ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE GARANÇON

Feuilletages transversalement analytiques de codimension 1 admettant une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 4 (1972), p. 271-287

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_271_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 271-287.

FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT ANALYTIQUES DE CODIMENSION 1 ADMETTANT UNE TRANSVERSALE FERMÉE QUI COUPE TOUTES LES FEUILLES

par Maurice GARANÇON

1. Introduction.

Ce travail est inspiré par une note de Mr Claude Lamoureux, dans les comptes rendus de l'académie des sciences [3]; dans cette note on trouve, entre autres le résultat suivant : « Si M est une variété connexe, sans bord, de dimension $n \geqslant 3$ et $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^2 et codimension 1, transversalement orientable, sans holonomie, et s'il existe une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\mathcal{F}$, alors le groupe abstrait $(i_F)_*(\pi_1(F))$ est indépendant de la feuille F. » (i_F désignant l'inclusion de la feuille F dans la variété M.)

Si nous appelons $\varphi_F : \pi_1(F, x) \to G_0$ une représentation d'holonomie de la feuille F, dans le groupe G_0 des germes de difféomorphismes de la droite réelle, préservant l'origine, nous montrons que le résultat ci-dessus admet la généralisation suivante : « Si $\mathcal{F}$ est transversalement analytique, $\pi_1(M)$ abélien, et s'il existe une transversale fermée coupant toutes les feuilles, le groupe abstrait $(i_F)_*(\text{Ker } \varphi_F)$ est indépendant de la feuille F. »

Ce résultat n'a rien de surprenant, puisque dire qu'une feuille n'a pas d'holonomie c'est dire que $\text{Ker } \varphi_F = \pi_1(F)$.

On démontre de plus que les feuilles à holonomie non nulle sont fermées et que le groupe abstrait $(i_F)_*(\pi_1(F))$ est le même pour toutes ces feuilles.

2. Généralités.

Nous commençons par rappeler quelques résultats, qui nous seront utiles par la suite. D'abord la proposition bien connue :

2.1. PROPOSITION. — *Soit* M *une variété munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de classe* C^r, $0 \leqslant r \leqslant \omega$, *et de codimension* q. *Considérons* $p : \tilde{M} \to M$, *un revêtement connexe de* M. *Alors* $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ *est un feuilletage de* $\tilde{M}$, *de classe* C^r *et codimension* q, *dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de* $\mathcal{F}$.

Dans la suite, et sauf mention du contraire, nous ne considérerons que des feuilletages de classe C^r, $2 \leqslant r \leqslant \omega$, de codimension 1, transversalement orientables.

Nous appellerons :

i_F l'inclusion d'une feuille F dans la variété M.

$(i_F)_*$ l'homomorphisme induit entre $\pi_1(F, x)$ et $\pi_1(M, x)$, x étant un point de F.

φ_F une représentation d'holonomie de $\pi_1(F, x)$ dans le groupe G_0 des germes de difféomorphismes de la droite réelle, qui préservent l'origine. Dans ces conditions les deux énoncés suivants sont équivalents :

i) $\mathrm{Ker}\,(i_F)_* \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi_F$ pour toute feuille F de $\mathcal{F}$.

ii) Toute transversale fermée, de $\mathcal{F}$, représente un élément d'ordre infini du groupe fondamental de M.

Pour la démonstration voir [1] théorème 2.4.

Nous appellerons condition (A), l'une quelconque des deux conditions équivalentes ci-dessus.

2.2. PROPOSITION. — (voir [1] cor. 2.7). — *Soit* M *une variété munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$, *de codimension* 1, *transversalement orientable, et qui satisfait à la condition* (A). *Soit* p : $\tilde{M} \to M$ *un revêtement connexe de* M, *alors le feuilletage* $\tilde{\mathcal{F}}$ *de* $\tilde{M}$ *satisfait à la condition* (A).

Si α est un lacet basé en un point x, nous appelons $G(\alpha, x)$ le sous groupe de $\pi_1(M, x)$ engendré par la classe d'homotopie de α.

2.3. Proposition. — ([1]) prop. 2.12). — *Soit* M *une variété munie d'un feuilletage de codimension* 1, *qui satisfait à la condition* (A). *Soit* α *une transversale fermée coupant une feuille* F *en un point* x. *On a alors*

$$(i_F)_* \pi_1(F, x) \cap G(\alpha, x) = \{e\}.$$

Si maintenant nous appelons C_x le commutateur du groupe $\pi_1(M, x)$, on a

2.4. Corollaire. — *Avec les mêmes hypothèses que la proposition* 2.3, *si une feuille* F *vérifie la relation*

$$C_x \subseteq (i_F)_* \pi_1(F, x)$$

il n'y a pas de lacet dans F, *homologue à une transversale fermée coupant* F.

Preuve. — Supposons qu'il existe un lacet γ basé au point x, et contenu dans la feuille F, homologue à une transversale fermée α qui coupe F en un point y. Considérons l_{yx} une courbe sur F, joignant le point y au point x. Le lacet $\gamma_1 = l_{yx*} \gamma_* l_{yx}^{-1}$ est basé en y, et est homologue au lacet γ. Finalement α et γ_1 sont homologues. Il existe donc un élément c, dans C_y, tel que $\gamma_{1*}c$ et α soient homotopes avec point de base y. Comme c est homotope à un lacet dans F la classe d'homotopie de α est dans

$$(i_F)_* \pi_1(F, y) \cap G(\alpha, y).$$

D'après la proposition 2.3, α est nul-homotope, ce qui contredit la condition (A).

