ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HERMANN ROST

Markoff-Ketten bei sich füllenden Löchern im Zustandsraum

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 1 (1971), p. 253-270

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_253_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 253-270

MARKOFF-KETTEN BEI SICH FÜLLENDEN LÖCHERN IM ZUSTANDSRAUM

von Hermann ROST

Einleitung.

Sei im messbaren Raum $(E, \mathfrak{B})$ ein substochastischer Übergangskern P gegeben und seien μ, ν endliche Masse mit Definitionsbereich $\mathfrak{B}$. Man definiert nun, nach einer Idee von Chacon und Ornstein (Lemma 1 in [2]), die folgende Doppelfolge von Massen $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ durch

$$\mu_0 = (\mu - \nu)^+ , \quad \nu_0 = (\mu - \nu)^- ;$$
$$\mu_{n+1} = (\mu_n P - \nu_n)^+ , \quad \nu_{n+1} = (\mu_n P - \nu_n)^- , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die anschauliche Deutung dieses Schemas ist die eines Auffüllvorgangs : die Masse μ, die im Laufe der Zeit vom Operator P im Raum E herumgeschoben wird, ist bestrebt, die "Löcher", die nach ν verteilt sind, aufzufüllen. Zu jedem Zeitpunkt n wird der Anteil $\mu_{n-1} P \wedge \nu_{n-1}$ von $\mu_{n-1} P$ zum Auffüllen verbraucht, der Rest wird weitergeschoben und, wenn möglich, zum Füllen der übriggebliebenen Löcher ν_n verwendet.

Die hier gestellte Aufgabe ist es, zu untersuchen, ob

1) μ sich beim Auffüllvorgang verbraucht, d.h. $\lim\limits_n \|\mu_n\| = 0$, und ob $\lim\limits_n < \mu_n f > = 0$ für eine weite Klasse von (nicht nur beschränkten) Funktionen f gilt ;

2) ν ganz aufgefüllt wird, d.h. $\downarrow \lim\limits_n \nu_n = 0$.

Beide Fragen werden der Einfachheit halber, und um die Nähe zum Chacon-Ornsteinschen Ergodensatz deutlich zu machen, in der

Sprache der submarkoffschen Operatoren in einem L^1 formuliert und beantwortet ; die Anwendung auf den Fall echter Markoff-Kerne und die Interpretation mit Hilfe einer Stoppzeit wird im dritten Teil der Arbeit gegeben.

Sei also jetzt $(E, \mathfrak{B}, m)$ ein σ-finiter Massraum, T ein positiver Operator der Norm höchstens 1 in $L^1 = L^1(E, \mathfrak{B}, m)$, S sein adjungierter in L^∞, der durch monotone Konvergenz allgemein auf positive Funktionen (modulo m) fortgesetzt sei. Es stellt sich heraus, dass die Lösung des Problems «potentialtheoretisch" gegeben werden kann ; so lautet die Antwort auf die zweite Frage (Satz 2) : Wenn μ, ν positive Elemente in L^1 sind, dann gilt $\downarrow \lim_n \nu_n = 0$ genau dann, wenn $< \mu, f > \geqslant < \nu, f >$ für alle S-exzessiven f (d.h. alle f mit $0 \leqslant Sf \leqslant f$). Dies wiederum ist gleichbedeutend damit (Satz 3), dass gilt

$$\lim_n \frac{\nu + \nu T + \cdots \nu T^n}{\mu + \mu T + \cdots \mu T^n} \leqslant 1 \quad \text{in} \quad \{\sup_n (\mu + \nu) T^n > 0\}.$$

(Die Existenz des Grenzwerts ist bekanntlich der Inhalt des berühmten individuellen Ergodensatzes von Chacon-Ornstein [2]). Das erste Problem behandelt Satz 1 mit den Corollaren : Es gilt $\lim_n \|\mu_n\| = 0$ genau dann, wenn $< \mu, f > \leqslant < \nu, f >$ für alle $f \in L^\infty$ mit $0 \leqslant f \leqslant Sf$. Dieses Ergebnis lässt sich noch verfeinern, und zwar in einer Richtung, die ein Resultat des Verfassers (Satz 2 in [6]) verschärft : $\mathfrak{F}$ sei ein Kegel von Funktionen f mit $0 \leqslant f \leqslant Sf$ (genauer : siehe unten, Bedingung (F)) ; $\nu' = \uparrow \lim_n \nu - \nu_n$. Dann ist gleichwertig

(I) $\quad < \mu, f > \leqslant < \nu, f >, \quad f \in \mathfrak{F}$;

(II) $\quad < \nu', f > = \uparrow \lim_n < \nu - \nu_n + \mu_n, f >, f \in \mathfrak{F}$;

(III) $\quad \lim_n < \mu_n, f > = 0, \quad \text{wenn} \quad < \nu', f > < \infty, \quad f \in \mathfrak{F}$.

Aussage (II) und (III) stellen hierin ein Analogon zur gleichmässigen Integrabilität eines geeigneten Submartingals dar (siehe Teil 3). Wir bemerken noch, dass es für Satz 1 unnötig ist vorauszuzetzen, dass der Operator T in L^1 definiert ist und dort die Norm höchstens 1 hat ; es genügt stattdessen eine lineare Abbildung T von den positiven, σ-finiten m-totalstetigen Massen oder einem Teilverband davon, in sich zu betrachten mit

$$\uparrow \lim_n \mu_n \mathrm{T} = \mu \mathrm{T}\,, \quad \text{wenn} \quad \uparrow \lim_n \mu_n = \mu\,.$$

Um der Einheitlichkeit der Darstellung willen werden jedoch die Generalvoraussetzungen in der ganzen Arbeit unverändert beibehalten.

