Annales de l'institut Fourier

Raymond Barre

De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 3 (1973), p. 227-312

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_3_227_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,3 (1973), 227-312

DE QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES Q-VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET ANALYTIQUES

par Raymond BARRE

Introduction.

Il est bien connu qu'on peut obtenir, sous certaines conditions, une construction géométrique de l'homologie et de la cohomologie des espaces quotients en utilisant des résolutions simpliciales d'espaces topologiques, comme l'a fait Koszul.

Pour l'étude d'un quotient, il est parfois intéressant de regarder le graphe de la relation d'équivalence associée, et il apparaît ainsi un diagramme

$$X \times_S X \rightrightarrows X \xrightarrow{\pi} S \, . \tag{D}$$

C'est cette situation qui a fait l'objet du travail présenté ; dans le cas où X est une variété différentielle (resp. analytique), et $X \times_S X$ peut être muni d'une structure de variété différentielle (resp. analytique) telle que

i) chaque projection de $X \times_S X$ dans X soit étale,

ii) $X \times_S X$ soit une sous-variété immergée de $X \times X$,

on dira que (X, π) est un Q-atlas de la Q-variété S.

Des exemples non triviaux de Q-variétés sont fournis par le quotient d'une variété sous l'action libre d'un groupe discret dénombrable, ou celui d'une variété paracompacte par un feuilletage sans holonomie transversale, notion introduite par Godbillon dans sa thèse. La première question à se poser est celle d'une réitération possible de l'opération : si dans le diagramme (D) on suppose que X et $X \times_S X$ sont des Q-variétés, et si, ayant généralisé les notions de morphismes étales, submersifs, immersifs, sous-variété immergée, etc., les conditions i) et ii) sont vérifiées, le quotient S peut encore être muni d'une structure de Q-variété. Il en est de même si l'on remplace i) par i') : chaque projection est submersive.

Le système suivant d'axiomes de Q-atlas est équivalent au système précédent : un couple (X, π), où X est une variété et π une application surjective de X dans S, est un Q-atlas si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) Si x et x' dans X ont même image dans S par π, il existe un voisinage ouvert U de x (resp. U' de x') et un difféomorphisme h de U sur U', tels que $h(x) = x'$ et $\pi(h(t)) = \pi(t)$ pour tout t dans U ;

b) Si T est une variété et f, f' deux morphismes de T dans X tels que $\pi f = \pi f'$, l'ensemble $T_0 = \{t \in T \mid f(t) = f'(t)\}$ est ouvert dans T.

Sur cette définition, on voit la différence avec les V-variétés de Satake, ces dernières pouvant admettre des singularités, ce qui n'est pas admis ici.

La Q-variété tangente est construite, l'existence du produit fibré de deux Q-variétés au-dessus d'une troisième est établie sous réserve de transversalité, de même que celle de sommes quelconques et de produits finis. Les champs de vecteurs sur une Q-variété sont définis ainsi que le crochet, et si S possède un Q-atlas paracompact, les intégrales maximales des distributions involutives sur S sont des sous-Q-variétés immergées.

La construction de la cohomologie d'une Q-variété se fera à l'aide de complexes de variétés Q-étales dans S. On interprète d'abord la cohomologie d'un espace topologique T à valeurs dans un faisceau F, comme limite inductive, sur un ensemble cofinal de complexes E de familles d'ouverts de T, des groupes de cohomologie $H^n(E, F)$. Cette méthode diffère de celle de Čech par l'introduction possible, en chaque degré, d'un recouvrement de chaque composante du noyau simplicial. Par exemple, étant donné un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de T, au lieu de ne considérer que le complexe

$$\amalg U_{i_0 i_1 i_2} \rightrightarrows\!\!\!\to \amalg U_{i_0 i_1} \rightrightarrows \amalg U_i \to T$$

on autorise aussi des complexes du type

$$\amalg U_{i_0 i_1 i_2, \lambda\mu\nu\rho} \rightrightarrows\!\!\!\to \amalg U_{i_0 i_1, \lambda} \rightrightarrows \amalg U_i \to T$$

où $(U_{i_0 i_1, \lambda})_{\lambda \in A(i_0 i_1)}$ est un recouvrement de $U_{i_0 i_1}$, et ainsi de suite.

