Annales de l'institut Fourier

André Unterberger

Résolution d'équations aux dérivées partielles dans des espaces de distributions d'ordre de régularité variable

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 2 (1971), p. 85-128

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_2_85_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 1 (1971), 85-128.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DANS DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS D'ORDRE DE RÉGULARITÉ VARIABLE

par André UNTERBERGER

TABLE DES MATIÈRES

Pendant la rédaction de ce travail, l'auteur était Visiting Assistant Professor à Purdue University.

Introduction.

L'utilisation d'espaces de distributions dont l'ordre de régularité n'est pas constant en vue de résoudre des équations aux dérivées partielles dont le second membre est une distribution arbitraire n'est pas nouvelle : elle remonte à notre connaissance à M. B. Malgrange [5], qui a utilisé de tels espaces pour prouver le premier la possibilité de résoudre n'importe quelle équation aux dérivées partielles à coefficients constants, avec un second membre arbitraire, dans un ouvert convexe de R^n.

L'avantage de tels espaces est évident : toute distribution dans un ouvert Ω de R^n a des singularités dont l'ordre est borné sur tout compact, mais pas nécessairement dans la totalité de Ω.

Il nous a paru que les espaces de Sobolev d'ordre variable (espaces H^ρ) ne manqueraient pas de manifester quelque mérite : une qualité évidente des espaces H^ρ réside dans le fait qu'il est permis à l'ordre de régularité ρ de varier de façon non discrète, et les conditions sur ρ qui permettent d'obtenir, pour certains opérateurs différentiels, des théorèmes d'existence ou de régularité dans H^ρ, font intervenir les dérivées (d'ordre $\leqslant 2$ dans ce travail) de ρ; un autre avantage de ces espaces est que les espaces locaux associés (espaces H^ρ_{loc}) sont des espaces de Fréchet, duaux de limites inductives strictes d'espaces hilbertisables, et que l'on bénéficie à leur endroit de nombre de théorèmes de dualité.

Le chapitre 1 de ce travail rappelle les définitions et propriétés premières des espaces H^ρ : celles-ci suffisent pour obtenir des théorèmes d'existence dans les espaces H^ρ pour une certaine classe d'opérateurs différentiels à coefficients variables déjà considérée par M. L. Hörmander; nous arrivons aussi, par une méthode très élémentaire, à obtenir des résultats assez précis sur les opérateurs à coefficients constants en deux variables indépendantes.

Le chapitre 4 introduit une technique différente, à savoir une norme équivalente à la norme $\|u\|_\rho$, faisant intervenir les moyennes sphériques de la fonction u prises sur des sphères de petits rayons : une méthode analogue a déjà été éprouvée par M. L. Hörmander dans le cas où ρ est une constante. Ceci permet d'obtenir très rapidement des théorèmes d'existence dans les espaces H^ρ (pour des fonctions ρ « assez convexes ») pour les opérateurs à coefficients constants généraux, grâce aux inégalités L^2 obtenues par M. F. Trèves pour ces opérateurs : le chapitre 5 de cet article repose entièrement sur ces inégalités.

J'exprime ma vive reconnaissance à M. F. Trèves, dont les encouragements et critiques m'ont été très utiles, ainsi qu'à M. L. Schwartz et M. J. L. Lions qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail; enfin, je tiens à remercier Purdue University pour les excellentes conditions dans lesquelles j'ai pu rédiger cet article.

CHAPITRE 1

Définitions et propriétés générales des espaces H^ρ; conventions générales.

On considère l'espace numérique R^n, dont le point courant est $x = (x_1, \dots, x_n)$, et son dual, dont le point courant est $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Pour toute fonction $f(x, \xi)$ sur R^{2n} possédant des propriétés de régularité et de comportement à l'infini convenables, on définit l'opérateur pseudo-différentiel $\Theta[f]$ par l'équation

$$\Theta[f](u)(x) = \int f(x, \xi) e^{2i\pi\langle x, \xi\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

valable pour toute fonction $u \in \mathfrak{D}(R^n)$; la fonction f est le symbole de l'opérateur $\Theta[f]$.

Appelons symbole d'ordre m, m étant un nombre réel, toute fonction f de classe C^∞ sur R^{2n}, satisfaisant la propriété suivante : quels que soient les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, et quel que soit le polynôme $q(x)$, il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout (x, ξ), l'inégalité

$$|q(x)| \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \xi^\beta} f(x, \xi) \right| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m - |\beta|)},$$

avec $$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n.$$

Pour de telles fonctions f, l'opérateur $\Theta[f]$ est bien défini et opère continûment de l'espace de Sobolev $H^s(R^n)$ dans l'espace $H^{s-m}(R^n)$ pour toute valeur réelle de s : il sera dit opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, n'étant pas interdit qu'il soit aussi d'ordre inférieur.

$\mathcal{S}(R^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur R^n (i.e. toute dérivée d'une telle fonction tend vers 0 à l'infini plus rapidement que l'inverse de tout polynôme); $\mathcal{S}^\infty(R^n, R)$ désigne l'espace des fonctions ρ réelles sur R^n

qui sont sommes d'une constante et d'une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n)$.

Si $\rho \in \mathcal{S}^\infty(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ et si s est un nombre réel, nous ferons un usage constant des opérateurs suivants :

l'opérateur $\mathrm{A}^\rho = \Theta[(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)/2}]$;

l'opérateur $\mathrm{B}^s = \Theta[(1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2))^s]$ (et en particulier $\mathrm{B} = \mathrm{B}^1$);

et l'opérateur

$$\mathrm{A}^{\rho,s} = \mathrm{A}^\rho \mathrm{B}^s = \Theta[(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)/2}(1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2))^s].$$

L'opérateur $\mathrm{A}^{\rho,s}$ est essentiellement inversible au sens suivant : quel que soit le nombre réel k, il existe un opérateur pseudo-différentiel C_k tel que les opérateurs $\mathrm{A}^{\rho,s}\mathrm{C}_k - 1$ et $\mathrm{C}_k\mathrm{A}^{\rho,s} - 1$ opèrent continûment, pour tout s, de $\mathrm{H}^s(\mathrm{R}^n)$ dans $\mathrm{H}^{s+k}(\mathrm{R}^n)$; si $k < 1$, on peut choisir $\mathrm{C}_k = \mathrm{A}^{-\rho,-s}$.

Soit k un nombre réel strictement inférieur à la borne inférieure de ρ sur R^n : on définit alors l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}(\mathrm{R}^n)$ comme l'espace des distributions $u \in \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{R}^n)$ telles que $\mathrm{A}^{\rho,s}u$ appartienne à L^2; cet espace ne dépend que de ρ et de s, et devient un espace de Hilbert si on y introduit la norme $\|u\|_{\rho,s}$ définie par $\|u\|^2_{\rho,s} = \|\mathrm{A}^{\rho,s}u\|^2 + \|u\|^2_{k-1}$, où $\|u\|_{k-1}$ désigne la norme habituelle dans $\mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{R}^n)$ et où $\|v\| = \|v\|_0$: la topologie définie par cette norme ne dépend également que de ρ et de s. Lorsque ρ est une constante et que $s = 0$, l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}(\mathrm{R}^n)$ n'est autre que l'espace de Sobolev ordinaire. Dans tous les cas, on a l'inclusion topologique $\mathrm{H}^{\sigma,t}(\mathrm{R}^n) \subset \mathrm{H}^{\rho,s}(\mathrm{R}^n)$ si $\inf\,(\sigma - \rho) > 0$ ou bien $\inf\,(\sigma - \rho) \geqslant 0$ et $t \geqslant s$.

Pour tout compact K de R^n, on définit l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{K}}$ des éléments de $\mathrm{H}^{\rho,s}(\mathrm{R}^n)$ dont le support est compact et contenu dans K. Pour tout ouvert Ω de R^n, on peut alors définir l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, limite inductive des espaces $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{K}}$ lorsque K parcourt une suite exhaustive de compacts de Ω, et l'on a une définition également évidente de l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: cet espace est un espace de Fréchet, dual naturel de $\mathrm{H}^{-\rho,-s}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. Il est clair (et il est important de remarquer) que pour définir les espaces $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{K}}$ (avec $\mathrm{K} \subset \Omega$), $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ ou $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on peut se contenter de supposer ρ définie et de classe C^∞ dans Ω, étant donné que l'espace $\mathrm{H}^{\rho,s}_{\mathrm{K}}$, défini par le procédé précédent, ne dépend que de la donnée de ρ dans un voisinage de K.

Nous ferons usage également du fait suivant : supposons que l'on ait $\inf_{\mathrm{K}} (\sigma - \rho) > 0$ ou bien $\sigma \geqslant \rho$ dans un voisinage de K et $t > s$: alors l'injection canonique de $\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^{\sigma,t}$ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^{\rho,s}$ est compacte, et quels que soient le nombre réel k et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que l'on ait, pour toute distribution $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{K}}^{\sigma,t}$:

$$\|u\|_{\rho,s} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\sigma,t} + \mathrm{C}\|u\|_{k}.$$

On pourra trouver une exposition des espaces H^{ρ} dans (1), ou dans la thèse de J. Bokobza-Haggiag (Paris, juin 1968, partie non publiée), ou dans le Séminaire Goulaouic-Schwartz (École Polytechnique, 1970-71).

Indiquons pour terminer quelques conventions au sujet des opérateurs différentiels : tous les opérateurs différentiels que nous considérons ont des coefficients C^{∞}; à une fonction $\mathrm{P}(x, \xi)$, polynôme en ξ dont les coefficients sont des fonctions (C^{∞}) de x, on associe, conformément aux conventions en usage pour les opérateurs pseudo-différentiels, l'opérateur $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$, où $\mathrm{D}_j = \dfrac{1}{2i\pi} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$; la partie principale d'un tel opérateur, supposé d'ordre m, est notée $\mathrm{P}_m(x, \mathrm{D})$ (contrairement aux conventions valables pour les opérateurs pseudo-différentiels, on ne dira qu'un opérateur différentiel est d'ordre m que si P_m n'est pas identiquement nul); si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice, on définit $\mathrm{P}^{(\alpha)}(x, \xi) = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \mathrm{P}(x, \xi)$ et $\mathrm{P}_{(\alpha)}(x, \xi) = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \mathrm{P}(x, \xi)$; à tout indice j est associé le multi-indice, aussi noté j, dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j-ème, égale à 1.

Enfin, nous aurons constamment à considérer des opérateurs pseudo-différentiels résiduels : l'indice inférieur d'un tel opérateur R_r désignera toujours son ordre; ces opérateurs résiduels pourront varier d'une formule à l'autre, de même que la constante positive C qui est le compagnon fidèle de l'analyste.

CHAPITRE 2

Le cas de certains opérateurs à coefficients variables.

Le théorème principal de ce chapitre est le théorème 2.1 : soit H l'opérateur hamiltonien $H = \Sigma \left[\frac{\partial P_m}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$; l'hypothèse du théorème 2.1, à savoir qu'en tout point caractéristique (x, ξ) où l'on a $H\rho = 0$, on a $H^2\rho > 0$, a déjà été rencontrée par M. L. Hörmander ((2), p. 195). Les deux lemmes qui suivent sont des étapes en vue de la démonstration du théorème 2.1.

Lemme 2.1. — *Soit* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *sur* R^n, *à coefficients dans* $\mathcal{S}(R^n)$, *dont la partie principale a des coefficients réels. Soit* $\rho \in \mathcal{S}^\infty(R^n, R)$. *Soit*

$$L = P_m(x, D) - \frac{1}{4i\pi}\Sigma\frac{\partial \rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)B + R_{m-1},$$

où R_{m-1} *est un opérateur (pseudo-différentiel ou non) d'ordre* $m - 1$.