1. Das Auffüllschema.

Voraussetzungen und Bezeichnungen. Gegeben ist der σ-finite Massraum $(\mathrm{E}\,, \mathfrak{B}\,, m)$ und der Kegel L^1_+ der endlichen m-totalstetigen positiven Masse in $(\mathrm{E}\,, \mathfrak{B})$, versehen mit der üblichen Verbandsstruktur. Als Teilmengen von E sind im folgenden stets $\mathfrak{B}$-messbare Mengen modulo m zu verstehen ; ebenso meinen wir mit «Funktionen" die Äquivalenzklassen modulo m von $\mathfrak{B}$-messbaren Funktionen.

Es ist L^∞ der Raum der beschränkten Funktionen, das Integral von $f \in \mathrm{L}^\infty$ in Bezug auf $\mu \in \mathrm{L}^1_+$ wird als $< \mu\,, f >$ geschrieben. Gegeben ist weiter die lineare Abbildung T von L^1_+ in sich mit

$$< \mu \mathrm{T}\,, 1 > \leqslant < \mu\,, 1 >\,, \mu \in \mathrm{L}^1_+\,,$$

d.h. T ist Kontraktion im Sinn der L^1-Norm. Der zu T adjungierte Operator in L^∞ wird mit S bezeichnet :

$$< \mu \mathrm{T}\,, f > = < \mu\,, \mathrm{S}f >\,,\ \mu \in \mathrm{L}^1_+\,, f \in \mathrm{L}^\infty\,.$$

Durch monotone Konvergenz wird S auf alle positiven Funktionen fortgesetzt, ebenso wie der Ausdruck $< \mu\,, f >$ für $\mu \in \mathrm{L}^1_+$, $f \geqslant 0$ stets definiert ist, evtl. als $+\infty$.

Die Elemente von L^1_+ werden als «Masse", nicht als «Funktionen" aufgefasst. Wenn wir von ihrer Eigenschaft, m-integrable Funktionen zu sein, Gebrauch machen, so nur, um «invariante" Ausdrücke wie $\{\mu > 0\}$, μ/ν u.a. zu bilden.

Definition 1. – *Wenn μ, $\nu \in \mathrm{L}^1_+$, so wird als zugehöriges Auffüllschema eine Doppelfolge $(\mu_n\,, \nu_n)_{n \in \mathrm{N}}$ von L^1_+-Elementen verstanden, die erklärt ist durch*

$$\mu_0 = (\mu - \nu)^+,\ \nu_0 = (\mu - \nu)^-\ ;$$

$$\mu_{n+1} = (\mu_n \mathrm{T} - \nu_n)^+,\ \nu_{n+1} = (\mu_n \mathrm{T} - \nu_n)^-\,,\ n \geqslant 0\,.$$

Es gelten nun die folgenden einfachen Aussagen über dieses Auffüllschema :

PROPOSITION 1. — a) *Die Folge der Masse* $(\nu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *ist monoton fallend, ebenso die Folge des* L^1*-Normen* $(\|\mu_n\|)_{n\in\mathrm{N}}$.

b) $\nu - \nu_n = \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k \mathrm{T} - \mu_{k+1}),\ n \geqslant 0\,.$

Beweis von b). — Nach Definition ist

$$\nu - \nu_0 = \mu \wedge \nu = \mu - \mu_0\ ,$$
$$\nu_k - \nu_{k+1} = \mu_k \mathrm{T} \wedge \nu_k = \mu_k \mathrm{T} - \mu_{k+1}\ .$$

Summation über k liefert die Behauptung.

Man definiert vermöge a) als ν_∞ den Grenzwert $\downarrow \lim_n \nu_n$.

PROPOSITION 2. — *Seien* $(\mu_n\,,\nu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *und* $(\mu_n\,,\nu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *nach Definition* 1 *aus* $(\mu\,,\nu)$ und $(\mu'\,,\nu')$ gebildet. Man hat dann :

a) Aus $\mu' \geqslant \mu$, $\nu' \leqslant \nu$ folgt $\mu'_n \geqslant \mu_n$, $\nu'_n \leqslant \nu_n$ für $n \geqslant 0$;

b) Wenn speziell $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu - \nu_\infty$, gilt $\mu'_n = \mu_n$, $\nu_n - \nu'_n = \nu'_\infty$, $n \in \mathrm{N}$. Insbesondere ist also $\nu'_\infty = 0$.

Beweis (nur von b)) :

1) $$\mu \wedge \nu' = \mu - \mu'_0 = \nu' - \nu'_0\ ,$$
$$\mu \wedge \nu = \mu - \mu_0 = \nu - \nu_0 \leqslant \nu - \nu_\infty = \nu'$$

Man gewinnt aus der zweiten Zeile die Abschätzung

$$\mu \wedge \nu = \mu \wedge \mu \wedge \nu \leqslant \mu \wedge \nu' \leqslant \mu \wedge \nu$$

wegen $\nu' \leqslant \nu$. Somit hat man $\mu \wedge \nu = \mu \wedge \nu'$ und daraus

$$\mu'_0 = \mu_0\ ,\ \nu_0 - \nu'_0 = \nu - \nu' = \nu_\infty\ .$$

2) Gelte die Behauptung für n ; man schliesst dann ebenso weiter :

$$\mu_n \mathrm{T} \wedge \nu'_n = \mu'_n \mathrm{T} \wedge \nu'_n = \mu'_n \mathrm{T} - \mu'_{n+1} = \nu'_n - \nu'_{n+1}\ ,$$
$$\mu_n \mathrm{T} \wedge \nu_n = \mu_n \mathrm{T} - \mu_{n+1} = \nu_n - \nu_{n+1} \leqslant \nu_n - \nu_\infty = \nu'_n\ .$$

Daraus folgt wieder $\mu_n T \wedge \nu_n = \mu_n T \wedge \nu'_n$

und daher

$$\mu'_{n+1} = \mu_{n+1}\ , \quad \nu_{n+1} - \nu'_{n+1} = \nu_n - \nu'_n = \nu_\infty\ .$$

(Die Interpretation von b) ist klar : wenn man $\nu - \nu_\infty$ als den "auffüllbaren Teil von ν" ansieht, so wird dieser Anteil, für sich allein genommen, vollständig und ebenso schnell wie ν aufgefüllt).