Ayant défini un Q-préfaisceau sur une Q-variété S comme un foncteur contravariant de la catégorie des variétés Q-étales au-dessus de S dans les ensembles, et un Q-faisceau comme un Q-préfaisceau exact à gauche et transformant les sommes en produits, tout Q-faisceau sur S est représentable par une Q-variété Q-étale sur S. Ceci permet d'étendre les Q-faisceaux à la catégorie des Q-variétés Q-étales au-dessus de S. Enfin, tout Q-préfaisceau engendre un Q-faisceau.

La construction précédente s'adapte, et l'on obtient une cohomologie ayant les propriétés suivantes :

– Si le Q-préfaisceau P engendre le Q-faisceau F sur S, les groupes $H^*(S, P)$ et $H^*(S, F)$ coïncident ;

– Une petite suite exacte de Q-faisceaux sur S fournit une suite exacte illimitée de cohomologie ;

– Pour $n \geqslant 1$, les Q-préfaisceaux $\mathcal{H}^n(F)$ sur S définis par $\mathcal{H}^n(F)(V) = H^n(V ; F)$ sont évanescents.

Cette cohomologie a été confrontée à la cohomologie des espaces à opérateurs ; le résultat est positif, ce qui fournit une interprétation géométrique, bien qu'assez technique, de cette dernière.

Les complexes de variétés Q-étales au-dessus de S que nous utilisons, appelés échelles, jouent le rôle des recouvrements en cohomologie de Čech. A toute échelle est associée une suite spectrale, ce qui a deux conséquences importantes.

THEOREME. – *Soient* $f : S' \to S$ *un morphisme de Q-variétés et* F *un Q-faisceau sur* S'. *On a une suite spectrale de terme initial*

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q f_*(F))$$

et d'aboutissement $H^n(S', F)$.

(On note $R^q f_*(F)$ le Q-faisceau sur S engendré par le Q-préfaisceau $V \mapsto H^q(V \times_S S', F)$).

PROPOSITION. – *Soient* S *une Q-variété différentielle et* E *une échelle sur* S ; *on note* Ω^* *le Q-faisceau des germes de formes différentielles. Les deux suites spectrales du bicomplexe* $C_*(E, \Omega^*)$ *aboutissent à* $H^*(S, \mathbf{R})$.

Une Q-variété en groupe est une Q-variété analytique, munie d'une structure de groupe compatible avec celle de Q-variété. Les groupes de Lie en sont les premiers exemples. Le quotient d'une Q-variété en groupe par un sous-groupe distingué immergé peut être canoniquement muni d'une structure de Q-variété en groupe. D'autre part, toute Q-variété en groupe possède un Q-atlas qui est un groupe de Lie, et dont elle est le quotient par un sous-groupe. Une Q-variété en groupe possède une algèbre de Lie, et à toute sous-algèbre de Lie correspond un sous-groupe immergé.

L'existence du groupe de Lie simplement connexe, associé à chaque algèbre de Lie, montre l'intérêt que peut avoir l'étude du groupe fondamental d'une Q-variété, et la notion de simple connexité.

Soit $f : (M, m) \to (S, s_0)$ un morphisme Q-étale surjectif ; M est un Q-revêtement de S s'il est connexe et si, pour tout Q-atlas (X, π) de S, $\pi^*(M)$ est un fibré localement trivial à fibres discrètes. La Q-variété Γ des classes d'homotopie de chemins avec extrémités fixes d'une Q-variété connexe S est un Q-revêtement de $S \times S$, par la projection $(\alpha, \omega) =$ (source, but), tel que chaque tranche $\alpha^{-1}(s)$ soit un Q-revêtement de S. Le groupe fondamental est ce qu'on pense, et il y a équivalence, pour une Q-variété connexe, entre le fait d'être isomorphe à tout Q-revêtement d'elle-même et celui d'avoir un groupe fondamental trivial.