Alors il existe une constante C *telle que l'on ait, quelle que soit* $u \in \mathcal{D}(R^n)$:

$$\|Lu\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|P_m(x, D)u\|^2 + \frac{1}{160}\left\|\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)Bu\right\|^2 + \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Re}\int \bar{u}S(x, D)Bu - C\|u\|^2_{m-1},$$

avec

$$S(x, \xi) = (H^2\rho)(x, \xi) = \Sigma\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j\,\partial x_k}P_m^{(k)}(x, \xi)P_m^{(j)}(x, \xi) + \Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}[P_m^{(k)}(x, \xi)P_{m,(k)}^{(j)}(x, \xi) - P_m^{(jk)}(x, \xi)P_{m,(k)}(x, \xi)].$$

Rappelons que B est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2)$.

Dans la démonstration qui suit, on désigne par $Q(u)$ n'importe quelle fonctionnelle quadratique à valeurs réelles de u, vérifiant la propriété suivante :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C telle que, quelle que soit $u \in \mathfrak{D}(\mathrm{R}^n)$, on ait

$$|Q(u)| \leqslant \varepsilon \left[\|P_m(x, D)u\|^2 + \frac{1}{16\pi^2} \left\| \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P_m^{(j)}(x, D)Bu \right\|^2 \right] + C\|u\|_{m-1}^2.$$

On utilise systématiquement l'inégalité

$$(2.1) \qquad 2\int |fg|\,dx \leqslant \varepsilon^2\|f\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|^2$$

et l'inégalité qui s'en déduit

$$(1 - \varepsilon^2)\|f\|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\|g\|^2 \leqslant \|f + g\|^2 \leqslant (1 + \varepsilon^2)\|f\|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + 1\right)\|g\|^2.$$

On peut alors écrire, pour $u \in \mathfrak{D}(\mathrm{R}^n)$:

$$\|Lu\|^2 = \|P_m(x, D)u\|^2 + \frac{1}{16\pi^2}\left\| \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P_m^{(j)}(x, D)Bu \right\|^2 + \frac{1}{2\pi} \mathrm{Im} \int P_m(x, D)u \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \overline{P_m^{(j)}(x, D)Bu}\,dx + Q(u).$$

Il convient maintenant d'évaluer

$$I = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Im} \int P_m(x, D)u \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \overline{P_m^{(j)}(x, D)Bu}\,dx.$$

Comme $P_m(x, D)$ a pour adjoint $P_m(x, D) + R_{m-1}$ (rappelons que les opérateurs résiduels R peuvent varier, par convention, d'une formule à l'autre, et que leur indice désigne un majorant de leur ordre), on obtient, grâce à (2.1) :

$$I = -\frac{1}{2\pi} \mathrm{Im} \int \bar{u} P_m(x, D) \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P_m^{(j)}(x, D)Bu\,dx + Q(u),$$

soit, grâce à la formule de Leibniz :

$$I = I_1 + I_2 + Q(u),$$

avec

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \bar{u}\Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,P_m(x, D)P_m^{(j)}(x, D)Bu\,dx$$

et $$I_2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Re}\int \bar{u}\Sigma\,\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j\,\partial x_k}\,P_m^{(k)}(x, D)P_m^{(j)}(x, D)Bu\,dx.$$

En notant que le crochet $[P_m(x, D), P_m^{(j)}(x, D)]$ égale

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_k [P_m^{(k)}(x, D)P_{m,(k)}^{(j)}(x, D) - P_m^{(jk)}(x, D)P_{m,(k)}(x, D)] + R_{2m-3},$$

on obtient $I_1 = I_3 + I_4 + Q(u)$, avec

$$I_3 = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Re}\int \bar{u}\Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,[P_m^{(k)}(x, D)P_{m,(k)}^{(j)}(x, D) - P_m^{(jk)}(x, D)P_{m,(k)}(x, D)]Bu$$

et

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \bar{u}\Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,P_m^{(j)}(x, D)P_m(x, D)Bu \\ &= -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,\bar{u}P_m^{(j)}(x, D)BP_m(x, D)u + Q(u), \end{aligned}$$

cette dernière égalité provenant du fait que, bien que B ne soit pas un opérateur d'ordre 0, son crochet avec P_m est d'ordre $m-1$, compte tenu des formules désormais classiques sur la composition des opérateurs pseudo-différentiels.

En intégrant par parties par rapport à l'opérateur $P_m^{(j)}(x, D)B$ et en commutant (les restes étant absorbés grâce à l'inégalité (2.1)), on obtient $I_4 = -I + Q(u)$, d'où $I_2 + I_3 - I = I + Q(u)$, ce qui fournit

$$\begin{aligned} \|Lu\|^2 = \|P_m(x, D)u\|^2 &+ \frac{1}{16\pi^2}\left\|\Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,P_m^{(j)}(x, D)Bu\right\|^2 \\ &+ \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Re}\int \bar{u}\left[\Sigma\,\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j\,\partial x_k}\,P_m^{(k)}P_m^{(j)}\right. \\ &\left. + \Sigma\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\,[P_m^{(k)}P_{m,(k)}^{(j)} - P_m^{(jk)}P_{m,(k)}]\right]Bu + Q(u), \end{aligned}$$

où l'on a omis (x, D) six fois dans l'intégrale pour raisons typographiques.

En utilisant l'inégalité satisfaite par Q, on obtient le lemme 2.1.

LEMME 2.2. — *Supposons les hypothèses du lemme* 2.1 *satisfaites. Soient de plus* K *un compact de* R^n, *et* Ω *un voisinage ouvert de* K, *tel que l'on ait : pour tout* $x \in \Omega$, *pour tout* ξ *réel* $\neq 0$, *les conditions*

$$P_m(x, \xi) = 0 \qquad et \qquad \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P_m^{(j)}(x, \xi) = 0$$

entraînent $S(x, \xi) > 0$. (S *est défini dans le lemme* 2.1). *Alors il existe* C *telle que, quelle que soit* $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, *on ait*

$$\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C[\|Lu\|^2 + \|u\|^2_{m-1}].$$

Remarquons d'abord que si le lemme est vérifié pour un nombre fini de compacts K_ν contenus dans Ω, $1 \leqslant \nu \leqslant N$, dont les intérieurs recouvrent K, il l'est aussi pour K.

En effet, soit (ψ_ν) une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement $(\mathring{K}_\nu)$ de K, de sorte que $u = \Sigma u_\nu$, avec $u_\nu = \psi_\nu u$. On a tout d'abord, si l'on choisit, comme cela est possible, une norme hilbertienne sur $H^{m-1,\frac{1}{2}}$:

$$\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant N \sum_{\nu=1}^{N} \|u_\nu\|^2_{m-1,\frac{1}{2}}.$$

Ensuite

$$\|u_\nu\|^2_{m-1} \leqslant C\|\psi_\nu\|^2_{C^{m-1}}\|u\|^2_{m-1}.$$

Enfin, comme $L(\psi_\nu u) = \psi_\nu Lu + R_{m-1}u$, on a

$$\|L(\psi_\nu u)\|^2 \leqslant 2[\|Lu\|^2 + C\|u\|^2_{m-1}],$$

d'où la possibilité de localiser l'inégalité annoncée.

On pourra alors supposer que K est assez petit pour que les dérivées premières et secondes de ρ, ainsi que les coefficients de P_m, oscillent assez peu.

Démonstration du lemme 2.2. — Fixons x_0 dans K. Sur la partie compacte de la sphère $|\xi| = 1$ où l'on a $S(x_0, \xi) \leqslant 0$, on a

$$|P_m(x_0, \xi)|^2 + \left|\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x_0) P_m^{(j)}(x_0, \xi)\right|^2 > 0,$$

de sorte qu'il existe $\tau > 0$ tel que l'on ait, sur $|\xi| = 1$:

$$\tau \left[|P_m(x_0, \xi)|^2 + \left|\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x_0) P_m^{(j)}(x_0, \xi)\right|^2\right] + S(x_0, \xi) > 0.$$

En multipliant cette inégalité, écrite pour $\xi \neq 0$ au point $\frac{\xi}{|\xi|}$, par $|\xi|^{2m-2}[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]$ et en notant que $|\xi|^2 \geqslant \frac{1}{2}(1 + |\xi|^2)$ pour $|\xi| \geqslant 1$, on obtient, pour tout $|\xi| \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}(1 + |\xi|^2)^{m-1}&[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)] \\ &\leqslant C\Big\{2\tau|P_m(x_0, \xi)|^2(1 + |\xi|^2)^{-1}[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)] \\ &+ \tau\left|\Sigma \frac{\partial\rho}{\partial x_j}(x_0)P_m^{(j)}(x_0, \xi)\right|^2 [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)] \\ &+ S(x_0, \xi)[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]\Big\}.\end{aligned}$$

On peut obtenir une inégalité valable pour tout ξ en ajoutant s'il le faut au deuxième membre un terme de la forme $|q(\xi)|^2$, avec q à support compact, symbole d'un opérateur régularisant.

En multipliant cette inégalité par $|\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$ et en intégrant, on obtient

$$(2.2)\quad \begin{aligned}\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} &\leqslant 2C\tau\left\|P_m(x_0, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+ C\tau\left\|\Sigma \frac{\partial\rho}{\partial x_j}(x_0)P_m^{(j)}(x_0, D)B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+ C\int \bar{u}S(x_0, D)Bu\, dx + C_1\|u\|^2_{m-1}.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\left\|P_m(x_0, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 &\leqslant 2\left\|P_m(x, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+ C_2\left\|A^mA^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + C_1\|u\|^2_{m-1},\end{aligned}$$

où C_2 est dominée par la somme des oscillations de P_m sur un voisinage de K, et est donc telle que $2CC_2\tau < \frac{1}{4}$ pourvu que K soit assez petit.

On a donc

$$\begin{aligned}2C\tau\left\|P_m(x_0, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 &\leqslant 4C\tau\left\|P_m(x, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+ \frac{1}{4}\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} + C_1\|u\|^2_{m-1},\end{aligned}$$

et un traitement analogue vaut pour les deux autres termes de l'inégalité (2.2), en tenant compte aussi de l'oscillation sur un voisinage de K des dérivées premières et secondes de ρ.

Si K est assez petit, on peut donc écrire

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant 4C\tau\left\|P_m(x, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + 2C\tau\left\|\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + C\mathrm{R}e\int\bar{u}S(x, D)Bu\,dx + C_1\|u\|^2_{m-1}.$$

Utilisons maintenant le fait que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver C_2 telle que l'on ait, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$:

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon\|Bu\|^2 + C_2\|u\|^2$$

(multiplier par $|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi$ l'inégalité

$$1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2) \leqslant \varepsilon[1 + \mathrm{Log}\,(1 + |\xi|^2)]^2 + C_2,$$

laquelle est satisfaite pour $C_2 = \frac{1}{4\varepsilon}$, puis intégrer).

Après des commutations dont les reliquats sont dominés par $C_1\|u\|^2_{m-1}$, on peut alors écrire

$$\left\|\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\tau}\left\|\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)Bu\right\|^2 + C_1\|u\|^2_{m-1}.$$

On a de même

$$\left\|P_m(x, D)A^{-1}B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\tau}\|P_m(x, D)u\|^2 + C_1\|u\|^2_{m-1},$$

d'où

$$\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C\varepsilon\|P_m(x, D)u\|^2 + C\varepsilon\left\|\Sigma\frac{\partial\rho}{\partial x_j}P_m^{(j)}(x, D)Bu\right\|^2 + C\mathrm{R}e\int\bar{u}S(x, D)Bu\,dx + C_1\|u\|^2_{m-1},$$

soit, grâce au lemme 2.1, $\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C[\|Lu\|^2 + \|u\|^2_{m-1}]$, ce qui termine la preuve du lemme 2.2.