Vor weiteren Aussagen über das Auffüllschema werden die hier grundlegenden Funktionenklassen eingeführt :

a) Es sei $\mathfrak{E}$ der Kegel der S-exzessiven Funktionen ; dabei heisst f S-exzessiv (oder kurz exzessiv) wenn $0 \leqslant Sf \leqslant f$;

b) $\mathfrak{F}$ sei ein (im folgenden festgewähltes) System von Funktionen, das den Forderungen (F) genügt :

(F.1) $0 \leqslant f \leqslant Sf < \infty$, $f \in \mathfrak{F}$, d.h. die $f \in \mathfrak{F}$ sind subharmonisch ; $f, g \in \mathfrak{F} \Longrightarrow f + g \in \mathfrak{F}$, $\lambda \cdot f \in \mathfrak{F}$ für $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$.

(F.2) $0 \leqslant g \leqslant Sg$, $g \leqslant f$ für ein $f \in \mathfrak{F} \Longrightarrow g \in \mathfrak{F}$;

(F.3) zu $f \in \mathfrak{F}$ gibt es ein $g \in \mathfrak{F}$, derart dass $g > 0$ ist in $\{f < Sf\}$.

Proposition 3. – *Seien μ, $\nu \in L^1_+$ mit $\mu \wedge \nu = 0$. Wenn nun $< \mu , f > \leqslant < \nu , f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$, so gilt auch $< \mu T , f > \leqslant < \nu , f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$. (Entsprechend folgt aus $< \mu , g > \geqslant < \nu , g >$ für alle $g \in \mathfrak{E}$, dass $< \mu T , g > \geqslant < \nu , g >$ für alle $g \in \mathfrak{E}$).*

Beweis (der ersten Aussage) :

Gegeben sei $f \in \mathfrak{F}$, wähle ein $g \in \mathfrak{F}$ nach (F.3) aus. Sei $A \subset E$ so gewählt, dass $\mu(A') = \nu(A) = 0$ (A' : Komplement von A).

Man setzt

$$\bar{f} : = 1_A \cdot Sf + 1_{A'} \cdot f\ ,$$
$$\bar{f}_k : = 1_A \cdot (Sf \wedge (f + k \cdot g)) + 1_{A'} \cdot f,\ k \in N$$

(1_A : Indikator von A). Dann ist

$$S\bar{f}_k \geqslant Sf \geqslant \bar{f}_k\ ,\ \bar{f}_k \leqslant f + k \cdot g\ ,$$

woraus $\bar{f}_k \in \mathfrak{F}$ nach (F.2) folgt. Somit gilt

$$< \mu , \bar{f}_k > \leqslant < \nu , \bar{f}_k > = < \nu , f >\ ,$$

da ν in $\{f = f_k\}$ kon⁊entriert ist. und schliesslich – wegen $\overline{f} = \uparrow \lim_k \overline{f}_k$ – auch noch

$$<\nu, f> \geqslant <\mu, \overline{f}> = <\mu, Sf> = <\mu T, f>.$$

PROPOSITION 4. –

a) *Wenn* $\rho \in L^1_+$, *so erfüllt die Funktionenklasse*

$$\mathfrak{F}(\rho) := \{f \in \mathfrak{F} : <\rho, f> < \infty\}$$

ebenfalls die Bedingung (F).

b) *Wenn für* $\mu, \nu \in L^1_+$ *gilt* $<\mu, f> \leqslant <\nu, f>$ *für alle* $f \in \mathfrak{F}$, *so erfüllen die nach Definition* 1 *gebildeten Masse* μ_n, ν_n *für* $n \in N$ *die Abschätzung* $<\mu_n, f> \leqslant <\nu_n, f>$ *für alle* $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, *wo*

$$\nu' = \nu - \nu_\infty .$$

Beweis :

Zu a) : Zu zeigen ist nur (F.3). Wenn $0 \leqslant f \leqslant Sf$, so ist auch $h \leqslant Sh$ für jedes h mit $f \leqslant h \leqslant Sf$. Man wählt nun zu $f \in \mathfrak{F}$ mit $<\rho, f> < \infty$ ein $g \in \mathfrak{F}$ nach (F.3) und setzt $h = f + g'$, wobei g' eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften $0 \leqslant g' \leqslant (Sf - f) \wedge g$, $g' > 0$ in $\{Sf > f\}$, $<\rho, g'> < \infty$ ist. Dann ist $h \in \mathfrak{F}(\rho)$ und erfüllt $h > 0$ in $\{Sf > f\}$.

Zu b) : Beweis durch vollständige Induktion.

Wenn $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, so hat man

$$<\mu_0, f> = <\mu - (\mu \wedge \nu), f> \leqslant <\nu - (\mu \wedge \nu), f> = <\nu_0, f> ,$$

da $<\mu \wedge \nu, f> \leqslant <\nu - \nu_\infty, f> < \infty$ vorausgesetzt war.

Wenn $<\mu_n, f> \leqslant <\nu_n, f>$ für alle $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, so gilt wegen $\mu_n \wedge \nu_n = 0$ nach Proposition 3 auch

$$<\mu_n T, f> \leqslant <\nu_n, f> \text{ für alle } f \in \mathfrak{F}(\nu') .$$

Damit ist für $f \in \mathfrak{F}(\nu')$

$$<\mu_{n+1}, f> = <\mu_n T - (\mu_n T \wedge \nu_n), f> \leqslant <\nu_n - (\mu_n T \wedge \nu_n), f> = \\ = <\nu_{n+1}, f>$$

da wiederum das Mass $\mu_n T \wedge \nu_n \leqslant \nu - \nu_\infty$ ein endliches Integral über f ergibt.

