Annales de l'institut Fourier

André Néron

Pierre Samuel

La variété de Picard d'une variété normale

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__1_0>

LA VARIÉTÉ DE PICARD D'UNE VARIÉTÉ NORMALE

Par André NÉRON (Paris) **et Pierre SAMUEL** (Clermont-Ferrand).

---

§ 1. — Introduction.

Nous vous proposons de montrer que toute variété projective normale V admet une variété de Picard. Ce théorème est bien connu dans le cas des courbes (jacobiennes) et dans le cas « classique » où le domaine universel est le corps des nombres complexes, tout au moins lorsque V est sans singularités ; et les meilleures démonstrations qu'on en a donné sont des démonstrations « transcendantes » [4]. Nous donnons ici une démonstration algébrique d'existence de la variété de Picard de V, valable sur un domaine universel de caractéristique quelconque, et sans autre restriction sur V que l'hypothèse de normalité. Notre théorie n'est pas complète en ce sens qu'elle ne contient pas l'étude de la variété d'Albanese [9], et qu'elle ne s'applique qu'aux variétés projectives (et par conséquent aussi à celles des produits d'espaces projectifs).

La méthode utilisée est directement inspirée par la thèse de l'un d'entre nous [5] (¹). Elle consiste essentiellement, selon la vieille idée de Picard, à « fibrer » convenablement V par des courbes, et à étudier divers sous-groupes de la jacobienne d'une fibre générique. Et, modulo un certain nombre de détails techniques assez élémentaires, il ressort de notre démonstration qu'une fois obtenue l'existence de la jacobienne d'une courbe [3], [8], celle de la variété de Picard d'une variété est chose relativement facile.

Au cours de la préparation de ce travail les conseils et les encouragements de monsieur le Professeur André Weil nous ont été d'un grand secours, et nous l'en remercions vivement.

(¹) Le présent mémoire ne fait cependant appel à aucun résultat de cette thèse.

§ 2. — Énoncé du résultat, et plan de ce travail(²).

Etant donnée une variété V nous noterons $\mathfrak{G}(V)$, $\mathfrak{G}_a(V)$, et $\mathfrak{G}_l(V)$ (ou encore $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{G}_l$ lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre) le groupe des diviseurs, celui des diviseurs algébriquement équivalents à zéro et celui des diviseurs linéairement équivalents à zéro sur V [10]. Étant donnés une variété V, deux sous-groupes $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ de $\mathfrak{G}(V)$ tels que $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$ (resp. une variété abélienne A), une variété V′ et deux sous-groupes $\mathfrak{G}'_1$ et $\mathfrak{G}'_2$ de $\mathfrak{G}(V')$ tels que $\mathfrak{G}'_1 \supset \mathfrak{G}'_2$ (resp. une variété abélienne A′), nous dirons qu'un homomorphisme φ de $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ dans $\mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_2$ (resp. de $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ dans A′, de A dans $\mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_2$) est *rationnel sur un corps k* si, pour tout corps K contenant k et tout diviseur $D \in \mathfrak{G}_1$ rationnel sur K (resp. tout point a de A rationnel sur K), l'image par φ de la classe de D mod· $\mathfrak{G}_2$ (resp. de a) contient un diviseur de $\mathfrak{G}'_1$ rationnel sur K (resp. est un point de A′ rationnel sur K). Un isomorphisme φ (de $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ ou A dans $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}'_2$ ou A′) est dit *birationnel sur k* si φ et l'isomorphisme réciproque sont rationnels sur k.

Ceci étant, le résultat que nous démontrons est le suivant :

Théorème d'existence de la variété de Picard. — *Soit* V^n *une variété projective normale définie sur un corps k.*

a) *Il existe une extension algébrique finie k′ de k, une variété abélienne projective* A *définie sur k′ et un isomorphisme rationnel sur k′ de* $\mathfrak{G}_a(V)/\mathfrak{G}_l(V)$ *sur* A.

b) *Il existe une extension algébrique finie k″ de k, une variété abélienne projective* P(V) *définie sur k″, et un isomorphisme birationnel i sur k″ de* $\mathfrak{G}_a(V)/\mathfrak{G}_l(V)$ *sur* P(V).

c) *Il existe une famille de Poincaré* [11], *c'est-à-dire un système algébrique* (P) *de diviseurs algébriquement équivalents à zéro sur* V *en correspondance birationnelle sur k″ avec* P(V), *le point de* P(V) *correspondant au diviseur* D∈(P) *étant l'image par i de la classe d'équivalence linéaire de* D.

La variété P(V), dont l'unicité à un isomorphisme près résulte aussitôt de *b*), est appelée *la variété de Picard de* V.

Losque V est une *courbe* C, le théorème ci-dessus n'est autre que le théorème d'existence de la *jacobienne* J de C. En effet Chow a

(²) Les notations et la terminologie utilisées ici sont celles d'A. Weil [7], [8].

démontré [3] que l'on peut prendre pour J une variété projective définie sur le plus petit corps de définition k de C, et que l'on peut définir une fonction canonique f ([8], § 5, th. 18 ; nous dirons quelquefois « application canonique » au lieu de « fonction canonique ») sur n'importe quelle extension k' de k qui contienne un point de C. La connaissance de f définit alors, au moyen de $\mathfrak{m} \rightarrow S(f(\mathfrak{m}))$, l'isomorphisme rationnel sur k' de $\mathfrak{G}_a(C)/\mathfrak{G}_l(C)$ sur J $\big([8]$, § 5, th. $19\big)$; et, comme il existe sur C un diviseur positif de degré g rationnel sur k', la considération de l'application symétrisante du produit C^g sur J montre que cet isomorphisme est birationnel sur k'. Dans la suite de ce travail nous utiliserons souvent ces résultats relatifs aux courbes.

Nous démontrons d'abord que, si V et V' sont deux variétés projectives normales en correspondance birationnelle sur un corps k, il existe entre $\mathfrak{G}_a(V)/\mathfrak{G}_l(V)$ et $\mathfrak{G}_a(V')/\mathfrak{G}_l(V')$ un isomorphisme qui est birationnel sur une extension algébrique convenable de k (§ 3). Nous prouvons ensuite que toute variété normale V' définie sur k est birationnellement équivalente (sur une extension algébrique finie de k) à une variété « fibrée » normale V du type suivant (3) : V^n est une sous-variété (se projetant sur B) du produit $B^{n-1} \times S$ d'une « base » unicursale B et d'un espace projectif S, et, sauf si M se trouve sur certains sous-ensembles « négligeables » de B, le cycle intersection $W(M) = (M \times S) \cdot V$ est défini et se réduit à une courbe (non décomposée) (§ 4). Dans ces conditions, soit H le groupe des diviseurs « verticaux » D de V (c'est-à-dire pour lesquels l'ensemble algébrique $\mathrm{proj}_{B}(|D|)$ est de dimension $< n-1$) ; posons $\mathfrak{H}_a = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{H}_l = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}_l$; nous démontrons que l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ est un isomorphisme birationnel sur tout corps de définition de V (§ 5).

Il faut alors montrer qu'il existe un isomorphisme rationnel de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ sur une variété abélienne A. Nous démontrons ceci dans le cas plus général d'une sous-variété normale V^n d'un produit $B^{n-1} \times S$, se projetant sur B, B étant une variété quelconque, et certaines fibres $(M \times S) \cap V$ pouvant être décomposées ou de dimension > 1. Alors $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ est, en un certain sens, isomorphe à une sous-variété abélienne A de la jacobienne de la fibre générique ; le fait que cet isomorphisme est rationnel sur une extension algébrique finie k' de k

(3) La variété V n'est pas une variété fibrée au sens strict, ses « fibres » n'étant pas nécessairement birationnellement équivalentes.

résulte aisément de sa définition et de la construction de A ([4]) (§ 6). Ceci démontre l'assertion *a* du théorème ci-dessus ([5]).

Le fait que l'isomorphisme de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ sur A est *birationnel* sur k' se démontre aisément lorsque, pour un point générique M de B sur k'_1 l'application canonique de la fibre W(M) dans sa jacobienne est définie sur $k'(\mathrm{M})$. Dans ce cas nous démontrons que $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ est birationnellement isomorphe au produit $\mathrm{A} \times \mathrm{P(B)}$ de la variété abélienne A et de la variété de Picard P(B) de la base B (le théorème d'existence étant supposé vrai pour celle-ci) (§ 7, prop. 7). On déduit de là la démonstration complète du théorème d'existence pour une variété fibrée quelconque V à base unicursale, par récurrence sur la dimension par passage à une variété fibrée auxiliaire à laquelle s'applique le résultat précédent, et par changement de variété abélienne en caractéristique $p \neq 0$.

§ 3. — Invariance birationnelle de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$.

Proposition 1. — *Soient* V *et* V′ *deux variétés projectives normales et* T *une correspondance birationnelle entre* V *et* V′ *définie sur un corps* k_0 *; il existe alors une extension algébrique finie* k' *de* k_0 *et un isomorphisme birationnel sur* k *de* $\mathfrak{G}_a(\mathrm{V})/\mathfrak{G}_l(\mathrm{V})$ *sur* $\mathfrak{G}_a(\mathrm{V}')/\mathfrak{G}_l(\mathrm{V}')$.

Par passage à un modèle normal du graphe T, nous sommes ramenés au cas où V′ est une projection de V ; soit p la fonction projection. Comme V est normale, $\overset{-1}{p}(\mathrm{D}')$ est défini pour tout diviseur D′ de V′. Montrons que l'on a $\mathrm{D} = \overset{-1}{p}p(\mathrm{D})$ pour tout $\mathrm{D} \in \mathfrak{G}_a(\mathrm{V})$. En effet, pour un tel D, il existe un diviseur $\overline{\mathrm{D}}$ de V tel que D et le diviseur nul soient des spécialisations de $\overline{\mathrm{D}}$ sur k_0. Notons W_j^{n-1} les sous-variétés de V, en nombre fini, dont la projection sur V′ est de dimension $< n - 1$ (n étant la dimension de V) ; prenons pour k un corps de définition des W_j. On a $\overline{\mathrm{D}} = \overset{-1}{p}p(\overline{\mathrm{D}}) + \mathrm{E}$, où E est combinaison linéaire des W_j. En appliquant aux deux membres de cette égalité les spécialisations $\overline{\mathrm{D}} \to \mathrm{D}$ et $\overline{\mathrm{D}} \to 0$, on obtient $\mathrm{D} = \overset{-1}{p}p(\mathrm{D}) + \mathrm{E}$ et $\mathrm{E} = 0$. D'où $\mathrm{D} = \overset{-1}{p}p(\mathrm{D})$.

De plus, compte tenu de la normalité de V et V′, les relations

([4]) Il est montré dans la thèse de l'un d'entre nous [5] comment l'on peut rendre plus géométrique la démonstration très algébrique donnée au § 6.