Remarque. — En se servant de l'inégalité

$$\|u\|^2_{m-1} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} + C\|u\|^2_{-s},$$

on voit aussi que pour tout compact K et tout nombre réel s on peut trouver C telle que l'on ait, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C[\|Lu\|^2 + \|u\|^2_{-s}]. \tag{2.3}$$

THÉORÈME 2.1. — *Soit* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *défini dans un ouvert* Ω *de* R^n, *dont la partie principale est à coefficients réels. Soit* $\rho \in C^\infty(\Omega)$, *avec* $H\rho^2 > 0$ *aux points caractéristiques où* $H\rho = 0$. *Soit* v *une distribution à support compact dans* Ω, *telle que* $P(x, D)v$ *appartienne à* $H^\rho_{comp}(\Omega)$. *Alors* v *appartient à* $H^{\rho+m-1,\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$.

Sous les hypothèses que $v \in H^{\rho+m-2-s,\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$ et que $P(x, D)v \in H^\rho_{comp}(\Omega)$, s étant un entier $\geqslant 0$, on va prouver que $v \in H^{\rho+m-1-s,\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$. Il suffit à cet effet de prouver que si $v \in H^{\rho+m-2,\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$ et $P(x, D)v \in H^\rho_{comp}(\Omega)$, alors $v \in H^{\rho+m-1,\frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$: la récurrence précédente se déduit de là, en observant que si ρ vérifie les hypothèses du théorème, $\rho - s$ les vérifie également. On peut aussi supposer que P et ρ vérifient toutes les hypothèses du lemme 2.2, en remplaçant Ω par un voisinage ouvert Ω' du support de v, ce qui permet de modifier dans le complémentaire de $\overline{\Omega}'$ les coefficients de P et la fonction ρ de façon à les rendre prolongeables en des fonctions à décroissance rapide sur R^n.

On a donc par hypothèse $A^\rho P(x, D)v \in L^2$ et $A^{\rho+m-2,\frac{1}{2}} v \in L^2$. En posant $A^\rho v = g$, on a donc $g \in H^{m-2,\frac{1}{2}}$ et il s'agit de prouver que $g \in H^{m-1,\frac{1}{2}}$. Mais

$$A^\rho P(x, D) = \Theta[(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)/2} P(x, \xi)] + R_{\rho+m-1}$$

et

$$P(x, D)A^\rho = \Theta[(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)/2} P(x, \xi)] + \frac{1}{4i\pi} \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P^{(j)}(x, D)BA^\rho + R_{\rho+m-2,2}$$

d'où

$$P(x, D)g - A^\rho P(x, D)v = \frac{1}{4i\pi} \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P^{(j)}(x, D)Bg + R_{\rho+m-1}\, v.$$

Comme A^ρ est essentiellement inversible, il existe un opérateur R_{m-1} tel que $R_{\rho+m-1}\varphi + R_{m-1}g$ soit aussi régulière que l'on veut, par exemple dans L^2. Il convient maintenant de préciser que l'on peut prendre R_{m-1} pseudo-différentiel, somme finie d'opérateurs de la forme $\Theta[\alpha(x)\beta(\xi)]$, avec $\alpha \in \mathcal{S}(R^n)$ et $|\beta(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}}$.

Soit

$$L = P_m(x, D) - \frac{1}{4i\pi}\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_j} P_m^{(j)}(x, D)B + R_{m-1}.$$

On sait donc que $Lg \in L^2$ et que $g \in H^{m-2,\frac{1}{2}}(R^n)$: il s'agit d'en déduire que $g \in H^{m-1,\frac{1}{2}}(R^n)$.

Soit u le produit de g par une fonction C^∞ à support compact contenu dans Ω', égale à 1 sur un voisinage du support de φ : $u - g$ est dans $H^\infty(R^n)$ et il suffit de prouver que $u \in H^{m-1,\frac{1}{2}}(\Omega')$; on a aussi $Lu \in L^2$.

On est donc finalement ramené au problème suivant :

Soit $u \in H_{\text{comp}}^{m-2,\frac{1}{2}}(\Omega')$ telle que Lu appartienne à L^2 : montrer que $u \in H^{m-1,\frac{1}{2}}(\Omega')$.

Soit K un voisinage du support de u. D'après la remarque qui suit la preuve du lemme 2.2, il existe C telle que l'on ait, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega')$:

$$\|\varphi\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C[\|L\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2_{m-2}].$$

Posons $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$, où χ est la fonction régularisatrice habituelle. L étant un opérateur d'ordre m, $\|L(\varphi * \chi_\varepsilon) - (L\varphi) * \chi_\varepsilon\|$ est dominée par $\|\varphi\|_{m-1}$, pour toute distribution $\varphi \in H^{m-1}_{\text{comp}}(R^n)$, de façon uniforme par rapport à ε (cf. (2), p. 49). Il suffit donc de prouver que $u \in H^{m-1}$, car alors la suite $\chi_{1/p} * u$ sera bornée dans $H^{m-1,\frac{1}{2}}$, donc aura une sous-suite faiblement convergente dans $H^{m-1,\frac{1}{2}}$, et u qui est sa limite dans H^{m-1} appartiendra à $H^{m-1,\frac{1}{2}}$.

On utilisera l'inégalité suivante : quel que soit $\eta > 0$, il existe C telle que l'on ait, pour toute fonction $v \in \mathcal{D}_K(\Omega')$:

$$\|v\|_{m-1}^2 \leqslant \eta\|Lv\|^2 + C\|v\|_{m-2}^2, \tag{2.4}$$

et la technique de M. L. Hörmander. Toute la fin de la preuve du théorème 2.1 est analogue (à ceci près que L est ici un opérateur pseudo-différentiel et non différentiel) à la démonstration du théorème 8.7.1 du livre de Hörmander.

Rappelons (cf. (2), p. 46) que l'on définit, pour $0 < \delta \leqslant 1$ et pour $w \in H^{s-1}$, la norme

$$|||w|||_{s-1,\delta}^2 = \int |\hat{w}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s(1+\delta^2|\xi|^2)^{-1}\,d\xi,$$

(nous utilisons trois barres pour éviter des confusions avec les normes déjà introduites dans les espaces $H^{\rho,s}$).

En posant $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ avec $\psi = \Delta\chi$, on a alors l'inégalité

$$C_1|||w|||_{-1,\delta}^2 \leqslant \int_0^1 \|w * \psi_\varepsilon\|^2\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \|w\|_{-1}^2 \leqslant C_2|||w|||_{-1,\delta}^2$$

quelle que soit $w \in H^{-1}$ et, pour toute fonction $a \in \mathcal{S}(R^n)$, l'inégalité

$$\int_0^1 \|a(w * \psi_\varepsilon) - (aw) * \psi_\varepsilon\|^2\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant C_3|||w|||_{-2,\delta}^2 \tag{2.5}$$

quelle que soit $w \in H^{-2}$.

Toutes les constantes qui suivent sont indépendantes de ε, δ, u et η, à l'exception de C qui dépend de η.

Rappelons que la norme $\|v\|_{m-1}^2$ est équivalente à la norme $\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\|D^\alpha v\|^2$.

En appliquant l'inégalité (2.4) à la fonction $v = u * \psi_\varepsilon$, on a alors

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\|(D^\alpha u) * \psi_\varepsilon\|^2 \leqslant C_2\eta\|\psi_\varepsilon * Lu\|^2 + C_2\eta\|\psi_\varepsilon * Lu - L(\psi_\varepsilon * u)\|^2 + C\sum_{|\alpha|\leqslant m-2}\|(D^\alpha u) * \psi_\varepsilon\|^2.$$

En multipliant par $\left(1+\dfrac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1}\dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ et intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} [|||D^\alpha u|||^2_{-1,\delta} - \|D^\alpha u\|^2_{-1}]$$
$$\leqslant C_2\eta|||Lu|||^2_{-1,\delta} + C_2\eta \int_0^1 \|\psi_\varepsilon * Lu - L(\psi_\varepsilon * u)\|^2 \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C\|u\|^2_{m-2}.$$

En tenant compte des inégalités $|||Lu|||_{-1,\delta} \leqslant \|Lu\|$ et

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \|D^\alpha u\|^2_{-1} \leqslant C_3\|u\|^2_{m-2},$$

on obtient

$$|||u|||^2_{m-2,\delta} \leqslant C_4\eta\|Lu\|^2 + C\|u\|^2_{m-2} + C_4\eta \int_0^1 \|\psi_\varepsilon * Lu - L(\psi_\varepsilon * u)\|^2 \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Mais L est somme finie d'opérateurs du genre $\alpha(x)\beta(D)$, avec $|\beta(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}$ et $\alpha \in \mathcal{S}(R^n)$. Il résulte alors de (2.5) que la dernière intégrale est majorée par $C_5|||u|||^2_{m-2,\delta}$.

D'où finalement

$$|||u|||^2_{m-2,\delta} \leqslant C_4\eta\|Lu\|^2 + C\|u\|^2_{m-2} + C_5\eta|||u|||^2_{m-2,\delta},$$

et en choisissant $\eta < \dfrac{1}{C_5}$ (rappelons que seul C dépend de η), on voit que $|||u|||_{m-2,\delta}$ est bornée indépendamment de δ, c'est-à-dire que $u \in H^{m-1}$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

Rappelons l'inégalité (2.3) valable pour $v \in \mathcal{D}_K(\Omega')$:

$$\|v\|^2_{m-1,\frac{1}{2}} \leqslant C[\|Lv\|^2 + \|v\|^2_{-s}].$$

Cela étant, si $u \in H_K^{-s}(\Omega)$ est tel que $Lu \in L^2$, on sait déjà que $u \in H^{m-1,\frac{1}{2}}$. Alors d'une part la suite $\chi_{1/p} * u$ converge vers u à la fois dans H^{-s} et dans $H^{m-1,\frac{1}{2}}$. Par ailleurs $\chi_{1/p} * Lu$ converge vers Lu dans L^2; enfin $L(\chi_{1/p} * u) - (Lu) * \chi_{1/p}$ est bornée dans $H^{0,\frac{1}{2}}$; il existe donc une suite (p_k) telle que $L(\chi_{1/p_k} * u) - (Lu) * \chi_{1/p_k}$ converge fortement dans L^2; la limite de cette suite ne peut être que 0.

Il résulte de tout cela que l'inégalité (2.3) reste valable avec la même constante C pour toutes les distributions $u \in H_{K'}^{-s}(\Omega)$ (avec $K' \subset \mathring{K}$) telles que Lu appartienne à L^2. On déduit facilement de cela la proposition :

PROPOSITION 2.1. — *Supposons les hypothèses du théorème* 2.1 *vérifiées : alors pour tout compact* $K \subset \Omega$ *et tout nombre réel* s *il existe* C *tel que, quelle que soit* $u \in H_K^{-s}(\Omega)$ *vérifiant* $P(x, D)u \in H_{\text{comp}}^{\rho}(\Omega)$, *on ait*

$$\|u\|_{\rho+m-1, \frac{1}{2}} \leqslant C[\|P(x, D)u\|_{\rho} + \|u\|_{-s}].$$

COROLLAIRE 2.1. — *Supposons les hypothèses du théorème* 2.1 *vérifiées. Supposons de plus que* ρ *soit strictement négative dans* Ω *et que pour tout* $a < 0$, *l'ensemble* K_a *des points* x *de* Ω *tels que* $\rho(x) \leqslant a$ *soit compact. Alors pour toute* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *telle que le support singulier de* $P(x, D)u$ *soit contenu dans* K_a, *le support singulier de* u *est aussi contenu dans* K_a.