Les conseils, les critiques et l'enthousiasme de Pierre Cartier m'ont soutenu au long de ce travail. Je suis heureux de lui exprimer ici toute ma gratitude.

La définition des Q-variétés est calquée sur celle donnée en géométrie algébrique par M. Artin, Algebraic Spaces, Yale Math. Monographs 3, Yale University Press, 1971.

Parmi les problèmes ouverts, signalons celui de la classification des Q-variétés analytiques de dimension un. Il serait enfin souhaitable de disposer d'un herbier plus fourni en exemples : conscient de ce manque, je pris le lecteur de bien vouloir m'en excuser.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

LA CATEGORIE DES Q-VARIETES DIFFERENTIELLES ET ANALYTIQUES

N.B. On se place dans l'un des cadres annoncés, C^∞ ou C^ω.

1. Définition et exemples.

1. Q-*atlas*.

Soit S un ensemble ; une Q-*carte* de S est un couple (X, π), où X est une variété et π une application de X **dans** S tel que les deux conditions ci-dessous soient vérifiées.

a) *Si* x *et* x' *dans* X *ont même image par* π, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x (resp. U′ de x') *et un difféomorphisme* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$, *tel que* $f(x) = x'$ *et* $\pi(f(t)) = \pi(t)$, *pour tout* t *dans* U.

b) *Si* T *est une variété et* f, f' *deux morphismes de* T *dans* X *tels que* $\pi f = \pi f'$, *l'ensemble* $\mathrm{T}_0 = \{t \in \mathrm{T} \mid f(t) = f'(t)\}$ *est ouvert dans* T.

Une Q-carte surjective s'appelle un Q-*atlas*.

On dira que deux Q-cartes (X, π) et (X', π') de S sont compatibles, si leur réunion disjointe $(X \amalg X', \pi \amalg \pi')$ est une Q-carte de S.

La compatibilité est une relation d'équivalence entre Q-atlas de S.

La condition de compatibilité ne joue que sur l'axiome a), car b) est automatiquement vérifié. La transitivité n'est plus alors bien difficile à vérifier.

2. *Définition.*

On appelle Q-*variété* la donnée d'un ensemble S et d'une classe d'équivalence de Q-atlas de S.

Remarques : i) Soient (X, π) un Q-atlas **séparé** de S et f, f' un couple de morphismes d'une variété T connexe dans X ; si $\pi f = \pi f'$ et $f(t_0) = f'(t_0)$ pour un t_0 de T, alors $f = f'$ car T_0 est ouvert, fermé et non vide dans T.

ii) Appliquons ceci au cas général ; un Q-atlas est toujours localement séparé, et l'on en déduit l'unicité des germes de difféomorphismes compatibles avec π, dont l'existence est assurée par a).

iii) Pour vérifier b), il suffira de montrer que la diagonale de $X \times X$ est un ouvert du sous-espace

$$R = \{(x, x') \mid \pi(x) = \pi(x')\} \text{ de } X \times X .$$

iv) Afin d'éclairer l'importance de l'axiome b), voici un contre-exemple. Dans $\mathbf{R}$, on considère la relation d'équivalence $x \sim y$, s'il existe un n de $\mathbf{Z}$, avec $y = 2^n \cdot x$. L'espace $\mathbf{R}$ vérifie l'axiome a), mais pas b), ce n'est donc pas un Q-atlas de $\mathbf{R}/\sim$ (poser $T = \mathbf{R}$, $f(t) = t$, $f'(t) = 2t$ alors $f(0) = f'(0)$ mais $f(t) \neq f'(t)$ pour $t \neq 0$).

