{R}_p^{\mathrm{B} \setminus \mathcal{O}} \geqslant \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}} \qquad \text{in} \quad \complement \mathcal{O} \; ,$$

also

$$\mathrm{R}_p^{\mathrm{B} \setminus \mathcal{O}} = \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}} \qquad \text{in} \quad \complement \mathcal{O} \; .$$

Regularisieren ergibt im feinen Inneren von $\complement \mathcal{O}$

$$\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B} \setminus \mathcal{O}} = \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}} \; ,$$

also $\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B} \setminus \mathcal{O}} = \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}}$ auf dem feinen Abschluss des feinen Inneren von $\complement \mathcal{O}$. Das ist aber gerade das Komplement des feinen Inneren des feinen Abschlusses von $\mathcal{O}$. Damit folgt die Behauptung.

KOROLLAR 1.5. – *Sei* B *eine abgeschlossene Teilmenge von* E, z *kein fein-innerer Punkt von* B *und* B_1 *eine beliebige Teilmenge von* E. *Dann ist*

$$\varepsilon_z^{\mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1} = \varepsilon_z^{\mathrm{B}^* \cup \mathrm{B}_1} \; .$$

Beweis. – Für $\mathcal{O} := \mathring{\mathrm{B}}$ ist $\mathcal{O}^* \subset \mathrm{B}$ und

$$(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1) \setminus \mathcal{O} \subset \mathrm{B}^* \cup \mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1 \; .$$

Nach Satz 1.4 ist

$$\varepsilon_z^{(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1) \setminus \mathcal{O}} = \varepsilon_z^{\mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1} \; .$$

Also ist auch

$$\varepsilon_z^{\mathrm{B}^* \cup \mathrm{B}_1} = \varepsilon_z^{\mathrm{B} \cup \mathrm{B}_1} \; .$$

SATZ 1.6. – *Seien* B_1 , B_2 *Teilmengen von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$. *Ist* B_2 *im feinen Inneren von* B_1 *enthalten, so ist*

$$(\mu^{\mathrm{B}_2})^{\mathrm{B}_1} = \mu^{\mathrm{B}_2} \; .$$

Ist B_2 *sogar im Inneren von* B_1 *enthalten, so ist auch*

$$(\mu^{B_1})^{B_2} = \mu^{B_2} .$$

Beweis. – Sei zunächst B_2 enthalten im feinen Inneren von B_1. Für alle $p \in \mathcal{P}_0$ ist dann $\hat{R}_p^{B_1} = p$ auf B_2, also

$$\hat{R}^{B_2}_{\hat{R}_p^{B_1}} = \hat{R}_p^{B_2}$$

und daher

$$\int p\, d(\mu^{B_2})^{B_1} = \int \hat{R}_p^{B_1}\, d\mu^{B_2} = \int \hat{R}^{B_2}_{\hat{R}_p^{B_1}}\, d\mu =$$

$$= \int \hat{R}_p^{B_1}\, d\mu = \int p\, d\mu^{B_1} .$$

Also ist

$$(\mu^{B_2})^{B_1} = \mu^{B_1} .$$

Sei nun sogar $\overline{B}_2 \subset \mathring{B}_1$ und B_1 relativ-kompakt. Es sei $p \in \mathcal{P}_0$. Definieren wir

$$p_{B_1, B_2} = \inf R^{G_1 \cup G_2}_{\inf(R_p^{G_1}, R_p^{G_2})} ,$$

wobei das erste Infimum über alle fein-offenen Obermengen G_1 von B_1 und G_2 von B_2 zu nehmen ist, so ist nach [4], S.275

$$R_p^{B_1} + R_p^{B_2} = R_p^{B_1 \cup B_2} + p_{B_1, B_2}$$

Wegen $B_1 \cup B_2 = B_1$ ist also

$$R_p^{B_2} = p_{B_1, B_2} .$$

Ist G_1 eine fein-offene Obermenge von B_1 und G_2 eine fein-offene Obermenge von B_2 mit $G_2 \subset G_1$, so ist

$$R^{G_1 \cup G_2}_{\inf(R_p^{G_1}, R_p^{G_2})} = R^{G_1}_{R_p^{G_2}} .$$

Also ist

$$p_{B_1, B_2} = \inf\left\{ R^{G_1}_{R_p^{G_2}} : G_i \text{ fein-offen, } B_i \subset G_i \right\} .$$

Es sei $\mathfrak{G}$ eine fein-offene Obermenge von B_2 mit $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathring{B}_1$, G_1 eine fein-offene, relativ-kompakte Obermenge von B_1. Für jede fein-offene Obermenge G_2 von B_2 ist dann nach Satz 1.4 in $\complement\, \overline{\mathfrak{G}}$

$$R^{G_1}_{R_p^{G_2}} = R^{G_1 \setminus \Theta}_{R_p^{G_2}} \ .$$

Da $\overline{G_1 \setminus \Theta}$ eine kompakte Teilmenge von $\complement B_2$ ist, folgt damit aus Satz 1.3 und erneute Anwendung von Satz 1.4, dass in $\complement \overline{\Theta}$ gilt

$$\inf \left\{ R^{G_1}_{R_p^{G_2}} : G_2 \text{ fein-offen, } B_2 \subset G_2 \right\}$$

$$= R^{G_1 \setminus \Theta}_{\hat{R}_p^{B_2}} = R^{G_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} \ .$$

In $\complement \overline{\Theta}$ ist daher

$$p_{B_1, B_2} = R^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} \ ,$$

also

$$\hat{R}_p^{B_2} = \hat{p}_{B_1, B_2} = \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} \ .$$

Wegen $\overline{\Theta} \subset \mathring{B}_1$ ist auch in $\overline{\Theta}$

$$\hat{R}_p^{B_2} = \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} \ .$$

Sei nun nur noch $B_2 \subset \mathring{B}_1$. Es existiert eine isotone Folge (K_n) kompakter Teilmengen von E mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathring{B}_1$ und eine Folge (K'_n) kompakter Teilmengen von E mit $K'_n \subset \mathring{K}'_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n = E$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$C_n = B_1 \cap K'_{n+1} \ , \quad D_n = B_2 \cap K'_n \cap K_n \ .$$

Dann ist

$$\overline{D}_n \subset K'_n \cap K_n \subset \mathring{B}_1 \cap \mathring{K}'_{n+1} = \mathring{C}_n$$

und C_n relativ-kompakt. Nach obigem ist also für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\hat{R}_p^{D_n} = \hat{R}^{C_n}_{\hat{R}_p^{D_n}} \ ,$$

also auch

$$\hat{R}_p^{B_2} = \sup \hat{R}_p^{D_n} = \sup \hat{R}^{C_n}_{\hat{R}_p^{D_n}} = \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} \ .$$

Da dies für alle $p \in \mathfrak{P}_0$ gilt, ist damit gezeigt

$$\mu^{B_2} = (\mu^{B_1})^{B_2} \ .$$

Bemerkung. – Das folgende Beispiel zeigt, dass $\mu^{B_2} = (\mu^{B_1})^{B_2}$ nicht notwendig gilt, wenn B_2 nur Teilmenge des feinen Inneren von B_1 ist : Sei nämlich A eine nicht-triviale Absorptionsmenge für die Wärmeleitungsgleichung, $B_1 = A$ und $B_2 = A^*$. Für $z \in \complement A$ ist dann $\varepsilon_z^{B_2} \neq 0$, aber $(\varepsilon_z^{B_1})^{B_2} = (\varepsilon_z^{A^*})^{A^*} = 0$, da $\varepsilon_z^{A^*}$ von A^* getragen wird und A^* absolut dünn ist (s. Satz 2.5).

Der folgende Satz und sein Korollar liefern häufig eine Möglichkeit, von der Nicht-Dünnheit zweier "grosser" Mengen in einem Punkt auf die Nicht-Dünnheit "kleiner" Mengen in diesem Punkt zu schliessen.

SATZ 1.7. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E, $z \in E$ *und sowohl* B *als auch* $\complement B$ *nicht dünn in* z. *Dann ist* B^* *nicht dünn in* z.

Beweis. – Nehmen wir an, es ist B^* dünn in z. Wäre dann $\mathring{B}$ dünn in z, so auch $\mathring{B} \cup B^*$, also erst recht B. Daher ist dann $\mathring{B}$ nicht dünn in z. Ebenso ist $\overset{\circ}{\widehat{\complement B}}$ nicht dünn in z.

Mit dem Barrierenkriterium für reguläre Randpunkte können wir daraus sofort einen Widerspruch ableiten. Denn aus $\mathring{B}$ und $\overset{\circ}{\widehat{\complement B}}$ nicht dünn in z, folgt zunächst, dass z ein regulärer Randpunkt sowohl von $\mathring{B}$ wie auch von $\overset{\circ}{\widehat{\complement B}}$ ist. Es existieren also offene Umgebungen U_1 und U_2 von z, ein streng positives $s_1 \in \mathcal{S}^+(U_1 \cap \mathring{B})$ und ein streng positives $s_2 \in \mathcal{S}^+(U_2 \cap \overset{\circ}{\widehat{\complement B}})$ mit

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in \mathring{B}}} s_1(x) = \lim_{\substack{x \to z \\ x \in \overset{\circ}{\widehat{\complement B}}}} s_2(x) = 0 \ .$$

Setzen wir $U = U_1 \cap U_2$ und

$$t = \begin{cases} s_1 & \text{in } U \cap \mathring{B} \ , \\ s_2 & \text{in } U \cap \overset{\circ}{\widehat{\complement B}} \ , \end{cases}$$

so ist offenbar $t \in \mathcal{S}^+(U \cap \complement B^*)$ streng positiv mit

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in \complement B^*}} t(x) = 0 \ .$$

Daher ist z ein regulärer Randpunkt von $\complement B^*$, also $\complement(\complement B^*) = B^*$ nicht dünn in z im Widerspruch zur Annahme.

Dieser Widerspruch ergibt sich aber auch aus unseren Fegesätzen : Sei K eine kompakte Umgebung von z, $C = \overset{\circ}{\complement B} \cap K$, $(\mathcal{O}_n)$ eine antitone Folge offener Teilmengen von E mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = B^* \cap K$ und $C_n = C \setminus \mathcal{O}_n$. Dann ist auch C nicht dünn in z und $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C$. Nach Satz 1.6 ist für alle $n \in N$

$$(\varepsilon_z^{C_n})^{\mathring{B}} = ((\varepsilon_z^{C_n})^{\bar{B}})^{\mathring{B}} .$$

Da $\varepsilon_z^{C_n}$ von $\bar{C}_n$, also einer Teilmenge von $\complement\bar{B}$ getragen wird, ist nach Satz 1.4

$$(\varepsilon_z^{C_n})^{\bar{B}} = (\varepsilon_z^{C_n})^{B^*} .$$

Ist $p \in \mathcal{P}_0$, so ist also für alle $n \in N$

$$\hat{R}^{C_n}_{\hat{R}_p^{\mathring{B}}}(z) = \hat{R}^{C_n}_{\hat{R}^{B^*}_{\hat{R}_p^{\mathring{B}}}}(z) \leqslant \hat{R}_p^{B^*}(z) ,$$

also, da C und $\mathring{B}$ nicht dünn sind in z,

$$p(z) = \hat{R}^{C}_{\hat{R}_p^{\mathring{B}}}(z) = \sup \hat{R}^{C_n}_{\hat{R}_p^{\mathring{B}}}(z) \leqslant \hat{R}_p^{B^*}(z) .$$

Für alle $p \in \mathcal{P}_0$ ist also $\hat{R}_p^{B^*}(z) = p(z)$ und daher B^* nicht dünn in z.