2.5. Proposition. — *Soit* M *une variété de dimension* $n \geqslant 3$, *munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *satisfaisant la condition* (A). *Considérons deux transversales fermées disjointes* α *et* β *qui sont librement homotopes. S'il existe une feuille* F_0 *qui est coupée par* α *et pas par* β *alors*

i) F_0 *n'est pas fermée.*

ii) *il existe une feuille* F_1, *contenue dans l'adhérence de* F_0, *qui contient un lacet* γ *homotope à* α. *De plus* γ *représente un élément d'ordre infini du groupe d'holonomie de* F_1.

iii) *Si de plus, le feuilletage satisfait la condition*

$$C_x \subseteq (i_F)_* \pi_1(F, x)$$

pour toute feuille F, *la feuille* F_1 *donnée par* ii) *n'est coupée par aucune transversale fermée homologue à* α.

Preuve. — Soient α et $\beta : S^1 \to M$ les deux transversales fermées considérées. Soit $f : S^1 \times I \to M$ une application de classe C^2, qui réalise l'homotopie entre α et β, c'est-à-dire

$$f|S^1 \times \{0\} = \alpha \qquad \text{et} \qquad f|S^1 \times \{1\} = \beta.$$

On peut supposer que f est en position générale par rapport au feuilletage $\mathcal{F}$. Le feuilletage induit sur $S^1 \times I$, est un feuilletage avec singularités qui, puisque $\mathcal{F}$ est transversalement orientable, peut être considéré comme constitué par les trajectoires d'un champ de vecteurs partout entrant sur $S^1 \times \{0\}$.

Les singularités de ce champ sont des centres ou des points de selle, et on peut supposer qu'il n'y en a pas deux sur une même feuille.

On sait qu'au voisinage d'un centre toutes les trajectoires sont fermées; et si on considère un voisinage d'un point de selle il y a deux trajectoires qui y aboutissent et deux qui en sortent.

Considérons alors la feuille F_0 et soit L_0 une composante connexe de sa trace sur $S^1 \times I$. L_0 coupe $S^1 \times \{0\}$ et ne coupe pas $S^1 \times \{1\}$, deux possibilités (non disjointes) sont à envisager :

i) L_0 contient un cycle limite dans son adhérence.

ii) L_0 contient un point de selle. Nous montrons maintenant que i) se produit toujours. Supposons donc que L_0 contient un point de selle p; L_0 est donc composée d'au plus quatre trajectoires, deux « entrantes » en p, et deux « sortantes ». Soit l_1 la trajectoire qui sort de $S^1 \times 0$ et se rend à p. Soit l_2 une trajectoire qui sort de p; l_2 ne peut aller couper $S^1 \times \{0\}$ à cause de l'orientation choisie, ne coupe pas $S^1 \times \{1\}$ par hypothèse, donc contient un cycle limite dans son adhérence, ou retourne à p. Dans ce dernier cas, il reste une trajectoire l_3 qui sort de p. l_3 ne peut couper $S^1 \times \{0\}$, ni $S^1 \times \{1\}$ pour les mêmes raisons que l_2; et l_3 ne peut pas retourner à p, sinon il y aurait 3 trajectoires entrantes en p. Ainsi l_3 contient un cycle limite dans son adhérence. Ceci montre que i) se produit toujours, et donc que F_0 n'est pas fermée.

Soit C le cycle limite que nous venons d'obtenir, c'est soit une courbe simple, soit une courbe en forme de huit, composée de deux trajectoires homéomorphes à la droite réelle, et d'un point de selle. Soit F_1 la feuille contenant l'image $f(C)$ du cycle C. Puisqu'il existe dans F_0 une courbe qui s'enroule autour de $f(C)$, et contient $f(C)$ dans son adhérence; $f(C)$ représente un élément d'ordre infini du groupe d'holonomie de F_1.

Dans le cas où C est une courbe en huit, l'image d'au moins l'une des boucles du huit représentera un élément d'holonomie d'ordre infini. On peut donc supposer que C est une courbe simple. De la relation $\mathrm{Ker}\,(i_{F_1})_* \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi_{F_1}$ on tire que $f(C)$ n'est pas nul-homotope dans M, et a fortiori C n'est pas nul-homotope dans $S^1 \times I$.

Finalement C sépare $S^1 \times I$ en deux composantes connexes chacune étant un cylindre. C est donc homotope à $S^1 \times \{0\}$ et ainsi $f(C)$ est homotope à α. En posant $\gamma = f(C)$ on a prouvé ii).

Pour prouver iii) il suffit d'appliquer le corollaire 2.4 à F_1.

3. Feuilletages transversalement analytiques de codimension 1.

Dans ce paragraphe nous reprenons les résultats démontrés en [4], et nous montrons que ces résultats restent valables si la condition : $(i_F)_* : \pi_1(F, x) \to \pi_1(M, x)$ est injective pour toute feuille, est remplacée par la condition (A) : Toute transversale fermée représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(M)$.