Soient S et S' deux Q-variétés, de Q-atlas (X, π) et (X', π') respectivement. Une application $f : S \to S'$ est un *morphisme de Q-variétés* si, pour tout point x de X, et tout point x' de X', tels que $\pi'(x') = f(\pi(x))$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x dans X (resp. U' de x' dans X'), et un morphisme $\hat{f} : U \to U'$ tels que $\hat{f}(x) = x'$ et $\pi'(\hat{f}(t)) = f(\pi(t))$ pour tout $t \in U$.

Si $f : S \to S'$ est un morphisme et (X', π') un Q-atlas de S', il existe un Q-atlas (X, π) de S et un morphisme de variétés $\hat{f} : X \to X'$ tel que $\pi'\hat{f} = f\pi$.

3. *Exemples.*

– Une variété usuelle : (X, id_X) est un Q-atlas de la variété X.

– Le quotient d'une variété sous l'action libre d'un groupe discret dénombrable.

Le groupe G *opère librement* dans X si l'égalité $gx = x$, pour un x de X, implique $g = e$. On disait aussi : G *"opère sans point fixe"*, mais cette expression est ambigüe, c'est pourquoi l'auteur et d'autres l'abandonnent.

Sous de telles hypothèses, l'axiome a) est trivialement vérifié. Pour b), on peut toujours supposer que T est une variété connexe, localement connexe et localement compacte, car la condition est locale. Il est classique qu'un tel espace n'admet pas de partition dénombrable en fermés non vides, cf. [4]. Lemme p. 240. De

$$T = \bigcup_{g \in G} \{t \mid f'(t) = gf(t)\} ,$$

on déduit qu'il existe un g_0 tel que $f' = g_0 \cdot f$, d'où b).

Autrement dit X muni de la projection canonique sur son quotient est un Q-atlas de X/G.

– Le quotient d'une variété paracompacte X par la relation d'équivalence associée à un feuilletage $\mathfrak{F}$ sans holonomie transversale.

On pourrait obtenir ce résultat comme corollaire du théorème sur les quotients de Q-variétés.

Une application transversale à un feuilletage $\mathfrak{F}$ sur X est un morphisme $\pi : T \to X$, où T est une variété de dimension égale à la codimension de $\mathfrak{F}$, et π est transversale en $\pi(t)$ à la feuille passant par $\pi(t)$ pour tout t de T. Une transversale est alors une Q-carte de $X/\mathfrak{F}$.

Soient deux points équivalents x et x' d'une même transversale Y_0 ; de par l'hypothèse de la *nullité de l'holonomie transversale* il n'y a qu'un germe de difféomorphisme de transversale vérifiant a). Si donc deux tels difféomorphismes coïncident en un point, ils coïncident au voisinage, et, par un raisonnement de type Zorn, $R \cap Y_0 \times Y_0$ est réunion de graphes maximaux de difféomorphismes locaux. Ici R désigne le graphe de la relation d'équivalence associée au feuilletage $\mathfrak{F}$ dans la variété X. Cette réunion est dénombrable, car au-dessus d'un point x, il n'y a qu'une infinité dénombrable de couples (x , x') dans R, et tout graphe maximal se projette au moins une fois sur un point de coordonnées rationnelles.

Il suffit pour conclure la vérification de b) d'appliquer le lemme topologique cité plus haut. On voit de même que deux transversales sont des Q-cartes compatibles de $X/\mathfrak{F}$. D'où l'existence d'un Q-atlas.