KOROLLAR 1.8. – *Es sei* B *eine abgeschlossene und* $\mathcal{O}$ *eine offene Teilmenge von* E. *Es sei* $z \in \mathcal{O}$ *und* B_1, B_2 *Teilmengen von* $\mathcal{O}\setminus B$, *die nicht dünn sind in z und mit keiner Zusammenhangskomponente von* $\mathcal{O}\setminus B$ *gleichzeitig Punkte gemeinsam haben. Dann ist* B *nicht dünn in z.*

Beweis. – Sei C die Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten Z von $\mathcal{O}\setminus B$ mit $Z \cap B_1 \neq \emptyset$. Da $\mathcal{O}\setminus B$ offen und E lokalzusammenhängend ist, ist C offen. Es ist $B_1 \subset C$ und $B_2 \subset \complement C$. Es sind also C und $\complement C$ nicht dünn in z und damit nach Satz 1.7 auch C^* nicht dünn in z, also auch $\mathcal{O} \cap C^*$. Es ist aber $\mathcal{O} \cap C^* \subset B$. Sei nämlich $x \in (\mathcal{O} \cap C^*)\setminus B$. Da E lokal-zusammenhängend ist, gibt es eine zusammenhängende Umgebung U von x mit $U \subset \mathcal{O}\setminus B$. Es ist $U \cap C \neq \emptyset$, gibt also eine Zusammenhangskomponente Z von $\mathcal{O}\setminus B$ mit $Z \cap B_1 \neq \emptyset$ und $Z \cap U \neq \emptyset$. Es ist dann $Z \cup U$ zusammenhängende Teilmenge von $\mathcal{O}\setminus B$, also $Z \cup U = Z \subset C$. Insbesondere ist $x \in C$. Das steht aber im Widerspruch zu $x \in C^*$, da C offen ist.

Bemerkung. – Falls $1 \in {}^*\mathcal{H}^+$, erhält man unter Benutzung eines zugehörigen Huntschen Prozesses sofort die folgende schärfere Aussage: Sei B eine Teilmenge von E, $z \in$ E, V eine feine Umgebung von z und B_1, B_2 Borelsche Teilmengen von $V \setminus B$, so dass kein Weg in $V \setminus B$ gleichzeitig mit B_1 und B_2 Punkte gemeinsam hat. Sind dann B_1 und B_2 nicht dünn in z, so ist auch B nicht dünn in z.

LEMMA 1.9. – *Sei* G *eine fein-offene Teilmenge von* E, B *eine Teilmenge von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$. *Dann ist*

$$(\mu^{G \cap B})_* (G) \geqslant (\mu^B)_* (G) .$$

(*Für jedes* $\nu \in \mathfrak{M}_0$ *bezeichnen wir mit* ν_* *das innere und mit* ν^* *das äussere Mass zu* ν).

Beweis. – Nach [4], Theorem 1.1 ist $\mu^B \leqslant \mu^{B \cap G} + \mu^{B \setminus G}$. Für jede kompakte Teilmenge K von G ist also

$$\mu^B (K) \leqslant \mu^{G \cap B}(K) + \mu^{B \setminus G}(K) = \mu^{G \cap B}(K) ,$$

da $\mu^{B \setminus G}(K) = 0$ ist nach Satz 1.2. Damit folgt die Behauptung.

SATZ 1.10. – *Seien* B_1, B_2 *Teilmengen von* E *und* $s \in \mathcal{S}^+$ *reellwertig. Dann ist für alle* $z \in$ E

$$R_s^{B_1}(z) \geqslant \inf s(B_1) \cdot (\varepsilon_z^{B_2})^* (B_1) .$$

Ist $1 \in \mathcal{S}^+$, so ist

$$\varepsilon_z^{B_1}(E) \geqslant (\varepsilon_z^{B_2})^* (B_1) ,$$

falls z kein Punkt aus B_1 ist, in dem B_1 dünn ist.

Beweis. – Die erste Ungleichung ist trivial, falls $\inf s(B_1) = 0$ ist. Sei also $\inf s(B_1) > 0$ und $0 < \alpha < \inf s(B_1)$. Dann ist $[\alpha < s]$ eine offene Obermenge von B_1. Sei G eine Borelsche fein-offene Menge mit $B_1 \subset G \subset [\alpha < s]$. Dann ist für alle $z \in$ E

$$\begin{aligned} R_s^G(z) = \hat{R}_s^G(z) &\geqslant \hat{R}_s^{G \cap B_2}(z) \\ &= \int s \, d\varepsilon_z^{G \cap B_2} \geqslant \alpha \varepsilon_z^{G \cap B_2}(G) \\ &\geqslant \alpha \varepsilon_z^{B_2}(G) \geqslant \alpha (\varepsilon_z^{B_2})^* (B_1) . \end{aligned}$$

Dem Beweis von 3.2.1 in [1] entnimmt man

$$\mathrm{R}_s^{\mathrm{B}_1}(z) = \inf \{\mathrm{R}_s^{\mathrm{G}}(z) : \mathrm{G} \text{ fein-offen, Borelsch, } \mathrm{B}_1 \subset \mathrm{G}\}$$

und damit

$$\mathrm{R}_s^{\mathrm{B}_1}(z) \geqslant \inf s(\mathrm{B}_1) \cdot (\varepsilon_z^{\mathrm{B}_2})^* (\mathrm{B}_1) \ .$$

Ist $1 \in \mathfrak{S}^+$ und z kein Punkt aus B_1, in dem B_1 dünn ist, so folgt

$$\varepsilon_z^{\mathrm{B}_1}(\mathrm{E}) = \hat{\mathrm{R}}_1^{\mathrm{B}_1}(z) = \mathrm{R}_1^{\mathrm{B}_1}(z) \geqslant (\varepsilon_z^{\mathrm{B}_2})^* (\mathrm{B}_1) \ .$$

Bemerkung. – Ist B_1 eine nicht-leere polare Menge, $\mathrm{B}_2 = \mathrm{E}$ und $z \in \mathrm{B}_1$, so ist $\varepsilon_z^{\mathrm{B}_1} = 0$, aber $(\varepsilon_z^{\mathrm{B}_2})^* (\mathrm{B}_1) = \varepsilon_z^*(\mathrm{B}_1) = 1$, also die letzte Ungleichung falsch für alle $z \in \mathrm{B}_1$.

KOROLLAR 1.11. – *Sei* P *polare Teilmenge von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ mit $\mu^*(\mathrm{P}) = 0$. *Dann ist für jede Teilmenge* B *von* E $(\mu^{\mathrm{B}})^* (\mathrm{P}) = 0$.

Beweis. – Es gibt eine polare Borelsche Obermenge P′ von P mit $\mu(\mathrm{P}') = 0$. Sei B eine Teilmenge von E und (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n = \mathrm{E}$. Es existieren reelle $s_n \in \mathfrak{S}^+$ mit $s_n \geqslant 1$ auf K_n. Nach Satz 1.10 ist daher für alle $n \in \mathrm{N}$

$$\mu^{\mathrm{B}}(\mathrm{P}' \cap \mathrm{K}_n) = \int \varepsilon_z^{\mathrm{B}}(\mathrm{P}' \cap \mathrm{K}_n)\, d\mu(z) \leqslant \int \mathrm{R}_{s_n}^{\mathrm{P}' \cap \mathrm{K}_n}(z)\, d\mu(z)$$

$$= \int \hat{\mathrm{R}}_{s_n}^{\mathrm{P}' \cap \mathrm{K}_n}(z)\, d\mu(z) = 0 \ .$$

Daher ist auch

$$(\mu^{\mathrm{B}})^* (\mathrm{P}) \leqslant \mu^{\mathrm{B}}(\mathrm{P}') \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\mathrm{B}}(\mathrm{P}' \cap \mathrm{K}_n) = 0 \ .$$

Bemerkung. – Für Brelotsche harmonische Räume mit Axiom D steht dieses Korollar als prop. 28.4 in [8].

KOROLLAR 1.12. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E. *Es existiere eine offene Teilmenge* $\mathfrak{O}$ *von* E *und eine Umgebung* U *eines regulären Randpunktes von* $\mathfrak{O}$ *mit* $\mathfrak{O}^* \cap \mathrm{U} \subset \mathrm{B}$. *Dann ist* B *nicht polar.*

Beweis. – Sei f eine stetige reelle Funktion auf $\mathfrak{O}^*$ mit kompaktem Träger in $\mathfrak{O}^* \cap \mathring{\mathrm{U}}$ und $f(z) > 0$ für einen regulären Randpunkt z von $\mathfrak{O}$. Dann ist

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in \mathcal{O}}} \varepsilon_x^{\complement\mathcal{O}}(f) = f(z) > 0 \ .$$

Es existiert also ein $x \in \mathcal{O}$ mit $\varepsilon_x^{\complement\mathcal{O}}(f) > 0$. Da der Träger von f in $\mathcal{O}^* \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}$ liegt, ist daher auch $\varepsilon_x^{\complement\mathcal{O}}(\mathcal{O}^* \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}) > 0$. Nach Korollar 1.11 ist daher $\mathcal{O}^* \cap \overset{\circ}{\mathrm{U}}$ nicht polar, also erst recht nicht B.

Wir wollen eine Teilmenge B von E absolut-dünn nennen, wenn $\varepsilon_z^{\mathrm{B}} = 0$ ist für alle $z \in \mathrm{B}$. Jede polare Menge ist offenbar absolut-dünn. Jede absolut-dünne Menge ist total-dünn : Sei B absolut-dünn und $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ streng positiv. Dann ist $\hat{\mathrm{R}}_u^{\mathrm{B}} = 0$ auf B, also auch auf dem feinen Abschluss von B. Es ist also $\hat{\mathrm{R}}_u^{\mathrm{B}} < u$ auf dem feinen Abschluss von B und daher B dünn in allen Punkten des feinen Abschlusses von B. In allen anderen Punkten ist aber B dünn nach Definition der feinen Topologie. Also ist B total-dünn (und damit in Wirklichkeit bereits fein-abgeschlossen).

Für das Fegen auf die Ränder von Absorptionsmengen bei der Wärmeleitungsgleichung, die ja absolut-dünne Mengen sind (s. Satz 2.5), sind die folgenden beiden Sätze von Interesse. Sie sind eine weitere Anwendung von Satz 1.3.

SATZ 1.13. – *Sei* B *eine absolut-dünne Borelsche Teilmenge von* E *und* B_1 , B_2 *disjunkte Borelsche Teilmengen von* B mit $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}$. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$.

$$\mu^{\mathrm{B}} = \mu^{\mathrm{B}_1} + \mu^{\mathrm{B}_2} \ .$$

Beweis. – Sei $p \in \mathcal{P}_0$, K_i kompakte Teilmenge von B_i und G_i fein-offene Obermenge von K_i ($i = 1{,}2$). Wegen

$$\mathrm{I}_{\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2} \cdot \inf(\mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_1}, \mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_2}) \leqslant \mathrm{I}_{\mathrm{G}_1} \cdot \mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_2} + \mathrm{I}_{\mathrm{G}_2} \cdot \mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_1}$$

ist

$$\mathrm{R}^{\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2}_{\inf(\mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_1}, \mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_2})} \leqslant \mathrm{R}^{\mathrm{G}_1}_{\mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_2}} + \mathrm{R}^{\mathrm{G}_2}_{\mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_1}}$$

und daher nach Satz 1.3

$$p_{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2} = \inf \left\{ \mathrm{R}^{\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2}_{\inf(\mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_1}, \mathrm{R}_p^{\mathrm{G}_2})} : \mathrm{G}_i \text{ fein-offen, } \mathrm{K}_i \subset \mathrm{G}_i \right\}$$

$$\leqslant \mathrm{R}^{\mathrm{K}_1}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{K}_2}} + \mathrm{R}^{\mathrm{K}_2}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{K}_1}} \leqslant 2\, \mathrm{R}^{\mathrm{B}}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}}} \ .$$

Da B absolut dünn ist, ist aber $\hat{R}_p^B = 0$ auf B, also

$$p_{K_1, K_2} = 0 .$$

Daher ist

$$R_p^{K_1 \cup K_2} = R_p^{K_1} + R_p^{K_2} - p_{K_1, K_2}$$
$$= R_p^{K_1} + R_p^{K_2} .$$

Nach [1], 3.2.5 und dem Choquetschen Satz über Kapazitäten folgt daraus

$$R_p^B \geqslant R_p^{B_1} + R_p^{B_2} ,$$

also

$$R_p^B = R_p^{B_1} + R_p^{B_2}$$

und

$$\hat{R}_p^B = \hat{R}_p^{B_1} + \hat{R}_p^{B_2} .$$

Das ergibt die Behauptung.