Cette généralisation, bien que triviale, a l'intérêt de s'appliquer aux feuilletages transversalement analytiques, puisque :

3.1. LEMME. (voir [2]). — *Soit* M *une variété munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$, *de codimension* 1, *transversalement orientable, et transversalement analytique. Alors le feuilletage* $\mathcal{F}$ *vérifie la condition* (A).

3.2. Lemme. — *Considérons* M *une variété munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de codimension* 1, *et vérifiant la condition* (A). *Soit* F *une feuille de* $\mathcal{F}$ *telle que* $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ *contient le commutateur* C_x *du groupe* $\pi_1(M, x)$. *Soit* x *un point de* F *contenu dans une transversale* T, *et* Γ *un élément du pseudo-groupe d'holonomie de* F *au point* x. *Alors si* $U \subset T$ *est le domaine de définition de* Γ, *l'ensemble* $U \cap F$ *est un ensemble de points fixes pour* Γ.

Preuve. — Soit γ le lacet de F, en x, associé à Γ. Considérons $H : (-1, 1) \times I \to M$, une application qui réalise Γ : c'est-à-dire que :

i) $H(0, t) = \gamma(t)$

ii) $H(u, t)$ est, pour u fixe, dans une seule feuille.

iii) $H(u, t)$ est, pour t fixe, une transversale en $\gamma(t)$.

iv) $H(u, 0)$ et $H(u, 1)$ sont dans T.

v) $\Gamma(H(u, 0)) = H(u, 1)$.

Considérons les points $y = H(u, 0)$ et $z = \Gamma(y)$.

Soit m_y le segment, porté par T, d'origine z et extrémité y. Les lacets γ et $l_y = H(u, .)_* m_y$ sont homologues, H permettant de réaliser une déformation continue de l'un sur l'autre.

Supposons que y soit dans $U \cap F$ et que $y \neq z$. Il existe alors une transversale fermée S, coupant F en y, et homotope à l_y avec point de base y. (voir [1] lemme 2.2). Finalement la transversale fermée S est homologue à γ. Ceci contredit le corollaire 2.4, donc $y = z$.

3.3. Proposition. — *Soit* M *une variété compacte, munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$, *de codimension* 1, *satisfaisant à la condition* (A). *Supposons que pour toute feuille* F, *le groupe* $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ *contient le commutateur* C_x *du groupe* $\pi_1(M, x)$. *Alors il n'y a pas de feuille exceptionnelle à adhérence minimale.*

Preuve. — Considérons F une feuille exceptionnelle dont l'adhérence K est minimale. Soit T une transversale telle que $K \cap T$ soit un ensemble compact non vide. $K \cap T$ est minimal exceptionnel pour le pseudogroupe d'holonomie agissant sur T. D'après [5] il existe un élément Γ de ce pseudogroupe et un point x de $K \cap T$, tels que $\Gamma(x) = x$ et $\Gamma'(x) = 1$. Ceci implique que x est un point fixe isolé de Γ. Cependant si F_x est la feuille passant par x, $T \cap F_x$ est un ensemble parfait. Le point x est donc un point d'accumulation de $T \cap F_x - \{x\}$. Par le lemme 3.2 $T \cap F^x$ est un ensemble de points fixes pour Γ, ce qui contredit le fait que x est un point fixe isolé de Γ.

3.4. Théorème. — *Soit* M *une variété compacte, munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$, *de codimension* 1, *et transversalement orientable. Supposons que* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A), *qu'il n'y a pas de feuille compacte et que pour toute feuille* F *le groupe* $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ *contient le commutateur* C_x *de* $\pi_1(M, x)$. *Alors* $\mathcal{F}$ *est un feuilletage sans holonomie.*

Preuve. — Il n'y a pas de feuille compacte, ni d'ensemble minimal exceptionnel. La variété M est donc minimale, et toutes les feuilles sont denses. Soit x un point de M, et F la feuille passant par x. Soit T une transversale coupant F en x, et Γ un élément du pseudo-groupe d'holonomie de F, tel que $\Gamma(x) = x$. Si U est le domaine de définition de Γ, on a $U \cap F$ est partout dense dans U, et par le lemme 3,2, Γ est l'identité.

Comme nous l'avons déjà remarqué au début, les résultats que nous venons d'obtenir sont valables pour les feuilletages transversalement analytiques. Cependant pour ces derniers nous obtenons le résultat supplémentaire suivant :

3.5. Théorème. — *Soit* M *une variété munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *transversalement orientable et transversalement analytique. Alors toute feuille* F *telle que* $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ *contient le commutateur* C_x *de* $\pi_1(M, x)$, *est propre ou sans holonomie. En particulier toute feuille de ce type, dont l'holonomie est non triviale est propre.*

Preuve. — Soit F une feuille telle que C_x est contenu dans $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ et supposons qu'elle n'est pas propre. Il existe une transversale T, qui coupe F en un point p, tel que p est point d'accumulation de $F \cap T - \{p\}$. Si Γ est un élément du pseudogroupe d'holonomie de F, tel que $\Gamma(p) = p$, le lemme 3.2 permet d'affirmer que $F \cap T$ est un ensemble de points fixes de Γ. Il existe donc une suite de points fixes de Γ, convergeant vers p. Comme Γ est analytique il a le germe de l'identité en p.