2. Ordnungsbeziehungen und Auffüllbarkeit.

Es gilt nun Kriterien dafür zu finden, dass in einer Auffüllsequenz $(\mu_n, \nu_n)_{n\in N}$ die Masse ν_n nach Null konvergieren bzw. dass $\lim < \mu_n, f > = 0$ gilt für möglichst viele $f \in \mathfrak{F}$.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der zweiten Fragestellung : Der einzuschlagende Weg ist durch Proposition 4 bereits vorgezeichnet. Wir wissen, dass mit $< \mu, f > \leqslant < \nu, f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ auch gilt $< \mu_n, f > \leqslant < \nu_n, f >$, für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $< \nu - \nu_\infty, f > < \infty$. Geht man jetzt von ν über zu einem Mass $\widetilde{\nu} = \nu + \rho$, wobei ρ disjunkt zu sämtlichen μ_n ist, so bleiben im neuen Auffüllschema die Masse μ_n unverändert erhalten, ν_n geht über in $\nu_n + \rho$ (Schluss wie in Proposition 2b) und die obenstehende Abschätzung ist damit schwächer geworden. Das Ziel muss daher sein, $< \mu_n, f >$ nur durch Integrale des Typs $< \nu_n - \nu_\infty, . >$ abzuschätzen, die invariant beim oben beschriebenen Übergang von ν zu $\nu + \rho$ sind. Dies wird erreicht, indem man f durch eine subharmonische Funktion f_A ersetzt, die im Träger von ν_∞ verschwindet. Die Grösse des dabei begangenen Fehlers ist Gegenstand von Lemma 2. Zur Vorbereitung dient Lemma 1, das als Satz vom optimalen Stoppen (vgl. [4], Kap. III) bezeichnet werden kann, sowie die nachstehende Definition des, «Auseinanderziehens" von Massen, die von der Ordnung von Massen, wie sie z.B. in [1] betrachtet wird, etwas abweicht :

DEFINITION 2. – *Seien μ, $\nu \in L^1_+$; dann bedeutet $\mu \prec \nu$ soviel wie : es gibt ein $n \in N$ und Funktionen $d_0, \dots d_n$ mit*

$$0 \leqslant d_i \leqslant 1 \ , \quad i = 0, \dots n \, ,$$

derart dass

$$\nu = \mu(1 - d_0) + (\mu d_0) T(1 - d_1) + \cdots + (\cdot\cdot((\mu d_0) T d_1) T \dots d_n) T.$$

BEMERKUNG. – *Offenbar folgt aus $\mu \prec \nu$ stets*

$$< \mu, f > \leqslant < \nu, f > , \quad f \in \mathfrak{F} \ ;$$
$$< \mu, g > \geqslant < \nu, g > , \quad g \in \mathfrak{G} \ .$$

LEMMA 1. – *Sei $f \geqslant 0$ gegeben mit $Sf < \infty$; es sei $\overline{f}$ die grösste subharmonische Minorante von f. Dann gilt für $\mu \in L^1_+$ mit $< \mu, f > < \infty$:*

$$< \mu , \bar{f} > \geqslant \inf_{\mu \prec \nu} < \nu , f >$$

Beweis. — Man definiert rekursiv die Funktionen

$$f_0 : = f, f_{n+1} : = f \wedge \mathrm{S} f_n \,, \; n \geqslant 0 \,.$$

Die Folge ist absteigend und es gilt wegen $\mathrm{S}f < \infty$ offenbar $\bar{f} = \downarrow \lim_n f_n$ und $< \mu , \bar{f} > = \inf_n < \mu , f_n >$.

Der Beweis der Behauptung ist erbracht, wenn wir zu jedem $n \in \mathrm{N}$ ein μ_n angeben können mit $\mu \prec \mu_n$ und $< \mu_n , f > = < \mu , f_n >$. Nun sei g_k der Indikator der Menge $\{f_k < f\}$, $g'_k = 1 - g_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Wir behaupten, dass f_n, $n \geqslant 1$, eine Darstellung besitzt

$$f_n = g'_n \cdot f + g_n \cdot \mathrm{S}(g'_{n-1} f) + \cdots + g_n \cdot \mathrm{S}(g_{n-1} \mathrm{S}(\ldots g_1 \cdot \mathrm{S}f) \ldots) \,.$$

In der Tat : es gilt

$$f_1 = f \wedge \mathrm{S}f = g'_1 \cdot f + g_1 \cdot \mathrm{S}f \,,$$

und wenn die behauptete Darstellung für f_n richtig ist, so auch für f_n :

$$f_{n+1} = f \wedge \mathrm{S}f_n = g'_{n+1} \cdot f + g_{n+1} \cdot \mathrm{S}f_n = g'_{n+1} \cdot f + \\ + g_{n+1} \cdot [\mathrm{S}(g'_n f) + \cdots + \mathrm{S}(g_n \mathrm{S}(\ldots g_1 \mathrm{S}f) \ldots)] .$$

Dualisieren dieser Formel zeigt, dass

$$\mu_n = \mu g'_n + (\mu g_n) \mathrm{T} g'_{n-1} + \cdots + (\ldots (\mu g_n) \mathrm{T} \ldots g_1) \mathrm{T}$$

das Verlangte leistet ; es gilt sowohl $\mu \prec \mu_n$ als auch

$$< \mu_n , f > = < \mu , f_n > \cdot$$

Das entscheidende Lemma lautet nun

LEMMA 2. — *Es sei $\mu \in \mathrm{L}^1_+$ gegeben, sowie eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathrm{N}}$ in L^1_+ mit*

$$\mu_0 \leqslant \mu \,;\; \mu_n \mathrm{T} \geqslant \mu_{n+1} \,,\; n = 0, 1, 2, \ldots \,;$$

es sei $\nu' = \mu - \mu_0 + \sum_n (\mu_n \mathrm{T} - \mu_{n+1})$ gesetzt.

Weiter sei $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ und $f \in \mathfrak{F}$ gegeben, derart dass $\mu_n(\mathrm{A}) = 0$ für alle $n \geqslant 0$ und $< \mu , f \cdot 1_{\mathrm{A}'} > < \infty$.