Soit en effet s tel que u appartienne à H^{s+m}, soit $\varepsilon > 0$ et soit t un nombre réel arbitraire : il s'agit de prouver que u est de classe H_{loc}^t dans le complémentaire de $K_{a+\varepsilon}$.

On peut choisir $\lambda > 0$ et μ réel tels que la fonction $\varphi = \lambda\rho + \mu$ soit inférieure ou égale à s dans un voisinage de K_a, et supérieure à $t - m + 1$ dans le complémentaire de $K_{a+\varepsilon}$. Mais φ vérifie les hypothèses de pseudo-convexité en même temps que ρ. Il en résulte, comme $P(x, D)u \in H^{\varphi}$, que $u \in H^{\varphi+m-1}$, ce qui prouve que u est H_{loc}^t dans le complémentaire de $K_{a+\varepsilon}$.

Ce corollaire résulte également du théorème 8.8.1 du livre de L. Hörmander (2), compte tenu du fait que l'on peut supprimer l'hypothèse que ρ n'a pas de point critique dans l'énoncé de ce théorème.

Notons aussi, pour un usage ultérieur, que si ρ vérifie les hypothèses de pseudo-convexité alors la fonction $f \circ \rho$ les vérifie également pour toute fonction f définie et C^{∞} sur $]-\infty, 0[$, à dérivée première strictement positive et à dérivée seconde positive ou nulle.

THÉORÈME 2.2. — *Supposons les conditions du théorème* 2.1 *vérifiées, et supposons de plus la condition suivante* (${}^tP(x, D)$-*convexité de* Ω) *satisfaite :*

pour tout compact $K \subset \Omega$, *et tout nombre réel* s, *il existe un* *compact* $L \subset \Omega$ *tel que toute distribution* $u \in H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ *satisfaisant* $\operatorname{supp}(P(x, D)u) \subset K$ *a son support contenu dans* L.

Alors, pour toute distribution $f \in H^{-\rho-m+1,-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *satisfaisant* $\langle f, u\rangle = 0$ *pour toute solution* u *de classe* C^∞ *à support compact dans* Ω *de l'équation* $P(x, D)u = 0$, *on peut trouver* $g \in H^{-\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *telle que* ${}^tP(x, D)g = f$.

Rappelons que l'espace N des distributions $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telles que $P(x, D)u = 0$ est contenu dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et que sa trace sur tout $\mathcal{E}'_K(\Omega)$ (K compact $\subset \Omega$) est de dimension finie (cf. (2), p. 210, cor. 8.7.1).

Soit Σ le sous-espace de $H^{-\rho-m+1,-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times H^{-\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ constitué des (f, g) tels que ${}^tP(x, D)g = f$.

Il est clair que Σ est fermé dans le produit cartésien susdit, donc est un espace de Fréchet, et que par ailleurs, si $(f, g) \in \Sigma$, on a $\langle f, u\rangle = 0$ pour toute $u \in N$.

Soit $p_1 : \Sigma \to H^{-\rho-m+1,-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap N^\perp$ la projection sur le premier facteur. Il s'agit de prouver que p_1 est surjective. On s'en tirera en montrant que ${}^tp_1$ est injective et a une image (fortement) fermée.

Σ', dual de Σ, est le quotient de

$$H^{\rho+m-1,\frac{1}{2}}_{\mathrm{comp}}(\Omega) \times H^{\rho}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$$

par l'espace S des couples (u, w) tels que l'on ait

$$\langle f, u\rangle + \langle g, w\rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad (f, g) \in \Sigma.$$

Si $(u, w) \in S$, on a, pour toute $g \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle {}^tP(x, D)g, u\rangle + \langle g, w\rangle = 0,$$

soit

$$\langle g, P(x, D)u + w\rangle = 0, \qquad \text{d'où} \qquad P(x, D)u + w = 0.$$

Réciproquement, si $(u, w) \in H^{\rho+m-1,\frac{1}{2}}_{\mathrm{comp}}(\Omega) \times H^{\rho}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ vérifie $P(x, D)u + w = 0$, on a

$$\langle {}^tP(x, D)g, u\rangle + \langle g, w\rangle = 0 \qquad \text{pour toute} \qquad g \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc aussi pour toute $g \in H^{-\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisfaisant

$${}^tP(x, D)g \in H^{-\rho-m+1,-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

à condition de prouver le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soit* $g \in H^{-\rho}_{loc}(\Omega)$ *telle que*

$$ {}^t P(x, D)g \in H^{-\rho-m+1, -\frac{1}{2}}_{loc}(\Omega). $$

Alors il existe une suite (g_ν), $g_\nu \in \mathcal{D}(\Omega)$, *telle que* $g_\nu \to g$ *dans* $H^{-\rho}_{loc}(\Omega)$ *et* ${}^t P(x, D)g_\nu \to {}^t P(x, D)g$ *dans* $H^{-\rho-m+1, -\frac{1}{2}}_{loc}(\Omega)$.

Ce lemme se démontre comme le théorème 8.7.4 du livre de Hörmander [2], p. 212.

S est donc exactement l'espace des couples (u, w)

$$ \in H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega) \times H^{\rho}_{comp}(\Omega) \quad \text{vérifiant} \quad P(x, D)u + w = 0. $$

Par ailleurs, le dual de $H^{-\rho-m+1, -\frac{1}{2}}_{loc}(\Omega) \cap N^{\perp}$ est le quotient de $H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$ par T, espace des u tels que, pour toute $f \in H^{-\rho-m+1, -\frac{1}{2}}_{loc}(\Omega)$ orthogonale à N, on ait $\langle f, u \rangle = 0$.

Mais N est fermé dans $H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)$, car il en est ainsi de sa trace sur chaque $\mathcal{E}'_K(\Omega)$. Donc $T = N$.

La transposée de $p_1 : \Sigma \to H^{-\rho+1-m, -\frac{1}{2}}_{loc}(\Omega) \cap N^{\perp}$ est l'application

$$ {}^t p_1 : \quad H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)/N \to \frac{H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega) \times H^{\rho}_{comp}(\Omega)}{S = \{(u, w) : P(x, D)u = -w\}} $$

définie par : classe de $u \longmapsto$ classe de $(u, 0)$.

Cette application est bien définie et injective car pour qu'un couple $(u, 0)$ appartienne à S, il faut et il suffit que u appartienne à N.

Il reste à prouver que ${}^t p_1$ a une image (fortement) fermée, ou encore, que pour tout compact $K \subset \Omega$ l'application (partiellement définie)

$$ H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{comp}(\Omega)/N \to \frac{H^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}_{K}(\Omega) \times H_K(\Omega)}{S = \{(u, w) \in \mathcal{E}'(\Omega) \times \mathcal{E}'(\Omega) : P(x, D)u + w = 0\}} $$

définie par passage au quotient de l'application $u \longmapsto (u, 0)$ a une image fortement fermée.

Notons d'abord qu'il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que, pour toute distribution $u \in H_{\text{comp}}^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$ telle que la classe de u appartienne au domaine de cette application, on ait $\operatorname{supp}(u) \subset L$; en effet, si la classe de u s'envoie dans l'espace de droite, cela signifie qu'il existe $\varphi \in H_K^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$, $\psi \in H_K^{\rho}(\Omega)$, et v et $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ vérifiant $P(x, D)v + w = 0$, tels que $(u, 0) + (v, w) = (\varphi, \psi)$.

De cette égalité résulte que $\operatorname{supp}(w) \subset K$; en utilisant la ${}^{t}P(x, D)$-convexité de Ω, on en déduit que v, puis $u = \varphi - v$, ont leur support dans un compact L ne dépendant que de K.

Supposons alors que la suite $(u_\nu, 0)$ $(u_\nu \in H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$ pour tout $\nu)$ converge dans le quotient de droite : il existe donc une suite $u'_\nu \in H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$ telle que l'on ait

$$w'_\nu = - P(x, D)u'_\nu \in H_L^{\rho}(\Omega),$$

$$u_\nu - u'_\nu \to v \qquad \text{dans} \qquad H_K^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega),$$

$$\text{et} \qquad P(x, D)u'_\nu \to w \qquad \text{dans} \qquad H_K^{\rho}(\Omega).$$

Il s'agit de prouver que (v, w) est congru, modulo S, à un élément de la forme $(v_1, 0)$ $\left(v_1 \in H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)\right)$.

En nous inspirant de (2), 8.7.2, définissons une base $z_1, z_2, \ldots, z_r$, orthonomale pour la norme L^2, de l'espace (de dimension finie) $N \cap \mathcal{E}'_L(\Omega)$. On a donc $\int z_j \bar{z}_k = \delta_{jk}$.

On peut modifier u'_ν, sans changer sa classe dans $H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)/N \cap \mathcal{E}'_L(\Omega)$, en lui ajoutant une combinaison linéaire convenable des z_j, de façon à la rendre orthogonale aux z_j. On modifie les u_ν comme il convient de façon à ne pas changer $u_\nu - u'_\nu$, et $P(x, D)u'_\nu$ n'est pas changé non plus. Comme la suite $P(x, D)u'_\nu$ est bornée dans $H_L^{\rho}(\Omega)$ et que u'_ν est orthogonale aux z_j, on en déduit, comme dans le théorème 8.7.2 de (2) que la suite u'_ν est bornée dans $H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$.

On peut alors, en la remplaçant par une sous-suite, la supposer faiblement convergente dans $H_L^{\rho+m-1, \frac{1}{2}}(\Omega)$, vers un élément u'.

On en déduit que $P(x, D)u' = w$. Alors, dans l'espace $H_L^{\rho+m-1,\frac{1}{2}}(\Omega) \times H_L^{\rho}(\Omega)$, on a

$$(v, w) = (v, P(x, D)u') = (v + u', 0) + (-u', P(x, D)u'),$$

ce qui termine la démonstration du théorème, car $(v + u', 0) \in \operatorname{Im} {}^t p_1$ et $(-u', P(x, D)u') \in S$.

Corollaire 2.2. — *Supposons les hypothèses du théorème* 2.2 *satisfaites, et supposons de plus que* ρ *soit strictement négative dans* Ω *et que pour tout* $a < 0$ *l'ensemble des* $x \in \Omega$ *tels que* $\rho(x) \leqslant a$ *soit compact : alors pour toute* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *satisfaisant* $\langle f, u \rangle = 0$ *pour toute solution* $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ *de l'équation* $P(x, D)u = 0$, *il existe* $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *telle que* ${}^tP(x, D)g = f$.

En effet, toute distribution f dans Ω appartient à un espace $H_{\text{loc}}^{-\sigma-m+1}(\Omega)$ pour σ bien choisie ; grâce au théorème 2.2 et à la remarque suivant la preuve du cor. 2.1, il suffit alors de prouver que σ est majorée dans Ω par une fonction de la forme $h \circ \rho$, où h est définie et C^∞ sur $]-\infty, 0[$, à dérivée première strictement positive et à dérivée seconde positive ou nulle : la construction de h est élémentaire.

CHAPITRE 3

Le cas des opérateurs à coefficients constants en deux variables.

On pose $D_1 = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $D_2 = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\partial = D_1 - iD_2$ et $\bar{\partial} = D_1 + iD_2$. Les symboles de ces opérateurs sont

$$\sigma(D_1) = \xi_1, \quad \sigma(D_2) = \xi_2, \quad \sigma(\partial) = \bar{\zeta} \quad \text{et} \quad \sigma(\bar{\partial}) = \zeta$$

en posant $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$; D_1 et D_2 sont autoadjoints ; ∂ et $\bar{\partial}$ sont les adjoints l'un de l'autre.