Ist $\mu \in \mathfrak{M}_0$ und B eine beliebige Teilmenge von E, so definieren wir $\mu|_B$ durch

$$(\mu|_B)(C) = \inf\{\mu(\widetilde{B} \cap C) : \widetilde{B} \text{ Borelsch, } B \subset \widetilde{B}\}$$

für alle Borelschen Teilmengen C von E. Dann ist auch $\mu|_B \in \mathfrak{M}_0$ und wir erhalten das

KOROLLAR 1.14. – *Sei* B *eine absolut dünne Menge und* B_1 *eine Teilmenge von* B. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^{B_1} = \mu^B|_{B_1}$$

und insbesondere

$$\mu^{B_1}(E) = (\mu^B)^*(B_1) .$$

Beweis. – Sei p ein strenges Potential. Nach [4], Lemma 1.2 existiert eine Borelsche Obermenge B' von B und eine Borelsche Obermenge B_1' von B_1 mit

$$\hat{R}_p^{B'} = \hat{R}_p^B , \qquad \hat{R}_p^{B_1'} = \hat{R}_p^{B_1} . \tag{1}$$

Es sei

$$B'' = B' \cap [\hat{R}_p^B = 0] , \qquad B_1'' = B_1' \cap B'' .$$

Dann ist $B \subset B'' \subset B'$ und $B_1 \subset B_1'' \subset B_1'$, also wegen (1)

$$\hat{R}_p^{B''} = \hat{R}_p^{B} , \qquad \hat{R}_p^{B_1''} = \hat{R}_p^{B_1} .$$

B'' ist Borelsch und absolut dünn wegen $\hat{R}_p^{B''} = \hat{R}_p^{B} = 0$ auf B''. B_1'' ist eine Borelsche Teilmenge von B''.

Sei nun $\mu \in \mathfrak{M}_0$, C eine Borelsche Teilmenge von E und $\widetilde{B}_1$ eine Borelsche Obermenge von B_1 mit $\widetilde{B}_1 \subset B_1''$. Nach Satz 1.13 erhalten wir daraus

$$\mu^B(\widetilde{B}_1 \cap C) = \mu^{B''}(\widetilde{B}_1 \cap C) = \mu^{\widetilde{B}_1}(\widetilde{B}_1 \cap C) + \mu^{B''\setminus\widetilde{B}_1}(\widetilde{B}_1 \cap C) .$$

$\widetilde{B}_1$ und $B''\setminus\widetilde{B}_1$ sind Borelsche Mengen und als absolut-dünne Mengen fein-abgeschlossen. Nach Satz 1.2 ist daher

$$\mu^{\widetilde{B}_1}(\complement\widetilde{B}_1) = 0 , \qquad \mu^{B''\setminus\widetilde{B}_1}(\widetilde{B}_1) = 0 .$$

Also ist

$$\mu^B(\widetilde{B}_1 \cap C) = \mu^{\widetilde{B}_1}(C) = \mu^{B_1}(C) .$$

Das beweist

$$(\mu^B|_{B_1})(C) = \mu^{B_1}(C) .$$

Es ist insbesondere

$$\mu^{B_1}(E) = (\mu^B|_{B_1})(E) = (\mu^B)^*(B_1) .$$

Bemerkung. – Während die meisten Sätze, die für harmonische Räume im Sinne von H. Bauer gelten, zumindest in modifizierter Form auch für die in [6] entwickelte Potentialtheorie harmonischer Kerne, die die Potentialtheorie Markoffscher Ketten und der Riesz-Potentiale umfasst, wahr sind, ist das sicherlich nicht der Fall für Satz 1.4 und die daran anschliessenden Sätze 1.5 bis 1.8.

2. Fegen von Massen und Absorptionsmengen.

SATZ 2.1. – *Seien* B_1, B_2 *Teilmengen von* E, *zu denen es eine Absorptionsmenge* A *gibt mit* $B_1 \subset \complement A$ *und* $B_2 \subset A$. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^{B_1} + \mu^{B_2} = \mu^{B_1 \cup B_2} + (\mu^{B_1})^{B_2} .$$

Beweis. – Sei $p \in \mathfrak{P}_0$ und (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von $\complement A$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \complement A$. Für $n \in N$ sei $C_n = B_1 \cap K_n$. Sei G_1 fein-offen mit $C_n \subset G_1 \subset \complement A$ und G_2 fein-offen mit $B_2 \subset G_2 \subset A$. Dann ist $R_p^{G_1} = 0$ auf A, also auf G_2 und daher

$$R^{G_1 \cup G_2}_{\inf(R_p^{G_1}, R_p^{G_2})} = R^{G_1}_{\inf(R_p^{G_1}, R_p^{G_2})} = R^{G_1}_{R_p^{G_2}} .$$

Nach Satz 1.3 ist daher für alle $n \in N$

$$\hat{R}_p^{C_n} + \hat{R}_p^{B_2} = \hat{R}_p^{C_n \cup B_2} + \hat{R}^{C_n}_{\hat{R}_p^{B_2}} ,$$

also

$$\hat{R}_p^{B_1} + \hat{R}_p^{B_2} = \hat{R}_p^{B_1 \cup B_2} + \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} .$$

Daraus folgt die Behauptung.

SATZ 2.2. – *Sei* A *eine Absorptionsmenge,* B_1 *eine Teilmenge von* $\complement A$ *und* B_2 *eine Teilmenge von* A. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^{B_1 \cup B_2} = \mu^{B_1} + \mu^{B_1 \cup B_2}|_A .$$

Beweis. – Sei $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Die Behauptung ist offenbar äquivalent zu

$$\mu^{B_1 \cup B_2}|_{\complement A} = \mu^{B_1} .$$

Da A fein-offen und disjunkt zu B_1 ist, ist aber nach Satz 1.2 $\mu^{B_1}(A) = 0$, d.h. $\mu^{B_1} = \mu^{B_1}|_{\complement A}$. Daher ist zu zeigen

$$\mu^{B_1 \cup B_2}|_{\complement A} = \mu^{B_1}|_{\complement A} .$$

Seien $p, q \in \mathfrak{P}_0$ mit $p = q$ auf A. Dann ist

$$\hat{R}_p^{B_2} = \hat{R}_q^{B_2} \quad , \quad \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_p^{B_2}} = \hat{R}^{B_1}_{\hat{R}_q^{B_2}} ,$$

also nach Satz 2.1

$$\begin{aligned} \int (p - q)\, d\mu^{B_1 \cup B_2} &= \int (\hat{R}_p^{B_1 \cup B_2} - \hat{R}_q^{B_1 \cup B_2})\, d\mu \\ &= \int (\hat{R}_p^{B_1} - \hat{R}_q^{B_1})\, d\mu \\ &= \int (p - q)\, d\mu^{B_1} . \end{aligned}$$

Daher ist

$$\mu^{B_1 \cup B_2}|_{\complement A} = \mu^{B_1}|_{\complement A} .$$

KOROLLAR 2.3. – *Sei* A *eine Absorptionsmenge und* B *eine Teilmenge von* $\complement A$. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^{B \cup A} = \mu^{B} + \mu^{B \cup A}|_{A} .$$

SATZ 2.4. – *Sei* A *eine Absorptionsmenge,* B_1 *eine Teilmenge von* $\complement A$ *und* B_2 *eine Teilmenge des Inneren von* A. *Dann ist für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^{B_1 \cup B_2} = \mu^{B_1} + (\mu^{B_1 \cup A}|_{A})^{B_2} .$$

Beweis. – Sei $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Dann ist nach Satz 2.1

$$\mu^{B_1 \cup B_2} - \mu^{B_1} = \mu^{B_2} - (\mu^{B_1})^{B_2} .$$

Da B_2 im Inneren von A, also erst recht im Inneren von $B_1 \cup A$ enthalten ist, ist das nach Satz 1.6

$$= (\mu^{B_1 \cup A})^{B_2} - (\mu^{B_1})^{B_2} ,$$

und das ist nach Korollar 2.3

$$= (\mu^{B_1 \cup A}|_{A})^{B_2} .$$

SATZ 2.5. – *Es sei* (A_n) *eine Folge von Absorptionsmengen und* A *deren Vereinigung. Dann ist* $\overline{A}$ *eine Absorptionsmenge. Für alle* $z \in \overline{A}$ *ist* $\varepsilon_z^{\complement A} = 0$. *Insbesondere ist* $A^* \setminus A$ *absolut-dünn und* $\overline{A}$ *gleich dem feinen Abschluss von* A. *In allen* $z \in A^* \setminus A$ *ist* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*$ *nicht dünn.*

Beweis. – Sei p ein strenges Potential. Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist dann $p_n := 1_{\complement A_n} \cdot p$ ein Potential. Also ist

$$R_p^{\complement A} \leqslant \inf p_n = 1_{\complement A} \cdot p$$

und damit $R_p^{\complement A} = 1_{\complement A} \cdot p$. Es folgt

$$\hat{R}_p^{\complement A} = 1_{\complement \overline{A}} \cdot p .$$

Als Nullstellenmenge des Potentials $\hat{R}_p^{\complement A}$ ist daher $\overline{A}$ eine Absorptionsmenge. Für alle $z \in \overline{A}$ folgt weiter $\varepsilon_z^{\complement A} = 0$, also erst recht $\varepsilon_z^{A^* \setminus A} = 0$.

Daher ist $A^*\backslash A$ absolut-dünn. Der feine Abschluss von A ist in $\bar{A}$ enthalten. Ist $z \in \bar{A}$, so ist

$$p(z) \leqslant \hat{R}_p^{A}(z) + \hat{R}_p^{\complement A}(z) = \hat{R}_p^{A}(z)\ .$$

Also ist A nicht dünn in z und damit z im feinen Abschluss von A.

Sei schliesslich $z \in A^*\backslash A$ und $B_n = \bigcup_{m \leqslant n} A_m$. Dann ist

$$B_n^* \subset \bigcup_{m \leqslant n} A_n^*\ .$$

Für alle $p \in \mathcal{P}_0$ ist daher nach Korollar 1.5

$$\hat{R}_p^{\cup A_n^*}(z) \geqslant \sup \hat{R}_p^{B_n^*}(z) = \sup \hat{R}_p^{B_n}(z)$$

$$= \hat{R}_p^{A}(z) = p(z)\ .$$

Also ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*$ nicht dünn in z.

Bemerkung. – Für Absorptionsmengen bei der Wärmeleitungsgleichung ergibt sich daraus die bekannte Tatsache, dass ihre Ränder absolut dünn sind und jede Vereinigung von solchen Rändern, die in E dicht liegt, in keinem Punkt von E dünn ist.

3. Dünnheit und Absorptionsmengen.

SATZ 3.1. – *Es sei* B *eine Teilmenge von* E *und* $z \in$ E. *Es existiere eine isotone Folge* (A_n) *von Absorptionsmengen mit* $z \in A^*\backslash A$ *für* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *und* $\varepsilon_x^{B \cap \mathring{A}_n} \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbf{N}$ *und* $x \in A_n^*$. *Dann sind äquivalent :*

1) B *ist nicht dünn in* z.

2) *Für alle* $n \in \mathbf{N}$ *existiert ein streng positives reelles* $u_n \in {}^*\mathcal{H}^+$ *mit*

$$\hat{R}_{u_n}^{B\backslash A_n}(z) = u_n(z)\ .$$

3) *Für alle* $n \in \mathbf{N}$ *existiert ein streng positives reelles* $u_n \in {}^*\mathcal{H}^+$ *mit*

$$\hat{R}_{u_n}^{B\backslash A_n}(z) = \hat{R}_{u_n}^{B}(z)\ .$$

Beweis. – Ist B nicht dünn in z, so ist wegen $z \in \complement A_n$ auch $B \backslash A_n$ nicht dünn in z, also $\hat{R}_u^{B \backslash A_n}(z) = u(z)$ für alle $u \in {}^*\mathcal{H}^+$. Aus (1) folgt daher (2). Dass aus (2) Aussage (3) folgt, ist trivial.