([5]) Nous donnons aussi, dans les §§ 4, 5, 6, une démonstration de l'assertion *a* du théorème d'existence par récurrence sur la dimension et utilisant une fibration par des diviseurs.

$D \in \mathfrak{G}_a(V)$, $D' \in \mathfrak{G}_a(V')$ entraînent respectivement $\overset{-1}{p}(D) \in \mathfrak{G}_a(V')$, $p(D') \in \mathfrak{G}_a(V)$. On a des propriétés analogues pour l'équivalence linéaire. Enfin les applications p et $\overset{-1}{p}$ sont rationnelles sur k.

Par conséquent l'application $D \rightarrow p(D)$ est un isomorphisme birationnel de $\mathfrak{G}_a(V)$ sur $\mathfrak{G}_a(V')$ et de $\mathfrak{G}_l(V)$ sur $\mathfrak{G}_l(V')$ ce qui démontre le résultat annoncé (6).

§ 4. — Existences de modèles fibrés.

Lemme 1. — *Soit* F *une surface non réglée (non nécessairement normale) de l'espace ordinaire* S_3 ; *le système des quadriques* Q *telles que le cycle intersection* Q . F *soit décomposé est au plus de dimension* 7 (7).

Comme F n'est pas réglée, ce n'est pas une quadrique, et le cycle Q . F est toujours défini. Supposons que le système (T) des quadriques Q telles que Q . F soit décomposé soit de dimension 8 (il ne peut être de dimension 9 car une quadrique générique coupe F suivant une courbe irréductible (cf. [13]). Soit a un point générique de F sur un corps k de définition de F, et des composantes de (T). Considérons une composante (U) (de dimension 7) du système des quadriques $Q \in (T)$ qui passent par a ; soit Q un élément générique de (U) sur $\overline{k(a)}$; posons $F . Q = C_1 + \cdots C_s$ $(s \geqslant 2)$, les C_i étant des courbes distinctes ou non ; et supposons que C_1, par exemple, passe par a. Pour une quadrique quelconque Q′ de (U), posons $F . Q' = C'_1 + \cdots + C'_s$, C'_1 étant une spécialisation de C_i sur $Q \rightarrow Q'$ avec référence à $\overline{k(a)}$ ([6], chap. IV, prop. 2). Considérons le système algébrique (R) ayant la courbe C_2 pour élément générique sur $\overline{k(a)}$; ce système admet F pour support, sinon il y aurait sur F une courbe commune à toutes les quadriques du système (U), lequel est de dimension 7 ; ceci est impossible car les quadriques passant par une droite

(6) *Remarque* : la propriété $D = \overset{-1}{p}p(D)$ pour tout $D \in \mathfrak{G}_a$ peut encore être énoncée comme suit : toutes les fois que V′ est une projection de V de même dimension n que V, les sous-variétés de dimension $n - 1$ de V dont la projection sur V′ est de dimension $\leqslant n - 2$ sont linéairement indépendantes au sens de l'équivalence algébrique.

(7) Notre idée primitive avait été d'employer, au lieu du lemme 1, le théorème de Kronecker-Castelnuovo [1] ; mais la démonstration de celui-ci utilise des propriétés de Géométrie différentielle qui ne sont pas valables en caractéristique $p \neq 0$. Nous remercions M. L. Gauthier de nous avoir conseillé d'utiliser les quadriques à la place des plans. La démonstration du lemme 1 est directement inspirée par celle de Castelnuovo [1].

forment seulement un système de dimension 6. Par conséquent les $Q' \in (U)$ telles que C'_2 contienne un point générique donné de F sur $k(a)$ forment un système algébrique de dimension 6 ; autrement dit, dans le produit $F \times S_9$ de F par l'espace des quadriques, l'ensemble algébrique B des couples (b, Q') tels que $Q' \in (U)$ et que $b \in C'_2$ est de dimension 8. Comme (R) admet F pour support, $B \cap (a \times S_8)$ n'est pas vide, et est donc de dimension 6 puisqu'aucune de ses composantes n'est multiple ([7], chap. VI, cor. 1 du th. 1) ; ainsi le système des quadriques $Q' \in (U)$ telles que C'_2 passe par a est de dimension 6. Or, comme a est un point simple de F, il ne peut appartenir à deux composantes C'_1 et C'_2 de Q'. F sans que Q' soit tangente à F en a (critère de multiplicité 1 ; cf. [7], chap. VI, th. 6). Comme les quadriques Q tangentes à F en a forment un système linéaire de dimension 6, celui-ci est nécessairement contenu dans (U), et donc dans (T) (qui contient ainsi toutes les quadriques tangentes à F).

Considérons maintenant le système linéaire (T_a) de dimension 6 formé par les quadriques tangentes à F en a. Le système (W_a) des sections $F . Q(Q \in (T_a))$ est alors un système linéaire absolument réductible et sans composante fixe. Donc, en vertu de la forme du théorème de Bertini due à Matsusaka ([12], th. 4. 2, p. 61), le système (W_a) est composé avec un faisceau. Or ceci est impossible, car le système algébrique des composantes C'_1 de $F . Q'(Q' \in (T_a))$ ne peut être de dimension 1, sinon chacune des C'_1 serait courbe commune aux quadriques d'une famille de dimension 5, et serait par conséquent une droite (car la famille des quadriques contenant une conique donnée est déjà seulement de dimension 4) ; ceci est contraire à l'hypothèse que F n'est pas réglée et au fait que C'_1 passe par le point générique a. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Étant donnée une surface non réglée* F *de* S_n $(n \geqslant 3)$, *les hyperquadriques* Q *telles que le cycle* F . Q *soit non défini ou décomposé forment un système* (T) *de dimension* $\leqslant r - 2$ (*r désignant la dimension* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *du système de toutes les hyperquadriques de* S_n).

Considérons en effet, pour $n > 3$, la projection de S_n sur S_3 à partir d'une variété linéaire générique L^{n-4}. Les hypercônes du second degré de sommet L forment une variété linéaire (C) de dimension 9 dans l'espace projectif (R^r) des hyperquadriques de S_n. La projection

F' de F dans S_3 est une surface non réglée car sinon, comme $L \cap F = \emptyset$, l'image réciproque par projection d'une génératrice générique de F' serait une droite de F. Donc, d'après le lemme 1, $(T) \cap (C)$ est au plus de dimension $7 = \dim(C) - 2$. Par conséquent (T) est de dimension $\leqslant r - 2$.

Lemme 2. — *Étant donnée une variété projective V^n, il existe un modèle V' de V en correspondance partout birégulière avec V et ne contenant aucune droite.*

Soit (x_i) un point générique homogène de S_N. Il suffit de montrer que la variété U de point générique homogène $(x_i x_j)$ $(i \leqslant j)$ (qui est en correspondance partout birégulière avec S_N) ne contient aucune droite. Or, en appelant $X_i (= x_i^2)$ et $X_{ij} (= x_i x_j,\ i < j)$ les coordonnées sur U, celles-ci satisfont à $X_i X_j = X_{ij}^2$. Pour que la droite de représentation paramétrique $X_i = a_i + b_i t$, $X_{ij} = a_{ij} + b_{ij} t$ soit située sur U, il faut donc que l'on ait $a_i a_j = a_{ij}^2$, $b_i b_j = b_{ij}^2$ et $a_i b_j + a_j b_i = 2 a_{ij} b_{ij}$. D'où $(a_i b_j + a_j b_i)^2 - 4 a_i a_j b_i b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 0$. Ceci implique $b_i = b a_i$ pour tout i ; et, en portant dans les premières relations, il vient $a_{ij}^2 = a_i a_j$, $b_{ij}^2 = b^2 a_i a_j$ et $2 a_{ij} b_{ij} = 2 b a_i a_j$. Les deux premières impliquent $b_{ij} = b a_{ij}$ en caractéristique 2 ; même conclusion en caractéristique $\neq 2$ compte tenu de la troisième. La représentation paramétrique considérée est alors celle du point (a_i, a_{ij}).

Lemme 3. — *Soit V^n une variété de dimension $n \geqslant 3$ de l'espace projectif S_N ; les hyperplans H de S_N tels que $H . V$ soit décomposé forment un système (T) de dimension $\leqslant N - 2$.*

En effet, dans le cas contraire, les traces des $H \in (T)$ sur un hyperplan générique H_g de S_N seraient tous les hyperplans de H_g. Alors $V . H_g$ aurait, d'après l'associativité des intersections, toutes ses sections hyperplanes (dans H_g) décomposées. Or ceci est impossible puisque $V . H_g$ est une variété de dimension $\geqslant 2$ [13].

Nous pouvons déduire tout de suite de ces lemmes une fibration par des diviseurs :

Proposition 2. — *Soit V^n une variété projective normale définie sur un corps k. Il existe une extension de degré k' de k (égale à k si k est infini), et une correspondance birationnelle définie sur k' entre V et une variété V' d'un produit $S_1 \times S_N$, se projetant sur S_1 et telle que, pour tout point $M \in S_1$, le cycle intersection $(M \times S_N) . V'$ se réduise à une variété $W(M)$ normale pour M générique sur k'.*

Comme toute variété est définie sur une extension de type fini du corps premier, on peut supposer k infini. Supposons aussi V non réglée lorsque $n = 2$ (lemme 2). Pour $n \geqslant 3$ (resp. $n = 2$) on peut, d'après le lemme 3 (resp. le cor. du lemme 1), trouver un faisceau linéaire (F) d'hyperplans (resp. d'hyperquadriques) défini sur k et tel que, pour tout $H \in (F)$, $H \cdot V$ soit non décomposé. D'autre part, comme presque toutes les sections hyperplanes (resp. hyperquadriques) sont normales d'après [13] (resp. d'après [13] et le fait que les sections hyperquadiques de V correspondent aux sections hyperplanes de T(V), T étant la correspondance définie au lemme 2), on peut choisir (F) de telle sorte que la section W de V par un élément générique sur k de (F) soit normale. Soient t le paramètre de cet élément, et (x) un point générique de W sur $k(t)$; la variété V′ de point générique (t, x) sur k répond évidemment à la question.

Avant de montrer que, dans la prop. 2, on peut supposer V′ normale, nous allons donner un procédé de fibration par des courbes :

Proposition 3. — *Soit V^n une variété projective définie sur un corps k. Il existe une extension de degré fini k' de k (égale à k si k est infini), et une correspondance birationnelle définie sur k' entre V et une variété V′ du type suivant : V′ est une sous-variété de $S_{n-1} \times S_N$ se projetant sur S_{n-1}, — les points M de S_{n-1} tels que le cycle $(M \times S_N) \cdot V'$ soit décomposé forment un ensemble algébrique de dimension $\leqslant n-3$, — pour tout point M de S_{n-1} l'intersection $(M \times S_N) \cap V'$ est propre* (c'est-à-dire *de dimension* 1).

