

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCIS SERGERAERT

## Un théorème de fonctions implicites. Applications

*Annales de l'institut Fourier*, tome 23, n° 2 (1973), p. 151-157

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1973\\_\\_23\\_2\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_151_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UN THÉORÈME DE FONCTIONS IMPLICITES. APPLICATIONS

par Francis SERGERAERT

### 0. Introduction.

On définit dans le § 1 la catégorie  $\mathcal{L}$ ; au § 2 on donne des exemples d'objets et de morphismes de  $\mathcal{L}$ ; au § 3 figure l'énoncé du théorème de fonctions implicites qui améliore le théorème de Nash-Moser (voir par exemple [5]). Au § 4 on donne une application. Les démonstrations manquantes peuvent être trouvées dans [7].

### 1. La catégorie $\mathcal{L}$ .

**1.1. DÉFINITION.** — *Un objet de  $\mathcal{L}$  est un quadruplet  $(B, E, \eta, \mathcal{S})$  où :*

- a) *E est un espace de Fréchet,*
- b)  *$\eta = (|\cdot|_i)_{i \in \mathbf{N}}$  est une suite croissante de normes définissant la topologie de E,*
- c)  *$\mathcal{S} = (S(t))_{t \in \mathbf{R}_*^+}$  est une famille à un paramètre d'opérateurs « d'approximation ».*

$$S(t) : E \rightarrow E, (t \in ]0, +\infty[ = \mathbf{R}_*^+),$$

telle que :

$$\begin{aligned} |S(t)x|_{i+k} &\leq t^k |x|_i \quad (i, k \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{R}_*^+, x \in E). \\ |x - S(t)x|_i &\leq t^{-k} |x|_{i+k} \quad (i, k \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{R}_*^+, x \in E). \end{aligned}$$

- d) *B est un ouvert de E où E est muni de la topologie définie par l'une des normes  $|\cdot|_i$ .*

En résumé un  $\mathcal{L}$ -objet est un ouvert d'un espace de Fréchet possédant de bons opérateurs d'approximation.

**1.2. DÉFINITION.** — Un  $\mathcal{L}$ -espace de Fréchet est un triplet  $(E, \eta, \mathcal{S})$  où  $(E, E, \eta, \mathcal{S})$  est un  $\mathcal{L}$ -objet.

**1.3. PROPOSITION.** — Soit  $(E, n, \mathcal{S})$  un  $\mathcal{L}$ -espace de Fréchet. Si  $x \in E$ , si  $p, q, r \in \mathbf{N}$   $p \leq q \leq r$ , alors :

$$|x|_q \underset{(p, q, r)}{\leq} |x|_p^{\frac{r-q}{r-p}} |x|_r^{\frac{q-p}{r-p}}$$

*Démonstration.* — Pour tout  $t \in \mathbf{R}_*^+$  :

$$|x|_q \leq |S(t)x|_q + |x - S(t)x|_q \underset{(p, q, r)}{\leq} t^{q-p}|x|_p + t^{q-r}|x|_r$$

On calcule le minimum de cette fonction de  $t$  et on obtient le résultat.

**1.4. DÉFINITION.** — Soient  $B$  un  $\mathcal{L}$ -objet,  $E$  le  $\mathcal{L}$ -espace de Fréchet correspondant ( $\supset B$ ),  $F_1, \dots, F_q, G$  d'autres  $\mathcal{L}$ -espaces de Fréchet. Soit  $f: B \times F_1 \times \dots \times F_q \rightarrow G$  une application.  $f$  est un  $q$ - $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

a)  $f$  est linéaire en chacune des  $q$  dernières variables.

b) pour tout  $k$  ( $0 \leq k < r + 1$ ), on peut trouver un entier positif  $d_k$  ne dépendant pas de  $i$ , tel que pour tout  $i \in \mathbf{N}$  l'application :

$$f: (B \times F_1 \times \dots \times F_q, |\cdot|_{i+d_k}) \rightarrow (G, |\cdot|_i)$$

soit de classe  $C^k$ .