Es gelte also (3). Für $n \in \mathbf{N}$ sei

$$C_n = B \backslash A_n \quad , \quad D_n = B \cap \mathring{A}_n \ .$$

Es sei $u_n \in {}^*\mathcal{H}^+$ streng positiv und reellwertig mit

$$\hat{R}_{u_n}^{C_n}(z) = \hat{R}_{u_n}^{B}(z) \ .$$

Wegen

$$C_n \subset C_n \cup D_n \subset B$$

ist dann auch

$$\hat{R}_{u_n}^{C_n \cup D_n}(z) = \hat{R}_{u_n}^{B}(z) \ ,$$

also

$$\int u_n \, d\varepsilon_z^{C_n} = \int u_n \, d\varepsilon_z^{C_n \cup D_n} = \int u_n \, d\varepsilon_z^{B} \ .$$

Nach Satz 2.4 folgt

$$\int u_n \, d(\varepsilon_z^{C_n \cup A_n}|_{A_n})^{D_n} = 0 \ .$$

Sei

$$\mu_n = \varepsilon_z^{C_n \cup A_n}|_{A_n} \ .$$

Wegen $z \in \complement A_n$ ist nach Korollar 1.5

$$\varepsilon_z^{C_n \cup A_n} = \varepsilon_z^{C_n \cup A_n^*} \ .$$

Daher wird μ_n getragen von $\complement \mathring{A}_n \cap A_n = A_n^*$. Für alle $x \in A_n^*$ ist aber nach Voraussetzung $\varepsilon_x^{D_n} \neq 0$. Also ist

$$\mu_n = 0 \ .$$

Nach Korollar 2.3 ist damit

$$\varepsilon_z^{C_n \cup A_n} = \varepsilon_z^{C_n} \ .$$

Für jedes $p \in \mathcal{R}_0$ ist daher für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\hat{R}_p^{B}(z) \geqslant \hat{R}_p^{C_n}(z) = \hat{R}_p^{C_n \cup A_n}(z) \geqslant \hat{R}_p^{A_n}(z) \ ,$$

also

$$\hat{R}_p^B(z) \geqslant \sup \hat{R}_p^{\mathring{A}_n}(z) = \hat{R}_p^A(z) = p(z)$$

nach Satz 2.5. Damit ist B nicht dünn in z.

Nach Satz 1.10 ist die Existenz einer Teilmenge C von E mit $(\varepsilon_x^C)^* (B \cap \mathring{A}_n) \neq 0$ hinreichend für $\varepsilon_x^{B \cap \mathring{A}_n} \neq 0$. Schärfere Aussagen lassen sich machen, wenn die Absorptionsmengen A_n eine Eigenschaft haben, die bei den Absorptionsmengen der Wärmeleitungsgleichung stets erfüllt ist. Wir definieren dazu :

Eine Absorptionsmenge A heisst streng, wenn jede Absorptionsmenge, die das Innere von A nicht enthält, disjunkt ist zu A^*.

Ist für je zwei verschiedene Absorptionsmengen A' und A'' entweder $A' \subset \mathring{A}''$ oder $A'' \subset \mathring{A}'$, wie das bei der Wärmeleitungsgleichung der Fall ist, so sind offenbar alle Absorptionsmengen streng.

SATZ 3.2. – *Sei* A *eine strenge Absorptionsmenge mit* $A^* \neq \emptyset$ *und* B *eine Teilmenge des Inneren von* A. *Dann ist* B *genau dann polar, wenn es ein* $x \in A^*$ *mit* $\varepsilon_x^B = 0$ *gibt.*

Beweis. – Ist B polar, so ist $\varepsilon_x^B = 0$ für alle $x \in E$, also insbesondere für alle $x \in A^*$. Sei nun B nicht polar und $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ streng positiv. Dann ist $\hat{R}_u^B$ nicht identisch Null. Wegen $B \subset \mathring{A}$ ist nach Satz 1.6

$$\hat{R}_{\hat{R}_u^B}^{\mathring{A}} = \hat{R}_u^B .$$

Also ist $\hat{R}_u^B$ sogar auf $\mathring{A}$ nicht identisch Null. Die Absorptionsmenge $[\hat{R}_u^B = 0]$ enthält daher $\mathring{A}$ nicht und ist damit disjunkt zu A^*. Für alle $x \in A^*$ ist daher $\hat{R}_u^B(x) > 0$, d.h. $\varepsilon_x^B \neq 0$.

Damit erhalten wir als Korollar zu Satz 3.1 den folgenden

SATZ 3.3. – *Es sei* B *eine Teilmenge von* E *und* $z \in E$. *Es existiere eine isotone Folge* (A_n) *strenger Absorptionsmengen mit* $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n$ *und* $z \in A^* \setminus A$ *für* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Dann sind äquivalent :*

1) B *ist nicht dünn in* z.

2) B *ist nicht polar und es existiert für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ein streng positives reelles* $u_n \in {}^*\mathcal{H}^+$ *mit*

$$\hat{R}_{u_n}^{B\setminus A_n}(z) = u_n(z) .$$

3) B *ist nicht polar und es existiert für alle* $n \in N$ *ein streng positives reelles* $u_n \in {}^*\mathcal{H}^+$ *mit*

$$\hat{R}_{u_n}^{B\setminus A_n}(z) = \hat{R}_{u_n}^{B}(z) .$$

Beweis. – Dass aus (1) Aussage (2) und aus (2) Aussage (3) folgt, ist ebenso trivial wie bei Satz 3.1. Es gelte also (3). Wegen $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B \cap \mathring{A}_n$ gibt es ein $n_0 \in N$, für das $B \cap \mathring{A}_{n_0}$ nicht polar ist. Offenbar dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n_0 = 1$ ist. Nach Satz 3.2 ist dann für alle $n \in N$ und $x \in A_n^*$ das gefegte Mass $\varepsilon_x^{B \cap \mathring{A}_n} \neq 0$. Nach Satz 3.1 ist daher B nicht dünn in z.

Die Gleichheit $\hat{R}_{u_n}^{B\setminus A_n}(z) = \hat{R}_{u_n}^{B}(z)$ lässt sich häufig mit Symmetrieeigenschaften des harmonischen Raumes und seiner Teilmenge B gewinnen :

Eine offene Abbildung T von E in sich heisse ein Homomorphismus des harmonischen Raumes, wenn für alle $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ auch $u \circ T \in {}^*\mathcal{H}^+$ ist. Es gilt der folgende

SATZ 3.4. – *Seien* B_1, B_2 *Teilmengen von* E, $z \in E$, $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ *und* T *ein Homomorphismus des harmonischen Raumes mit* z *als Fixpunkt,* $T(B_2) \subset B_1$ *und* $u \circ T \geqslant u$ *auf* B_2. *Dann ist*

$$\hat{R}_u^{B_2}(z) \leqslant \hat{R}_u^{B_1}(z) .$$

Ist ausserdem $B_1 \subset B_2$, so ist

$$\hat{R}_u^{B_2}(z) = \hat{R}_u^{B_1}(z) .$$

Beweis. – Sei $v \in {}^*\mathcal{H}^+$ mit $v \geqslant u$ auf B_1. Auf B_2 ist dann $v \circ T \geqslant u \circ T \geqslant u$. Also ist

$$R_u^{B_1} \circ T \geqslant R_u^{B_2}$$

und damit nach nachfolgendem Lemma 3.5

$$\hat{R}_u^{B_2} \leqslant \widehat{R_u^{B_1} \circ T} \leqslant \hat{R}_u^{B_1} \circ T .$$

Insbesondere ist

$$\hat{R}_u^{B_2}(z) \leqslant \hat{R}_u^{B_1}(T(z)) = \hat{R}_u^{B_1}(z) \; .$$

Der Rest ist klar.

LEMMA 3.5. – *Seien* E_1 , E_2 *topologische Räume,* T *eine Abbildung von* E_1 *in* E_2 *und* f *eine numerische Funktion auf* E_2 .

Ist T *stetig, so ist* $\widehat{f \circ T} \geqslant \hat{f} \circ T$.

Ist T *offen, so ist* $\widehat{f \circ T} \leqslant \hat{f} \circ T$.

Beweis. – Sei $x_1 \in E_1$ und $x_2 = T(x_1)$. Dann ist

$$\widehat{f \circ T}(x_1) = \sup_{V_1 \text{ Umg. v. } x_1} \inf (f \circ T)(V_1)$$

$$\hat{f}(x_2) = \sup_{V_2 \text{ Umg. v. } x_2} \inf f(V_2)$$

Sei zunächst T stetig. Für jede Umgebung V_2 von x_2 ist dann $V_1 := \overset{-1}{T}(V_2)$ eine Umgebung von x_1 und $\inf (f \circ T)(V_1) \geqslant \inf f(V_2)$. Es ist dann also $\widehat{f \circ T}(x_1) \geqslant \hat{f}(x_2)$. Sei nun T offen. Für jede Umgebung V_1 von x_1 ist dann $V_2 := T(V_1)$ eine Umgebung von x_2 und $(f \circ T)(V_1) = f(V_2)$. Es ist dann also $\widehat{f \circ T}(x_1) \leqslant \hat{f}(x_2)$.

4. Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Es sei $m \in \mathbf{N}$, $E = \mathbf{R}^{m+1}$ und $\mathcal{H}$ das Garbendatum der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial u}{\partial x_{m+1}} \cdot$$

Nach [1] ist $(E, \mathcal{H})$ ein streng harmonischer Raum, dessen Absorptionsmengen gerade die Halbräume der Form

$$H_t := \{(x, s) : x \in \mathbf{R}^m \; , \; s \leqslant t\}$$

mit $t \in \mathbf{R}$ sind. Insbesondere ist damit jede Absorptionsmenge streng (s.S.).

Für jedes $\alpha > 0$ sei P_α definiert durch

$$P_\alpha(x\,,\,t) = (\alpha x\,,\,\alpha^2 t) \qquad (x \in \mathbf{R}^m\,,\; t \in \mathbf{R})\;.$$

Dann ist P_α offenbar ein Homöomorphismus von E als topologischem Raum und

$$\mathcal{H}(\mathfrak{O}) \circ P_\alpha = \mathcal{H}(P_\alpha^{-1}(\mathfrak{O}))$$

wegen

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\right)(u \circ P_\alpha) = \alpha^2 \left(\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\right)u\right) \circ P_\alpha\;.$$

Insbesondere ist damit

$$^*\mathcal{H}^+ \circ P_\alpha = {}^*\mathcal{H}^+\;,$$

also P_α ein Homomorphismus des harmonischen Raumes im Sinne von S.

Eine Teilmenge B von E heisse parabolisch zusammenziehbar in 0, wenn es beliebig kleine $\alpha > 0$ gibt mit

$$P_\alpha(B) \subset B\;.$$

Eine Teilmenge B von E heisse parabolisch zusammenziehbar in $z \in E$, wenn $B - z$ in 0 parabolisch zusammenziehbar ist.

Eine Teilmenge B eines $\mathbf{R}^k$ $(k \in \mathbf{N})$ heisse zusammenziehbar in 0, falls es beliebig kleine $\alpha > 0$ gibt mit

$$\alpha B \subset B\;.$$

Sie heisse zusammenziehbar in $z \in R^k$, falls $B - z$ in 0 zu zusammenziehbar ist.