4. Feuilletages possédant une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles.

Nous considérons dans ce paragraphe, des feuilletages de codimension 1, classe C^r, $2 \leqslant r \leqslant \omega$, transversalement orientables, et qui possèdent une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles. Rappelons que, lorsque α et un lacet basé en un point x, nous appelons $G(\alpha, x)$ le sous-groupe de $\pi_1(M_1, x)$ engendré par la classe d'homotopie de α.

4.1. Lemme. — *Soit* M *une variété de dimension* $n \geqslant 3$, *de groupe fondamental* $\pi_1(M)$ *abélien, munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de codimension* 1, *transversalement orientable, et d'une transversale fermée* α *qui coupe toutes les feuilles. Appelons* $p_\alpha : M_\alpha \to M$ *le revêtement connexe de* M, *relatif au groupe* $G(\alpha, x)$ *et supposons que* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A). *Alors tout relèvement* $\tilde{\alpha}$ *de* α *dans* M_α *est une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles du feuilletage* $\mathcal{F}_\alpha = p_\alpha^{-1}(\mathcal{F})$.

Preuve. — Considérons α_1 et α_2 deux relèvements de α passant respectivement par les points x_1 et x_2 tels que $p(x_1) = p(x_2) = x$. Soit c un chemin de x_1 à x_2 et considérons le lacet basé en x_1, $c_*\alpha_{2*}c^{-1}$. Comme $\gamma = p(c)$ est un lacet en x, on a

$$p(c_*\alpha_{2*}c^{-1}) = \gamma_*\alpha_*\gamma^{-1}$$

et homotope à α, donc $c_*\alpha_{2*}c^{-1}$ est homotope à α_1, et ainsi α_1 et α_2 sont librement homotopes.

D'après 2.2, $\mathcal{F}_\alpha$ satisfait la condition (A) et de plus $\pi_1(M_\alpha)$ est abélien, nous pouvons donc appliquer 2.5. Supposons qu'il existe une feuille F qui n'est pas coupée par α_1, dans M_α. Comme α coupe toutes les feuilles dans M, il existe un relèvement α_3 de α qui coupe F. Comme α_1 et α_3 sont librement homotopes, par 2.5 il existe une feuille F_1, qui n'est coupée par aucune transversale homotope à α_1. Ceci étant impossible, α_1 coupe toutes les feuilles de $\mathcal{F}_\alpha$.

4.2. Théorème. — *Considérons* M *une variété connexe de dimension* $n \geqslant 3$, *et* $\mathcal{F}$, *feuilletage de classe* C^r, $\omega \geqslant r \geqslant 2$, *codimension* 1 *et transversalement orientable. Supposons que* $\mathcal{F}$ *satisfait à la condition* (A), *que* $\pi_1(M)$ *est abélien et qu'il existe une transversale fermée* α *qui coupe toutes les feuilles. Alors dans le revêtement, universel* $p : \tilde{M} \to M$ *de* M, *il existe une transversale difféomorphe à la droite réelle* R, *qui coupe toutes les feuilles de* $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ *en un et un seul point.*

Preuve. — Considérons les revêtements $\tilde{M} \to M_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} M$. Soit α_1 une transversale fermée de $\mathcal{F}_\alpha$ qui est un relèvement de α par p_α. Par 4.1, α_1 coupe toutes les feuilles de $\mathcal{F}_\alpha$. Ceci implique que toute feuille $\tilde{F}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$, est coupée par un relèvement de α_1. Soit $f : R \to M$ un relèvement de α_1, et $L = f(R)$ son image. Si $g : R \to M$ est un autre relèvement de α_1, il existe une transformation de revêtement $h : \tilde{M} \to \tilde{M}$ telle que $h \circ f = g$. Mais comme $[\alpha_1]$ est un générateur de $\pi_1(M_\alpha)$, on a nécessairement $h(L) = L$. On en tire que $f(R) = g(R)$, donc que L coupe toutes les feuilles.

Il reste à voir que chaque feuille n'est coupée qu'en un seul point. Supposons qu'une feuille est coupée en deux points, il existe alors une transversale fermée ([1] lemme 2.2) Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfait à la condition (A), cette transversale fermée représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(\tilde{M}) = 0$. C'est une contradiction.

5. Holonomie et revêtement.

On considère M une variété connexe, de dimension $n \geqslant 3$, de groupe fondamental $\pi_1(M)$ abélien et un feuilletage de classe C^r, de codimension 1, et transversalement orientable. On suppose que $\mathcal{F}$ satisfait la condition (A), et qu'il existe une transversale fermée S, qui coupe toutes les feuilles. Considérons $p : \tilde{M} \to M$ le revêtement universel de M, et $G(\tilde{M})$ le groupe des transformations de revêtement. On sait que $G(\tilde{M})$ est isomorphe au groupe fondamental de M, $\pi_1(M)$.

5.1. Lemme. — *Le groupe* $G(\tilde{M})$ *agit sur* M *en préservant le feuilletage* $\tilde{\mathcal{F}}$.

Preuve. — Considérons $g : \tilde{M} \to \tilde{M}$ une transformation de revêtement. Soit $y = g(x)$, et z un point dans la feuille F passant par x. Appelons l_{zx} un chemin de z à x, dans F. On a $p \circ g(l_{zx}) = p(l_{zx})$ est un chemin dans une seule feuille de $\mathcal{F}$. Ainsi $g(l_{zx})$ est contenu dans une seule feuille, et donc $g(z)$ est dans la même feuille que y.