Appelons T_q la transformation birationnelle de S_q définie dans le lemme 2 (au point de coordonnées homogènes (x_i), T_q fait correspondre celui de coordonnées homogènes $(x_i x_j)(i \leqslant j)$). Remarquons que, si L^s est une variété linéaire de S_q, la variété $T_q(L^s)$ est projectivement équivalente à $T_s(S_s)$: il suffit en effet de considérer l'image par T_q du point générique $\left(\sum_i a_{ji} u_i\right)(0 \leqslant i \leqslant s, 0 \leqslant j \leqslant q, u_i$ variables indépendantes). Considérons la variété $T^2(V)$. Comme T(V) n'est pas réglée (lemme 2), et comme les sections hyperplanes d'une variété T(U) correspondent aux sections hyperquadriques de U, la remarque ci-dessus, le lemme 3 et le cor. du lemme 1 montrent que, si L^s est une variété linéaire de dimension $s \geqslant N - n + 2$ de l'espace projectif S_N où $T^2(V)$ est plongée, telle que $L \cdot T^2(V)$ soit non décomposé, alors les hyperplans H^{s-1} de L tels que $H \cdot T^2(V)$ soit décomposé forment un ensemble algébrique de dimension $\leqslant s-2$.

On déduit aussitôt de ceci par récurrence sur $N - s$ que, sur la grassmannienne $G_{N, N-n-1}$ des variétés linéaires L de dimension $N-n+1$ de S_N (qui est de dimension $(n-1)(N-n+2)$), les variétés L telles que $L.T^2(V)$ soit décomposé (ou non défini) forment un ensemble algébrique (X) de dimension $\leqslant (n-1)(N-n+2)-2$. Il existe donc dans S_N une variété linéaire P^{N-n+2} définie sur k et telle que le système linéaire des L^{N-n+1} passant par P coupe proprement (X). Supposons aussi que P ne rencontre pas $T^2(V)$, de sorte que la projection V'' de $T^2(V)$ à partir de P est une hypersurface de S_{n+1} de même degré que $T^2(V)$: alors V'' est en correspondance birationnelle avec $T^2(V)$ et ne contient aucune droite (cf. cor. du lemme 1). Dans ces conditions, sur la grassmannienne $G_{n+1,2}$ des plans de S_{n+1} (qui est de dimension $3(n-1)$), les plans Q tels que $Q.V''$ soit décomposé ou non défini forment un ensemble algébrique (Y) de dimension $\leqslant 3(n-1)-2$.

Comme k peut être supposé infini, on peut choisir dans S_{n+1} une droite D rationnelle sur k de telle sorte que le système linéaire (F^{n-1}) des plans Q passant par D coupe proprement (Y). Alors les plans $Q \in (F)$ tels que $Q.V''$ soit non défini ou décomposé forment un ensemble algébrique de dimension $\leqslant n-3$. Et, comme V'' ne contient pas de droites, ni donc de plans, on a toujours $Q \cap V'' \neq Q$, et cette intersection est propre.

Soient alors (t) un système de paramètres d'un élément générique Q de (F) sur k ((t) est un système de $n-1$ variables indépendantes sur k), et (x) un point générique sur $k(t)$ de $Q.V''$. La variété V' de $S_{n-1} \times S_{n+1}$ ayant (t, x) pour point générique sur k répond évidemment à la question.

Réglons maintenant la question de normalité :

Proposition 4. — *Dans les prop. 2 et 3 on peut supposer de plus que la variété fibrée* V' *est normale, et que pour point* M *générique sur* k' *de la base* S_1 *ou* S_{n-1} *la fibre* $(M \times S_N).V'$ *est normale.*

Prenons l'extension k' de telle sorte que le modèle V^0 dérivé de V' par normalisation sur k' n'ait pas de singularités de dimension $n-1$ ([7], App. II). Soient M un point générique de la base (S_1 ou S_{n-1}) sur k', et P un point générique de la fibre $(M \times S_N).V'$ sur $k'(M)$. Alors P est point générique de V' sur k' ; notons P^0 le point générique correspondant de V^0. Considérons la variété V'' de point générique (M, P^0) sur k'. Comme, pour tout système de coordonnées affines, on a $k'[P^0]=k'[P', P^0]=k'[M, P^0]$, les variétés V'' et V^0 sont en correspondance partout birégulière, et V'' est donc un modèle normal de V'. Il est clair que V'' est une variété fibrée de même base que V'. Les propriétés classiques de la correspondance entre une variété et un de ses modèles normaux ([14], th. 7, p. 511) montrent que les conditions relatives aux fibres excédentaires et décomposées sont vérifiées par V''. Comme $k'(M)[P'']$ est entier sur $k'(M)[P]$, et que, dans le cas de la fibration par des diviseurs, la fibre générique de V' a été obtenue normale (prop. 2), on a $k'(M)[P'']=k'(M)[P]$ dans ce cas ; ceci montre que les fibres génériques (relatives à M) de V' et de V'' sont en correspondance birégulière, et donc que celle de V'' est normale. Dans le cas de la fibration par des courbes, l'existence d'un point singulier sur la fibre générique de V'' entraînerait que le lieu de ce point sur $\bar{k}$ soit une variété singulière de dimension $n-1$ de V''; ceci est contraire à la normalité de V'' ; donc la fibre générique est une courbe non singulière et par conséquent normale.

§ 5. — L'isomorphisme birationnel entre $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ et $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$.

Soit V^n une sous-variété normale d'un produit $B^q \times S_N$ ayant la variété projective normale B pour projection. Notons $\mathfrak{H}$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(V)$ composé des diviseurs D dont le support a une projection (ensembliste) sur B de dimension $\leqslant q-1$. Pour que D appartienne à $\mathfrak{H}$, il faut et il suffit que, pour tout point M de B générique sur un corps de définition de D, l'intersection de D et de la fibre $W(M)=(M\times S_N).V$ soit vide. Nous poserons $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_a(V)$, $\mathfrak{G}_l=\mathfrak{G}_l(V)$, $\mathfrak{H}_a=\mathfrak{H}+\mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{H}_l=\mathfrak{H}+\mathfrak{G}_l$, et conserverons ces notations dans le reste de ce mémoire.

Notons p la projection de V^n sur B^q. Comme V et B sont normales le diviseur $D=\overset{-1}{p}(d)=(d\times S_N).V$ est défini pour tout diviseur d de B, et appartient au groupe $\mathfrak{H}$; ces diviseurs de la forme $\overset{-1}{p}(d)$ forment un sous-groupe $\mathfrak{H}'$ de $\mathfrak{H}$, isomorphe à $\mathfrak{G}(B)$. On obtient un système de générateurs du groupe $\mathfrak{H}$ en adjoignant à $\mathfrak{H}'$:

a) Les sous-variétés A^{n-1} de V^n dont la projection sur B est de dimension $\leqslant q-2$; si cette projection A' est de dimension $q-1-e$ $(e>0)$, la fibre $(M'\times S_N)\cap V$ d'un point générique M' de A' doit être de dimension $n-q+e$, c'est-à-dire excédentaire d'excès e.

b) Les composantes Z^{n-1} des diviseurs $\overset{-1}{p}(U^{q-1})$ $(U\subset B)$ qui sont décomposés ; alors, pour un point générique M″ de U, la fibre $W(M'') = (M'' \times S_N)$. V est décomposée.

Il résulte alors aussitôt des prop. 2 et 3 (complétées par la prop. 4) que l'on a le résultat suivant :

Lemme 4. — *Pour les variétés fibrées normales* V′ *fournies par les prop.* 2, 3 *et* 4, *les groupes* $\mathfrak{H}$ *et* $\mathfrak{H}'$ *sont égaux.*

Étudions maintenant l'homomorphisme canonique h de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ lorsque $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$. Notons $\mathfrak{H}'_a$ et $\mathfrak{H}'_l$ les sous-groupes $\bar{p}^1(\mathfrak{G}_a(B))$ et $\bar{p}^1(\mathfrak{G}_l(B))$ de $\mathfrak{H}'$; ils sont respectivement isomorphes à $\mathfrak{G}_a(B)$ et $\mathfrak{G}_l(B)$; on a $\mathfrak{H}'_l \subset \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_l$ et $\mathfrak{H}'_a \subset \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_a$. Le noyau de l'homomorphisme h est $((\mathfrak{H} + \mathfrak{G}_l) \cap \mathfrak{G}_a)/\mathfrak{G}_l = ((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_a) + \mathfrak{G}_l)/\mathfrak{G}_l$ (puisque $\mathfrak{G}_l \subset \mathfrak{G}_a$), groupe qui est isomorphe à $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_a)/(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_l)$. Or ce dernier groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe quotient de $\mathfrak{H}'/\mathfrak{H}'_l$, c'est-à-dire de $\mathfrak{G}(B)/\mathfrak{G}_l(B)$. Et, comme les éléments de $\mathfrak{G}_a$ sont de degré o, le noyau de h est même isomorphe à un sous-groupe d'un groupe quotient de $\mathfrak{G}_0(B)/\mathfrak{G}_l(B)$.

Or les bases B des variété fibrées obtenues aux prop. 2 et 3 sont des espaces projectifs S_1 et S_{n-1}, pour lesquels les diviseurs de degré o sont tous linéairement équivalents à zéro. Ainsi, dans ces deux cas, l'homomorphisme h est un isomorphisme de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$.

Soit k un corps de définition de V^n. Il est clair que h est rationnel sur k. Montrons que, pour les variétés fibrées étudiées, il est birationnel sur k. Soit en effet α un élément de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$, et soit $D \in \mathfrak{H}_a$ un représentant de α rationnel sur un corps K contenant k ; posons $D = D_h + D_a$ ($D_h \in \mathfrak{H}$, $D_a \in \mathfrak{G}_a$) ; comme $\mathfrak{H}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{G}(B)$ et que B est un espace projectif, D_h est linéairement équivalent à tout diviseur de même degré de $\mathfrak{H}$, et en particulier à un diviseur D′ rationnel sur k (par exemple de la forme $\bar{p}^1(d)$, d étant un multiple d'un hyperplan de B rationnel sur k) ; alors $D - D'$ est un diviseur de $\mathfrak{G}_a$ rationnel sur K, et dont la classe mod. $\mathfrak{G}_l$ est $h^{-1}(\alpha)$. En résumé :

Proposition 5. — *Si* V^n *est une des variétés fibrées normales obtenues par application des prop.* 2 *ou* 3, *et* 4, *et si* k *est un corps de définition de* V, *alors l'homomorphisme canonique de* $\mathfrak{G}_a(V)/\mathfrak{G}_l(V)$ *sur* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *est un isomorphisme birationnel sur* k.

§ 6. — Construction d'une variété abélienne isomorphe à $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$.