Beispiel. – Sei B_0 eine beliebige Teilmenge von E, T eine in 0 zusammenziehbare Teilmenge von $\mathbf{R}$ wie zum Beispiel $T = \mathbf{R}$, $T = Q$ oder $T = \{\beta^n : n \in \mathbf{N}\}$ mit $0 < \beta < 1$ und

$$B = \bigcup_{\alpha \in T} P_\alpha(B_0)\;.$$

Dann ist B parabolisch zusammenziehbar in 0. Denn es gibt beliebig kleine $\gamma > 0$ mit $\gamma T \subset T$ und für diese γ ist

$$P_\gamma(B) = \bigcup_{\alpha \in T} P_\gamma P_\alpha(B_0) = \bigcup_{\alpha \in T} P_{\gamma\alpha}(B_0)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in \gamma T} P_\alpha(B_0) \subset \bigcup_{\alpha \in T} P_\alpha(B_0) = B\;.$$

SATZ 4.1. – *Sei* $x \in \mathbf{R}^m$, $t \in \mathbf{R}$ *und* B *eine in* $z = (\underset{0}{x}, t)$ *parabolisch zusammenziehbare Teilmenge des offenen Halbraums* $\overset{\circ}{\mathrm{H}}_t$. *Dann sind äquivalent :*

1) B *ist dünn in* z.

2) B *ist polar.*

3) B *ist total-dünn.*

Beweis. – Wenn B polar ist, so ist B total-dünn. Wenn B total-dünn ist, so ist B insbesondere dünn in z. Es bleibt zu zeigen, dass B nicht dünn ist in z, wenn B nicht polar ist.

Sei also B nicht polar und $z = 0$, was wir offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen. Wegen $\mathrm{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B} \backslash \mathrm{H}_{-n}$ existiert dann ein $n_0 \in \mathrm{N}$ mit nicht polarem

$$\mathrm{B}_0 := \mathrm{B} \backslash \mathrm{H}_{-n_0} .$$

Für $n \in \mathbf{N}$ sei

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{H}_{-1/n} .$$

Dann ist (A_n) eine isotone Folge strenger Absorptionsmengen mit $\mathrm{B}_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ und $0 \in \mathrm{A}^* \backslash \mathrm{A}$ für $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$. Sei $n \in \mathbf{N}$. Es existiert dann ein

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{n n_0}$$

mit

$$\mathrm{P}_{\alpha_n}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B} .$$

Weil dann ausserdem für alle $t > -n_0$

$$\alpha_n^2 t > -\left(\frac{1}{n n_0}\right)^2 n_0 \geqslant -\frac{1}{n} ,$$

so ist

$$\mathrm{P}_{\alpha_n}(\mathrm{B}_0) \subset \mathrm{B}_0 \backslash \mathrm{A}_n .$$

Nach Satz 3.4 ist daher

$$\hat{\mathrm{R}}_1^{\mathrm{B}_0 \backslash \mathrm{A}_n}(0) = \hat{\mathrm{R}}_1^{\mathrm{B}_0}(0) .$$

Da B_0 nicht polar ist, folgt damit aus Satz 3.3, dass B_0 nicht dünn ist in 0. Erst recht ist also B nicht dünn in 0.

In vielen Fällen ist es sehr leicht zu sehen, dass eine vorgelegte Menge nicht polar ist. Sie ist zum Beispiel dann nicht polar, wenn sie innere Punkte besitzt, so dass wir als unmittelbare Folgerung den folgenden Satz haben.

KOROLLAR 4.2. – *Sei* $x \in \mathbf{R}^m$, $t \in \mathbf{R}$, B *eine in* $z = (x, t)$ *parabolisch zusammenziehbare Menge und das Innere von* $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}_t$ *nichtleer. Dann ist* B *nicht dünn in z.*

Häufig erlaubt Korollar 1.11 (oder schon Korollar 1.12) festzustellen, dass eine vorgelegte Menge B nicht polar ist. Denn danach ist ja B nicht polar, wenn wir eine Menge C und ein $x \in \complement \mathrm{B}$ haben mit $(\varepsilon_x^{\mathrm{C}})^* (\mathrm{B}) \neq 0$. Wenn B in einer Vereinigung abzählbar vieler Hyperebenen H_t^* enthalten ist, gestattet Korollar 1.14 die folgende schärfere Aussage.

SATZ 4.3. – *Es sei* B_0 *eine Teilmenge des* $\mathbf{R}^m$, T *eine nichtleere, abzählbare, in* 0 *zusammenziehbare Menge streng positiver reeller Zahlen und*

$$\mathrm{B} = \{(\alpha x, -\alpha^2) : x \in \mathrm{B}_0, \alpha \in \mathrm{T}\}.$$

Bezeichnen wir mit λ_m das Lebesgue-Mass im $\mathbf{R}^m$, so sind äquivalent :

1) B ist dünn in 0.

2) $\lambda_m^*(\mathrm{B}_0) = 0$.

Beweis. – Da T in 0 zusammenziehbar ist, ist

$$\mathrm{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{T}} \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{B}_0 \times \{-1\})$$

parabolisch zusammenziehbar in 0. Nach Satz 4.1 ist B also genau dann dünn in 0, wenn B polar ist. Definieren wir $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{B}_0 \times \{-1\})$, so ist $\mathrm{P}_{\alpha/\beta}(\mathrm{B}_\beta) = \mathrm{B}_\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{T}$. Daher ist B genau dann polar, wenn eines der B_α polar ist.

Sei also $\alpha \in \mathrm{T}$. Nach Satz 3.2 ist B_α genau dann polar, wenn $\varepsilon_0^{\mathrm{B}_\alpha} = 0$ ist. Nach Korollar 1.14 ist das genau dann der Fall, wenn

$$(\varepsilon_0^{\mathrm{H}^*_{-\alpha^2}})^* (\mathrm{B}_\alpha) = 0 . \tag{1}$$

Nun ist aber $\varepsilon_0^{\mathrm{H}^*_{-\alpha^2}} = \varepsilon_0^{\mathrm{H}_{-\alpha^2}}$ nach Korollar 1.5 und es ist bekanntlich

$$\varepsilon_0^{\mathrm{H}}{}_{-\alpha^2} = (f_{-\alpha^2}\lambda_m) \otimes \varepsilon_{-\alpha^2}$$

mit der Dichte

$$f_{-\alpha^2}(x) = \left(\frac{1}{4\pi\alpha^2}\right)^{m/2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha^2}} \qquad (x \in \mathbf{R}^m) .$$

Daher ist (1) äquivalent zu $\lambda_m^*(\alpha \mathrm{B}_0) = 0$ und das ist äquivalent zu $\lambda_m^*(\mathrm{B}_0) = 0$.

Eine offene Teilmenge $\mathcal{O}$ von E mit $\mathcal{O}^* \neq \emptyset$ heisse von aussen parabolisch berührbar, wenn es für alle $z = (x, t) \in \mathcal{O}^*$ eine in z parabolisch zusammenziehbare, nicht polare Teilmenge B von $\complement \mathcal{O} \cap \mathring{\mathrm{H}}_t$ gibt. Da die regulären Randpunkte einer offenen Menge gerade diejenigen Randpunkte sind, in denen das Komplement von $\mathcal{O}$ nicht dünn ist, erhalten wir damit aus Satz 4.1 das

KOROLLAR 4.4. – *Jede offene Teilmenge von* E, *die von aussen parabolisch berührbar ist, ist regulär.*

Mit Korollar 1.8 erhalten wir eine weitere Konsequenz aus Satz 4.1, die wiederum in vielen Fällen die Anwendung von Satz 4.1 erleichtert, nämlich

SATZ 4.5. – *Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von* E, B *eine in $\mathcal{O}$ abgeschlossene Menge. Es sei $z = (x, t) \in \mathcal{O}$ und* B_1 , B_2 *in z parabolisch zusammenziehbare, nicht polare Teilmengen von* $(\mathcal{O} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathring{\mathrm{H}}_t$, *die mit keiner Zusammenhangskomponente von* $\mathcal{O} \setminus \mathrm{B}$ *gleichzeitig Punkte gemeinsam haben. Dann ist* B *nicht dünn in z.*

Ein einfaches Beispiel mag die Möglichkeit verdeutlichen, Satz 4.5 bei der Anwendung von Satz 4.1 zu benutzen : Es sei $m = 1$, $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq a < b$, $0 < \alpha < 1$, $\mathrm{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha^n [a, b]$ und

$$\mathrm{B} = \{(\alpha x, -\alpha^2) : \alpha \in \mathrm{T}\} .$$

Dann ist T zusammenziehbar in 0, also B parabolisch zusammenziehbar in 0. Es ist klar, wie man sich mit Satz 4.5 davon überzeugen kann, dass für $\gamma \in]a, b[$ die Teilmenge $\{(\alpha x, -\alpha^2) : \alpha \in [a, b]\}$ von B in $(\gamma x, -\gamma^2)$ nicht dünn ist. Also ist B nicht total-dünn und daher nach Satz 4.1 nicht dünn in 0.

5. Mehr über Fegen und Dünnheit.

Wenn man Satz 3.3 betrachtet, so ist die Frage naheliegend, ob sich entsprechende Aussagen über Dünnheit einer Menge B in einem Punkt z gewinnen lassen, in denen die Differenz von B und Absorptionsmengen ersetzt ist durch Durchschnitte von B mit Umgebungen von z. Das lässt sich in der Tat sehr schnell und leicht durchführen. Von den bisherigen Sätzen benötigen wir dazu nur die Sätze 1.1, 1.2 und 3.4.

Es sei $(E, \mathcal{H})$ wieder ein streng harmonischer Raum im Sinne von H. Bauer mit den bisherigen Bezeichnungen (oder allgemeiner ein streng harmonischer Raum im Sinne von [6]). $\mathcal{B}$ sei das System der Borelschen Teilmengen von E.

SATZ 5.1. – *Sei $s \in \mathcal{S}^+$ reellwertig und $\mu \in \mathcal{M}_0$ mit $\int s\, d\mu < \infty$, Dann ist*

$$\mu_s : K \longrightarrow \int R_s^K \, d\mu$$

eine Choquetsche Kapazität. Die zugehörige äussere Kapazität ist für alle $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_s^*(B) = \int R_s^B \, d\mu \ .$$

Beweis. – Für je zwei kompakte Teilmengen K_1 und K_2 von E ist

$$R_s^{K_1 \cup K_2} + R_s^{K_1 \cap K_2} \leqslant R_s^{K_1} + R_s^{K_2} \ ,$$

also

$$\mu_s(K_1 \cup K_2) + \mu_s(K_1 \cap K_2) \leqslant \mu_s(K_1) + \mu_s(K_2) \ .$$

Ist $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von E und (K_n) eine isotone Folge von kompakten Teilmengen von E mit $\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, so ist

$$R_s^{\mathcal{O}} = \sup R_s^{K_n} \ ,$$

also

$$\mu_{s*}(\mathcal{O}) = \int R_s^{\mathcal{O}} \, d\mu \ .$$

Sei nun $B \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge K von $\complement B$ mit

$$\int_{(\mathrm{C}B)\setminus K} s\,d\mu < \varepsilon\ .$$

Nach Satz 1.1 gibt es eine offene Obermenge $\mathcal{O}$ von B mit

$$R_s^{\mathcal{O}} \leqslant R_s^B + \frac{\varepsilon}{\mu(K)+1} \quad \text{auf} \quad K\ .$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \int R_s^{\mathcal{O}}\,d\mu &= \int_B s\,d\mu + \int_K R_s^{\mathcal{O}}\,d\mu + \int_{(\mathrm{C}B)\setminus K} R_s^{\mathcal{O}}\,d\mu \\ &\leqslant \int_B s\,d\mu + \int_K R_s^B\,d\mu + 2\varepsilon \\ &\leqslant \int R_s^B\,d\mu + 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

LEMMA 5.2. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E, $\mathcal{O}$ *eine offene Teilmenge von* E, $p \in \mathcal{P}_0$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es zu jeder relativ-kompakten Teilmenge* C *von* E *und jedem* $\mu \in \mathcal{M}_0$ *eine offene Obermenge* $\mathcal{O}'$ *von* $B \cap \mathcal{O}$ *mit*

$$\hat{R}^B_{R_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant \hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}} + \varepsilon \quad \text{auf} \quad C$$

und

$$\int R_p^{\mathcal{O}'}\,d\mu^B \leqslant \int p\,d\mu^{B\cap\mathcal{O}} + \varepsilon\ .$$