D'après le théorème 4.2, nous savons que dans M il existe une transversale L difféomorphe à la droite réelle, qui couvre S et qui coupe toutes les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ en un et un seul point. Les transformations de $\tilde{M}$ induisent alors des difféomorphismes de la transversale L. Ces difféomorphismes sont obtenus comme suit : Si $g : \tilde{M} \to \tilde{M}$ est une transformation de revêtement, on définit $h_g : L \to L$ par la relation

$$h_g(L \cap F) = L \cap g(F)$$

h_g est bien défini en vertu de 5.1.

5.2. Lemme. — $h_{g \circ g'} = h_g \circ h_{g'}$.

Preuve. — On veut prouver qu'étant donné un point $\tilde{x}$ dans L, les points $g \circ g'(\tilde{x})$ et $g(h_{g'}(\tilde{x}))$ sont dans la même feuille. Comme g préserve les feuilles il suffit de montrer que $g'(\tilde{x})$ et $h_{g'}(\tilde{x})$ sont dans la même feuille, ce qui est vérifié par construction de $h_{g'}$.

Étant donné une transformation de revêtement g et un point $\tilde{x}$ dans L, il existe une et une seule classe d'homotopie $[a]$ dans $\pi_1(M_1 p(\tilde{x}))$ telle que le relèvement d'origine $\tilde{x}$, d'un lacet α représentant $[a]$, ait extrémité $g(x)$. Nous pouvons donc définir une fonction.

$$\psi_{\tilde{x}} : G(\tilde{M}) \to \pi_1(M_1, p(\tilde{x}))$$

en posant $\psi_{\tilde{x}}(g) = [a]$. Il est bien connu que $\psi_{\tilde{x}}$ est un isomorphisme.

5.3. Lemme. — *Soit $\tilde{x}$ un point de* L, *et* F *la feuille passant par $p(\tilde{x})$. Alors $\tilde{x}$ est un point fixe de h_g si et seulement si $\psi_{\tilde{x}}(g)$ est dans $(i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$.*

Preuve. — Par définition de h_g on a : $h_g(\tilde{x}) = \tilde{x}$ si et seulement si $\tilde{x}$ et $g(\tilde{x})$ sont dans la même feuille. Ceci est équivalent à dire qu'il existe un chemin c, contenu dans une feuille et joignant $\tilde{x}$ à $g(\tilde{x})$, ou encore que $[p(c)] = \psi_{\tilde{x}}(g)$ est dans

$$(i_F)_* \pi_1(F_1, p(\tilde{x})),$$

d'où le résultat.

Nous montrons maintenant que lorsque h_g possède un point fixe $\tilde{x}$, l'holonomie associée à $\psi_{\tilde{x}}(g)$ est entièrement déterminée par h_g.

Considérons donc une transformation de revêtement g, un point $\tilde{x}$ de L tel que $h_g(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Soit Γ_g le difféomorphisme d'holonomie associé à $\psi_{\tilde{x}}(g)$ et qui opère sur un voisinage U de $p(\tilde{x})$ dansl a transversale fermée S. Soit $\tilde{U}$ un voisinage ouvert de $\tilde{x}$ dans L tel que $p_U = p\tilde{U}$ est un difféomorphisme sur U.

5.4. Lemme. — *On a* $\Gamma_g^{-1} = p_U \circ h_g \circ p_U^{-1}$.

Preuve. — Considérons α un lacet sur F, basé au point $x = p(\tilde{x})$, qui représente $\psi_{\tilde{x}}(g)$. Soit $H : I \times I \to M$, l'application telle que :

i) $H(0, t) = \alpha(t)$.

ii) $H(u, t) = C_t$, est, pour t fixe, une transversale fermée passant par $\alpha(t)$.

iii) C_0 et C_1 sont contenues dans u.

Γ_g est alors déterminé par la relation $\Gamma_g(H(u, 0)) = H(u, 1)$. Posons $H(u, 0) = y$ et $H(u, 1) = z$ pour un u fixé. Soient $\tilde{y} = p_U^{-1}(y)$, $\tilde{z} = p_U^{-1}(z)$.

Étant donnés a et b deux points de U nous désignerons par n_{ab} la partie de la transversale S, qui va de a à b dans U, et par $\tilde{n}_{ab}$ son relèvement dans $\tilde{U}$, qui va de $p_U^{-1}(a)$ à $p_U^{-1}(b)$.

Posons $\gamma(t) = H(u, t)$ et considérons les lacets suivants, basés en z : $n_{zy*}\gamma$ et $n_{zx*}\alpha_* n_{zx}^{-1}$ ils sont homotopes, et l'homotopie peut être réalisée par une modification de H.

Le lacet $n_{zy*}\gamma$ se relève dans M en un chemin composé de $\tilde{n}_{zy}$, entre $\tilde{z}$ et $\tilde{y}$, puis de $\tilde{\gamma}$, un chemin contenu dans la feuille de $\tilde{y}$.