Soit $P(\partial, \bar{\partial})$ un opérateur différentiel sur R^2 à coefficients constants arbitraires, d'ordre m. On peut toujours supposer, moyennant un changement linéaire de coordonnées, que le coefficient de ∂^m dans $P(\partial, \bar{\partial})$ est non nul, et même égal à 1.

Le symbole principal de l'opérateur s'écrit alors

$$P_m(\bar{\zeta}, \zeta) = \prod_{k=1}^{m} (\bar{\zeta} - \alpha_k \zeta)$$

où les α_k sont des coefficients complexes.

L'opérateur $\partial^m P(\partial, \bar{\partial})$ (de degré $2m$), peut s'écrire $Q(\partial, \partial\bar{\partial})$, où $Q(\bar{\zeta}, \tau)$ est un certain polynôme de degré $2m$, possédant un terme $\bar{\zeta}^{2m}$ et dont tous les termes ont un « poids » au plus égal à $2m$, en attribuant à $\bar{\zeta}$, le poids 1 et à τ le poids 2. Notons que le symbole de $\partial\bar{\partial}$, soit $|\zeta|^2$, est réel positif pour toute valeur de $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$\partial\bar{\partial}$ n'est autre que l'opérateur $-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}$, Δ étant le laplacien ordinaire.

En utilisant un développement de Puiseux, on peut écrire, pour τ assez grand :

$$Q(\bar{\zeta}, \tau) = \prod_{j=1}^{2m} \left(\bar{\zeta} - \sum_{n=-s}^{\infty} b_n^j \left(\tau^{-\frac{1}{p}}\right)^n\right),$$

où p est un certain entier positif.

L'entier s est choisi le même pour tous les facteurs, de façon que l'un au moins des coefficients b^j_{-s} soit non nul.

On a nécessairement $\frac{s}{p} \leqslant \frac{1}{2}$, car aucun des $2m$ facteurs de $Q(\overline{\zeta}, \tau)$ ne peut avoir un poids strictement supérieur à 1.

On peut donc écrire $Q(\overline{\zeta}, \tau) = \prod_{j=1}^{2m} (\overline{\zeta} - \beta_j \sqrt{\tau} + g_j(\tau))$, où, pour tout j, $g_j(\tau)$ est une fonction analytique de $\tau^{-\frac{1}{p}}$ pour τ assez grand, satisfaisant l'inégalité $|g_j(\tau)| \leqslant C\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ pour une constante C bien choisie.

En collectant les termes de poids $2m$ exactement, on obtient l'identité

$$\overline{\zeta}^m P_m(\overline{\zeta}, \zeta) = \prod_{j=1}^{2m} (\overline{\zeta} - \beta_j \sqrt{\zeta\overline{\zeta}}),$$

soit

$$\prod_{k=1}^{m} (\overline{\zeta}^2 - \alpha_k \zeta\overline{\zeta}) = \prod_{j=1}^{2m} (\overline{\zeta} - \beta_j \sqrt{\zeta\overline{\zeta}}).$$

En introduisant l'indéterminée $\eta = |\zeta|$, on obtient l'identité

$$\prod_{k=1}^{m} (\overline{\zeta}^2 - \alpha_k \eta^2) = \prod_{j=1}^{2m} (\overline{\zeta} - \beta_j \eta)$$

entre deux polynômes en $(\overline{\zeta}, \eta)$, d'où il résulte qu'à chaque facteur $\overline{\zeta} - \alpha_k \zeta$ de $P_m(\overline{\zeta}, \zeta)$ correspondent, dans $Q(\overline{\zeta}, \tau)$, deux facteurs commençant par $\overline{\zeta} - \sqrt{\alpha_k}\eta$ et $\overline{\zeta} + \sqrt{\alpha_k}\eta$ respectivement, en désignant par $\sqrt{\alpha_k}$ l'une quelconque des racines carrées de α_k.

Finalement on peut écrire, pour $|\zeta|$ assez grand :

$$\overline{\zeta}^m P(\overline{\zeta}, \zeta) = \prod_{k=1}^{m} (\overline{\zeta} - \sqrt{\alpha_k}\sqrt{\zeta\overline{\zeta}} + g_k(\zeta\overline{\zeta}))(\zeta + \sqrt{\alpha_k}\sqrt{\zeta\overline{\zeta}} + h_k(\zeta\overline{\zeta}))$$

avec

$$|g_k(\zeta\overline{\zeta})| \leqslant C|\zeta|^{1-\frac{2}{p}} \qquad \text{et} \qquad |h_k(\zeta\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{1-\frac{2}{p}}.$$

D'où $P(\overline{\zeta}, \zeta) = \prod_{k=1}^{m} (\overline{\zeta} - \alpha_k \zeta + f_k(\overline{\zeta}, \zeta))$, où $f_k(\overline{\zeta}, \zeta)$ est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel de convolution R^k, d'ordre au plus $1 - \frac{2}{p}$.

On a alors $P(\partial, \bar{\partial}) = \prod_{k=1}^{m} (\partial - \alpha_k \bar{\partial} + R^k)$ à un opérateur régularisant près.

Chaque fois que $|\alpha_k| \neq 1$, l'opérateur $\partial - \alpha_k\bar{\partial} + R^k$ est elliptique d'ordre 1. Lorsque $\alpha_k = \cos\theta + i \sin\theta$, $\partial - \alpha_k\bar{\partial}$ s'écrit aussi

$$2\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2} D_1 + \cos\frac{\theta}{2} D_2\right)$$

et $P(\partial, \bar{\partial})$ admet la direction caractéristique

$$\sin\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Pour les facteurs non elliptiques de $P(\partial, \bar{\partial})$, on a le lemme :

LEMME 3.1. — *Soit* M *l'opérateur* $M = \partial - \alpha\bar{\partial} + R_r$, *avec* $\alpha = \cos\theta + i \sin\theta$, R_r *étant un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre* $r < 1$, *et soit* ρ *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles dans un ouvert* Ω *de* R^2, *satisfaisant l'inégalité*

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\,\partial x_2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} > 0$$

(autrement dit la dérivée seconde de ρ *dans la direction caractéristique* $\sin\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ *est strictement positive en tout point de* Ω) : *Alors pour toute distribution* u *à support compact dans* Ω *satisfaisant* $Mu \in H^{\rho,s}_{\text{comp}}(\Omega)$ *(*s *étant un nombre réel), on a* $u \in H^{\rho, s+\frac{1}{2}}_{\text{comp}}(\Omega)$.

Comme M est un opérateur de convolution, il suffit d'obtenir une inégalité $\|Mu\|_{\rho,s} \geqslant C\|u\|_{\rho,s+\frac{1}{2}}$ pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans un ouvert Ω' relativement compact dans Ω, avec une constante positive C ne dépendant que de Ω'.

On écrit alors $A^{\rho,s}M = LA^{\rho,s}$ à un opérateur régularisant près, où $L = \partial - \alpha\bar{\partial} - R_r - \frac{1}{2}(\partial\rho - \alpha\bar{\partial}\rho)B + S_0$, S_0 étant un opérateur pseudo-différentiel (à coefficients variables) d'ordre 0 : rappelons que $B = \Theta[1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]$.

Il s'agit donc d'obtenir, pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω, l'inégalité $\|L\varphi\|_0^2 \geqslant C\|\varphi\|^2_{0,\frac{1}{2}}$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$. A cet effet, on écrit

$$L^\star = \bar{\partial} - \bar{\alpha}\partial + R_r^* - \frac{1}{2}B(-\bar{\partial}\rho + \bar{\alpha}\partial\rho) + S_0^*,$$

étant donné que B est autoadjoint, et

$$\begin{aligned}\|L\varphi\|^2 &\geqslant \|L\varphi\|^2 - \|L^\star\varphi\|^2 \\ &\geqslant -\operatorname{Re}(\partial\varphi - \alpha\bar{\partial}\varphi + R_r\varphi,\ (\partial\rho - \alpha\bar{\partial}\rho)B\varphi) \\ &\quad + \operatorname{Re}(\bar{\partial}\varphi - \bar{\alpha}\partial\varphi + R_r^*\varphi,\ B(-\bar{\partial}\rho + \bar{\alpha}\partial\rho)\varphi) - C\|\varphi\|_0^2,\end{aligned}$$

en remarquant que S_0 commute avec tout opérateur d'ordre au plus 1 modulo un opérateur d'ordre négatif, et que B commute avec tout opérateur d'ordre 0 modulo un opérateur d'ordre négatif. En appliquant la même remarque à R_r, on obtient

$$\begin{aligned}\|L\varphi\|^2 \geqslant &-\operatorname{Re}(\partial\varphi - \alpha\bar{\partial}\varphi,\ (\partial\rho - \alpha\bar{\partial}\rho)B\varphi) \\ &- \operatorname{Re}(\bar{\partial}\varphi - \bar{\alpha}\partial\varphi,\ B(-\bar{\partial}\rho + \bar{\alpha}\partial\rho)\varphi) - C\|\varphi\|_0^2,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\|L\varphi\|^2 \geqslant &-\operatorname{Re}(\varphi,\ (\partial\bar{\partial}\rho - \alpha\bar{\partial}\bar{\partial}\rho)B\varphi) \\ &+ \operatorname{Re}(\alpha\varphi,\ (\partial\partial\rho - \alpha\partial\bar{\partial}\rho)B\varphi) - C\|\varphi\|_0^2,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|L\varphi\|^2 \geqslant &-C\|\varphi\|^2 + \operatorname{Re}\left(B^{\frac{1}{2}}\varphi,\ (\bar{\alpha}\partial\partial\rho - \alpha\bar{\alpha}\partial\bar{\partial}\rho)B^{\frac{1}{2}}\varphi\right) \\ &- \operatorname{Re}\left(B^{\frac{1}{2}}\varphi,\ (\partial\bar{\partial}\rho - \alpha\bar{\partial}\bar{\partial}\rho)B^{\frac{1}{2}}\varphi\right).\end{aligned}$$

Tout cela domine $C_1\|\varphi\|^2_{0,\frac{1}{2}}$ pourvu que

$$\bar{\alpha}\partial\partial\rho + \alpha\bar{\partial}\bar{\partial}\rho + (-1 - |\alpha|^2)\partial\bar{\partial}\rho$$

soit positif, soit

$$(-1 + \cos\theta)(D_1^2\rho) - 2\sin\theta(D_1D_2\rho) - (1 + \cos\theta)(D_2^2\rho) > 0,$$

ou enfin

$$(1 - \cos\theta)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} - 2\sin\theta\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\,\partial x_2} + (1 + \cos\theta)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} > 0,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $P(D)$ *un opérateur différentiel sur* R^2 *à coefficients constants, d'ordre* m; *soit* μ *le nombre de facteurs elliptiques de la partie principale de* $P(D)$, *comptés avec leur multiplicité. Soit* ρ *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles dans un ouvert* Ω *de* R^2, *admettant des dérivées secondes strictement positives dans toutes les directions caractéristiques réelles de* $P(D)$.

Alors pour toute distribution u *à support compact dans* Ω *satisfaisant* $P(D)u \in H^\rho(\Omega)$ *on a* $u \in H^{\rho+\mu, \frac{1}{2}(m-\mu)}(\Omega)$.