c) si  $d^k f$  désigne la dérivée  $k$ -ième de  $f$  par rapport à la première variable (les autres dérivées sont sans intérêt), alors

$$d^k f: B \times F_1 \times \dots \times F_q \times E^k \rightarrow G$$

vérifie :

$$\begin{aligned} & |d^k f(x; y_1, \dots, y_q; \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)|_i \\ & \underset{(i, k)}{\leq} (1 + |x|_{i+d_k}) |y_1|_0 \dots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \dots |\hat{x}_k|_0 \\ & + \sum_{l=1}^q |y_l|_0 \dots |y_{l-1}|_0 |y_{l+i+d_k}|_0 \dots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \dots |\hat{x}_k|_0 \\ & + \sum_{l=1}^k |y_1|_0 \dots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \dots |\hat{x}_{l-1}|_0 |\hat{x}_l|_{i+d_k} |\hat{x}_{l+1}|_0 \dots |\hat{x}_k|_0 \end{aligned}$$

où  $x \in B$ ,  $y_l \in F_l$  ( $1 \leq l \leq q$ ),  $\hat{x}_l \in E$  ( $1 \leq l \leq k$ ).

**1.5. DÉFINITION.** — Soient  $B, E, F_1, \dots, F_q, G, f, r$  comme en 1.4, sauf qu'en b) et c) on permet à l'entier  $d_k$  de dépendre de  $i$ ; on l'écrit alors  $d_{k,i}$ . On dit alors que  $f$  est un  $q$ - $\mathcal{L}$ -morphisme faible de classe  $C^r$ .

**1.6. THÉORÈME.** — Soient  $B, C$  des  $\mathcal{L}$ -objets,  $E, F$  les  $\mathcal{L}$ -espaces de Fréchet correspondants. Soient  $G_1, \dots, G_p, H_1, \dots, H_q, K$  d'autres  $\mathcal{L}$ -espaces de Fréchet. On suppose  $B$   $O$ -borné. Soient  $f: B \rightarrow C$  un  $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ),  $g_i: B \times G_{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}+1} \times \dots \times G_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} \rightarrow H_i$  des  $\alpha_i$ - $\mathcal{L}$ -morphisms de classe  $C^r$  ( $1 \leq i \leq q$ ;  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  étant des entiers de somme  $p$ ), et  $h: C \times H_1 \times \dots \times H_q \rightarrow K$  un  $q$ - $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^r$ .

Soit  $F: B \times G_1 \times \dots \times G_p \rightarrow K$  l'application définie par :  $F(x; y_1, \dots, y_p) = h(f(x); g_1(x; y_1, \dots, y_{\alpha_1}), \dots, g_q(x; \dots, y_p))$ . Alors  $F$  est un  $p$ - $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^r$ .

(Autrement dit les morphismes se composent).

**1.7.  $\mathcal{L}$ -notions.** — On définit de façon standard les notions de  $\mathcal{L}$ -variétés de classe  $C^r$ , de  $\mathcal{L}$ -groupes de Lie de classe  $C^r$ , de  $\mathcal{L}$ -actions de groupe de classe  $C^r$ .

## 2. Exemples.

Soit  $\pi: E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de dimension finie sur la variété différentiable compacte  $M$ . On sait munir  $\Gamma^\infty(\pi)$  (sections de  $\pi$ ) de normes  $|\cdot|_i$  ( $i \in \mathbf{N}$ ) qui font de  $\Gamma^\infty(\pi)$  un espace de Fréchet [1]. D'autre part on peut construire [6] une famille à un paramètre d'opérateurs d'approximation  $S(t): \Gamma^\infty(\pi) \rightarrow \Gamma^\infty(\pi)$  ( $t \in \mathbf{R}_*^+$ ) qui vérifie les inégalités exigées en 1.1.c. Ainsi, si  $B$  est un ouvert de  $\Gamma^\infty(\pi)$ , le quadruplet  $(B, \Gamma^\infty(\pi), (|\cdot|)_{i \in \mathbf{N}}, S)$  est un  $\mathcal{L}$ -objet.

**2.1. THÉORÈME.** — Soient  $K$  et  $L$  des domaines compacts à bord lisse de  $\mathbf{R}^m$  et  $\mathbf{R}^n$  respectivement. Soit  $B \subset C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$  un ouvert tel que :

- $B$  est 1-borné (pour les normes habituelles de  $C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$ ),
- si  $f \in B$ , l'image de  $f$  est incluse dans  $L$ .