D'un autre côté $n_{zx*}\alpha_* n_{zx}^{-1}$ se relève suivant le chemin composé par : la transversale $\tilde{n}_{zx}$ de $\tilde{z}$ à $\tilde{x}$, un chemin $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{x}$ à $g(\tilde{x})$, puis le chemin $g(\tilde{n}_{zx}^{-1})$ qui va de $g(\tilde{x})$ à $g(\tilde{z})$.

On en déduit que $\tilde{y}$ et $g(\tilde{z})$ sont dans la même feuille, donc $h_g(\tilde{z}) = \tilde{y}$ ou encore $p_U \circ h_g \circ p_U^{-1}(z) = y = \Gamma_g^{-1}(z)$. Comme z est arbitraire on a le résultat.

5.5. Proposition. — *Si $\psi_{\tilde{x}}(g)$ est dans $(i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$ les trois énoncés suivants sont équivalents :*

i) Γ_g *a le germe de l'identité en* $p(\tilde{x})$.

ii) h_g *a le germe de l'identité en* $\tilde{x}$.

iii) $\psi_{\tilde{x}}(g)$ *est dans* $(i_F)_* \operatorname{Ker} \varphi_F \subseteq (i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$.

5.6. Proposition. — *Si la transformation de revêtement g est telle que $\psi_{\tilde{x}}(g)$ est dans le sous groupe $(i_F)_* \operatorname{Ker} \varphi_F$ de $(i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$, pour un point $\tilde{x}$ dans L, alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

i) *Étant donné $\tilde{y}$ un point quelconque de L, et F′ la feuille passant par $p(\tilde{y})$, $\psi_{\tilde{y}}(g)$ est dans $(i_{F'}) \operatorname{Ker} \varphi_{F'} \subseteq (i_{F'})\pi_1(F', p(\tilde{y}))$.*

ii) *Il existe un point $\tilde{y}$ dans L, tel que la feuille F_0 qui passe par $p(\tilde{y})$ à la propriété que $\psi_{\tilde{y}}(g)$ est dans $(i_{F_0})_*\pi_1(F_0, p(\tilde{y}))$, mais représente un élément du groupe d'holonomie de F_0, qui a le germe de l'identité d'un côté de 0, mais n'a pas le germe de l'identité de l'autre côté de 0.*

Preuve. — Si h_g est l'identité, 5.5 permet d'affirmer que l'on est dans le cas i). Supposons donc que h_g n'est pas l'identité. Comme h_g coïncide avec l'identité au voisinage de $\tilde{x}$, il existe un ouvert maximal (u, v), contenant $\tilde{x}$, et sur lequel h_g coïncide avec l'identité. Puisque h_g n'est pas l'identité u ou v doit être fini. Supposons par exemple que v est fini. Par continuité $h_g(v) = v$, et par maximalité de (u, v) il existe des points y, arbitrairement près de v, tels que $y > v$ et $h_g(y) \neq y$. Si F_0 est la feuille passant par $p(v)$, de $h_g(v) = v$, on tire $\psi_v(g)$ est dans $(i_{F_0})_*\pi_1(F_0, p(v))$. Et d'autre part on a : $\Gamma_g^{-1} = p_U \circ h_g \circ p_U^{-1}$ coïncide avec l'identité sur $p_U(v - \varepsilon, v)$ et ne coïncide pas avec l'identité sur $p_U(v, v + \varepsilon)$. Ceci prouve la proposition.

Considérons $H(\tilde{x})$ le sous groupe de $G(\tilde{M})$ formé par les éléments g de $G(\tilde{M})$ tels que $h_g(\tilde{x}) = \tilde{x}$. $H(\tilde{x})$ est un sous groupe en vertu du lemme 5.2.

Appelons $K(\tilde{x})$ le sous groupe de $H(\tilde{x})$ formé des g tels que h_g ait le germe de l'identité en $\tilde{x}$.

5.7. Proposition. — *Si* F *est la feuille passant par* $p(\tilde{x})$,

$$\psi_{\tilde{x}} : G(\tilde{M}) \to \pi_1(M, p(\tilde{x}))$$

induit des isomorphismes entre :

i) $H(\tilde{x})$ *et* $(i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$

ii) $K(\tilde{x})$ *et* $(i_F)_* \operatorname{Ker} \varphi_F \subseteq (i_F)_*\pi_1(F, p(\tilde{x}))$.

Preuve. — Nous savons déjà que $\psi_{\tilde{x}}$ est injectif.

i) est prouvé en 5.3. Pour ii), il suffit d'appliquer 5.5 ii) et iii).

6. Feuilletages transversalement analytiques qui admettent une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles.

Dans ce paragraphe nous concentrons notre attention sur les feuilletages transversalement analytiques. En vertu de 3.1, nous pourrons appliquer les résultats obtenus, dans les paragraphes précédents, relativement aux feuilletages qui satisfont la condition (A).

Nous conservons les notations du paragraphe 5.

6.1. Théorème. — *Soit* M *une variété de dimension* $n \geqslant 3$, *de groupe fondamental abélien, munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de dimension* $n - 1$, *transversalement analytique et transversalement orientable. S'il existe une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles, les groupes* $(i_F)_* \operatorname{Ker} \varphi_F$ *sont tous isomorphes au sous groupe*

$$K = \{g : h_g = Id\}$$

de $G(\tilde{M})$.

Preuve. — En vertu de 5.7 il suffit de montrer qu'étant donné un point $\tilde{x}$ dans L, le groupe $K(\tilde{x})$ est égal à K.