4. *Fibré tangent.*

Soit S une Q-variété et $s \in S$. On considèrera les systèmes (X , π , x , ξ) où (X , π) est une Q-carte de S, où $x \in X$, $\pi(x) = s$ et $\xi \in T(X)$. Deux tels systèmes (X' , π' , x' , ξ') et (X , π , x , ξ) sont dits équivalents si la dérivée en x du germe unique $h_{x'x}$ de difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de x' compatible avec π et π', transforme ξ en ξ'. La transitivité de la relation vient de ce que $h_{x''x} = h_{x'x}$ pour tout triple tel que $\pi''(x'') = \pi'(x') = \pi(x)$. On appelle *vecteur tangent en s à* S une classe de systèmes équivalents.

Les vecteurs tangents en s à S forment un ensemble noté $T_s(S)$. Si (X, π) est une Q-carte au-dessus de s, l'application de $T_x(X)$ dans $T_s(S)$ qui à ξ associe la classe de (X, π, x, ξ) est une bijection. La relation d'équivalence est compatible avec les structures vectorielles de $T_x(X)$ et $T_{x'}(X')$ pour $\pi'(x') = \pi(x)$, et la structure d'espace vectoriel de $T_x(X)$ se transporte à $T_s(S)$.

Proposition. – *L'ensemble* TS *des vecteurs tangents à une* Q-*variété* S *admet une structure de* Q-*variété. Un morphisme de* Q-*variété* $f : S \to S'$ *définit un morphisme* $Tf : TS \to TS'$.

On appellera TS le *fibré tangent,* ou *la* Q-*variété tangente* de S.

Soient (X, π) un Q-atlas de S, et TX le fibré tangent de X. On définit $T\pi : TX \to TS$ comme associant à tout (x, ξ) de TX la classe de (X, π, x, ξ). Alors $T\pi$ est surjective.

On note p la projection de TX sur X et $\bar{p}$ celle de TS sur S : il reste à vérifier les axiomes a) et b) pour $(TX, T\pi)$. L'axiome a) est clairement vérifié. Pour b) on considère le diagramme ci-dessous, où $(T\pi)f = (T\pi)f'$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & TX \arrow[r, "T\pi"] \arrow[d, "p"] & TS \arrow[d, "\bar{p}"] \\ & X \arrow[r, "\pi"] & S \end{tikzcd}$$

On déduit, de ce que le carré commute, que l'ensemble des points, où pf coïncide avec pf' est ouvert.

Si $pf(t) = pf'(t)$, alors $f(t)$ et $f'(t)$ sont tangents au même point de X et ne sont équivalents que s'ils sont égaux ; donc

$$\{f = f'\} = \{pf = pf'\} .$$

De plus, si X′ est un Q-atlas de S compatible avec X, TX′ est compatible avec TX comme Q-atlas de TS.

Soient s un point de S, (X, π) une Q-carte de S, $x \in X$ tel que $\pi(x) = s$, (X', π') une Q-carte de S′ au-dessus de $f(s)$, et $\bar{f} : X' \to X$ un morphisme de variétés tel que $\pi'\bar{f} = f\pi$. La dérivée en x de $\bar{f}$ induit une application linéaire continue $T_s(f)$, de $T_s(S)$ dans $T_{f(s)}(S')$, dont il est clair qu'elle ne dépend pas des Q-cartes et du relèvement utilisé. C.Q.F.D.

5. Q-*variétés connexes.*

Une Q-variété S est *connexe* s'il n'existe pas de morphisme non constant de S dans la Q-variété discrète $\{0,1\}$. De plus, l'image par un morphisme surjectif d'une Q-variété connexe est une Q-variété connexe.

Un sous-ensemble D de S sera un *domaine de* Q-*carte* (ou *domaine*) si et seulement si, pour tout point s de D, on peut trouver une Q-carte (U, π) telle que s appartienne à $\pi(U)$, et $\pi(U)$ soit contenu dans D.

Une réunion quelconque (resp. une intersection finie) de tels domaines est un domaine de Q-cartes ; c'est clair pour la réunion. Soit s dans $D_1 \cap D_2$, l'intersection de deux domaines ; on considère le produit fibré $U_1 \times_S U_2$, avec $s \in \pi_i(U_i) \subset D_i$, $i = 1, 2$, qui est une Q-carte remplissant la condition.