Es bezeichne f_A die grösste subharmonische Minorante von $f \cdot 1_{A'}$. Dann gilt

$$< \mu , f > \leqslant < \mu , f_A > + < \nu' , f > \cdot$$

Beweis. – Man wählt eine Folge von Funktionen $(h_i)_{i \in N}$ mit den Eigenschaften $0 \leqslant h_i \leqslant 1$, $i \in N$; $\mu h_0 = \mu_0$, $(\mu_i T) h_{i+1} = \mu_{i+1}$, $i \in N$; $h_i \cdot 1_A = 0$, $i \in N$.

Nach Lemma 1 gibt es zu $\varepsilon > o$ ein $n \in N$ und Funktionen $d_0, \ldots, d_n$, $0 \leqslant d_i \leqslant 1$ für $i \leqslant n$, derart dass

$$< \mu , f_A > + \varepsilon \geqslant$$

$$< \mu(1 - d_0) + (\mu d_0) T(1 - d_1) + \cdots + (\ldots(\mu d_0) T \ldots d_n) T, f \cdot 1_{A'} > \cdot$$

Daraus folgt durch Verkleinern der rechten Seite

$$< \mu , f_A > + \varepsilon \geqslant < \mu(1 - d_0) h_0 + (\mu d_0 h_0) T(1 - d_1) h_1 + \cdots +$$
$$+ (\ldots(\mu d_0 h_0) T \ldots d_n h_n) T h_{n+1} , f \cdot 1_{A'} > = < \mu(1 - d_0) h_0 + \cdots +$$
$$+ (\ldots(\mu d_0 h_0) T \ldots d_n h_n) T h_{n+1} , f >$$

wegen $h_i \cdot 1_A = 0$. Dazu addiert man die Ungleichung

$$< \nu' , f > = < \mu(1 - h_0) + (\mu h_0) T (1 - h_1) + \cdots , f > \geqslant$$
$$\geqslant < \mu(1 - h_0) + (\mu d_0 h_0) T(1 - h_1) + \cdots +$$
$$+ (\ldots(\mu d_0 h_0) T \ldots d_n h_n) T(1 - h_{n+1}) , f >$$

und erhält

$$< \mu , f_A > + < \nu' , f > + \varepsilon \geqslant < \mu(1 - d_0 h_0) T(1 - d_1 h_1) + \cdots +$$
$$+ (\ldots(\mu d_0 h_0) T \ldots d_n h_n) T , f > \geqslant < \mu , f >,$$

weil der mittlere Ausdruck ein Integral $< \widetilde{\mu} , f >$ mit $\mu \prec \widetilde{\mu}$ darstellt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist das Lemma bewiesen.

SATZ 1. – *Seien μ, $\nu \in L^1_+$ gegeben und sei $(\mu_n , \nu_n)_{n \in N}$ das dazugehörige Auffüllschema ; sei $\nu' = \nu - \nu_\infty$. Dann sind gleichbedeutend die Aussagen*

(I) $< \mu , f > \leqslant < \nu , f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$;

(II) $< \nu' , f > = \uparrow \lim\limits_n < \nu - \nu_n + \mu_n , f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$;

(III) für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $< \nu' , f > < \infty$ gilt $\lim\limits_n < \mu_n , f > = 0$.

Beweis. – (I) $\longrightarrow$ (III).

a) Sei $f \in \mathfrak{F}$ mit $< \nu', f > < \infty$ gegeben. Man setzt $A = \{\nu_\infty > 0\}$ und definiert f_A wie in Lemma 2 als grösste subharmonische Funktion unter $f \cdot 1_{A'}$. Wegen Bedingung (F.2) ist $f_A \in \mathfrak{F}$; daher erhält man nach (I)

$$< \mu, f_A > \leqslant < \nu, f_A > = < \nu', f_A > \leqslant < \nu', f > < \infty \ .$$

Die Folge (μ_n) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 2, da ja $\mu_n \wedge \nu_\infty \leqslant \mu_n \wedge \nu_n = 0$. Um das Lemma anwenden zu können, machen wir die zusätzliche Annahme $< \mu, f \cdot 1_{A'} > < \infty$. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$< \mu, f > \leqslant < \mu, f_A > + < \nu', f > \leqslant 2 < \nu', f > < \infty \ .$$

Diese Ungleichung bleibt richtig auch im Fall $< \mu, f \cdot 1_{A'} > = \infty$: Man ersetzt μ durch ein $\widetilde{\mu} \leqslant \mu$ mit $< \widetilde{\mu}, f \cdot 1_{A'} > < \infty$; die Bedingung (I) bleibt gültig und in dem von $\widetilde{\mu}$, ν gebildeten-Auffüllschema $(\widetilde{\mu}_n, \widetilde{\nu}_n)$ hat man

$$\nu - \widetilde{\nu}_\infty \leqslant \nu - \nu_\infty = \nu' \quad \text{(Proposition 2a)} \ ,$$

somit

$$< \widetilde{\mu}, f > \leqslant 2 < \nu - \widetilde{\nu}_\infty, f > \leqslant 2 < \nu', f > \cdot$$

Da dies für alle $\widetilde{\mu} \leqslant \mu$ mit endlichem Integral über $f \cdot 1_{A'}$ gilt und $f \cdot 1_{A'}$ endlichwertig ist, bleibt die gewünschte Abschätzung auch für μ erhalten. •

b) Nach Proposition 4b) trifft Voraussetzung (I) für jedes n auf das Paar μ_n, ν_n zu, sofern man $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}(\nu') = \{g \in \mathfrak{F} : < \nu', g > < \infty\}$ ersetzt. Anwendung von Beweisteil a) liefert dann

$$< \mu_n, f > \leqslant 2 < \nu_n - \nu_\infty, f > \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{F}(\nu') \ .$$

Da die rechte Seite nach 0 strebt bei $n \longrightarrow \infty$, ist (III) bewiesen.

(III) $\longrightarrow$ (II) .