PROPOSITION 6. — *Soit* V^n *une variété normale d'un produit* $B^r \times S_N$ *d'une variété projective normale* B *et d'un espace projectif* S_N, *se projetant sur* B *et soit* k *un corps de définition de* V ; *supposons que, pour tout point générique* M *de* B *sur* k, *la fibre* $W(M) = (M \times S_N) . V$ *soit une variété normale de dimension* $n - r$, *et que l'assertion* a) *du théorème d'existence de la variété de Picard* (§ 2) *soit vraie pour les variétés de dimension* $n - r$. *Alors il existe une extension de degré fini* k' *de* k, *une variété abélienne* A *définie sur* k', *et un isomorphisme rationnel sur* k' *de* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *sur* A.

La démonstration de l'assertion a) du théorème d'existence de la variété de Picard (i. e. existence de la variété abélienne et rationalité de l'isomorphisme de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur celle-ci) se déduit aussitôt de la prop. 6. — soit par récurrence sur n et fibration par des diviseurs (prop. 1, 2, 4 et 5), — soit (sans récurrence) par fibration par des courbes (prop. 1, 3, 4 et 5).

La démonstration de la prop. 6 va occuper la plus grande partie de ce paragraphe. Démontrons le lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit* α *un élément quelconque de* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *et soit* K *un corps algébriquement clos tel que* α *admette un représentant* $D \in \mathfrak{G}_a$ *rationnel sur* K. *Il existe une variété abélienne* J *définie sur* K, *et un homomorphisme rationnel sur* K *de* J *dans* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *dont l'image contient* α.

Comme D est algébriquement équivalent à o, il existe une courbe C, un diviseur X de $V \times C$, et deux points simples Q_1 et Q_2 de C, tous définis sur K, tels que $D = pr_V\big(X . (V \times (Q_2 - Q_1))\big)$. Pour presque tout point Q de C le diviseur $D(Q) = pr_V\big(X . (V \times (Q - Q_1))\big)$ est défini et appartient à $\mathfrak{G}_a$. Prenons pour J la jacobienne de C, et normalisons la fonction canonique c sur C de sorte que $c(Q_1) = o$. Pour tout diviseur $d = \sum_i n_i Q_i$ sur C, notons $\varphi(a)$ la classe mod. H_l du diviseur $\sum_i n_i D(Q_i)$. Il est clair que φ est un homomorphisme, et que $\varphi(d) = o$ si d est linéairement équivalent à O sur C. Donc $\varphi(d)$ ne dépend que du point $S\big(c(d)\big)$ de $J\big([8]$, § 4, n° 23$\big)$. Ceci définit l'homomorphisme cherché.

A. Introduisons maintenant un *demi-domaine universel* F, c'est-à-dire un sous-corps F du domaine universel, isomorphe à celui-ci, et tel que le domaine universel soit de degré de transcendance infini sur F. Étant donnés une variété U définie sur F et un groupe $\mathfrak{G}$ de diviseurs sur U, nous noterons U^F et $\mathfrak{G}^F$ l'ensemble des points de U et le groupe des diviseurs de $\mathfrak{G}$ qui sont rationnels sur F. Nous supposerons que le corps k de définition de V est contenu dans F. Au lieu de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ nous étudierons $\mathfrak{H}_a^F/\mathfrak{H}_l^F$.

Soit M un point générique de B *sur F*. La fibre W(M) est définie sur $k(M)$, et sa variété de Picard P(M) est définie sur une extension algébrique finie $k(M^0)$ de $k(M)$ telle que l'isomorphisme de $\mathfrak{G}_a(W(M))/\mathfrak{G}_l(W(M))$ sur P(M) soit rationnel sur $k(M^0)$. Il existe alors une extension algébrique finie k^0 de k telle que $k^0(M^0)$ soit extension régulière de k^0. Alors, comme F et $k^0(M^0)$ sont algébriquement disjointes sur k^0, elles sont linéairement disjointes sur k^0 ([7], chap. I, th. 5).

B. Pour tout diviseur D de $\mathfrak{H}_a^F$ le diviseur $d = W(M) . D$ sur W(M) est défini et est algébriquement équivalent à O ; il correspond donc à D un point de la variété de Picard P(M) que nous noterons $g(D)$; lorsque D est rationnel sur un corps K contenant k^0, le point $g(D)$ est rationnel sur $K(M^0)$. L'application g est un homomorphisme de $\mathfrak{H}_a^F$ dans P(M). Montrons que *son noyau est* $\mathfrak{H}_l^F$; en effet, si $d \in \mathfrak{G}_l(W(M))$, c'est le diviseur d'une fonction f sur W(M) ; si $K(\supset k)$ est un corps (contenu dans F) sur lequel D est rationnel, f peut être supposée définie sur K(M) ; alors si P désigne un point générique de W(M) sur K(M), la fonction f' sur V définie sur K par $f'(P) = f(P)$ existe ([7], chap. VIII, th. 10, cor. 1) et satisfait à $(D - (f')) . W(M) = 0$; par conséquent $D \in \mathfrak{H}_l^F$; la réciproque est évidente. Nous sommes ainsi ramenés à étudier *l'image* I de $\mathfrak{H}_a^F$ (ou $\mathfrak{G}_a^F$) par g. Notons que tout point de I est rationnel sur $F(M^0)$.

C. Appelons *paramétrage* d'un sous-groupe I' de P(M) un triplet (K, U, u) composé d'un sous-corps K de F contenant k^0, d'une variété U définie sur K, et d'une application rationnelle u de U dans P(M) définie sur $K(M^0)$ et telle que $u(U^F) = I'$. Le lemme 5 montre que, pour tout point a de I, il existe un paramétrage (K, U, u) tel que $a \in u(U^F)$. De plus, lorsque L est un sous-corps algébriquement clos de F contenant k^0, on peut prendre $K = L$: en effet a provient alors d'un diviseur $d \in \mathfrak{G}_a(W(M))$ algébrique sur $L(M^0)$ et tel qu'il existe un diviseur $D \in \mathfrak{G}_a^F(V)$ satisfaisant à $d = W(M) . D$; il suffit alors de spécialiser D sur L en un diviseur D′ rationnel sur L et d'appliquer le lemme 5.

D. A tout paramétrage (K, U, u) nous allons associer un paramétrage biunivoque. Considérons U et P(M) comme variétés projectives. Soit P un point U^F générique sur K. Les coordonnées homogènes de $u(P)$ peuvent s'écrire sous la forme $(a_i(m, P))$, où les a_i sont des polynômes à coefficients dans K en les coordonnées homogènes de H et en les coordonnées homogènes d'un point Q tel que $k^0(Q) = k^0(M^0)$; les polynômes a_i sont homogènes par rapport à ces deux systèmes de quantités. Notons (m_j) un système maximal de monômes linéairement indépendants sur k_0 (et donc sur F) parmi les monômes de degré convenable en les (m). On peut alors écrire

$$a_i(m, P) = \sum_j x_{ij}(P) m_j,$$

les $x_{ij}(P)$ étant des formes de même degré en les coordonnées homogènes de P, à coefficients dans K. Soit U_1 la variété projective de point générique homogène $(x_{ij}(P))$ sur K. L'application u_1 de U_1 dans P(M) qui fait correspondre au point (x'_{ij}) le point $\left(\sum_j x'_{ij} m_j\right)$ est telle que $u_1(U_1^F) = u(U^F)$, et définit donc un paramétrage (K, U_1, u_1) du même sous-groupe Γ′ que (K, U, u). L'indépendance linéaire des m_j sur F montre que la restriction de u_1 à U_1^F est biunivoque. Le paramétrage (K, U_1, u_1) est appelé le *paramétrage standard associé à* (K, U, u).

Considérons un paramétrage standard (K, U, u) et deux points génériques indépendants P′ et P″ de U^F sur K. Comme $u(U^F)$ est un sous-groupe de P(M), et comme la restriction de u à U^F est biunivoque, il existe un point P et un seul de U^F tel que

$$u(P) = u(P') + u(P'').$$

Soient (x_{ij}) les coordonnées homogènes de P, (a_i) celles de $u(P)$; elles sont liées par $a_i = \sum_j x_{ij} m_j$. On a $a_i \in K(P', P'', M^0)$ puisque $u(P) = u(P') + u(P'')$. Fixons un indice i ; si a_i et les m_j étaient linéairement indépendants sur K(P′, P″), ils le seraient aussi sur F puisque K(P′, P″, M^0) et F sont linéairement disjoints sur K(P′, P″) ; or ceci est contraire à l'existence des x_{ij} dans F. Il existe donc une relation linéaire à coefficients dans K(P′, P″) entre a_i et les m_j, et, en vertu de l'indépendance linéaire des m_j sur $K(P', P'')$, celle-ci est nécessairement de la forme $a_i = \sum_j x'_{ij} m_j \big(x'_{ij} \in K(P', P'')\big)$. En vertu encore de l'indépendance linéaire des m_j sur F, ceci implique $x_{ij} = x'_{ij} \in K(P', P'')$. Ainsi le point P est rationnel sur $K(P', P'')$, et nous avons défini sur U une loi de composition définie sur K ; la restriction de celle-ci à U^F est obtenue en transportant celle de P(M) au moyen de u^{-1} ; par conséquent le composé $x+y$ de deux points quelconques x et y de U^F est déterminé de façon unique. Nous allons montrer qu'un modèle normal de U est une *variété abélienne*. C'est ce qui résulte du lemme suivant (8) :

Lemme 6. — *Soient* U *une variété et* T *une loi de composition sur* U *définies sur* K *telles que, x et y étant deux points génériques indépendants de* U *sur* K *et a et b deux points quelconques de* U, $x+y$ *ait une unique spécialisation sur* $(x, y) \to (a, b)$ *avec référence à* K. *Alors, sur un modèle normal* U′ *dérivé de* U, *la loi de composition* T′ *déduite de* T *est partout définie. Si* T *est une loi de groupe et si* U *est une variété projective (donc complète),* U′ *est une variété abélienne.*

En effet les anneaux locaux des points (a_i, b_j) de $U' \times U'$ correspondant à (a, b) sont les anneaux de fractions $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{m}_{ij}}$ de la clôture intégrale $\mathfrak{o}^i$ de l'anneau local $\mathfrak{o}$ de (a, b) sur $U \times U$ relativement à ses idéaux maximaux $\mathfrak{m}_{ij}$. ([14], th. 7). Par hypothèse l'anneau local du point $(a, b, a+b)$ sur T est entier sur $\mathfrak{o}$ ([7], chap. II, prop. 22). Donc $\mathfrak{O}$ est contenu dans $\mathfrak{o}'$, et le composé de a_i et b_j par T′ est bien déterminé, et a ses coordonnées dans $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{m}_{ij}}$. Par conséquent la loi de composition T′ sur U′ est partout définie (au sens de [8], § 1, n° 3).