Beweis. – Sei C eine offene, relativ-kompakte Teilmenge von E. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge K von E mit

$$R_p^{\mathrm{C}K} \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{auf} \quad C\ .$$

Sei $q \in \mathcal{P}_0$ mit $0 < q < 1/2$ auf K. Nach Lemma 1.1 gibt es eine offene Obermenge $\mathcal{O}'$ von $B \cap$ mit

$$R_p^{\mathcal{O}'} \leqslant R_p^{B\cap\mathcal{O}} + \varepsilon q \quad \text{auf} \quad K \cap \mathrm{C}\mathcal{O}\ ,$$

also

$$R_p^{\mathcal{O}'} \leqslant R_p^{B\cap\mathcal{O}} + \varepsilon q \quad \text{auf} \quad B' := B \cap K\ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} R^{B'}_{R_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant R^{B'}_{R_p^{B\cap\mathcal{O}}} + \varepsilon q &\leqslant R^{B}_{R_p^{B\cap\mathcal{O}}} + \varepsilon q \\ &= R_p^{B\cap\mathcal{O}} + \varepsilon q\ . \end{aligned}$$

Auf C gilt daher

$$\mathrm{R}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant \mathrm{R}^{\mathrm{B}'}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}} + \mathrm{R}^{\complement\mathrm{K}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}} + \varepsilon\ ,$$

also

$$\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}} + \varepsilon\ .$$

Wählt man für $\mu \in \mathfrak{M}_0$ ein relativ-kompaktes C mit

$$\int_{\complement\mathrm{C}} p\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

und eine offene Obermenge $\mathcal{O}'$ von $\mathrm{B} \cap \mathcal{O}$ mit

$$\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}} \leqslant \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}} + \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathrm{C})+1} \quad \text{auf} \quad \mathrm{C}\ ,$$

so folgt

$$\int \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}}\, d\mu \leqslant \int \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\, d\mu + \varepsilon\ ,$$

also die zweite Behauptung des Satzes.

Satz 5.3. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E, $\mathcal{O}$ *eine offene Teilmenge von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$. *Dann ist*

$$\mu^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}} = \mu^{\mathrm{B}}|_{\mathcal{O}} + (\mu^{\mathrm{B}}|_{\complement\mathcal{O}})^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\ .$$

Beweis. – Sei zunächst B Borelsch, $p \in \mathfrak{P}_0$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 5.1 und Lemma 5.2 gibt es dann eine offene Obermenge $\mathcal{O}'$ von $\mathrm{B} \cap \mathcal{O}$ mit

$$\int \mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}\, d\mu^{\mathrm{B}} < \int \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\, d\mu^{\mathrm{B}} + \varepsilon$$

und

$$\int \mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}\, d\mu^{\mathrm{B}} < \int \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\, d\mu + \varepsilon\ .$$

Daher ist einerseits

$$\int \hat{\mathrm{R}}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\, d\mu = \int \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}}\, d\mu \leqslant \int \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}}\, d\mu$$

$$= \int \mathrm{R}_p^{\mathcal{O}'}\, d\mu^{\mathrm{B}} < \int \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}\cap\mathcal{O}}\, d\mu^{\mathrm{B}} + \varepsilon$$

und andererseits

$$\int R_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu^B \leqslant \int R_p^{\mathcal{O}'}\, d\mu^B < \int \hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu + \varepsilon \,.$$

Also ist

$$\int \hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu = \int R_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu^B \,.$$

Für den feinen Abschluss $\overline{B}^f$ von B ist nach Satz 1.2

$$\mu^B(\complement\overline{B}^f) = 0 \,.$$

In allen $z \in \overline{B}^f\setminus B$ ist B nicht dünn, in allen $z \in (\overline{B}^f\setminus B) \cap \mathcal{O}$ also $B \cap \mathcal{O}$ nicht dünn und daher $\hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}}(z) = p(z)$. Auf $\overline{B}^f \cap \mathcal{O}$ ist daher $R_p^{B\cap\mathcal{O}} = p$. Also ist

$$\int R_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu^B = \int_{\mathcal{O}} p\, d\mu^B + \int_{\complement\mathcal{O}} R_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu^B$$

$$= \int_{\mathcal{O}} p\, d\mu^B + \int_{\complement\mathcal{O}} \hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu^B \,.$$

Für alle $p \in \mathfrak{P}_0$ ist daher

$$\int \hat{R}_p^{B\cap\mathcal{O}}\, d\mu = \int p\, d(\mu^B|_{\mathcal{O}}) + \int p\, d(\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B\cap\mathcal{O}}$$

und damit

$$\mu^{B\cap\mathcal{O}} = \mu^B|_{\mathcal{O}} + (\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B\cap\mathcal{O}} \,.$$

Sei nun B eine beliebige Teilmenge von E. Dann existiert eine Borelsche Obermenge B_1 von B mit $\mu^{B_1} = \mu^B$ und eine Borelsche Obermenge B_2 von $B \cap \mathcal{O}$ mit $\mu^{B_2} = \mu^{B\cap\mathcal{O}}$ und $(\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B_2} = (\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B\cap}$. Es sei

$$B' = B_1 \cap (B_2 \cup \complement\mathcal{O}) \,.$$

Dann ist $B' \in \mathcal{B}$ und

$$B \subset B' \subset B_1 \,, \quad B \cap \mathcal{O} \subset B' \cap \mathcal{O} \subset B_2 \,.$$

Es ist also

$$\mu^{B'} = \mu^B \,, \quad \mu^{B'\cap\mathcal{O}} = \mu^{B\cap\mathcal{O}} \,, \quad (\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B'\cap\mathcal{O}} = (\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B\cap\mathcal{O}} \,.$$

Nach obigem ist aber

$$\mu^{B'\cap\mathcal{O}} = \mu^{B'}|_{\mathcal{O}} + (\mu^{B'}|_{\complement\mathcal{O}})^{B'\cap\mathcal{O}}$$

und daher

$$\mu^{B\cap\mathcal{O}} = \mu^B|_{\mathcal{O}} + (\mu^B|_{\complement\mathcal{O}})^{B\cap\mathcal{O}} \,.$$

Satz 5.4. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E, $z \in E$ *und* $s \in \mathfrak{S}^+$ *stetig und reell. Dann sind äquivalent :*

1) *Für alle Umgebungen* V *von* z *ist* $\hat{R}_s^{B \cap V}(z) = \hat{R}_s^B(z)$.

2) B *ist nicht dünn in* z *oder es ist* $\hat{R}_s^{B \cap V}(x) = s(x)$ *für alle Umgebungen* V *von* z *und alle* $x \neq z$ *im Träger von* ε_z^B.

Beweis. – Es gelte (1) und es sei B dünn in z. Sei V eine Umgebung von z und $x \neq z$ im Träger von ε_z^B. Es sei W eine offene Umgebung von z mit $W \subset V$ und $x \notin \overline{W}$. Nach Satz 5.3 ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^{B \cap W} &= \varepsilon_z^B|_W + (\varepsilon_z^B|_{\complement W})^{B \cap W}\\ &= \varepsilon_z^B - \varepsilon_z^B|_{\complement W} + (\varepsilon_z^B|_{\complement W})^{B \cap W}.\end{aligned}$$

Wegen $\hat{R}_s^{B \cap W}(z) = \hat{R}_s^B(z)$ ist daher

$$\begin{aligned}\int s\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W}) &= \int s\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W})^{B \cap W}\\ &= \int \hat{R}_s^{B \cap W}\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W}).\end{aligned}$$

Wegen $x \notin \overline{W}$ ist x im Träger von $\varepsilon_z^B|_{\complement W}$ und $\hat{R}_s^{B \cap W}$ stetig in einer in einer Umgebung von x, also

$$s(x) = \hat{R}_s^{B \cap W}(x)$$

und damit erst recht

$$s(x) = \hat{R}_s^{B \cap V}(x).$$

Aus (1) folgt also (2).

Es gelte nun umgekehrt (2). Ist B nicht dünn in z, so ist für alle Umgebungen V von z auch $B \cap V$ nicht dünn in z, also

$$\hat{R}_s^{B \cap V}(z) = s(z) = \hat{R}_s^B(z).$$

Sei also $\hat{R}_s^{B \cap V}(x) = s(x)$ für alle Umgebungen V von z und Punkte $x \neq z$ im Träger von ε_z^B. Sei W eine offene Umgebung von z. Dann ist

$$\begin{aligned}\int s\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W}) &= \int \hat{R}_s^{B \cap W}\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W})\\ &= \int s\, d(\varepsilon_z^B|_{\complement W})^{B \cap W}.\end{aligned}$$

Nach Satz 5.3 ist daher

$$\int s\, d(\varepsilon_z^{B \cap W}) = \int s\, d(\varepsilon_z^B) ,$$

d.h. $\hat{R}_s^{B \cap W}(z) = \hat{R}_s^B(z)$. Also gilt (1).

KOROLLAR 5.5. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E *und* $z \in E$ *polar. Dann sind äquivalent :*

1) *Es gibt ein stetiges, reelles und streng positives* $s \in \mathfrak{S}^+$, *so dass für alle Umgebungen* V *von* z *gilt*

$$\hat{R}_s^{B \cap V}(z) = \hat{R}_s^B(z) \neq 0 .$$

2) B *ist nicht dünn in z.*

Beweis. – Da $\{z\}$ polar ist, dürfen wir $z \in \complement B$ annehmen. Ist B nicht dünn in z und $s \in \mathfrak{S}^+$ mit $s(z) > 0$, so gilt für alle Umgebungen V von z

$$\hat{R}_s^{B \cap V}(z) = s(z) = \hat{R}_s^B(z) > 0 .$$

Aus (2) folgt also (1).

Sei nun umgekehrt $s \in \mathfrak{S}^+$ stetig, reell und streng positiv mit

$$\hat{R}_s^{B \cap V}(z) = \hat{R}_s^B(z) \neq 0$$

für alle Umgebungen V von z. Nehmen wir an, es ist B dünn in z. Dann liegt z nicht im feinen Abschluss von B, es ist also $\varepsilon_z^B(\{z\}) = 0$ nach Satz 1.2. Wegen $\hat{R}_s^B(z) \neq 0$ ist aber $\varepsilon_z^B \neq 0$. Es gibt also ein $x \neq z$ im Träger von ε_z^B. Nach Satz 5.4 ist dann für alle Umgebungen W von z

$$s(x) = \hat{R}_s^{B \cap W}(x) \leqslant R_s^W(x) ,$$

also

$$s(x) \leqslant R_s^{\{z\}}(x) = \hat{R}_s^{\{z\}}(x) = 0$$

im Widerspruch zu $s(x) > 0$.

Bemerkung. – Auch für $z \in \complement B$ kann die Aussage von Korollar 5.5 falsch sein, wenn z nicht polar ist.

6. Anwendung auf die Laplace-Gleichung.

Sei $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, $E = \mathbf{R}^m$, falls $m \geqslant 3$, und E eine offene Kreisscheibe, falls $m = 2$. $\mathcal{H}$ sei das Garbendatum der Lösungen der Laplace-Gleichung in E. Für alle $z \in E$ und $0 < \alpha \leqslant 1$ ist dann T_z^α, definiert durch $T_z^\alpha(x) = z + \alpha(x - z)$, ein Homomorphismus des harmonischen Raumes im Sinne von S. Daher erhalten wir

SATZ 6.1. – *Sei* $z \in E$ *und* B *eine in* z *zusammenziehbare Teilmenge von* E. *Dann sind äquivalent :*

1) B *ist dünn in* z.