L'ensemble des domaines de Q-cartes de S forme une topologie $\mathfrak{T}$, et la Q-variété S est connexe si et seulement si l'espace topologique $(S, \mathfrak{T})$ est connexe.

Enfin, cette topologie $\mathfrak{T}$ n'est autre que la topologie quotient, obtenue à partir d'un Q-atlas (X, π) quelconque de S.

On dira qu'une Q-variété S est *connexe par arcs,* si deux points quelconques de S peuvent être reliés par un chemin Q-continu [1]. Alors l'ensemble des points qu'on peut joindre ainsi à un point s de S forme un domaine de Q-carte ; si S est connexe, S ne peut être réunion disjointe de deux domaines de Q-cartes, donc S est connexe par arcs. Réciproquement si S est connexe par arcs, il ne peut exister de morphisme non constant de S dans $\{0,1\}$ et S est connexe.

6. *Sommes et produits finis.*

PROPOSITION. – *La catégorie des* Q-*variétés a des sommes quelconques et des produits finis.*

De façon précise, soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille de Q-variétés, de Q-atlas respectifs (X_i, π_i) ; alors : $\left(\coprod_{i\in I} X_i, \coprod_{i\in I} \pi_i\right)$ est un Q-atlas de $\coprod_{i\in I} S_i$, et si I est **fini**, $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \pi_i\right)$ est un Q-atlas de $\prod_{i\in I} S_i$.

[1] Voir 7.16.2.

L'assertion sur les sommes est triviale. Le point un peu plus délicat est la vérification de l'axiome b) par le produit. En fait, si $f,\ f' : \mathrm{T} \rightrightarrows \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ vérifient $\pi_i f = \pi_i f'$, $\forall\, i \in \mathrm{I}$, leur ensemble de coïncidence est une intersection finie d'ouverts de T, donc est ouvert. C.Q.F.D.

2. Sous-Q-variétés immergées.

1. *Morphismes Q-étales, Q-submersifs et Q-immersifs.*

Un morphisme de Q-variétés $f : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$ sera dit *Q-étale* (resp. *Q-submersif*, resp. *Q-immersif*) si, pour tout point s de S, l'application linéaire tangente $\mathrm{T}_s f$ est bijective (resp. surjective, resp. injective).

On ne considère que des Q-variétés de dimension finie, la *dimension d'une Q-variété* étant celle de ses espaces vectoriels tangents, quand ils ont le bon goût d'avoir tous la même. Cette condition sera réalisée si S possède un Q-atlas connexe.

Il est possible de traduire ces conditions en termes de relèvements locaux : f est Q-étale (resp. Q-submersif, resp. Q-immersif) si et seulement si tout relèvement local de f est étale (resp. submersif, resp. immersif). De façon précise, soit (X, π) un Q-atlas de S (resp. (X', π') de S') ; un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$ est Q-étale (resp. Q-submersif, resp. Q-immersif), si, pour tout $(x, x') \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ vérifiant $\pi'(x') = f(\pi(x))$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x dans X, U$'$ de x' dans X$'$, et un morphisme $\overline{f} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ étale (resp. submersif, resp. immersif) tel que $\overline{f}(x) = x'$ et $\pi'(\overline{f}(t)) = f(\pi(t))$, pour tout t de U.

Bien entendu, étale signifie étale C^∞ ou étale C^ω, suivant le contexte.

PROPOSITION. – *Soient* $f : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$ *et* $g : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ *deux morphismes de Q-variétés*

i) *si* f *et* g *sont Q-étales,* $g \circ f$ *aussi.*

ii) *si* $g \circ f$ *et* f (resp. g) *sont Q-étales,* g (resp. f) *aussi.*

iii) *si* $g \circ f$ *est Q-submersive* (resp. Q-immersive) g (resp. f) *aussi.*

iv) *si* S$'$ *est une variété, et si* f *est Q-immersive alors* S *est aussi une variété.*

Seul iv) demande une indication : soit (X, π) un Q-atlas de S ; on peut trouver des ouverts U de X assez petits pour que $\overline{f} = f \circ \pi$ restreinte à U soit une immersion injective de U dans S′ et π est localement injective.