Si de plus Ω *est* ${}^tP(D)$-*convexe, l'équation* ${}^tP(D)\, f = g$ *admet une solution* $f \in H^{-\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *chaque fois que*

$$g \in H_{\mathrm{loc}}^{-\rho-\mu, -\frac{1}{2}(m-\mu)}(\Omega).$$

La deuxième partie du théorème résulte de la première par des arguments de dualité (cf. (6), p. 122).

La première partie s'obtient par applications successives du lemme : bien entendu, en appliquant à une distribution à support compact un produit partiel des facteurs de la décomposition de $P(D)$, on n'obtient pas nécessairement une distribution à support compact, mais il est aisé d'y remédier grâce au caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels.

On peut obtenir aussi par ces méthodes le fait, démontré également par Hörmander [3], qu'en deux variables tout ouvert P-convexe est fortement P-convexe. On se ramène en effet au problème suivant : soit M l'opérateur

$$M = \partial - \alpha\bar{\partial} + R,$$

où R est un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre < 1; soit K un compact de R^2 convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha\bar{\partial}$ (i.e. les parallèles à cette direction, si elle est réelle, coupent K suivant des segments; si cet opérateur est elliptique, aucune condition n'est imposée) ; soit enfin u une distribution à support compact dans R^2, telle que le support singulier de Mu soit contenu dans K : prouver que le support singulier de u est contenu dans K.

Il suffit alors, en utilisant, le lemme de prouver qu'étant donné un compact K convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha\bar{\partial}$, un point x de R^2 n'appartenant pas à K, et deux nombres réels s et t, il existe une fonction ρ convexe dans la direction envisagée, supérieure à t dans un voisinage de x et inférieure à s sur K : pour démontrer ce point, on peut se ramener au cas où la direction envisagée est la direction $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, et où le point x est l'origine des coordonnées : d'après la $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$-convexité de K, l'une des deux demi-droites issues de 0 parallèles à l'axe des x_1 (disons la direction positive) ne rencontre pas K ; soit $A > 0$ tel que tout point de K ait une abscisse supérieure à $-A$: il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que le cône d'axe Ox_1, de sommet $(-A, 0)$ et de demi-angle au sommet ε ne rencontre K qu'en des points d'abscisse négative : la fonction $Q(x) = (x_1 + A)^2 \sin^2 \varepsilon - x_2^2 \cos^2 \varepsilon$ est alors égale à A^2 à l'origine, est strictement inférieure à A^2 sur K, et est convexe dans la direction $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$; en la composant avec une fonction linéaire convenable, on obtient la fonction ρ souhaitée.

CHAPITRE 4

Une norme équivalente à la norme dans les espaces H^ρ.

Le but de ce chapitre est de montrer comment on peut obtenir une norme équivalente à la norme $\|u\|_{\rho,s}$, en ne faisant intervenir ni opérateurs pseudo-différentiels ni transformation de Fourier : on introduit à cet effet les moyennes sphériques de u prises sur des sphères de petit rayons ; la démonstration que l'on obtient une norme équivalente à la norme voulue fait un usage essentiel d'une formule de M. F. John ((4), p. 81) relative à l'itération des moyennes sphériques.

Lemme 4.1. — *Soit* ρ *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles sur* R^n, $n \geqslant 2$, *vérifiant* $-\frac{n}{2} < \rho(x) < 0$ *pour tout* x.

Pour tout $t > 0$, *on désigne par* $d\sigma_t$ *la mesure superficielle homogène de masse totale* 1 *sur la sphère centrée à l'origine de rayon* t. *On note aussi* $d\sigma_1 = d\sigma$.

Alors pour tout compact K *de* R^n, *il existe une constante* C *telle que, pour toute fonction* $u \in \mathcal{D}_K(R^n)$, *on ait*

$$\left| \|u\|_\rho^2 - \mathrm{Re} \int_0^1 \frac{dt}{t} \int a(x) t^{-2\rho(x)} \bar{u}(x)\, (d\sigma_t * u)(x)\, dx \right| \leqslant C \|u\|^2_{-\frac{1}{4}},$$

avec

$$a(x) = 2\pi^{-2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\rho(x))\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Preuve. — Étant donné que A^ρ est autoadjoint à un opérateur d'ordre $\rho - 1$ près, on peut écrire, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_K(R^n)$,

$$|\, \|Au\|^2 - (A^{2\rho}u, u)| \leqslant C \|u\|^2_{\rho - \frac{1}{2}},$$

où C ne dépend que de K.

Par ailleurs si l'on pose $\tilde{A}^{2\rho} = \Theta[|\xi|^{2\rho(x)}]$, c'est-à-dire

$$(\tilde{A}^{2\rho}u)(x) = \pi^{-\frac{n}{2}-2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x)+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\rho(x))} \int \frac{u(y)\,dy}{|x-y|^{n+2\rho(x)}},$$

on voit immédiatement que $A^{2\rho} - \tilde{A}^{2\rho}$ est un opérateur d'ordre $2\rho - 2$.

Choisissons une fonction $\varphi(t)$ à valeurs réelles et de classe C^∞ pour $t > 0$, égale à 1 pour $t \leqslant \frac{1}{2}$ et nulle pour $t \geqslant 1$, et écrivons

$$\tilde{A}^{2\rho} = F_1 + F_2,$$

avec

$$(F_1 u)(x) = \pi^{-\frac{n}{2}-2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x)+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\rho(x))} \int \frac{\varphi(|x-y|)u(y)\,dy}{|x-y|^{n+2\rho(x)}}.$$

Comme $1 - \varphi(|x-y|)$ s'annule dans un voisinage des singularités de $|x-y|^{-n-2\rho(x)}$, l'opérateur F_2 est la convolution par une fonction C^∞ suivie de la multiplication par une fonction C^∞ et est donc un opérateur régularisant.

Pour évaluer $(F_1 u, u)$, posons $y = x - t\eta$, avec $\eta \in S^{n-1}$, sphère unité de R^n. En rappelant que l'aire de cette sphère est $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, on obtient

$$\begin{aligned}(F_1 u, u) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt \int \pi^{-\frac{n}{2}-2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x)+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\rho(x))}\, \overline{u}(x) \\ t^{-n-2\rho(x)}\omega_n t^{n-1} \int u(x-t\eta)\,d\sigma(\eta) \\ = \int_0^1 \varphi(t)\,\frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} a(x)\overline{u}(x)\,(d\sigma_t * u)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Il reste pour prouver le lemme 4.1 à se débarrasser de $\varphi(t)$. Mais pour $n \geqslant 2$, on a

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1+|\xi|}} \quad \text{d'où} \quad |\widehat{d\sigma_t}(\xi)| = |\widehat{d\sigma}(t\xi)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}\sqrt{1+|\xi|}}.$$

Par suite $\|d\sigma_t * u\|_{\frac{1}{4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}} \|u\|_{-\frac{1}{4}}$ et, pour t ne pouvant s'approcher de 0, on conclut par l'inégalité

$$|(v, w)| \leqslant \|v\|_{\frac{1}{4}} \|w\|_{-\frac{1}{4}},$$

avec $v = d\sigma_t * u$ et $w = at^{-2\rho}u$.

Lemme 4.2. — *Soit* β *une fonction* C^∞ *sur* R^n, $n \geqslant 2$, *et supposons par ailleurs* $-\dfrac{1}{2} < \rho(x) < 0$ *pour tout* x. *On pose*

$$d\sigma_t^{*2} = d\sigma_t * d\sigma_t, \qquad \textit{pour} \qquad t > 0,$$

et

$$(Qu, u) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int \beta(x) t^{-2\rho(x)} \, (d\sigma_t^{*2} * u)\bar{u} \, dx.$$

Si l'on pose en outre

$$\gamma(x) = \beta(x) \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} 2^{2\rho(x)+n-2} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\rho(x) + n - 1)},$$

on peut alors, pour tout compact K *de* R^n, *trouver* C *telle que, pour toute* $u \in \mathcal{D}_K(R^n)$, *on ait*

$$\left|(Qu, u) - \mathrm{Re} \int_0^1 \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} \gamma(x)\bar{u}(x) \, (d\sigma_t * u)(x) \, dx\right| \leqslant C\|u\|^2_{-\frac{1}{4}}.$$

Preuve. — D'après une formule de M. F. John ((4), p. 81), on a

$$(d\sigma_t^{*2} * u)(x) = \frac{2\omega_{n-1}}{2^{n-2}\omega_n} t^{-2n+4} \int_0^{2t} r^{n-2}(4t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} (d\sigma_t * u)(x) \, dr$$

d'où

$$\begin{aligned}(Qu, u) &= \frac{2\omega_{n-1}}{2^{n-2}\omega_n} \int \beta(x)\bar{u}(x) \, dx \int_0^1 t^{-2\rho(x)-2n+3} \, dt \\ &\qquad \int_0^{2t} r^{n-2}(4t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} (d\sigma_r * u)(x) \, dr \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{2^{n-3}\omega_n} \int_0^2 r^{n-2} \, dr \int \beta(x)\bar{u}(x) \, (d\sigma_r * u)(x) \, f(r, x) \, dx,\end{aligned}$$

avec

$$f(r, x) = \int_{\frac{r}{2}}^{1} t^{-2\rho(x)-2n+3}(4t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

En posant $\theta = \frac{4t^2}{r^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x, r) &= 2^{2\rho(x)+2n-5} r^{-2\rho(x)-n+1} \int_1^{\frac{4}{r^2}} \theta^{-\rho(x)-n+1}(\theta - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, d\theta \\ &= 2^{2\rho(x)+2n-5} r^{-2\rho(x)-n+1} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\rho(x) + n - 1)} - g(x, r), \end{aligned}$$

avec

$$g(x, r) = 2^{2\rho(x)+2n-5} r^{-2\rho(x)-n+1} \int_{\frac{4}{r^2}}^{+\infty} \theta^{-\rho(x)-n+1}(\theta - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, d\theta$$

Si $n \geqslant 3$, on a

$$\int_{\frac{4}{r^2}}^{+\infty} \theta^{-\rho(x)-n+1}(\theta - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, d\theta \leqslant \int_{\frac{4}{r^2}}^{+\infty} \theta^{-\rho(x)-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\, d\theta \leqslant Cr^{2\rho(x)+n-1}$$

et $|g(x, r)| \leqslant C$, constante indépendante de r.

Comme il est facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout j, on a $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} g(x, r)\right| \leqslant Cr^{-\varepsilon}$, on conclut, par interpolation et dualité, que l'opérateur de multiplication par $g(x, r)$ a une norme, en tant qu'opérateur de $H^{-\frac{1}{4}}$ dans $H^{-\frac{1}{4}}$, dominée par $Cr^{-\varepsilon}$.

Mais comme $\|d\sigma_r * u\|_{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{r}} \|u\|_{-\frac{1}{4}}$, on voit que le terme de (Qu, u) associé à $g(x, r)$ est majoré par

$$C \int_0^2 r^{n-2-\varepsilon-\frac{1}{2}}\, dr\, \|u\|^2_{-\frac{1}{4}}.$$

Lorsque $n = 2$, on écrit

$$\theta - 1 = (\sqrt{\theta} - 1)(\sqrt{\theta} + 1) \geqslant \left(\frac{2}{r} - 1\right)\sqrt{\theta}$$

pour

$$\theta \geqslant \frac{4}{r^2},$$

d'où

$$\int_{\frac{4}{r^2}}^{+\infty} \frac{\theta^{-\rho-1}}{\sqrt{\theta - 1}}\, d\theta \leqslant \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2-r}} \int_{\frac{4}{r^2}}^{+\infty} \theta^{-\rho-\frac{5}{4}}\, d\theta \leqslant C\, \frac{r^{2\rho+1}}{\sqrt{2-r}},$$

d'où enfin

$$|g(x, r)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{2-r}} \qquad \text{et aussi} \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(x, r)\right| \leqslant \frac{Cr^{-\varepsilon}}{\sqrt{2-r}},$$

et on conclut comme précédemment.