E. Nous allons déduire de ceci que, si (K, U, u) est un paramétrage standard, *la dimension de* U *est inférieure à celle de* P(M). En effet soit p la projection du modèle normal U′ sur U ; l'application rationnelle $u \circ p$ est un homomorphisme de la variété abélienne U′ dans la variété abélienne P(M). S'il n'était pas biunivoque, son noyau contiendrait un point t d'ordre fini de U′ distinct de l'élément unité ; mais, comme $t \in U'^F$ et comme la restriction de u à U^F est biunivoque, ceci implique $p(t) = 0$; alors, si x désigne un point

(8) Notre démonstration primitive était incomplète sur ce point. Nous remercions vivement M. W. Chow de nous l'avoir signalé, et de nous avoir indiqué la méthode de normalisation de U (employée par lui dans sa démonstration d'existence de la jacobienne d'une courbe ; cf. [3]).

de U'^F tel que $p(x)$ soit un point normal de U (par exemple un point simple), ceci implique $p(x+t)=p(x)$ contrairement au fait que x est l'unique point de U' se projetant en $p(x)$ sur U.

Ceci montre que, si P est un point générique de U^F sur K, P est purement inséparable sur $K(M^0, u(P))$. Nous ne chercherons pas si P est rationnel sur $K(M^0, u(P))$, c'est-à-dire si u est birationnelle. Nous n'en aurons en effet pas besoin.

F. Nous pouvons alors considérer, parmi les paramétrages standard de sous-groupes de I, un paramétrage (K, U, u) *pour lequel la dimension de* U *soit maximum.* Montrons dans ces conditions que, si (K', U', u') est un paramétrage standard d'un sous-groupe $u'(U'^F)$ de I contenant $u(U^F)$ *on a* $u'(U'^F)=u(U^F)$. Soient en effet L le corps composé $K(K')$, et P un point générique de U^F sur L. Le point $Q=u'^{-1}(u(P))$ est purement inséparable sur $L(M^0, u(P))$ et donc sur $L(M^0, P)$; comme il est rationnel sur F, il est purement inséparable sur $L(P)$. On voit de même que $P=u^{-1}(u'(Q))$ est purement inséparable sur $L(Q)$. Donc les points P et Q ont même dimension sur L ; comme $\dim(U')$, $\leqslant \dim(U)$, ceci montre que Q est point générique de U'^F sur L. Par conséquent $u'^{-1}u$ est une application biunivoque (« birationnelle modulo les racines p-ièmes ») de U^F sur U'^F, et l'on a bien $u(U^F)=u'(U'^F)$.

De ceci l'on déduit que, si (K, U, u) est un paramétrage standard d'un sous-groupe de I tel que $\dim(U)$ soit maximum, alors *l'image* $u(U^F)$ *est* I *tout entier.* En effet nous avons vu que, pour tout point a de I, il existe un paramétrage (K'', U'', u'') d'un sous-groupe de I tel que $u''(U''^F)$ contienne a (alinéa C). On considère alors le paramétrage $(K(K''), U\times U'', w)$ défini par $w(P, P'')=u(P)+u''(P'')$, et le paramétrage standard $(K(K''), U', u')$ qui lui est associé. On a alors $u(U^F)=u'(U'^F)$. Et, puisque $a\in u'(U'^F)$, notre assertion est démontrée.

G. Nous avons déjà obtenu un paramétrage (K, U, u) tel que $u(U^F)=1$. Nous allons montrer que l'on peut en obtenir un qui soit définie *sur une extension algébrique de k.* Pour cela considérons un point générique P de U^F sur K ; il existe une extension algébrique finie k' de k telle que $k'(K, P)$ soit extension régulière de k' ; soit (P') un système fini de quantités tel que $k'(K, P)=k'(P')$, et soit U' le lieu de P' sur k', Considérons le paramétrage (k', U', u') défini par $u'(P')=u(P)$. Son image $u'(U'^F)$ contient $u(U^F)=1$ puisque toute spécialisation de P sur K s'étend à une spécialisation de P'. Elle coïncide donc avec I puisque l'image de n'importe quelle variété par un paramétrage est contenue dans I.

H. Par passage au paramétrage standard (k', U, u) associé à (k', U', u') et par normalisation (alinéa D), nous obtenons une variété abélienne A, telle que A^F soit en correspondance biunivoque avec U^F et avec I. Nous terminerons donc la démonstration de la prop. 6 en montrant que l'isomorphisme de $\mathfrak{H}_a^F/\mathfrak{H}_l^F$ sur A^F ainsi obtenu est *rationnel sur* k'. Pour ce faire il s'agit de montrer que, si K est un sous-corps de F contenant k' et D un diviseur de $\mathfrak{H}_a^F$ rationnel sur K, il lui correspond un point de A^F rationnel sur K. Comme la correspondance entre A^F et U^F est birationnelle et partout biunivoque, il suffit de montrer que le point (x_{ij}) de A^F correspondant à D est rationnel sur K. Soit (a_i) le point de I correspondant à D; il est, d'après l'hypothèse faite sur la variété de Picard P(M), rationnel sur $K(M_0)$. D'après la définition des paramétrages standards (alinéa D), on a les relations $a_i = \sum_j x_{ij} m_j$, les m_j étant des éléments de $k^0(M^0)$ linéairement indépendants sur F. Fixons un indice i ; si les m_j et a_i étaient linéairement indépendants sur K, ils le seraient aussi sur F puisque F et $K(M^0)$ sont linéairement disjoints sur K ; or ceci est contraire à l'existence des $x_{ij} \in F$. Il existe donc, entre a_i et les m_j, une relation linéaire à coefficients dans K ; et celle-ci est nécessairement de la forme $a_i = \sum_i x'_{ij} m_j$ puisque les m_j sont linéairement indépendants sur K. Alors le fait que les m_j sont linéairement indépendants sur F implique $x_{ij} = x'_{ij} \in K$, et (x_{ij}) est bien un point rationnel sur K. C. Q. F. D.

Nous terminerons ce § par un résultat qui nous sera utile :

Lemme 7. — *Soient* V *une variété normale*, A *sa variété de Picard* (*obtenue par fibration et application de la prop.* 6), X *un diviseur de* $\mathfrak{G}_a(V)$ *et* X' *une spécialisation de* X *sur un corps* K *contenant* k' (cf. prop. 6). *Alors le point* x' *de* A *correspondant à* X' *est spécialisation sur* X $\rightarrow$ X' *avec référence à* K *du point* x *de* A *correspondant à* X.

En remplaçant V par une variété birationnellement équivalente, et X et X' par des diviseurs linéairement équivalents pour lesquels la correspondance birationnelle est birégulière, on est ramené au cas où V est une variété fibrée par des courbes avec base linéaire (prop. 3 et 4), et où l'on a $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ (lemme 4, § 5). Notons c l'application canonique de la fibre générique W(M) dans sa jacobienne P(M). Nous supposerons que le demi-domaine universel F contient K et est corps de définition de X et X'. Considérons, sur P(M), les points $g(X) = S\big(c(X . W(M))\big)$ et $g(X') = S\big(c(X' . W(M))\big)$; d'après [6], chap. IV, $g(X')$ est spécialisation de $g(X)$ sur $X \to X'$ avec référence à $K(M^0)$. Il suffit alors de remarquer que l'isomorphisme de A^F sur $I \subset P(M)$ est la restriction d'une application rationnelle et partout biunivoque (« birationnelle modulo les racines p-ièmes » de A dans P(M) (alinéa D).

§ 7. — Démonstration complète du théorème d'existence.

La prop. 6 du § 6 démontre l'assertion *a*) du théorème d'existence (§ 2). Le lemme 7 du § 6 montre aussitôt que l'assertion *c*), relative à l'existence de familles de Poincaré, résulte de l'assertion de birationalité *b*) : il suffit en effet de considérer un point générique a de P(V) sur k', un diviseur X rationnel sur $k'(a)$ et représentant de a, et le système algébrique ayant X pour élément générique sur k'. Nous allons ici démontrer l'assertion *b* pour V, en supposant, par récurrence, qu'elle est vraie pour les variétés de dimension $< \dim(V)$. En vertu des prop. 1, 3, 4 et 5 nous pouvons nous borner au cas où V est *fibrée par des courbes* avec base linéaire et $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ (Cf. § 5). Nous démontrerons d'abord deux lemmes :

Lemme 8 « théorème des diviseurs verticaux ». — *Soient* U *et* S *des variétés complètes normales,* W *une sous-variété de* $U \times S$, f *une fonction sur* W *et* D *un diviseur sur* U *tels que* $\mathrm{proj}_U(W) = U$ *et que* $(f) = (D \times S) . W$. *Il existe alors un entier n et une fonction g sur* U *tels que* $\big(f(P, Q)\big)^n = g(P)$ *pour tout* $P \in U$ *et* $(P, Q) \in W$. *Si, de plus, le corps des fonctions* F(U) *sur* U *est algébriquement fermé dans le corps des fonctions* F(W) *sur* W, *et si* U *est une variété projective, on a* $f \in F(U)$ *et* D *est le diviseur de f sur* U.

Soit K un corps intermédiaire entre F(U) et F(W) et tel que F(W) soit algébrique sur K ; notons L la plus petite extension normale de K contenant F(W). Considérons, pour toute sous-variété A de dimension $\dim(W) - 1$ de W la valuation v_A de F(W) dont A est le centre ([7], chap. VIII, th. 6). D'après l'hypothèse $(f) = (D \times S) . W$, il existe, pour toute A, un élément x_A de F(U) tel que $v_A(f) = v_A(x_A)$;

et l'on peut prendre le même x_A pour toutes les v_A prolongeant la même valuation de K. Prolongeons de toutes les manières possibles les v_A à L par des valuations $v_A^{(j)}$; et soit (f_i) un système complet de conjugués de f sur K. Étant donnés f_i et une valuation v' de L prolongeant une v_A, il existe une valuation v'' de L conjuguée de v' sur K telle que $v'(f_i)=v''(f)$. Comme v' et v'' induisent la même valuation sur K, comme $x_A \in K$, et comme on a pris le même x_A pour toutes les v_A induisant la même valuation sur K, on a

$$v''(f)=v'(f)=v_A(x_A).$$

D'où $v'(f_i)=v'(f)$, et f et f_i ont même ordre pour toutes les $v_A^{(j)}$.