Considérons g dans $K(\tilde{x})$, et appliquons 5.6. D'après l'hypothèse de transversalité analytique, ii) de 5.6 ne se produit pas, donc par i) de 5.6, $h_g = Id$, et g est dans K.

Inversement il découle directement des définitions que $K \subseteq K(\tilde{x})$. D'où le résultat.

6.2. Lemme. — *Si un homéomorphisme de la droite réelle est décroissant il possède un point fixe et un seul.*

Preuve. — Soit $f: R \to R$ un homéomorphisme, et supposons-le décroissant. Soit x un point dans R. Il existe un point y tel que $y < f(x)$ et $y < x$, on en tire que $y < f(y)$. De même il existe un point z tel que $z > f(x)$ et $z > x$, donc tel que $z > f(z)$. Finalement f envoit $[y, z]$ dans lui-même, donc possède un point fixe entre y et z.

Supposons qu'il existe deux points fixes x et y.

Supposons $x > y$, comme f est décroissant on a $f(x) < f(y)$, c'est-à-dire $x < y$. C'est une contradiction.

6.3. Corollaire. — K *contient tous les éléments d'ordre fini de* $G(\tilde{M})$.

Preuve. — Soit g un élément d'ordre n de $G(\tilde{M})$. On aura $(h_g)^n = Id$. Ceci permet d'affirmer que h_g possède des points fixes. En effet supposons que h_g est sans point fixe. On a alors pour tout x, $h_g(x) > x$ (ou $x > h_g(x)$), et comme d'après 6.2 h_g est croissant on a $(h_g)^n(x) > x$ pour tout n. Considérons donc $\tilde{x}$ un point fixe de h_g. D'après 5.3 $\psi_{\tilde{x}}(g)$ est dans $(i_F)_* \pi_1(F, p(\tilde{x}))$ et est d'ordre n, donc est dans $(i_F)_*$ Ker φ_F par 2.6 de [1]. Finalement g est dans K d'après 6.1 et 5.7.

6.4. Corollaire. — *Tous les éléments d'ordre fini de* $\pi_1(M, p(\tilde{x}))$ *sont contenus dans* $\psi_{\tilde{x}}(K) = (i_F)_*$ Ker φ_F.

6.5. Corollaire. — *S'il existe une feuille telle que* Ker φ_F = Ker $(i_F)_*$, *toutes les feuilles ont la même propriété, et* $\pi_1(M)$ *n'a pas d'élément d'ordre fini.*

Preuve. — Ker φ_F = Ker $(i_F)_*$ est équivalent à

$$(i_F)_* \operatorname{Ker} \varphi_F = 0.$$

Par 6.1 ceci est équivalent à $K = 0$. Le résultat s'ensuit à l'aide de 6.1 et 6.3.

6.6. Corollaire. — *S'il existe une feuille simplement connexe,* $\pi_1(M)$ *n'a pas d'élément d'ordre fini.*

6.7. Corollaire. — $G(M)/K$ *n'a pas d'élément d'ordre fini.*

Preuve. — Supposons qu'il existe un g dans $G(\tilde{M})$, tel que g^n soit dans K. On aura $(h_g)^n = Id$, ainsi h_g doit avoir un point fixe et donc une infinité, par construction. h_g est donc croissant. S'il existe un point x, tel que $h_g(x) \neq x$, on doit avoir

$$\begin{aligned} (h_g)^n(x) &> x \quad \text{si} \quad h_g(x) > x \\ (h_g)^{-n}(x) &> x \quad \text{si} \quad h_g(x) < x \end{aligned}$$

c'est une contradiction, donc g est dans K.

6.8. LEMME. — *Pour toutes transformations de revêtement* g *et* f *on a* $h_g \circ h_f = h_f \circ h_g$.

Preuve. — $G(\tilde{M})$ est abélien puisque $\pi_1(M)$ l'est.
On a donc $h_g \circ h_f = h_{g \cdot f} = h_{f \cdot g} = h_f \circ h_g$.

6.9. LEMME. — *Considérons deux transformations de revêtement* f *et* g, *qui ne sont pas dans* K. *Supposons que* h_f *et* h_g *possèdent chacune des points fixes. Alors si nous appelons* Fix h_f *l'ensemble des points fixes de* h_f *on a :*

$$\operatorname{Fix} h_f = \operatorname{Fix} h_g.$$

Preuve. — Soit x un point fixe de h_f.
Supposons que x n'est pas dans Fix h_g.
Soient

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Sup} \{u : h_g(u) = u \text{ et } u < x\} \\ z &= \operatorname{Inf} \{u : h_g(u) = u \text{ et } x < u\}. \end{aligned}$$

Puisque les points fixes sont isolés, y et z sont des points fixes de h_g. De plus h_g n'a aucun point fixe dans l'intervalle (y, z), et cet intervalle contient x. Puisque h_g possède des points fixes il est croissant, d'après 6.2. Pour tout point u dans (y, z) on aura $h_g(u) > u$ ou $h_g(u) < u$. Supposons par exemple $h_g(u) > u$, la suite $(h_g)^n(x)$ est donc croissante, bornée par z, ainsi elle converge vers un point x_0. Les points $(h_g)^n(x)$ et x_0 sont tous des points fixes de h_f. En effet

$$\begin{aligned} h_f(h_g)^n(x) &= (h_g)^n h_f(x) \quad \text{par 6.8} \\ &= (h_g)^n(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_f(x_0) &= h_f\left(\lim_n (h_g)^n(x)\right) \\ &= \lim_n h_f(h_g)^n(x) \\ &= \lim_n (h_g)^n(x) = x_0 \end{aligned}$$

x_0 est alors un point fixe de h_f qui n'est pas isolé, c'est une contradiction, donc x est un point fixe de h_g. Nous venons de prouver que

$$\mathrm{Fix}\, h_f \subseteq \mathrm{Fix}\, h_g.$$

Comme f et g sont arbitraires le lemme est prouvé.