Soit  $\Phi : B \times C^\infty(L, \mathbb{R}^n)$  définie par :

$$\Phi(f, g) = g \circ f.$$

Alors  $\Phi$  est un 1- $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^\infty$ .

*Démonstration.* — A titre d'exemple on montre que  $\Phi$  est un 1- $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^0$ . Ceci résulte du calcul suivant. D'après la formule de Faa-di-Bruno :

$$\begin{aligned} |d^r(g \circ f)| &= \left| \sum_{\substack{q=1 \\ i_1+\dots+i_q=r}}^r \sum_{\substack{i_1+\dots+i_q \geq 1}} \sigma_{i_1, \dots, i_q} (d^q g \circ f) \cdot (d^{i_1} f, \dots, d^{i_q} f) \right| \\ &\leq \sum_{(r)} |g|_q |f|_{i_1} \dots |f|_{i_q} \\ &\leq \sum_r |g|_0^{\frac{r-q}{r}} |g|_r^{\frac{q}{r}} |f|_1^{\frac{r-i_1+1}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{i_1-1}{r}} \dots |f|_1^{\frac{r-i_{q-1}+1}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{i_{q-1}-1}{r}} \\ &\leq \sum_r |g|_0^{\frac{r-q}{r}} |g|_r^{\frac{q}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{r-q}{r}} \leq |f|_{r+1} |g|_0 + |g|_r \leq |f|_{r+1} |g|_0 + |g|_{r+1}. \end{aligned}$$

**2.2. EXEMPLES.** — Si  $M$  et  $N$  sont des variétés ( $M$  compacte)  $C^\infty$ , alors  $C^\infty(M, N)$  est muni canoniquement d'une structure de  $\mathcal{L}$ -variété de classe  $C^\infty$ ,  $\text{Diff}^\infty(M)$  d'une structure de  $\mathcal{L}$ -groupe de Lie de classe  $C^\infty$ , et, si  $N$  est aussi compacte l'action  $\Phi$  :

$$(\text{Diff}^\infty(M) \times \text{Diff}^\infty(N)) \times C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M, N)$$

définie par  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  est une  $\mathcal{L}$ -action de groupe de classe  $C^\infty$ .

### 3. Le théorème de fonctions implicites.

**3.1. THÉORÈME.** — Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathcal{L}$ -espaces de Fréchet,  $B \subset E$  un  $\mathcal{L}$ -objet,  $f : B \rightarrow F$  un  $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^r$  ( $2 \leq r \leq \infty$ ). Soient  $x_0 \in B$  et  $y_0 = f(x_0)$ .

On suppose qu'il existe un 1- $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^p$  ( $0 \leq p \leq r-1$ ) :

$$L : B \times F \rightarrow E$$

tel que, si  $x \in B$  et  $y \in F$  alors

$$df(x, L(x, y)) = y.$$

Alors il existe un  $\mathcal{L}$ -objet  $C$ , voisinage de  $y_0$  dans  $F$  et un  $\mathcal{L}$ -morphisme faible  $s: C \rightarrow B$  de classe  $C^p$ , tel que :

$$f \circ s = 1_C.$$

On peut considérer  $L_x$ , section de  $df(x)$  (pour  $x \in B$ ) comme section infinitésimale de  $f$ . Ainsi le théorème 3.1 peut se résumer en disant que si  $f$  admet une section infinitésimale  $L$ , alors  $f$  admet une vraie section  $s$ .

#### 4. Applications.

Soient  $M$  une variété  $C^\infty$ , compacte, sans bord,  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $C^\infty$ , et  $K$  un compact de  $\mathbf{R}$  dont l'intérieur contient  $f(M)$ . On considère l'application  $\Phi$  :

$$\text{Diff}^\infty(M) \times \text{Diff}_K^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow C^\infty(M)$$

définie par :

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1$$

Cette application est un  $\mathcal{L}$ -morphisme de classe  $C^\infty(2.2)$ . Sa différentielle en  $(id(M), id(\mathbf{R})) \in \text{Diff}^\infty(M) \times \text{Diff}_K^\infty(\mathbf{R})$  est définie par (voir Dieudonné [2], VIII, 12, problème 9) :

$$d\Phi(id(M), id(\mathbf{R}), \xi_1, \xi_2) = df \cdot \xi_1 + \xi_2 \circ f$$

où  $\xi_1 \in \Gamma^\infty(TM)$ ,  $\xi_2 \in \Gamma_K^\infty(\mathbf{R})$ ,  $df \cdot \xi_1 + \xi_2 \circ f \in \Gamma^\infty(f^*TR)$ .