Le lemme 4.2 est donc démontré.

En combinant les lemmes 4.1 et 4.2, on obtient

$$\left|\|u\|_\rho^2 - \mathrm{Re} \int_0^1 \frac{dt}{t} \int \beta(x) t^{-2\rho(x)}\, (d\sigma_t^{*2} * u)\bar{u}\, dx\right| \leqslant C\|u\|_{-\frac{1}{4}}^2,$$

avec

$$2\pi^{-2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma(-\rho(x))}$$

$$= \beta(x)\, \frac{2^{2n-5}\omega_{n-1}}{2^{n-3}\omega_n}\, 2^{2\rho(x)} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \dfrac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\rho(x) + n - 1)}.$$

Théorème 4.1. — *Soit* ρ *une fonction* C^∞ *sur* R^n, $n \geqslant 2$, *vérifiant* $-\dfrac{1}{4} < \rho(x) < 0$ *pour tout* x.

Alors pour tout compact K *de* R^n, *on peut trouver* C *telle que, pour toute fonction* $u \in \mathcal{D}_K(R^n)$, *on ait*

$$\left|\|u\|_\rho^2 - \int_0^1 \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)}\beta(x)\, |(d\sigma_t * u)(x)|^2\, dx\right| \leqslant C\|u\|_{-\frac{1}{4}}^2,$$

avec

$$\beta(x) = 2^{-2\rho(x)-n+3\pi-2\rho(x)+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\rho(x) + \dfrac{n}{2}\right)\Gamma(\rho(x) + n - 1)}{\left(\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\right)^2 \Gamma(-\rho(x))\Gamma\left(\rho(x) + \dfrac{n-1}{2}\right)}.$$

En partant de l'estimation de $\|u\|_\rho^2$ précédant l'énoncé du théorème 4.1 on voit en effet qu'il s'agit d'évaluer

$$\int \beta(x)t^{-2\rho(x)}\,(d\sigma_t^{*2} * u)\bar{u}\,dx = \int (d\sigma_t * (d\sigma_t * u))\beta(x)t^{-2\rho(x)}\bar{u}(x)\,dx,$$

et comme $d\sigma_t$ est un opérateur autoadjoint, cela s'écrit encore

$$\int (d\sigma_t * u)\,[d\sigma_t * (\beta(x)t^{-2\rho(x)}u(x))]\,dx$$
$$= \int \beta(x)t^{-2\rho(x)}\,|d\sigma_t * u|^2\,dx + \int (d\sigma_t * u)\mathrm{L}_t\bar{u}\,dx,$$

où L_t est défini dans le lemme suivant :

Lemme 4.3. — *Soit* L_t *l'opérateur défini, pour* $0 < t < 1$, *par*

$$(\mathrm{L}_t u)(x) = \beta(x)t^{-2\rho(x)}\,(d\sigma_t * u)(x) - (d\sigma_t * (t^{-2\rho}\beta u))(x).$$

On a $\|\mathrm{L}_t u\|_{-\frac{1}{4}} \leqslant \mathrm{C}t\|u\|_{-\frac{1}{4}}$, *pour* $u \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{R}^n)$ *avec une constante ne dépendant que de* β, *de* ρ *et de* K.

Lorsque ce lemme sera démontré, on pourra écrire

$$\left|\int (d\sigma_t * u)\,.\,\mathrm{L}_t\bar{u}\,dx\right| \leqslant \mathrm{C}t\|d\sigma_t * u\|_{\frac{1}{4}}\|\mathrm{L}_t\bar{u}\|_{-\frac{1}{4}} \leqslant \mathrm{C}\sqrt{t}\,\|u\|^2_{-\frac{1}{4}},$$

et le théorème 4.1 sera démontré.

Pour prouver le lemme, il suffit de prouver l'inégalité $\|\mathrm{L}_t u\|_s \leqslant \mathrm{C}t\|u\|_s$ pour $s = 0$ ou 1 : car alors on l'aura pour $s = \frac{1}{4}$ par interpolation, puis pour $s = -\frac{1}{4}$ par dualité, le transposé de L_t étant $-\mathrm{L}_t$.

Comme $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{L}_t = \mathrm{L}_t\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\beta}{\partial x_j}\mathrm{M}_t + 2\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\,\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\mathrm{L}_t$, où M_t a une définition analogue à L_t mais avec β remplacée par 1, on voit qu'il suffit de prouver l'inégalité $\|\mathrm{L}_t u\|_0 \leqslant \mathrm{C}t^{1+\varepsilon}\|u\|_0$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Mais cette inégalité est conséquence de l'inégalité

$$|(\mathrm{L}_t u)(x)| \leqslant \mathrm{C}t^{-2\rho(x)+1}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)(d\sigma_t * |u|)(x),$$

laquelle se démontre comme suit :

$$(\mathrm{L}_t u)(x) = t^{-2\rho(x)}\int u(x - t\eta)[\beta(x) - \beta(x - t\eta)t^{2(\rho(x)-\rho(x-t\eta))}]\,d\sigma(\eta)$$

et

$$\beta(x) - \beta(x - t\eta)t^{2(\rho(x)-\rho(x-t\eta))} = \beta(x) - \beta(x - t\eta) + \beta(x - t\eta)\left[1 - \exp\left[2(\rho(x - t\eta) - \rho(x))\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right]\right]$$

d'où, en utilisant l'inégalité $|e^{ab} - 1| \leqslant e^{|a|}|b|$ pour $|b| < 1$, avec $b = t\operatorname{Log}\frac{1}{t}$ et $a = \frac{2}{t}(\rho(x - t\eta) - \rho(x))$, on tire

$$|\beta(x) - \beta(x - t\eta)t^{2(\rho(x)-\rho(x-t\eta))}| \leqslant Ct\left(1 + \operatorname{Log}\frac{1}{t}\right),$$

où C ne dépend que du maximum des dérivées premières de β et de ρ sur $B_n + K$, où B_n est la boule unité de R^n et K est un compact dans lequel on limite le support de u.

THÉORÈME 4.2. — *Soient* $\rho \in C^\infty(R^n)$ *et* $s \in R$. *Supposons* $-\frac{1}{4} < \mu < \rho(x) < 0$ *pour tout* x, *et* $n \geqslant 2$.

Pour tout compact K *de* R^n, *il existe des constantes positives* C_1, C_2, C *telles que, pour toute* $u \in \mathcal{D}_K(R^n)$, *on ait*

$$C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |d\sigma_t * u|^2\, dx \leqslant \|u\|^2_{\rho,s}$$
$$\leqslant C_2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |d\sigma_t * u|^2\, dx + C\|u\|^2_\mu.$$

Remarque. — L'erreur en $\|u\|^2_\mu$ est évidemment de fantaisie : comme la norme $\|u\|_\mu$ est compacte par rapport à la norme $\|u\|_{\rho,s}$ au sens de divers bons auteurs (i.e.

$$\|u\|_\mu \leqslant \varepsilon\|u\|_{\rho,s} + C\|u\|_{-N}$$

aussi grand que soit N et aussi petit que soit ε), on peut remplacer $\|u\|^2_\mu$ par $\|u\|^2_{-N}$ pour n'importe quel N.

Preuve du théorème 4.2. — Soit $\tilde{B}^s$ un opérateur de convolution par une distribution à support compact, tel que l'opérateur $B^s - \tilde{B}^s$ soit régularisant : il est même possible de choisir le support de la fonction définissant l'opérateur de convolution $\tilde{B}^s$ dans un voisinage arbitraire de l'origine de R^n.

Comme $\|u\|_{\rho,s} = \|B^s u\|_\rho$, on peut, grâce au théorème 4.1 et à quelques commutations dont les reliquats sont aisément dominés à l'aide du lemme 4.3, écrire

$$\left|\|u\|^2_{\rho,s} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \int |\tilde{B}^s (d\sigma_t * (\sqrt{\beta}\, t^{-\rho} u))|^2 \, dx\right| \leqslant C\|B^s u\|^2_{-\frac{1}{4}} \leqslant C\|u\|^2_\mu.$$

Soit M tel que $\rho(x) < M < 0$ pour tout x. Posons

$$h_t = \sqrt{\beta}\, t^{-\rho+M} u \qquad \text{et} \qquad w_t = d\sigma_t * h_t.$$

Il s'agit d'évaluer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-2M} \frac{dt}{t} \int |\tilde{B}^s w_t|^2 \, dx.$

Par interpolation et dualité, on voit facilement que pour tout k avec $|k| \leqslant 1$, on a $\|h_t\|_k \leqslant C\left(\operatorname{Log} \frac{1}{t}\right)\|u\|_k$ avec une constante C indépendante de t et de u. On écrit alors

$$\int |B^s w_t|^2 \, dx = \int [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s} |\hat{w}_t(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{1+|\xi|^2 < \frac{1}{t^\varepsilon}} + \int_{1+|\xi|^2 > \frac{1}{t^\varepsilon}}$$

pour un $\varepsilon > 0$ à déterminer. On a

$$\int_{1+|\xi|^2 < \frac{1}{t^\varepsilon}} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s} |\hat{w}_t(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C\left[1 + \varepsilon \operatorname{Log} \frac{1}{t}\right]^{2|s|} \frac{1}{t^\varepsilon} \|w_t\|^2_{-1}$$

puisque $1 \leqslant \dfrac{1}{t^\varepsilon(1 + |\xi|^2)}$ dans le domaine d'intégration, d'où

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-2M} \frac{dt}{t} \int_{1+|\xi|^2 < \frac{1}{t^\varepsilon}} [1 + \operatorname{Log}(1 + |\xi|^2)]^{2s} |\hat{w}_t(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-2M-\varepsilon} \left[1 + \varepsilon \operatorname{Log} \frac{1}{t}\right]^{2|s|} \frac{dt}{t} \|w_t\|^2_{-1},$$

ce qui se majore par $C\|u\|_{-1}^2$ si $\varepsilon < -2M$, étant donné que

$$\|w_t\|_{-1} \leqslant C\left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)\|u\|_{-1}.$$

Pour estimer l'intégrale sur l'ensemble $1+|\xi|^2 \geqslant \frac{1}{t^\varepsilon}$, les procédés de minoration et de majoration doivent être échangés selon que s est positif ou négatif.

Supposons par exemple $s > 0$. On a alors

$$\int_{1+|\xi|^2>\frac{1}{t^\varepsilon}} [1+\operatorname{Log}(1+|\xi|^2)]^{2s}|\hat{w}_t(\xi)|^2\, d\xi$$
$$\geqslant \left(1+\varepsilon\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s}\|w_t\|_0^2 - \left(1+\varepsilon\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s}\int_{1+|\xi|^2<\frac{1}{t^\varepsilon}} |\hat{w}_t(\xi)|^2\, d\xi,$$

et comme nous venons de dominer convenablement cette dernière intégrale, on en conclut l'inégalité de gauche du théorème 4.2, après une commutation facile.

Enfin, toujours pour $s > 0$,

$$\int_{1+|\xi|^2>\frac{1}{t^\varepsilon}} [1+\operatorname{Log}(1+|\xi|^2)]^{2s}|\hat{w}_t(\xi)|^2\, d\xi$$
$$= \int_{\frac{1}{t^\varepsilon}\leqslant 1+|\xi|^2\leqslant\frac{1}{t^N}} + \int_{1+|\xi|^2\geqslant\frac{1}{t^N}},$$

pour un N à choisir.