Dass die Folge $(< \mu_n + \nu - \nu_n, f >)_{n \in N}$ für subharmonisches f aufsteigend ist, folgt aus Proposition 1b) :

$$\nu - \nu_n + \mu_n = \mu + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k T - \mu_k) \ .$$

Ihr Limes ist mindestens gleich $< \nu - \nu_\infty, f >$, somit ist die Behauptung für ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $< \nu', f > = \infty$ bereits bewiesen. Für die restlichen f folgt die Behauptung sofort aus (III).

$$(\mathrm{II}) \longrightarrow (\mathrm{I}) .$$

Aus dem vorigen Beweisteil ist bekannt, dass

$$< \mu, f > \leqslant < \mu_n + \nu - \nu_n, f >$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ und $n \geqslant 0$; daher gilt unter Voraussetzung (II)

$$< \mu, f > \leqslant < \nu', f > \leqslant < \nu, f >, \quad f \in \mathfrak{F} .$$

1. Corollar. – *Wenn* μ, $\nu \in \mathrm{L}^1_+$ *mit* $(\mu_n, \nu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *als Auffüllschema gegeben sind, so ist*

$$< \mu, f > \leqslant < \nu, f > \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathrm{L}^\infty \quad \textit{mit} \quad 0 \leqslant f \leqslant \mathrm{S}f$$

notwendig und hinreichend für

$$\lim_n \| \mu_n \| = 0 .$$

Beweis. – Die Klasse der $f \in \mathrm{L}^\infty$ mit $0 \leqslant f \leqslant \mathrm{S}f$ erfüllt (F). Sei $e = \lim_n \mathrm{S}^n(1)$ gesetzt ; dann ist

$$\lim_n < \mu_n, 1 - e > \leqslant \lim_n < \mu \mathrm{T}^n, 1 - e > = \lim_n < \mu, \mathrm{S}^n(1 - e) > = 0 ,$$

und daher ist $\lim_n < \mu_n, 1 > = 0$ gleichbedeutend mit $\lim_n < \mu_n, e > = 0$ oder, da ein Vielfaches von e alle beschränkten subharmonischen Funktionen majorisiert, mit

$$\lim_n < \mu_n, f > = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}^\infty \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant f \leqslant \mathrm{S}f .$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 1.

2. Corollar. – *Wenn* $\mu, \nu \in \mathrm{L}^1_+$ *mit* $< \mu, f > \leqslant < \nu, f >$ *für alle* $f \in \mathfrak{F}$ *gegeben sind und wenn* $\mathfrak{F}$ *die Funktion* $e = \lim \mathrm{S}^n(1)$ *enthält, so gibt es in* L^1_+ *eine Zerlegung von* ν : $\nu = \nu' + \nu''$, *wobei*

$$< \mu, f > \leqslant < \nu', f >$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ *und* $< \mu, e > = < \nu', e >$ *gilt.*

Beweis. – Man wählt $\nu' = \nu - \nu_\infty$; aus $Se = e$ folgt

$$< \nu - \nu_n + \mu_n , e > = < \mu + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mathrm{T} - \mu_k , e > = < \mu , e > ;$$

die linke Seite strebt wegen Satz 1 gegen $< \nu' , e >$, womit alles bewiesen ist.

Dieses Corollar wurde in [6] noch unter der schärferen Voraussetzung bewiesen, dass ein $f^* \in \mathfrak{F}$ existiert mit $f^* < Sf^*$ und dass alle $f \in \mathfrak{F}$ ν-integrabel sind. Unter der zweiten Bedingung allein ($< \nu , . >$ endlich in $\mathfrak{F}$) sollte es mit Hilfe eines Hahn-Banach-Argumentes ebenfalls möglich sein, aus ν einen minimalen Bestandteil ν' herauszulösen, der noch $< \nu' , f > \geqslant < \mu , f >$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ erfüllt. Der Vorteil des hier eingeschlagenen Verfahrens besteht darin, auf einem direkten, konstruktiven Weg die Zerlegung von ν zu erreichen, ohne viel mehr als die «monotone Struktur" von L^1_+ und $\mathfrak{f}$ zu benutzen, d.h. ohne durch weitreichende Integrabilitätsforderungen die betrachteten Masse-oder Funktionenkegel in topologische Vektorräume einzubetten.

Bei der Lösung des ersten Problems, Bedingungen für $\nu_\infty = 0$ zu finden, wird nun vollkommen analog verfahren : wir geben eine «gespiegelte" Form von Lemma 2 an, die sich etwas einfacher beweisen lässt, und aus der dann unmittelbar der Satz folgt :

LEMMA 3. – *Sei in* L^1_+ *die Folge* $(\mu_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *gegeben mit*

$$\mu_k \mathrm{T} \geqslant \mu_{k+1} , \ k \in \mathrm{N} ;$$

sei $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *mit der Eigenschaft* $\mu_k(\mathrm{A}) = 0,\ k \in \mathrm{N}$. *Dann gilt*

$$\lim_n < \mu_n , e_\mathrm{A} > = 0 \ ,$$

wo e_A *das Gleichgewichtspotential von* A *bedeutet, d.h. die kleinste exzessive Majorante von* $1_{\mathrm{A}'}$.

Beweis. – Aus $\mu_{n+1} \leqslant \mu_n \mathrm{T}$ und $\mu_n \cdot 1_{\mathrm{A}'} = \mu_n$ folgt sofort

$$\mu_{n+1} \leqslant (\mu_n \, 1_{\mathrm{A}'}) \mathrm{T} \quad \text{oder} \quad \mu_n \leqslant \mu_0 \, \mathrm{T}^n_{\mathrm{A}'} \quad \text{für} \quad n \geqslant 0 \ ,$$

wenn $\mathrm{T}_{\mathrm{A}'}$ den Operator $\mu \longrightarrow (\mu \, 1_{\mathrm{A}'}) \mathrm{T}$ bezeichnet. Nach Definition von e_A gilt (vgl. [5] Ch. IX)

$$< \mu_n , e_A > = \sum_{k \geqslant 0} < \mu_n T^k_{A'} , 1_A > \leqslant \sum_{k \geqslant n} < \mu_0 T^k_{A'} , 1_A > \cdot$$

Dieser letzte Ausdruck strebt nach 0 bei $n \longrightarrow \infty$, da die Reihe $\sum_{k \geqslant 0} < \mu_0 T^k_{A'} > = < \mu_0 , e_A >$ konvergiert.