2) B *ist polar.*

Beweis. – Sei B nicht polar. Dann gibt es eine offene Kugel $\mathcal{O}$ im $\mathbf{R}^m$ mit $\mathcal{O} \subset E$, $z \in \mathcal{O}$ und nicht polarem $B \cap \mathcal{O}$. Sei V eine Umgebung von z. Dann gibt es ein $0 < \alpha < 1$ mit

$$T_z^\alpha(\mathcal{O}) \subset V \cap \mathcal{O} .$$

Weiter gibt es ein $0 < \beta < \alpha$ mit

$$T_z^\beta(B) \subset B .$$

da B in z zusammenziehbar ist. Dann ist

$$\begin{aligned} T_z^\beta(B \cap \mathcal{O}) &\subset T_z^\beta(B) \cap T_z^\beta(\mathcal{O}) \\ &\subset B \cap T_z^\alpha(\mathcal{O}) \subset B \cap \mathcal{O} \cap V . \end{aligned}$$

Nach Satz 3.4 ist daher für alle Umgebungen V von z

$$\hat{R}_1^{B \cap \mathcal{O} \cap V}(z) = \hat{R}_1^{B \cap \mathcal{O}}(z) .$$

Da $B \cap \mathcal{O}$ nicht polar ist, ist $\hat{R}_1^{B \cap \mathcal{O}}(z) \neq 0$. Nach Korollar 5.5 ist daher $B \cap \mathcal{O}$ nicht dünn in z, also B nicht dünn in z.

KOROLLAR 6.2. – *Sei* $z \in E$ *und* B *eine in* z *zusammenziehbare Menge mit nicht-leerem Inneren. Dann ist* B *nicht dünn in* z.

Eine offene Teilmenge $\mathcal{O}$ von E mit $\mathcal{O}^* \neq \emptyset$ heisse von aussen linear berührbar, wenn es für alle $z \in \mathcal{O}^*$ eine in z zusammenziehbare, nicht-polare Teilmenge von $\complement\mathcal{O}$ gibt.

KOROLLAR 6.3. – *Jede offene Teilmenge* $\mathfrak{G}$ *von* E, *die von aussen linear berührbar ist, ist regulär.*

Ebenso wie Satz 4.5 gilt

SATZ 6.4. – *Es sei* $\mathfrak{G}$ *eine offene Teilmenge von* E, B *eine in* $\mathfrak{G}$ *abgeschlossene Menge. Es sei* $z \in \mathfrak{G}$ *und* B_1, B_2 *in z zusammenziehbare nicht-polare Teilmengen von* $\mathfrak{G} \backslash B$, *die mit keiner Zusammenhangs-komponente von* $\mathfrak{G} \backslash B$ *gleichzeitig Punkte gemeinsam haben. Dann ist* B *nicht dünn in z.*

Bemerkungen. – 1) Da Dünnheit und Polarität lokale Eigenschaften sind, gelten diese Sätze auch, wenn der Grundraum E irgendeine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^m$ ist, relativ-kompakt, falls $m = 2$.

2) Da die Riesz-Potentiale unter die in [6] entwickelte Potentialtheorie fallen und die Zusammenziehungen T_z^a Homomorphismen des zugehörigen harmonischen Raumes sind, wie eine Betrachtung der harmonischen Kerne sofort zeigt, gelten die Sätze dieses Paragraphen genauso für Riesz-Potentiale.

3) Es ist klar, dass Korollar 5.5 in Verbindung mit Satz 3.4 ebenso gut wie Satz 3.3 die in Paragraph 4 bewiesenen Sätze für die Wärmeleitungsgleichung abzuleiten gestattet.

7. Reduzieren von Massen.

Die in Paragraph 5 durchgeführten Betrachtungen legen es nahe, nicht nur gefegte Masse, sondern auch so etwas wie reduzierte Masse einzuführen. Das soll im Folgenden geschehen.

Es sei $(E, \mathcal{H})$ wieder ein beliebiger streng harmonischer Raum im Sinne von H. Bauer (oder allgemeiner im Sinne von [6]) mit den bisherigen Bezeichnungen. $\mathcal{C}_k$ sei die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf E mit kompaktem Träger und $\mathcal{P}_1$ die Menge aller stetigen reellen Potentiale, die durch ein Potential aus $\mathcal{P}_0$ majorisiert werden.

Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_0$ und $B \in \mathcal{B}$ sei das zu μ und B gehörige reduzierte Mass

$$\mathring{\mu}^B = \mu|_B + (\mu|_{CB})^B .$$

Für jedes $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ und $B \in \mathcal{B}$ ist

$$R_u^B = \begin{cases} u & \text{auf} \quad B\,, \\ \hat{R}_u^B & \text{auf} \quad \complement B\,. \end{cases}$$

Es gilt daher der

Satz 7.1. – *Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_0$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ ist $\mathring{\mu}^B$ das eindeutig bestimmte positive Radonsche Mass auf* E *mit*

$$\int p\, d\mathring{\mu}^B = \int R_p^B\, d\mu$$

für alle $p \in \mathcal{P}_0$. Ist $\mu(\{x \in B : B$ dünn in $x\}) = 0$, so ist $\mathring{\mu}^B = \mu^B$.

Satz 7.2. – *Sei $B \in \mathcal{B}$ und $\mu \in \mathcal{M}_0$. Dann existiert eine antitone Folge $(\mathcal{O}_n)$ offener Obermengen von* B, *so dass für jedes $p \in \mathcal{P}_1$ gilt*

$$\inf_n \int p\, d\mu^{\mathcal{O}_n} = \int p\, d\mathring{\mu}^B\,.$$

Insbesondere strebt $(\mathring{\mu}^{B_n})$ vage gegen $\mathring{\mu}^B$ für jede Folge (B_n) aus $\mathcal{B}$ mit $B \subset B_n \subset \mathcal{O}_n$.

Beweis. – Sei $(\mathcal{O}'_n)$ eine isotone Folge offener, relativkompakter Teilmengen von E mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}'_n = E$. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ von $\mathcal{P}_1$, so dass für jedes $n \in \mathbf{N}$ jedes $f \in \mathcal{C}_k$ mit Träger in $\mathcal{O}'_n$ gleichmässig approximiert werden kann mit Differenzen von Funktionen aus $\mathcal{A}$, deren Träger in $\mathcal{O}'_n$ liegt.

Nach Satz 5.1 existiert für alle $m \in \mathbf{N}$ eine antitone Folge $(\mathcal{O}_n^m)$ offener Obermengen von B mit

$$\inf_n \int p_m\, d\mu^{\mathcal{O}_n^m} = \int p_m\, d\mathring{\mu}^B\,.$$

Setzen wir für $n \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{O}_n = \bigcap_{m \leqslant n} \mathcal{O}_n^m\,,$$

so ist $(\mathcal{O}_n)$ eine antitone Folge offener Obermengen von B mit

$$\inf_n \int p\, d\mu^{\mathcal{O}_n} = \int p\, d\mathring{\mu}^B$$

für alle $p \in \mathcal{A}$.

Sei $f \in \mathcal{C}_k$. Dann gibt es ein $\mathfrak{G}'_{n_0}$, das den Träger von f enthält und ein $p_0 \in \mathfrak{A}$ mit $p_0 > 0$ auf $\overline{\mathfrak{G}}'_{n_0}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\eta > 0$ mit $\eta \int p_0 \, d\mu < \varepsilon$ und $p, q \in \mathfrak{A}$ mit

$$|f - (p - q)| < \eta p_0 \, .$$

Es existiert ein $n_1 \in \mathbf{N}$ mit

$$\int p \, d\mu^{e_n} < \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} + \varepsilon \, ,$$

$$\int q \, d\mu^{e_n} < \int q \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} + \varepsilon$$

für alle $n > n_1$. Es ist dann für alle $n > n_1$

$$|\mu^{e_n}(f) - \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f)| < 2\varepsilon + 2\eta \int p_0 \, d\mu < 4\varepsilon \, .$$

Also konvergiert (μ^{e_n}) vage gegen $\mathring{\mu}^{\mathrm{B}}$.

Sei nun $p \in \mathcal{R}_1$. Dann gibt es ein $q_1 \in \mathcal{R}_0$ mit $p \leqslant q_1$ und dazu ein $q \in \mathfrak{A}$ mit $q_1 \leqslant q$ auf dem superharmonischen Träger von q_1. Es folgt $q_1 \leqslant q$ auf E, also $p \leqslant q$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{C}_k$ mit $f \leqslant q - p$ und

$$\int (q - p) \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} < \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f) + \varepsilon \, .$$

Es gibt ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit

$$\int q \, d\mu^{e_n} - \int q \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} < \varepsilon$$

und

$$|\mu^{e_n}(f) - \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f)| < \varepsilon$$

für alle $n > n_0$. Daher ist für alle $n > n_0$

$$\begin{aligned} \int p \, d\mu^{e_n} &\leqslant \int q \, d\mu^{e_n} - \mu^{e_n}(f) \\ &< \int q \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} - \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f) + 2\varepsilon \\ &< \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} + 3\varepsilon \, . \end{aligned}$$

Also gilt

$$\inf_n \int p \, d\mu^{e_n} = \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} \, .$$

Für jede Folge (B_n) in $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_n \subset \mathcal{O}_n$ gilt daher für alle $p \in \mathcal{P}_1$

$$\lim_{n\to\infty} \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_n} = \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}} .$$

Insbesondere konvergiert $(\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_n})$ vage gegen $\mathring{\mu}^{\mathrm{B}}$.

KOROLLAR 7.3. – *Sei* B *eine Teilmenge von* E *und* $\mu \in \mathcal{M}_0$, *so dass es ein* $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{B}$ *gibt mit* $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_1$ *und* $\mu(\{x \in \mathrm{B}_1 : \mathrm{B}$ *dünn in* $x\}) = 0$. *Dann existiert eine antitone Folge* $(\mathcal{O}_n)$ *offener Obermengen von* B, *so dass für alle* $p \in \mathcal{P}_1$ *gilt*

$$\inf_n \int p \, d\mu^{\mathcal{O}_n} = \int p \, d\mu^{\mathrm{B}} .$$

Insbesondere strebt (μ^{B_n}) *vage gegen* μ^{B} *für jede Folge* (B_n) *von Teilmengen von* E *mit* $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_n \subset \mathcal{O}_n$.

Beweis. – Es existiert ein $\mathrm{B}_2 \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_2$ und $\mu^{\mathrm{B}_2} = \mu^{\mathrm{B}}$. Sei $\mathrm{B}_3 = \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$. Dann ist $\mu^{\mathrm{B}_3} = \mu^{\mathrm{B}}$ und

$$\mu(\{x \in \mathrm{B}_3 : \mathrm{B}_3 \text{ dünn in } x\}) \leqslant \mu(\{x \in \mathrm{B}_1 : \mathrm{B} \text{ dünn in } x\}) = 0 .$$

Daher ist $\mu^{\mathrm{B}_3} = \mathring{\mu}^{\mathrm{B}_3}$ und es folgt die Behauptung aus Satz 7.2.

KOROLLAR 7.4. – *Seien* B_1 , $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ *mit* $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_0$. *Dann ist*

$$\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1} = (\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1})^{\circ\mathrm{B}} = (\mathring{\mu}^{\mathrm{B}})^{\circ\mathrm{B}_1} .$$

Beweis. – Nach Satz 7.2 existiert eine antitone Folge $(\mathcal{O}_n)$ offener Obermengen von B mit

$$\inf_n \int p \, d(\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1})^{\mathcal{O}_n} = \int p \, d(\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1})^{\circ\mathrm{B}}$$

für alle $p \in \mathcal{P}_0$. Für alle $p \in \mathcal{P}_0$ und $n \in \mathrm{N}$ ist aber

$$\int p \, d(\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1})^{\mathcal{O}_n} = \int \mathrm{R}_p^{\mathcal{O}_n} \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1} = \int \mathrm{R}^{\mathrm{B}_1}_{\mathrm{R}_p^{\mathcal{O}_n}} \, d\mu$$

$$= \int \mathrm{R}_p^{\mathrm{B}_1} \, d\mu = \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}_1} .$$

Also ist

$$\mathring{\mu}^{B_1} = (\mathring{\mu}^{B_1})^{\circ B} .$$

Weiter existiert nach Satz 7.2 eine antitone Folge $(\mathcal{O}'_n)$ offener Obermengen von B_1 mit

$$\inf_n \int p \, d\mu^{\mathcal{O}'_n} = \int p \, d\mathring{\mu}^{B_1} ,$$

$$\inf_n \int p \, d(\mathring{\mu}^{B})^{\mathcal{O}'_n} = \int p \, d(\mathring{\mu}^{B})^{\circ B_1}$$

für alle $p \in \mathscr{P}_0$. Für alle $p \in \mathscr{P}_0$ und $n \in \mathbf{N}$ ist aber

$$\int p \, d\mu^{\mathcal{O}'_n} = \int R_p^{\mathcal{O}'_n} \, d\mu \geqslant \int R^{B}_{R_p^{\mathcal{O}'_n}} \, d\mu$$

$$= \int p \, d(\mathring{\mu}^{B})^{\mathcal{O}'_n} \geqslant \int R_p^{B_1} \, d\mu = \int p \, d\mathring{\mu}^{B_1} .$$

Also ist für alle $p \in \mathscr{P}_0$

$$\int p \, d\mathring{\mu}^{B_1} = \int p \, d(\mathring{\mu}^{B})^{\circ B_1} ,$$

d.h. $\mathring{\mu}^{B_1} = (\mathring{\mu}^{B})^{\circ B_1}$.