Or, comme W est *complète*, les seuls éléments de F(W) qui sont d'ordre o pour toutes les v_A sont les constantes. Donc les seuls éléments de L qui sont d'ordre o pour toutes les $v_A^{(j)}$ sont aussi les constantes : en effet les coefficients du polynôme minimal d'un tel élément sur F(W) appartiennent à tous les anneaux des valuations v_A et sont donc des constantes. On a par conséquent $f_i=c_i f$, les c_i étant des constantes. Si q désigne le nombre des f_i, il en résulte que $f^q \in K$, et que les c_i sont des racines q-èmes de l'unité.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe suffisamment de corps intermédiaires K tels que $f^q \in K$ pour qu'une puissance de f appartienne à F(U). Le cas où le degré de transcendance d de F(W) sur F(U) est nul étant trivial, nous supposerons $d \geqslant 1$. Comme nous allons seulement utiliser l'hypothèse "$f^q \in K$", qui ne fait intervenir que des corps, nous pouvons remplacer W par une variété birationnellement équivalente et supposer que, (z) désignant un point générique de U et (z, x) un point générique de W sur un corps k, l'idéal des relations algébriques satisfaites par (x) sur $k(z)$ ne soit pas celui d'une variété linéaire ; en particulier, pour presque tout point (z') de U, l'ensemble algébrique $B(z')$ des points de W se projetant en (z') n'est pas une variété linéaire. Considérons alors des éléments b_{ij} du domaine universel, et formons les d combinaisons linéaires $y_j=\sum_i b_{ij}x_i$; pour presque tout choix des b_{ji}, F(W) est extension algébrique de degré fixe q de F(U)(y). Comme deux points quelconques de $B(z)$ peuvent être joints par une variété linéaire $\sum_i b_{ij}x_i - c_j = 0$, l'hypothèse $f^q \in F(U)(y)$ entraîne que f^q est constante sur $B(z)$. En supposant que k est aussi corps de définition de f, ceci implique que $f^q(z, x)$ est purement inséparable sur $k(z)$. D'où l'existence d'un entier n tel que $f^n \in F(U)$.

Lorsque F(U) est algébriquement fermé dans F(W) (et, plus généralement lorsque F(W) ne contient aucune extension cyclique de F(U)), on en déduit que $f \in F(U)$. Pour démontrer la dernière assertion, posons $E = (f) - D$; on a $(E \times S).W = 0$. Pour en conclure que $E = 0$, il suffit de faire voir que $E.L = 0$, L étant une variété linéaire générique. On est ainsi ramené [13] au cas où U est une courbe normale et où E est une combinaison linéaire de points. Par construction, pour tout point P figurant dans E, $(P \times S).W$ est défini ; et, si $P \neq P'$, $(P \times S).W$ et $(P' \times S).W$ n'ont pas de composante commune. Donc $(E \times S).W = 0$ entraîne $E = 0$.

Lemme 9. — *Soient* U' *une sous-variété d'un produit* $U \times S$ *se projetant sur* U, *k un corps de définition de* U, S *et* U', *et p la fonction projection de* U' *sur* U. *Si* X *est un diviseur sur* U *tel que, pour toute composante* B *de* X, *l'une au moins des composantes* B'_i *de* $\overset{-1}{p}(B)$ *se projetant sur* B *ait coefficient* 1 *dans* $\overset{-1}{p}(B)$, *et si* $\overset{-1}{p}(X)$ *est rationnel sur un corps* K *contenant k, alors* X *est rationnel sur* K. *Lorsque* U, S *et* U' *sont normales et que le corps des fonctions sur* U' *est extension séparable du corps des fonctions sur* U, *il existe une extension algébrique finie k' du plus petit corps k de définition de* U, S *et* U' *satisfaisant à la condition suivante: tout diviseur* X *sur* U *tel que* $\overset{-1}{p}(X)$ *soit rationnel sur un corps* K *contenant k', est aussi rationnel sur* K.

Il est clair que X est invariant pour tout automorphisme du domaine universel sur K ; donc X est purement inséparable sur K. Posons $X = \sum_j n_j B^{(j)}$. Dans les hypothèses de la première assertion on a $\overset{-1}{p}(B^{(j)}) = B'_j + Y'_j$, où B'_j est une variété se projetant sur $B^{(j)}$ et où Y'_j est un diviseur positif n'ayant pas B'_j pour composante. Ainsi, comme $\overset{-1}{p}(X) = \sum_j n_j B'_j + \sum_j n_j Y'_j$ est rationnel sur K et comme les B'_j sont toutes distinctes et ne figurent pas dans les Y'_j, le coefficient n_j est multiple de l'ordre d'inséparabilité de B'_j sur K ([7], chap. VII, n° 6). Or, comme $B^{(j)}$ est projection de B'_j, son ordre d'inséparabilité sur K divise celui de B'_j ([7], chap. I, prop. 27). Donc X est rationnel sur K, et la première assertion est démontrée.

Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que $\overset{-1}{p}(X)$ est défini pour tout diviseur X sur U et que dans l'hypothèse de séparabilité qui est faite, les sous-variétés B dimension dim(U) — 1 de U telles que toutes les composantes de $\overset{-1}{p}(B)$ se projetant sur B aient des coefficients > 1 dans $\overset{-1}{p}(B)$ sont en nombre fini et algébriques sur k : ce sont en effet des composantes de la projection sur U du contour apparent de U', Il suffit alors de prendre pour k' un corps de définition de ces composantes.

Démontrons maintenant l'assertion b) du théorème d'existence dans un cas particulier :

Proposition 7. — *Soit* V^n *une sous-variété normale d'un produit* $B^{n-1} \times S_N$ *d'une variété projective normale* B *et d'un espace projectif* S_N. *Supposons que, pour tout point générique* M *de* B, *la fibre* W(M) *soit une courbe normale et qu'il existe une extension algébrique finie* k *du plus petit corps de définition de* V *et* B *telle que la jacobienne de* W(M) *et une application canonique* c *de* W(M) *dans sa jacobienne soient définies sur* k(M). *Supposons aussi que l'on a* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ (*c'est-à-dire que tout diviseur* E *sur* V *de projection algébrique nulle sur* B *est de la forme* $\overset{-1}{p}(e)$, *e étant un diviseur sur* B ; cf. § 5), *et que le théorème d'existence de la variété de Picard est vrai pour* B. *Il existe alors une extension algébrique finie* k' *de* k, *une variété abélienne* A *définie sur* k', *un isomorphisme birationnel sur* k' *de* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *sur* A, *et un isomorphisme birationnel sur* k' *de* $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ *sur le produit* $A \times P(B)$ *de* A *et de la variété de Picard* P(B) *de la base* B.

A. Démontrons d'abord la *birationalité de l'isomorphisme de* $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ *sur* A. D'après l'alinéa G du § 6, l'image I de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ dans la jacobienne générique P(M) peut être obtenue par un paramétrage standard (k'', U, u), où k'' est une extension algébrique finie de k. Si i désigne l'application de la variété abélienne A, obtenue par application de la prop. 6, § 6, sur U, l'application $u \circ i$ de A dans P(M) est rationnelle sur k''(M) : si a est un point de A rationnel sur un corps K contenant k'', le point $u(i(a))$ de P(M) est rationnel sur K(M). Comme l'application canonique c de W(M) dans P(M) est définie sur K(M), le point $u(i(a))$ provient d'un diviseur d sur W(M) rationnel sur K(M). Alors le diviseur D sur V, lieu sur K de d ([7], chap. VII, th. 12), est rationnel sur K et satisfait à D . W(M) $= d$. C'est donc un représentant de l'élément de $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ correspondant à a. Nous supposerons que k' contient k'' (condition C_1).

B. Étant donné un point générique a de A sur k', choisissons un diviseur D représentant de a et rationnel sur $k'(a)$. Notons o l'élément neutre de A; on peut trouver une spécialisation D' de D sur $a \to o$ avec référence à k'; et, comme le point o est rationnel sur k', on peut supposer D' rationnel sur k'. Posons $D(a) = D - D'$; le diviseur $D(a)$ est algébriquement équivalent à o, et le point qui lui correspond dans $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ est a. Étant donné un point quelconque a' de A, il existe une spécialisation $D(a')$ de $D(a)$ sur $a \to a'$ avec référence à k', et l'on peut supposer $D(a')$ rationnel sur $k'(a')$. D'après le lemme 7 du § 6, le point de A correspondant à $D(a')$ est nécessairement a'.

C. Étant donné un diviseur $E \in \mathfrak{G}_a$, notons $v(E)$ le point correspondant de A. Le diviseur $E - D\big(v(E)\big)$ appartient au groupe $\mathfrak{H}_l$ et est donc de la forme $(e) + \overset{-1}{p}(E')$, où e est une fonction sur V et E' un diviseur sur B. Démontrons les points suivants :

a) E' *est algébriquement équivalent à* o *sur* B. Remarquons d'abord que E' n'est pas déterminé de façon unique par E, mais que, en vertu du lemme 8, deux diviseurs E' et E'' correspondant à E sont linéairement équivalents sur B. Comme $E \in \mathfrak{G}_a$, il existe un diviseur $\bar{E} \in \mathfrak{G}_a$ dont E et le diviseur o sont des spécialisations. Écrivons $\bar{E} - D\big(v(\bar{E})\big) = (\bar{e}) + \overset{-1}{p}(\bar{E}')$. Par spécialisations de cette égalité sur $\bar{E} \to E$ et sur $\bar{E} \to o$, on obtient, en remarquant qu'une spécialisation d'un diviseur de $\mathfrak{G}_l$ est un diviseur de $\mathfrak{G}_l$ (lemme 7, § 6), les égalités $E - D\big(v(E)\big) = (e') + \overset{-1}{p}(E')$ et $o = (e'') + \overset{-1}{p}(E'')$, E' et E'' étant des spécialisations de $\bar{E}'$. On déduit de la seconde et du lemme 8 que l'on a $E'' \in \mathfrak{G}_l(B)$ et donc $E'' \in \mathfrak{G}_a(B)$. Ceci montre que $E' \in \mathfrak{G}_a(B)$. Et la remarque faite au début montre que tout autre diviseur sur B correspondant à E est aussi algébriquement équivalent à o.

b) *La classe de* E' mod. $\mathfrak{G}_l(B)$ *ne dépend que de celle de* E mod. $\mathfrak{G}_l$. Soit en effet F un diviseur linéairement équivalent à E. Comme $v(E) = v(F)$, on déduit des égalités

$$E - D\big(v(E)\big) = (e) + \overset{-1}{p}(E'), \qquad F - D\big(v(F)\big) = (f) + \overset{-1}{p}(F')$$

que l'on a $\overset{-1}{p}(E' - F') \in \mathfrak{G}_l$. D'où $E' - F' \in \mathfrak{G}_l(B)$ en vertu du lemme 8.

c) *Si* E *est rationnel sur un corps* K *contenant* k', *on peut prendre* E' *rationnel sur* K. En effet $E - D\big(v(E)\big)$ est alors rationnel sur K d'après A et B. Sur la fibre générique $W(M)$ le diviseur

$$\big(E - D(v(E))\big) . W(M)$$

est linéairement équivalent à O, et c'est donc le diviseur d'une fonction e_M sur $W(M)$ définie sur $K(M)$. En désignant par P un point générique de $W(M)$ sur $K(M)$, la fonction sur V définie sur K par $e(M, P) = e_M(P)$ satisfait à $(e_M) = (e) . W(M)$. Ainsi le diviseur $E - D\big(v(E)\big) - (e)$ est rationnel sur K et est de la forme $\bar{p}^1(E')$. En imposant à k' la condition de permettre l'application de la seconde assertion du lemme 9 à la projection de V sur la base B (condition C_2), on en conclut que E' est rationnel sur K.