SATZ 2. – *Wenn $\mu, \nu \in L^1_+$ mit Auffüllschema $(\mu_n , \nu_n)_{n \in N}$ gegeben sind, so ist die Bedingung*

$$< \mu , g > \geqslant < \nu , g >$$

für alle exzessiven g notwendig und hinreichend für $\nu_\infty = 0$.

a) Die Bedingung ist hinreichend für $\nu_\infty = 0$: wenn $\nu_\infty \neq 0$, so sei A eine Teilmenge von E mit $\nu_\infty(A) > 0$, $\mu_n(A) = 0$ für alle $n \in N$. Wie in Lemma 3 sei e_A definiert ; nach Proposition 1 b) ist

$$\nu - \nu_\infty = \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k T - \mu_{k+1}) \cdot$$

Aus $\mu_k(A) = 0$ und den elementaren Eigenschaften des Gleichgewichtspotentials ergibt sich $< \mu_k T , e_A > = < \mu_k , e_A >$ und daher

$$< \nu , e_A > = < \nu_\infty , e_A > + < \mu - \mu_0 , e_A > + \sum_{k=0}^{\infty} < \mu_k - \mu_{k+1} , e_A > \cdot$$

Nach Lemma 3 ist $\lim_n < \mu_n , e_A > = 0$, und der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$< \nu , e_A > = < \nu_\infty , e_A > + < \mu , e_A >$$

was wegen $\nu_\infty(A) > 0$ echt grösser als $< \mu , e_A >$ ist. Damit ist eine spezielle exzessive Funktion g mit $< \mu , g > < < \nu , g >$ aufgewiesen.

b) Umgekehrt, sei $\nu_\infty = 0$; man hat dann für exzessives g

$$< \nu , g > = \lim_{n \to \infty} < \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k T - \mu_{k+1}), g > \leqslant$$

$$\leqslant < \mu , g > + \lim_{n \to \infty} < \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k , Sg - g > \leqslant < \mu , g > \cdot$$

Die Verbindung zum individuellen Ergodensatz, aus dessen Ideenkreis die Auffüllprozedur ja stammt, ist jetzt leicht herzustellen : es werde zu μ, $\nu \in L^1_+$ mit $D(\nu, \mu)$ der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\nu + \cdots \nu T^n}{\mu + \cdots \mu T^n}$ bezeichnet. Der Eindeutigkeit halber wird $D(\nu, \mu) = 0$ in $\{\sup(\mu + \nu) T^n = 0\}$ und $D(\nu, \mu) = \infty$ in $\{\sup\limits_n \mu T^n = 0, \sup\limits_n \nu T^n > 0\}$ gesetzt. Dann gilt der folgende

SATZ 3. – *Gegeben* $\mu, \nu \in L^1_+$; *dann ist*

$D(\nu, \mu) \leqslant 1$ *gleichbedeutend mit* $< \nu, g > \leqslant < \mu, g >$ *für alle exzessiven* g.

Beweis. – Es bezeichne D bzw. C den dissipativen bzw. konservativen Teil von E. Dann ist equivalent (nach dem Satz über die «Identifikation des Limes" [4])

$D(\nu, \mu) \leqslant 1$ in D mit

$< \sum\limits_k \nu T^k, f > \leqslant < \sum\limits_k \mu T^k, f >$ für alle $f \geqslant 0$, die in C verschwinden,

oder mit

(*) $< \nu, g > \leqslant < \mu, g >$ für alle g der Gestalt

$$g = \sum_k S^k f \quad \text{mit} \quad f \geqslant 0, \ f \cdot 1_C = 0 .$$

Es sei $\mathfrak{J}$ die σ-Algebra der S-invarianten Teilmengen von C ; dann sind der Reihe nach äquivalent

$$D(\nu, \mu) \leqslant 1 \ \text{ in C}$$

$$\sum_k \nu T_D^k \cdot 1_C \leqslant \sum_k \mu T_D^k \cdot 1_C \ \text{ in } \mathfrak{J}$$

$$< \nu, e_A > \leqslant < \mu, e_A > \ \text{ für alle } A \in \mathfrak{J} ,$$

(**) $< \nu, g > \leqslant < \mu, g >$ für alle beschränkten exzessiven g mit $Sg = g$ in D.

Die Summen der in (*) und (**) beschriebenen Funktionen und ihre monotonen Limiten sind aber gerade alle exzessiven Funktionen, womit der Satz bewiesen ist.

3. Anwendung auf Markoffsche Ketten.

Wir betrachten jetzt einen messbaren Raum $(E, \mathfrak{B})$ und darin einen substochastischen Übergangskern P, d.h. eine Familie $(P_x)_{x \in E}$ von Massen in $(E, \mathfrak{B})$ mit

$$0 \leqslant P_x(A) \leqslant 1 , \quad x \in E , \quad A \in \mathfrak{B} ;$$

$$P \cdot (A) \quad \text{ist } \mathfrak{B}\text{-messbar für} \quad A \in \mathfrak{B} .$$

Dann induziert (P_x) in der üblichen Weise einen positiven Operator B in den endlichen Massen und dual dazu in den $\mathfrak{B}$-messbaren (positiven) Funktionen :

$$\mu P(A) = \int \mu(dx)\, P_x(A) \; ; \quad Pf(x) = \int f(y)\, P_x(dy) .$$

Sämtliche Begriffsbildungen und Beweisideen der Arbeit lassen sich volkommen analog auf diese Situation übertragen, angefangen vom Auffüllschema, den Forderungen (F) bis zu den Sätzen 1 und 2. Das Lemma 1 ist dann so zu verstehen, dass die Existenz der „grössten subharmonischen Minorante" gerade durch die dort gebrachte Konstruktion gesichert ist (vgl. [5]).