SATZ 7.5. – *Sei* $B \in \mathcal{B}$ *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$. *Dann existiert eine isotone Folge* (K_n) *kompakter Teilmengen von* B, *so dass für jedes* $u \in {}^*\mathfrak{H}^+$ *gilt*

$$\sup_n \int u \, d\mathring{\mu}^{K_n} = \int u \, d\mathring{\mu}^{B} .$$

Insbesondere strebt $(\mathring{\mu}^{B_n})$ *vage gegen* $\mathring{\mu}^{B}$ *für jede Folge* (B_n) *aus* $\mathcal{B}$ *mit* $K_n \subset B_n \subset B$.

Beweis. – Es sei $\mathfrak{A}$ wie im Beweis von Satz 7.2. Nach Satz 5.1 und dem Choquetschen Satz über Kapazitäten existiert dann für alle $m \in \mathbf{N}$ eine isotone Folge (K_n^m) kompakter Teilmengen von B mit

$$\sup_n \int p_m \, d\mathring{\mu}^{K_n^m} = \int p_m \, d\mathring{\mu}^{B} .$$

Definieren wir für $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{K}_n = \bigcup_{m \leqslant n} \mathrm{K}_n^m ,$$

so ist (K_n) eine isotone Folge kompakter Teilmengen von B und

$$\sup_n \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{K}_n} = \int p \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}}$$

für alle $p \in \mathfrak{A}$. Wie im Beweis von Satz 7.2 folgt daraus, dass $(\mathring{\mu}^{\mathrm{K}_n})$ vage gegen $\mathring{\mu}^{\mathrm{B}}$ konvergiert.

Sei nun $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ und $a < \int u \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{B}}$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{C}_k$ mit $f \leqslant u$ und $a < \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f)$. Es gibt ein $n_0 \in \mathrm{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt

$$| \mathring{\mu}^{\mathrm{K}_n}(f) - \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f) | < \varepsilon .$$

Für alle $n > n_0$ ist dann

$$a < \mathring{\mu}^{\mathrm{B}}(f) < \mathring{\mu}^{\mathrm{K}_n}(f) + \varepsilon \leqslant \int u \, d\mathring{\mu}^{\mathrm{K}_n} + \varepsilon .$$

Damit folgt der Rest der Behauptung.

LEMMA 7.6. – *Sei* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{O}$ *eine offene Teilmenge von* E *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ *mit* $\mu(\complement \mathcal{O}) = 0$. *Dann ist für alle* $s \in \mathcal{S}^+$

$$\int s \, d(\mu^{\complement \mathcal{O}})^{\circ \mathrm{B}} \leqslant \int s \, d\mu^{\mathrm{B}} .$$

Beweis. – Sei $s \in \mathcal{S}^+$. Die Abbildung

$$x \longrightarrow \int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}} \, d\varepsilon_x^{\complement \mathcal{O}}$$

ist harmonisch in $\mathcal{O}$, also insbesondere stetig in $\mathcal{O}$. Für jedes $x \in \mathcal{O}$ ist

$$\int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}} \, d\varepsilon_x^{\complement \mathcal{O}} \leqslant \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}}(x) ,$$

da $\mathrm{R}_s^{\mathrm{B}}$ Infimum von Funktionen $t \in \mathcal{S}^+$ ist, für die ja $\hat{\mathrm{R}}_t^{\complement \mathcal{O}}(x) \leqslant t(x)$ ist. Daher ist

$$\int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}} \, d\varepsilon_x^{\complement \mathcal{O}} \leqslant \hat{\mathrm{R}}_s^{\mathrm{B}}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{O}$. Also ist

$$\int s\, d(\mu^{\complement \mathcal{O}})^{\circ B} = \int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}}\, d\mu^{\complement \mathcal{O}}$$

$$= \int \left(\int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}}\, d\varepsilon_x^{\complement \mathcal{O}}\right) d\mu(x) = \int_{\mathcal{O}} \left(\int \mathrm{R}_s^{\mathrm{B}}\, d\varepsilon_x^{\complement}\right) d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{O}} \hat{\mathrm{R}}_s^{\mathrm{B}}(x)\, d\mu(x) = \int s\, d\mu^{\mathrm{B}}\ .$$

KOROLLAR 7.7. – *Sei* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ *und* $\mu \in \mathfrak{M}_0$. *Dann existiert eine isotone Folge* (K_n) *kompakter Teilmengen von* B, *so dass für jedes* $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ *gilt*

$$\sup_n \int u\, d\mu^{\mathrm{K}_n} = \int u\, d\mu^{\mathrm{B}}\ .$$

Insbesondere strebt (μ^{B_n}) vage gegen μ^{B} für jede Folge (B_n) von Teilmengen von E mit $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}$.

Beweis. – Es sei E′ die Menge der nicht-isolierten Punkte von E und

$$\mu' = \mu|_{\mathrm{E}'}\ .$$

Es sei ρ eine Metrik für E. Für jedes $m \in \mathbf{N}$ sei $(\mathcal{O}_n^m)$ eine Folge von offenen Kugeln mit Radius $1/m$, die E überdeckt, (D_n^m) definiert durch

$$\mathrm{D}_1^m = \mathcal{O}_1^m\ , \quad \mathrm{D}_{n+1}^m = \mathcal{O}_{n+1}^m \setminus \bigcup_{i \leqslant n} \mathcal{O}_i^m$$

und

$$\mu_m = \sum_{n=1} \left(\mu'|_{\mathrm{D}_n^m}\right)^{\complement \mathcal{O}_n^m}\ .$$

Nach Satz 7.5 existiert für jedes $m \in \mathbf{N}$ eine isotone Folge (K_n^m) von kompakten Teilmengen von B mit

$$\sup_n \int p\, d\mathring{\mu}_m^{\mathrm{K}_n^m} = \int p\, d\mathring{\mu}_m^{\mathrm{B}}$$

für alle $p \in \mathcal{P}_1$. Setzen wir für $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{K}'_n = \bigcup_{m \leqslant n} \mathrm{K}_n^m\ ,$$

so ist (K'_n) eine isotone Folge kompakter Teilmengen von B mit

$$\sup_n \int p\, d\mathring{\mu}_m^{\mathrm{K}'_n} = \int p\, d\mathring{\mu}_m^{\mathrm{B}}$$

für alle $p \in \mathcal{P}_1$ und $m \in \mathbf{N}$. Sei $p \in \mathcal{P}_1$. Dann ist also

$$\sup_n \sup_m \int p \, d\mathring{\mu}_m^{K'_n} = \sup_m \int p \, d\mathring{\mu}_m^{B} \,. \tag{1}$$

Für jedes $C \in \mathcal{B}$ ist aber

$$\sup_m \int p \, d\mathring{\mu}_m^{C} = \int p \, d\mu'^{C} \;: \tag{2}$$

Denn zunächst ist für alle $m \in \mathbf{N}$ nach Lemma 7.6

$$\int p \, d\mathring{\mu}_m^{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \int p \, d\Big(\big(\mu' |_{D_n^m}\big)^{\complement \mathfrak{O}_n^m}\Big)^{\circ C}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int p \, d\big(\mu' |_{D_n^m}\big)^{C} = \int p \, d\mu'^{C} \,.$$

Andererseits ist

$$\int p \, d\mathring{\mu}_m^{C} = \int R_p^C \, d\mu_m \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int \hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement \mathfrak{O}_n^m} \, d\big(\mu' |_{D_n^m}\big)$$

$$= \int f_m \, d\mu'$$

mit

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} I_{D_n^m} \, \hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement \mathfrak{O}_n^m} \,.$$

Bezeichnen wir für $x \in E$ und $r > 0$ mit $K_r(x)$ die Kugel mit Radius r um x, so ist für alle $x \in D_n^m$ wegen $\mathfrak{O}_n^m \subset K_{2/m}(x)$

$$\hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement K_{2/m}(x)}(x) \leqslant \hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement \mathfrak{O}_n^m}(x) \leqslant \hat{R}_p^C(x)$$

mit

$$\lim_{m \to \infty} \hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement K_{2/m}(x)}(x) = \hat{R}_{\hat{R}_p^C}^{\complement \{x\}}(x) = \hat{R}_p^C(x) \,,$$

falls x kein isolierter Punkt von E ist. Also ist $\lim_{m \to \infty} f_m = \hat{R}_p^C \; \mu' - f.s.$ und damit wegen $f_m \leqslant p$ nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz

$$\lim_{m \to \infty} \int f_m \, d\mu' = \int \hat{R}_p^C \, d\mu' = \int p \, d\mu'^{C} \,.$$

Damit ist (2) bewiesen, also wegen (1) für alle $p \in \mathcal{P}_1$

$$\sup_n \int p \, d\mu'^{K'_n} = \int p \, d\mu'^{B} .$$

Es sei $\mu'' = \mu|_{CE'}$. Nach Satz 7.5 existiert eine isotone Folge (K''_n) kompakter Teilmengen von B mit

$$\sup_n \int p \, d(\mu'')^{\circ K''_n} = \int p \, d(\mu'')^{\circ B}$$

für alle $p \in \mathfrak{P}_1$. Nach Satz 7.1 ist aber

$$(\mu'')^{\circ K''_n} = (\mu'')^{K''_n} , \ (\mu'')^{\circ B} = (\mu'')^{B} .$$

Setzen wir für $n \in N$

$$K_n = K'_n \cup K''_n ,$$

so folgt

$$\sup_n \int p \, d\mu^{K_n} = \int p \, d\mu^{B}$$

für alle $p \in \mathfrak{P}_1$ und damit die Behauptung des Korollars.

LITERATUR

[1] H. BAUER, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. *Lecture Notes in Mathematics* 22, Berlin-Heidelberg New-York : Springer 1966.

[2] H. BAUER, Harmonic spaces and associated Markov processes. Centro Internazionale Matematico Estivo 1969.

[3] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETOOR, Markov processes and potential theory, New York : Academic Press 1968.

[4] C. CONSTANTINESCU, Some properties of the balayage of measures on a harmonic space, *Ann. Inst. Fourier* 17/1 (1967), 273-293.

[5] E.G. EFFROS and J.L. KAZDAN, On the Dirichlet problem for the heat equation, Erscheint demnächst.

[6] W. HANSEN, Potentialtheorie harmonischer Kerne, In Seminar über Potentialtheorie, *Lecture Notes in Mathematics* 69, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1968.

[7] L.L. HELMS, Introduction to potential theory, Wiley-Interscience 1969.

[8] R.M. HERVE, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potential, *Ann. Inst. Fourier* 12, 415-571 (1962).

[9] P.A. MEYER, Processus de Markov, Lecture Notes in Mathematics 26, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1967.

Manuscrit reçu le 30 avril 1970

Wolfhard HANSEN
Mathematisches Institut
der Universität
Erlangen, Bismarckstrasse
Westdeutschland