D. Notons $P(B)$ la variété de Picard de B, et supposons que l'isomorphisme de $\mathfrak{G}_a(B)/\mathfrak{G}_l(B)$ sur $P(B)$ soit birationnel sur k' (condition C_3). Pour tout diviseur $E \in \mathfrak{G}_a$, écrivons

$$E - D\big(v(E)\big) = (e) + \bar{p}^1(E')$$

et désignons par $h(E)$ l'élément de $P(B)$ correspondant à E'. L'élément $\big(v(E), h(E)\big)$ de $A \times P(B)$ ne dépend, d'après C, que de la classe d'équivalence linéaire de E. On a donc défini une application $\alpha \to \big(\bar{v}(\alpha), \bar{h}(\alpha)\big)$ de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ dans la variété abélienne $A \times P(B)$, qui a les propriétés suivantes :

a) Elle est *rationnelle sur* k', d'après C, *c*) et la condition C_3.

b) Elle est *biunivoque*. En effet, si E et F sont des diviseurs sur V tels que $v(E) = v(F)$ et $h(E) = h(F)$, on déduit des égalités

$$E - D\big(v(E)\big) = (e) + \bar{p}^1(E') \qquad \text{et} \qquad F - D\big(v(F)\big) = (f) + \bar{p}^1(F')$$

que l'on a $E - F \sim \bar{p}^1(E' - F')$, et donc $E - F \sim 0$ puisque $E' \sim F'$.

c) C'est une application *sur*, et elle est *birationnelle sur* k'. Soit en effet (a, b) un point de $A \times P(B)$ rationnel sur un corps K contenant k'. Prenons un diviseur $E' \in \mathfrak{G}_a(B)$ représentant de b et rationnel sur K, ce qui est possible d'après C_3. D'après l'alinéa B le diviseur $D(a)$ est un représentant de a rationnel sur K. Considérons alors le diviseur $E = D(a) + \bar{p}^1(E')$, qui est rationnel sur K. On a $v(E) = v\big(D(a)\big) = a$. Et d'autre part

$$E - D\big(v(E)\big) = E - D(a) = \bar{p}^1(E'),$$

ce qui montre que $h(E) = b$.

d) C'est un *isomorphisme* pour les structures de groupes abéliens de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ et $A \times P(B)$. En effet, d'après la prop. 6 du § 6, il existe un isomorphisme de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur une variété abélienne $\bar{A}$, et l'on peut supposer que cet isomorphisme est rationnel sur k' (condition C_4). Soit i l'application biunivoque de $A \times P(B)$ sur $\bar{A}$ composée de cet isomorphisme et de l'application réciproque de

$$a \rightarrow \big(v(a), \bar{h}(a)\big)\,(a \in \mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l).$$

D'après la construction précédente et le lemme 7 du § 6, une spécialisation $(a, b) \rightarrow (a', b')$ sur un corps K contenant k' d'un élément (a, b) de $A \times P(B)$ se prolonge en la spécialisation $i(a, b) \rightarrow i(a', b')$; donc i est une application *rationnelle* définie sur k' de la variété abélienne $A \times P(B)$ sur la variété abélienne $\bar{A}$. Comme $i(0, 0) = 0$, cette application est un homomorphisme ([8], § III, th. 9), et donc un isomorphisme pour les structures de groupe. Ceci démontre notre assertion.

E. Enfin, comme les conditions C_1, C_2, C_3, C_4 imposées en cours de route à l'extension k' de k auraient pû être imposées une fois pour toutes dès le début de la démonstration, la proposition 7 est démontrée.

Passons maintenant à la démonstration du cas général :

PROPOSITION 8. — *Soit* V^n *une variété normale d'un produit* $B^{n-1} \times S_N$ *d'une variété linéaire* B *et d'un espace projectif, se projetant sur* B. *Soit* k *un corps de définition de* V. *Supposons que, pour tout point générique* M *de* B *sur* k, *la fibre* $W(M) = (M \times S_N).V$ *soit une courbe normale, et que les groupes de diviseurs* H *et* H' *soient égaux* (§ 5). *Supposons aussi que le théorème d'existence de la variété de Picard* (§ 2) *soit vrai pour les variétés de dimension* $n - 1$. *Il existe alors une extension algébrique finie* k' *de* k, *une variété abélienne* A *définie sur* k', *et un isomorphisme birationnel sur* k' *de* $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ *sur* A.

Comme dans la prop. 7 les conditions imposées à k' seront énumérées en cours de route. La prop. 8 est un cas particulier de la prop. 7 lorsque l'application canonique de la fibre générique W(M) dans sa jacobienne P(M) est définie sur un corps de la forme $k'(M)$. Cependant il n'en est pas ainsi en général ; on peut seulement dire, d'après Chow [3], que la jacobienne P(M) est définie sur $k(M)$, et qu'une application canonique est définie sur toute extension de k(M sur laquelle un point de W(M) est rationnel. Montrons que cette extension peut être choisie *algébrique, finie et séparable :* en effet, parmi les coordonnées (y_i) d'un point générique de W(M) sur $k(M)$, on peut choisir une, y_1 par exemple, telle que $k(M)(y)$ soit séparablement algébrique sur $k(M)(y_1)$ ([7], chap. I, th. 2); il suffit alors de spécialiser y_1 en une quantité y'_i séparable sur $k(M)$ et suffisamment générale, pour obtenir un point de W(M) séparable sur $k(M)$.

A. Ceci étant, nous allons introduire une *variété fibrée auxiliaire* V^0 à laquelle la prop. 7 sera applicable. Soit K^0 une extension algébrique, finie et séparable de $k(M)$ sur laquelle une application canonique de W(M) dans sa jacobienne soit définie. Nous supposerons (condition C_1) que k' contient la fermeture algébrique de k dans K^0. Désignons par m le degré de $K'(M^0)$ sur $k'(M)$. On a alors $k'(K^0) = k'(M^0)$ où M^0 est point générique sur k' d'une variété normale B^0. Soit S_N l'espace projectif dans lequel est plongée W(M), et soit P un point générique de W(M) sur $k(M)$ (et donc sur $k'(M^0)$); considérons, dans le produit $B^0 \times S_N$, la variété lieu du point (M^0, P) sur k'. En remplaçant cette variété par un modèle normal convenable V^0 (cf. prop. 4, § 3), on peut supposer que V^0 est une variété fibrée de base B^0, et de fibre générique $W^0(M^0)$ en correspondance birationnelle et birégulière T définie sur $k'(M^0)$ avec W(M) — et que la fonction q sur V^0 à valeurs dans V qui au point $(M^0, T(P))$, fait correspondre (M, P) est une projection de V^0 sur V. Nous noterons $\mathfrak{G}^0$, $\mathfrak{G}^0_a$, $\mathfrak{G}^0_l$, $\mathfrak{H}^0$, $\mathfrak{H}'^0$, $\mathfrak{H}^0_a$, $\mathfrak{H}^0_l$ les groupes de diviseurs sur V^0 respectivement analogues à $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{G}_l$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}_a$, $\mathfrak{H}_l$. Comme la fibre $W^0(M'^0)$ de V^0 est excédentaire ou décomposée en même temps que la fibre correspondante W(M') de V, on a $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}'^0$. Enfin, par construction, une application canonique de la fibre générique $W^0(M^0)$ dans sa jacobienne est définie sur $k'(M^0)$. La prop. 7 est ainsi applicable à V^0. Nous supposerons (condition C_2) que la variété de Picard $P(V^0)$ de V^0 est définie sur k', et que l'isomorphisme i de $\mathfrak{G}^0_a/\mathfrak{G}^0_l$ sur $P(V^0)$ est birationnel sur k'.

B. Considérons l'homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}_0$ qui, au diviseur D sur V, fait correspondre le diviseur $\overset{-1}{q}(D)$ sur V^0. Cet homomorphisme est rationnel sur k, et induit des homomorphismes de $\mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{G}_l$, $\mathfrak{H}_a$, $\mathfrak{H}_l$ dans $\mathfrak{G}^0_a$, $\mathfrak{G}^0_l$, $\mathfrak{H}^0_a$, $\mathfrak{H}^0_l$ respectivement ; par passage aux quotients il définit donc un homomorphisme q' rationnel sur k, de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$

dans $\mathfrak{G}_a^0/\mathfrak{G}_l^0$. Montrons que q' est un *isomorphisme*. En effet, si $D \in \mathfrak{G}_a$ et si $\bar{q}^1(D) \in \mathfrak{G}_l^0$, $\bar{q}^1(D) . W^0(M^0)$ est un diviseur linéairement équivalent à o, et il en est donc de même de $D . W(M)$. Si on désigne par K un corps de définition de D contenant k et par f_M une fonction sur W(M) définie sur K(M) et ayant $D . W(M)$ pour diviseur, la fonction f sur V définie sur K et prolongeant f_M satisfait à $(D - (f)) . W(M) = o$, et on a donc $D - (f) \in H$. Ainsi $D - (f)$ est de la forme $\bar{p}^1(e)$, e désignant un diviseur sur B et p la projection de V sur B. Comme D est de degré o, il en est de même de e, ce qui implique $e \in \mathfrak{G}_l(B)$ puisque B est une variété linéaire. Par conséquent $D \in \mathfrak{G}_l$, d'où le résultat annoncé. Remarquons de plus que, comme $\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_l$ (§ 6, G), et donc aussi $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ (§ 5), peut être paramétré par une variété abélienne U définie sur une extension algébrique finie de k (que nous supposerons contenue dans k' ; condition C_3), l'isomorphisme $i \circ q'$ de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ dans $P(V^0)$ est rationnel sur k', et son image est une sous-variété abélienne A de $P(V^0)$.

C. Rappelons que, si X est un diviseur sur V de degré assez élevé, tout diviseur E sur V de degré o est linéairement équivalent à un diviseur de la forme $D - X$ où D est positif (ceci se déduit sans peine des résultats obtenus au § 6). Pour X de degré assez élevé le diviseur $X^0 = \bar{q}^1(X)$ possède la même propriété sur V^0. Nous supposerons X fixé une fois pour toutes, satisfaisant à ces deux conditions, et rationnel sur k'. D'après un théorème démontré par Bertini dans le cas classique et étendu par Chow au cas général, les systèmes algébriques irréductibles de diviseurs sur V (resp. V^0) de même degré que X (resp. $\bar{q}^1(X)$) sont en nombre fini et algébriques sur k (cf. [6], chap. IV) ; nous supposerons (condition C_4) qu'ils sont tous définis sur k'. Nous identifierons ici un système de diviseurs sur V ou V^0 avec sa variété image dans l'espace projectif des coordonnées de Chow ; cette identification n'interfère pas avec les questions de rationalité puisque, d'après Chow [2], tout diviseur D sur V admet un plus petit corps contenant k et sur lequel il est rationnel et que ce corps s'obtient par adjonction à k des rapports des coordonnées de Chow de D.