On écrit plus simplement  $D = d\Phi(id(M), id(\mathbf{R}))$ , et :

$$D(\xi_1, \xi_2) = df \cdot \xi_1 + \xi_2 \circ f$$

**4.1. DÉFINITION.** — La codimension de  $f$ , notée  $c(f)$  est la codimension (réelle) de l'image de  $D$  dans  $\Gamma^\infty(f^*TR)$ .

En utilisant le théorème 3.1, on démontre le :

**4.2. THÉORÈME.** — Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f$  dans  $C^\infty(M)$ , et deux  $\mathcal{L}$ -morphisms faibles de classe  $C^\infty$  :

$$s_1, s_2: \mathcal{V} \rightarrow \text{Diff}^\infty(M) \times \text{Diff}_K^\infty(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{\mathcal{L}}$$

tels que, si :

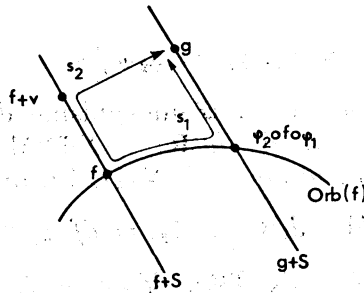
$$s_1(g) = (\varphi_1, \varphi_2; \lambda_1, \dots, \lambda_{d(f)}); s_2(g) = (\psi_1, \psi_2; \mu_1, \dots, \mu_{d(f)}),$$

alors :

$$g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1 = \sum_{i=1}^{c(f)} \lambda_i f_i = \psi_2 \circ \left( f + \sum_{i=1}^{c(f)} \lambda_i f_i \right) \circ \psi_1$$

*Remarque.* — G. Lassalle a démontré récemment, d'une autre façon plus simple et plus directe, sans faire appel au théorème de fonctions implicites 3.1, un résultat plus fort, en ce qu'il s'applique aussi à des fonctions à but quelconque. Voir ces comptes rendus [4].

*Interprétation.* — Soit  $S = \sum_{i=1}^{c(f)} \mathbf{R}f_i$  le sous-espace vectoriel de dimension  $c(f)$  de  $C^\infty(M)$  engendré par les  $f_i$ . L'existence de  $s_1$  montre que, modulo  $S$ , tout  $g \in C^\infty(M)$  voisin de  $f$  est dans l'orbite de  $f$ ; l'existence de  $s_2$  exprime que  $g$  est dans l'orbite de  $f + v$  où  $v$  est un élément convenable de  $S$ .



On lira dans ces mêmes comptes rendus du colloque de Strasbourg, une autre application du théorème 3.1, à l'étude du groupe  $\text{Diff}^\infty(T^n)$ ; voir Herman [3].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM and J. ROBBIN, Transversal mappings and flows, Benjamin, New York, 1967.
- [2] J. DIEUDONNÉ, Fondements de l'analyse moderne; Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [3] M. HERMAN,  $\text{Diff}^\infty(T^n)$ ; ces comptes rendus.
- [4] G. LASSALLE, Théorème de préparation  $C^r$ ; ces comptes rendus.

- [5] J. MOSER, A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations; *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, 47, 1961, 1824-1831.
- [6] J. NASH, The imbedding problem for riemannian manifolds; *Ann. of Math.*, 63, 1956, 20-63.
- [7] F. SERGERAERT, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications; Publications mathématiques d'Orsay, nouvelle série, n° 4; à paraître aux *Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. de Paris*.

Francis SERGERAERT,  
Département de Mathématiques,  
Université de Poitiers,  
40, av. du Recteur-Pineau,  
86000-Poitiers.

---