Posons $\mathrm{H} = \{g : h_g$ possède un point fixe, au moins$\}$.

6.10. Proposition. — *H est un sous groupe de* $\mathrm{G}(\tilde{\mathrm{M}})$. *Étant donné un point* $\tilde{x}$ *dans* L. $\mathrm{H}(\tilde{x})$ *est égal à* H *ou* K, *suivant qu'il existe un* h_f *pour lequel* $\tilde{x}$ *est un point fixe isolé, ou qu'il n'en existe pas.*

Lorsque $\mathrm{H}(\tilde{x}) = \mathrm{K}$, *la feuille passant par* $p(\tilde{x})$ *n'a pas d'holonomie, et il n'existe qu'un nombre fini de feuilles à holonomie non triviale.*

Preuve. — La première partie résulte du fait que tous les éléments de H donnent des h_f qui ont les mêmes points fixes, ou coïncident avec l'identité. Pour la seconde partie, si x n'est un point fixe isolé pour aucun h_f, on a évidemment $\mathrm{H}(\tilde{x}) = \mathrm{K}$. Dans le cas contraire, tous les éléments de H, donnent un h_f pour lequel $\tilde{x}$ est fixe.

Pour la troisième partie, si $\mathrm{H}(\tilde{x}) = \mathrm{K}$, on a

$$(i_\mathrm{F})_* \operatorname{Ker} \varphi_\mathrm{F} = (i_\mathrm{F})_* \pi_1(\mathrm{F}, p(\tilde{x}))$$

qui puisque $\operatorname{Ker} (i_\mathrm{F})_* \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_\mathrm{F}$, implique

$$\operatorname{Ker} \varphi_\mathrm{F} = \pi_1(\mathrm{F}, p(\tilde{x})).$$

Finalement remarquons que pour une feuille dont l'holonomie est non triviale on a $\mathrm{H}(\tilde{x}) \neq \mathrm{K}$.

Il existe donc un h_g pour lequel $\tilde{x}$ est un point fixe isolé. D'après 6.9 les $h_g \in$ autres que l'identité ont les mêmes points fixes, et ces points fixes sont tous isolés. Un compact dans L ne contient qu'un nombre fini de ces points fixes. Les feuilles correspondantes dans M sont donc en nombre fini.

6.11. Théorème. — *Si* M *est une variété de dimension* $n \geqslant 3$, *munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de codimension* 1, *transversalement analytique et transversalement orientable, qui possède une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles alors :* Si $\pi_1(\mathrm{M})$

est abélien, les feuilles dont l'holonomie est non triviale sont fermées.

Preuve. — Considérons F une feuille dont l'holonomie est non triviale. D'après 3.5, F est propre. Supposons F non fermée, elle contient alors une feuille F_0 dans son adhérence. Si x est un point $F_0 \cap S$, il existe une suite de points (x_n) dans $F \cap S$, qui converge vers x. Soient $\tilde{x}_n$ et $\tilde{x}$ des points de L tels que $p(\tilde{x}_n) = x_n$, $p(\tilde{x}) = x$, et $(\tilde{x}_n)$ converge vers $\tilde{x}$. Soit g un élément de H, qui n'est pas dans K. Par hypothèse sur F on a $h_g(\tilde{x}_n) = \tilde{x}_n$. Ainsi $\tilde{x}$ sera un point fixe non isolé de h_g, ce qui est une contradiction. Donc F est fermée.

6.12. Corollaire. — Si M est compacte, les feuilles à holonomie non triviale sont compactes, et le groupe $(i_F)_*\pi_1(F, x)$ est isomorphe à :

K si F n'est pas compacte.
H si F est compacte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Garançon. « Homotopie et holonomie de certains feuilletages de codimension 1. » *Annales de l'Institut Fourier*, 22, 2 (1972).
[2] A. Haefliger. « Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes. » *Commentarii Mathematici Helvetici* Vol. 32 (1958).
[3] C. Lamoureux. « Feuilletages de codimension 1. Holonomie et homotopie », *C.R. Académie des Sciences*, Tome 270 No. 26 (Juin 1970).
[4] R. Moussu et R. Roussarie. « Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie », *C.R. Académie des Sciences*, Tome 270.
[5] R. Sacksteder. « Foliations and Pseudogroups », *Amer. J. Math.* 87 (1965).

Manuscrit reçu le 24 juin 1971.
accepté par G. Reeb

Maurice Garançon,
Département de Mathématiques
Université du Québec
Montréal (Canada)
et Université de Californie
Berkeley, Californie (U.S.A.).