Soient maintenant a un point de la sous-variété abélienne A de $P(V^0)$ (alinéa B), E^0 un représentant rationnel sur $K = k'(a)$ de la classe $i^{-1}(a)$ de $\mathfrak{G}_a^0/\mathfrak{G}_l^0$, et E un représentant de la classe $(i \circ q')^{-1}(a)$ de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$. Soient D un diviseur positif sur V tel que $E - X + D \in \mathfrak{G}_l$, et D_0 un diviseur positif sur V^0 tel que $E^0 - X^0 + D^0 \in \mathfrak{G}_l$; on peut supposer D^0 rationnel sur K $\big([7]$, chap. VIII, th. $10\big)$; comme $X^0 = \overset{-1}{q}(X)$, les diviseurs D^0 et $\overset{-1}{q}(D)$ sont linéairement équivalents sur V^0. Considérons le système linéaire complet S (resp. S^0) des diviseurs positifs sur V (resp. V^0) linéairement équivalents à D (resp. D^0) (ces systèmes étant considérés comme variétés de diviseurs au sens précisé ci-dessus) ; l'image S' de S par $\overset{-1}{q}$ est nécessairement contenue dans S^0. Désignons par T l'un des systèmes irréductibles maximaux de diviseurs sur V de même degré que D et qui contienne D ; soit T^0 son image par $\overset{-1}{q}$. Montrons que l'on a $S' = T^0 \cap S^0$. En effet l'inclusion $S' \subset T^0 \cap S^0$ est évidente. Inversement soit F^0 un élément de $T^0 \cap S^0$; il est de la forme $\overset{-1}{q}(F)$. avec $F \in T$, et il nous suffit de montrer que $F \in S$. Or, comme $F^0 \in S^0$, on a $E^0 - X^0 + F^0 \in \mathfrak{G}_l^0$, et le diviseur $(E^0 - X^0 + F^0) . W^0(M^0)$ est linéairement équivalent à o sur $W^0(M^0)$; il en est donc de même du diviseur $(E - X + F) . W(M)$ sur $W(M)$, et $E - X + F$ est linéairement équivalent à un diviseur de la forme $\overset{-1}{p}(f)$, où f est un diviseur sur B et où p désigne la projection de V sur B ; comme E et $F - X$ sont de degré o, il en est de même de f ; comme B est une variété linéaire, on a $f \in \mathfrak{G}_l(B)$, d'où $E - X + F \in \mathfrak{G}_l$ et $F \in S$.

Représentons maintenant le système linéaire S^0 par un espace projectif L^0, en faisant correspondre à chaque élément Y^0 de S^0 la fonction f_{Y^0} (définie à un facteur constant près) telle que $(f_{Y^0}) = Y^0 - D^0$, et en remarquant que toutes ces fonctions sont de la forme $\sum_i c_i f_i$, les c_i étant des constantes et les f_i des fonctions définies sur $K = k'(a)$ $\big([7]$, chap. VIII, th. $10\big)$. Le système S^0 et l'espace L^0 sont en correspondance birationnelle définie sur K. Au sous-système linéaire S' de S^0 correspond une sous-variété linéaire L de L^0. Comme $S' = T^0 \cap S^0$, L est, en tant qu'ensemble algébrique, normalement algébrique sur K ; par conséquent la variété linéaire L est définie sur un corps K' *purement inséparable* sur K. Il en résulte que L contient un point rationnel sur K', auquel correspond un diviseur Y^0 de S' rationnel sur K'. Ce diviseur Y^0 est de la forme $\overset{-1}{q}(Y)$, avec $Y \in S$; en imposant à k' la condition de rendre possible l'application du lemme 9 à la projection q de V^0 sur V (condition C_5) (ceci est possible puisque le corps des fonctions sur V^0 est extension séparable du corps des fonctions sur V), on en déduit que Y est rationnel sur K'. Par conséquent l'élément a de la variété abélienne A admet un représentant $X - Y$ *purement inséparable* sur $K = k'(a)$. En particulier, sur un corps de caractéristique nulle, l'isomorphisme $i \circ q'$ de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur A est birationnel sur k', ce qui démontre la prop. 8 dans ce cas.

D. Pour traiter le cas d'un corps de base de caractéristique $p \neq 0$, nous allons *changer de variété abélienne*. Soit d'abord a un point générique de A sur k' ; considérons la variété linéaire L correspondante (alinéa C) ; soit K' le plus petit corps définition de L contenant $k'(a)$. En remplaçant éventuellement k' par une extension purement inséparable et en remarquant que K' est purement inséparable sur $k'(a)$, on peut supposer que K' est une extension régulière de k' (condition C_6). Écrivons alors $K' = k'(a_i)$, où a_i est point générique sur k' d'une variété A_i. Pour un choix convenable de A_i, l'application rationnelle r de A_i sur A définie sur k' par $r(a_i) = a$ est partout définie, et donc partout biunivoque : on peut par exemple prendre pour coordonnées homogènes de a_i des racines p^n-ièmes de formes convenables et toutes de même degré d (multiple de p^n) en les coordonnées homogènes de a, ainsi que les monômes de degré dp^{-n} en les coordonnées homogènes de a.

Notons h l'application $r^{-1} \circ i \circ q'$ de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur A_i. Pour tout point a' de A_i nous noterons $S(a')$ le système linéaire des diviseurs positifs Y tels que $Y - X$ soit représentant de $h^{-1}(a')$, et $L(a')$ la variété linéaire correspondante (cf. alinéa C). On a vu à l'alinéa C que $L(a')$ est purement inséparable sur $k'\big(r(a')\big)$. D'après la construction de A_i on a $k'\big(r(a'), L(a')\big) = k'(a')$ pour certain point générique a' de A_i sur k' ; par transport de structure cette égalité est vraie pour tout point générique de A_i sur k'.

Nous allons montrer que la loi de composition sur A_i définie par $r^{-1}(a) + r^{-1}(b) = r^{-1}(a+b)$ $(a, b \in A)$ est *rationnelle et définie sur* k'. Prenons en effet pour a et b des points génériques indépendants de A sur k', et notons a' et b' les points génériques correspondants de A_i. Comme $k'\big(a, L(a')\big) = k'(a')$ et $k'\big(b, L(b')\big) = k'(b')$, il existe des représentants E_a et E_b de $h^{-1}(a')$ et $h^{-1}(b')$ rationnels sur $k'(a')$ et $k'(b')$. Alors $E_a + E_b$ est représentant de $h^{-1}\big(r^{-1}(a+b)\big)$, et le plus petit corps de définition de $L\big(r^{-1}(a+b)\big)$ est contenu dans $k'(E_a + E_b) \subset k'(a', b')$. Or, comme $r^{-1}(a+b)$ est générique, et comme $k'(a+b) \subset k'(a', b')$, on a

$$k'\big(r^{-1}(a+b)\big) = k'\Big(a+b,\ L\big(r^{-1}(a+b)\big)\Big) \subset k'(a', b').$$

Notre assertion est donc démontrée.

Comme r est une application biuninoque de A_i sur A, le composé de deux points quelconques de A_i est déterminé de façon unique. Le lemme 6 du § 6 montre donc que l'on peut supposer que A_i est une *variété abélienne*. Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'isomorphisme h de $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ sur A_i est *birationnel sur k'*.

Soit en effet b' un point quelconque de A_i. D'après l'alinéa C on a $k'\big(L(b'), r(b')\big) \subset k_i(E)$ pour tout représentant E de $h^{-1}(b')$ $\big([7]$, chap. VIII, th. $10\big)$, l'égalité étant vraie pour au moins un diviseur E. Considérons un point générique a' de A_i sur $k'(b')$; comme a' et $a'+b'$ sont des points génériques de A_i sur k', il existe des diviseurs D et E, représentants de $h^{-1}(a')$ et $h^{-1}(a'+b')$, et tels que $k'(a')=k'(D)$ et $k'(a'+b')=k'(E)$. Le corps $k'\big(L(b'), r(b')\big)$ est purement inséparable sur $k'\big(r(b')\big)$; il est contenu dans $k'(E-D)$ et donc dans $k'(a', a'+b')=k'(a', b')$ qui est extension régulière de $k'(b')$; on a par conséquent $k'\big(L(b'), r(b')\big) \subset k'(b')$, et $h^{-1}(b')$ admet un représentant rationnel sur $k'(b')$. Inversement considérons un représentant D' de $h^{-1}(b')$; comme $D+D'$ est représentant de $h^{-1}(a'+b')$, on a $k'(a'+b') \subset k'(D+D') \subset k'(D, D')=k'(a', D')$, d'où $k'(b') \subset k'(a', a'+b') \subset k'(a', D')$; or $k'(b')$ est purement inséparable sur $k'(D')$; en prenant a' générique sur $k'(b', E')$ ce qui est loisible, l'inclusion $k'(b') \subset k'(a', D')$ entraine que b' est rationnel sur $k'(D')$. La birationnalité de h sur k' est ainsi démontrée.

Comme les conditions C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 imposées en cours de route à l'extension k' auraient pu être imposées une fois pour toutes au début de la démonstration (ceci moyennant de nombreuses redites), la proposition 8 est démontrée, et avec elle le théorème d'existence de la variété de Picard.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASTELNUOVO. *Rendic. Acad. Lincei.*, 1894.

[2] CHOW. On the defining field of a divisor in an algebraic variety. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1, 797-799, 1950.

[3] CHOW. Résultats non publiés sur les jacobiennes.

[4] IGUSA. On the Picard varieties attached to algebraic varieties. *Amer. J. Math.*, 74, 1-22, 1952.

[5] NÉRON. Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion du rang d'une courbe algébrique dans un corps. *Bull. Soc. Math. de France.*, 80, 1952.

[6] SAMUEL. La notion de multiplicité. *J. Math. pures appl.*, 1951.
[7] WEIL. Foundations of algebraic geometry. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, 29, New-York, 1946.
[8] WEIL. Variétés abéliennes et courbes algébriques. Paris (Hermann), 1948.
[9] WEIL. Variétés abéliennes, pp. 125-127, *Coll. Algèbre et Théorie des Nombres*, Paris (C. N. R. S.), 1950.
[10] WEIL. Criteria for linear equivalence. *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, 1952.
[11] WEIL. *On Picard Varieties Amer. J. Math.*, 74, 805-894, 1952.
[12] MATSUSAKA. The theorem of Bertini. *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. A.*, 26, 51-62, 1950.
[13] SEIDENBERG. The hyperplane sections of a normal variety. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 69, 357-386, 1950.
[14] ZARISKI. Foundations of a general theory of birational correspondences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53, 490-542, 1943.

(Parvenu aux Annales le 2 octobre 1952.)