Sei nun $(X_n)_{n \in N}$ eine Markoff-Kette mit Werten in E zum Kern P und Startmass μ, definiert auf einem Massraum $(\Omega, \mathfrak{G}, Pr_\mu)$ mit $(\mathfrak{G}_n)_{n \in N}$ als begleitender Familie von σ-Algebren. Man überlegt sich leicht, dass man das System $(\Omega, (\mathfrak{G}_n))$ so reich wählen kann, dass es zu einer Folge von Massen $(\mu_n)_{n \in N}$ mit

$$\mu_0 \leqslant \mu \; ; \mu_{n+1} \leqslant \mu_n P , \; n \geqslant 0 ,$$

eine Stoppzeit $\tau \leqslant \infty$ gibt mit

$$\mu_n(A) = Pr_\mu(X_n \in A \; ; \tau > n) , \; A \in \mathfrak{B} , \; n \in N .$$

Dann lassen sich die Sätze 1 und 2 folgendermassen aussprechen (der Beweis liegt auf der Hand) :

SATZ 1a. – *Seien μ, ν endliche Masse in $(E, \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{B}$ eine Klasse von P-subharmonischen Funktionen, die die zu (F) analogen Bedingungen erfüllen möge. Dann ist äquivalent :*

(I) $\quad < \mu , f > \leqslant < \nu , f > \quad$ *für alle* $\quad f \in \mathfrak{F}$;

(II) *in einem geeigneten Massraum* $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathrm{Pr}_\mu)$ *gibt es eine Markoff-Kette* $(X_n)_{n\in N}$ *zum Kern* P *mit Startverteilung* μ, *sowie eine Stoppzeit* $\tau \leqslant \infty$, *derart dass* X_τ *in* $\{\tau < \infty\}$ *eine Verteilung* ν' *besitzt mit*

$$\nu' \leqslant \nu \quad \textit{und} \quad < \nu', f > = \uparrow \lim_{n\to\infty} \int f(X_{\tau\wedge n})\, d\mathrm{Pr}_\mu \ ,$$

(d.h. *für alle* $f \in \mathfrak{F}$ *mit* $<\nu', f> < \infty$ *ist das Submartingal* $(f(X_{\tau\wedge n}))_{n\in N}$ *gleichmässig integrabel*).

COROLLAR. – *Wenn* $\mathfrak{F}$ *die beschränkten subharmonischen Funktionen enthält, dann folgt aus Bedingung* (I), *dass die in* (II) *beschriebene Stoppzeit* τ Pr_μ*-fast sicher endlich ist.*

SATZ 2a. – *Seien* μ, ν *endliche Masse in* $(E, \mathfrak{B})$; *dann ist äquivalent*

(I) $< \mu, g > \geqslant < \nu, g >$ *für alle* P-*exzessiven* g ;

(II) *in einer geeigneten Markoff-Kette* $(X_n)_{n\in N}$ *zur Startverteilung* μ *gibt es eine Stoppzeit* $\tau \leqslant \infty$, *derart dass* ν *Verteilung von* X_τ *in* $\{\tau < \infty\}$ *ist.*

Unter der Voraussetzung von Satz 2*a* gewinnt man aus [1] noch eine Aussage über das asymptotische Verhalten von

$$D(\nu, \mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu + \cdots + \nu P^n}{\mu + \cdots + \mu P^n}$$

längs der Pfade eines P-Prozesses mit Startmass μ. Es sei in üblicher Weise zum Zustandsraum E der Markoff-Kette ein Punkt ∂ adjungiert mit der Erweiterungsvorschrift für den Übergangskern :

$$P_x(\{\partial\}) = 1 - P_x(E) \ .$$

Als Lebensdauer eines Prozesses wird dann

$$\zeta(\omega) = \inf\{n : X_n(\omega) = \partial\} \ (\leqslant \infty)$$

definiert. Wie oben sei e definiert durch

$$e(x) = \lim_{n\to\infty} P^n(1_E)(x) = \mathrm{Pr}_x(\zeta = \infty) \ .$$

Damit lässt sich formulieren

SATZ 4. – *Seien* μ, ν *endliche Masse in* $(E, \mathfrak{B})$ *mit*

$$< \mu , g > \geqslant < \nu , g >$$

für alle exzessiven g, *sei* $D = D(\nu, \mu)$ *gesetzt ; dann gilt*

a) $\lim_{n\to\infty} D(X_n(\omega))$ *existiert* Pr_μ- *fast sicher ;*

b) $< \mu , e > = < \nu , e >$ *ist gleichbedeutend*

mit

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n(\omega)) = 1 \quad Pr_\mu = f.s. \quad \text{in} \quad \{\zeta = \infty\} .$$

Beweis. –

a) folgt sofort aus Th. 3 in [1].

b) Nach Th. 4 in [1] ist

$$<\nu , e> = \int [\lim_n D(X_n)] \, dPr_\mu \leqslant \int [\lim_n 1_E(X_n)] \, dPr_\mu = <\mu , e> \cdot$$

Gleichheit zwischen den beiden äusseren Termen herrscht hier genau dann, wenn $\lim_n D(X_n) = 1$ in fast allen Pfaden mit unendlicher Lebensdauer. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] M.A. AKCOGLU, R.W. SHARPE, Ergodic theory and boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.* 132 (1968), 447-460.

[2] R.V. CHACON, D.S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem, *Ill. Journal Math.* 4 (1960), 153-160.

[3] E.B. DYNKIN, A.A. JUSCHKEWITSCH, Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1969.

[4] P.A. MEYER, Théorie ergodique et potentiels, *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965), 89-102.

[5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, Paris : Hermann 1966.

[6] H. Rost, Darstellung einer Ordnung von Massen durch Stoppzeiten, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 15 (1970), 19-28.

Manuscrit reçu le 6 juin 1970

Dr. Hermann Rost
Math. Seminar der Universität
6 Frankfurt/Main
Robert-Mayer-Str. 10