La première intégrale est dominée par

$$\left(1+N\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s}\int |w_t|^2\, dx,$$

qui contribue en

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+N\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s} t^{-2M}\frac{dt}{t}\int |w_t|^2\, dx,$$

expression de la formule voulue.

La deuxième intégrale s'écrit

$$\int_{1+|\xi|^2\geqslant\frac{1}{t^N}} (1+\operatorname{Log}(1+|\xi|^2))^{2s}\,|\widehat{d\sigma}(t\xi)^2|\hat{h}_t(\xi)|^2\, d\xi.$$

Comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+t|\xi|}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(1+|\xi|)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(1+|\xi|)^{-\frac{3}{8}}(1+|\xi|)^{-\frac{1}{8}}$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}(1+|\xi|)^{-\frac{3}{8}} t^{\frac{N}{16}},$$

cette intégrale est majorée par

$$Ct^{\frac{N}{8}-1}\|h_t\|^2_{-\frac{3}{4},s} \leqslant Ct^{\frac{N}{8}-1}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)\|u\|^2_{-\frac{1}{2}},$$

et le théorème 4.2 est prouvé à condition de choisir N assez grand.

CHAPITRE 5

Le cas des opérateurs à coefficients constants généraux.

Le théorème 5.1 montre comment, à l'aide des résultats du chapitre 4, on peut passer d'inégalités L^2 avec poids à des théorèmes de régularité et d'existence dans les espaces H^ρ.

Il se trouve que les inégalités L^2 dont on a besoin pour appliquer ce théorème sont exactement du type de celles qui ont été prouvées par M. F. Trèves, soit dans le cas des opérateurs à coefficients constants généraux (avec des fonctions ρ « assez convexes »), soit dans le cas d'opérateurs du genre $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$, dans des ouverts de C^n (avec des fonctions ρ pseudo-convexes).

Théorème 5.1. — *Soient* $P(D)$ *un opérateur différentiel à coefficients constants sur* R^n, s *un nombre réel,* Ω *un ouvert de* R^n, *et* ρ *une fonction* C^∞ *dans* Ω, *à valeurs réelles, satisfaisant la condition suivante :*

pour tout multi-indice α *et tout compact* K *de* Ω, *il existe des constantes positives* C *et* τ_0 *telles que, pour toute fonction* $u \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$ *et tout* τ *réel* $\geqslant \tau_0$, *on ait*

$$\int \exp\,[2\tau\rho(x)]|P^{(\alpha)}(D)u|^2\,dx \leqslant \frac{C}{\tau^{|\alpha|}}\int \exp\,[2\tau\rho(x)]|P(D)u|^2\,dx.$$

Alors pour toute distribution v *à support compact dans* Ω *satisfaisant* $P(D)v \in H^{\rho,s}_{\text{comp}}(\Omega)$, *et pour tout multi-indice* α, *on a* $P^{(\alpha)}(D)v \in H^{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}}_{\text{comp}}(\Omega)$.

M. F. Trèves a prouvé (cf. (6), p. 158 et 190) que l'inégalité exigée dans l'hypothèse du théorème 5.1 est valable pour tout opérateur $P(D)$ à coefficients constants lorsque ρ est un polynôme du second degré à partie principale définie positive, ou bien la puissance s-ième d'un tel polynôme sans zéros réels, pourvu que s soit supérieur ou égal à 1.

Remarquons que le théorème 5.1 est trivial pour $n = 1$, puisqu'alors tout opérateur différentiel à coefficients constants est elliptique; pour $n \geqslant 2$, il est la conséquence des lemmes 5.1 et 5.2 qui suivent.

LEMME 5.1. — *Supposons les hypothèses du théorème* 5.1 *vérifiées, et soit* K *une partie compacte de* Ω *telle que l'oscillation de* ρ *sur* K *soit strictement inférieure à* $\frac{1}{4}$.

Alors il existe une constante C *telle que, pour tout multi-indice* α *et toute fonction* $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, *on ait*

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}} \leqslant C\|P(D)u\|^2_{\rho,s}.$$

Posons en effet $\rho(x) = k + \lambda(x)$, où la constante k est choisie de façon que λ reste strictement comprise entre 0 et $-\frac{1}{4}$ sur K. On a alors, compte tenu des résultats du chapitre 4 :

$$\begin{aligned}\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}} &= \|P^{(\alpha)}(D)A^k u\|^2_{\lambda,s+\frac{|\alpha|}{2}} \\ &\leqslant C_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\operatorname{Log}\frac{1}{t}\right)^{2s+|\alpha|} \frac{dt}{t} \int t^{-2\lambda(x)} |P^{(\alpha)}(D)\ (d\sigma_t * \tilde{A}^k u)|^2\, dx \\ &\quad + C_2\|A^k P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

avec des constantes C_1 et C_2 bien choisies, $\tilde{A}^k$ étant un opérateur de convolution différant de A^k par un opérateur régularisant, et la distribution définissant cet opérateur ayant son support dans une boule centrée à l'origine de rayon assez petit.

D'une part

$$\|A^k P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{-\frac{1}{4}} = \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{k-\frac{1}{4}} \leqslant C\|P(D)u\|^2_{k-\frac{1}{4}} \leqslant C\|P(D)u\|^2_{\rho,s}$$

puisque $k - \frac{1}{4} < \rho$.

D'autre part

$$\int t^{-2\lambda(x)}|P^{(\alpha)}(D)\,(d\sigma_t * \tilde{A}^k u)|^2\,dx$$
$$= t^{2k}\int \exp\left[2\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\,\rho(x)\right]|P^{(\alpha)}(D)\,(d\sigma_t * {}^k\tilde{A}u)|^2\,dx$$
$$\leqslant Ct^{2k}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{-|\alpha|}\int \exp\left[2\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\,\rho(x)\right]|P(D)(d\sigma_t * \tilde{A}^k u)|^2\,dx$$
$$= C\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{-|\alpha|}\int t^{-2\lambda(x)}|P(D)\,(d\sigma_t * \tilde{A}^k u)|^2\,dx$$

d'où

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}} \leqslant C\|P(D)\tilde{A}^k u\|^2_{\lambda,s} \leqslant C\|P(D)u\|^2_{\rho,s},$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.1.

LEMME 5.2. — *La conclusion du lemme* 5.1 *est valable sans restriction sur l'oscillation de* ρ *sur* K.

Soit en effet $(\varphi_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant N}$ une famille finie de fonctions C^∞ constituant une partition de l'unité sur un voisinage de K, subordonnée à un recouvrement par des ouverts relativement compacts dans chacun desquels l'oscillation de ρ soit moindre que $\frac{1}{4}\cdot$

On a pour tout α

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s\frac{|\alpha|}{2}} \leqslant N\sum_\nu \|P^{(\alpha)}(D)(\varphi_\nu u)\|^2_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}}$$
$$\leqslant C\sum_\nu \|P(D)(\varphi_\nu u)\|^2_{\rho,s},$$

cette dernière inégalité provenant du lemme 5.1.

Mais grâce à la formule de Leibniz

$$\sum_\nu \|P(D)(\varphi_\nu u)\|^2_{\rho,s} \leqslant C\sum_\alpha \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s}.$$

En additionnant les inégalités ainsi obtenues pour toutes les valeurs de α, on obtient

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}} \leqslant C\|P(D)u\|^2_{\rho,s} + C\sum_{|\alpha|\geqslant 1} \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2_{\rho,s}.$$

Mais comme la norme $\|v\|_{\rho,s}$ est « compacte » par rapport aux normes $\|v\|_{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}}$ pour $|\alpha| \geqslant 1$, on en déduit le lemme 5.2, et par suite le théorème 5.1.

On sait que les hypothèses du théorème 5.1 sont réalisées pour tout opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ lorsque la fonction ρ est « fortement » convexe au sens que la matrice $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \, \partial x_k}\right)$ est partout définie positive (voir [6], p. 158, pour le cas où ρ est un polynôme du second degré, et [8], p. 85, pour passer de là au cas général).

On déduit bien entendu de là, et du théorème 5.1, le corollaire bien connu que pour tout ouvert Ω convexe on a

$$P(D)\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$$

(voir [6], p. 161, pour la construction de « suffisamment » de fonctions fortement convexes dans Ω).

Dans [7] (voir p. 142), M. F. Trèves a prouvé le théorème suivant : soit $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ un opérateur différentiel à coefficients constants (ou même holomorphes), dans un ouvert Ω de C^n (la notation $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ signifie que P est un polynôme en les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z_j}$, les z_j étant les coordonnées complexes dans C^n) ; soit $\rho(z)$ une fonction strictement pseudo-convexe dans Ω : i.e. $\rho(z)$ est à valeurs réelles et la matrice hermitienne $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k}\right)$ est définie positive en tout point de Ω.

Alors, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes positives C et τ_0 telles que, pour tout $\tau \geqslant \tau_0$, tout multi-indice α, et toute fonction $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on ait

$$\int e^{2\tau\rho(z)} \left| P^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u \right|^2 dx\, dy \leqslant \frac{C}{\tau^{|\alpha|}} \int e^{2\tau\rho(z)} \left| P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u \right|^2 dx\, dy.$$

On en déduit le

THÉORÈME 5.2. — *Soient* $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *à coefficients constants dans* C^n, Ω *un ouvert de* C^n, *et* $\rho(z)$ *une fonction strictement pseudo-convexe dans* Ω.

Pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, *tout nombre réel* s *et tout multi-indice* α, *la condition* $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u \in H^{\rho,s}$ *entraîne* $P^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u \in H^{\rho,s+\frac{|\alpha|}{2}}$.

La démonstration est identique à celle du théorème 5.1, à l'exception du fait suivant : dans l'utilisation des partitions de l'unité la formule de Leibniz prend la forme

$$P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(\varphi u) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial z^\alpha} P^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u.$$

Par dualité, et en utilisant le fait que dans un domaine d'holomorphie :

1) l'équation $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u = f$ a une solution $u \in C^\infty(\Omega)$ pour toute $f \in C^\infty(\Omega)$;

2) toute fonction réelle bornée supérieurement sur tout compact de Ω est majorée par une fonction strictement pseudo-convexe dans Ω,
on obtient le

THÉORÈME 5.3. — *Supposons les hypothèses du théorème* 5.2 *vérifiées, et supposons de plus que* Ω *soit un domaine d'holomorphie.*

Alors pour toute distribution $f \in H_{\text{loc}}^{-\rho,s}(\Omega)$, (resp. $\mathcal{D}'(\Omega)$), *il existe une distribution* $g \in H_{\text{loc}}^{-\rho,s+\frac{m}{2}}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega)$) *telle que* $P\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) g = f$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BOKOBZA et A. UNTERBERGER, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. 260, 1965, p. 3265-3267, et t. 261, 1965, p. 2271-2273.

[2] L. HORMANDER, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1964.

[3] L. HORMANDER, On the Singularities of solutions of partial differential equations, Comm. on Pure and Appl. Math., XXIII, 329-358 (1970).

[4] F. JOHN, Plane Waves and Spherical Means applied to Partial. Differential Equations, Interscience Tracts, New York, 1955.

[5] B. MALGRANGE, Sur la propagation de la régularité des solutions des équations à coefficients constants, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.* Roumanie 3 (53), 433-440 (1959).

[6] F. TREVES, Linear Partial Differential Equations with constant coefficients, Gordon & Breach, New York, 1966.

[7] F. TREVES, Cours sur les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires, École Normale Supérieure, Paris, 1967.

[8] F. TREVES, Linear partial differential equations, Gordon and Breach, New York, 1970.

Manuscrit reçu le 3 juillet 1970.

André UNTERBERGER,
39, rue Pigalle,
Paris, 9e.