Considérant la classe des ouverts de X sur lesquels π est injective, on obtient un recouvrement ouvert de S pour la topologie des domaines de Q-cartes, i.e. la topologie quotient. De plus, pour chaque ouvert de ce recouvrement π^{-1} est un homéomorphisme à valeurs dans un ouvert d'une variété. Les changements de cartes ne sont autres que les changements de Q-cartes. C.Q.F.D.

2. *Sous-Q-variétés immergées.*

Soit S′ un sous-ensemble d'une Q-variété S. On dit que S′ *est une sous-Q-variété immergée* de S, s'il existe sur S′ une structure de Q-variété telle que :

i) l'injection canonique $j : S' \to S$ soit Q-immersive,

ii) une application $\varphi : T \to S'$ est un morphisme de Q-variétés si et seulement si le composé $j \circ \varphi : T \to S$ en est un.

De même, soit X′ un sous-ensemble d'une variété X ; on dira que X′ est *une sous-variété immergée* de X, s'il existe sur X′ une structure de variété telle que :

i) l'injection canonique $j : X' \to X$ soit immersive,

ii) une application $\varphi : Y \to X'$ est un morphisme de variétés, si et seulement si le composé $j \circ \varphi$ en est un.

On remarquera que la condition ii) est universelle, ce qui implique l'unicité d'une telle structure. Indiquons, pour illustrer l'importance des hypothèses de dénombrabilité dans ces questions, que toute feuille d'une variété paracompacte feuilletée est une sous-variété immergée. Le lecteur en trouvera la démonstration dans Chevalley [3] p. 95.

PROPOSITION. – *Soit* (X, π) *un Q-atlas de* S ; *pour toute sous-Q-variété immergée* S′ *de* S, $\pi^{-1}(S')$ *est une sous-variété immergée de* X *et un Q-atlas de* S′.

La réciproque sera étudiée au n° 4.

Soit (X', π') un Q-atlas de S′ ; on a des immersions d'ouverts de X′ dans X relevant localement l'injection $j : S' \to S$. Quitte à rapetisser les ouverts utilisés, on peut supposer que ce sont des isomorphismes sur des sous-variétés localement fermées et à valeurs dans $\pi^{-1}(S')$. Les images de ces relèvements forment une base d'ouverts de $\pi^{-1}(S')$ car d'après l'axiome b), deux tels morphismes coïncident sur un ouvert de X'. La structure de variétés de $\pi^{-1}(S')$ s'en déduit, et définit un Q-atlas de S'.

En effet la projection de $\pi^{-1}(S')$ sur S' est Q-étale surjective par construction, et on a la caractérisation suivante des Q-atlas.

LEMME. – *Un couple* (Y, f) *où* Y *est une variété et* f *un morphisme de* Y *dans une* Q-*variété* S *est un* Q-*atlas de* S, *si et seulement si* f *est* Q-*étale surjective.*

Les conditions à vérifier sont strictement locales ; tout point de Y possède un voisinage difféomorphe à une Q-carte de S. D'où le lemme.

L'injection canonique $\pi^{-1}(S') \to X$ est immersive elle aussi par construction. Il reste à vérifier la propriété universelle : si $Y \to \pi^{-1}(S')$ est tel que le composé $Y \to X$ soit un morphisme de variétés, par projection sur S et calcul de diagramme, $Y \to S'$ est un morphisme de Q-variétés, donc aussi $Y \to \pi^{-1}(S')$. D'où la proposition. C.Q.F.D.

3. *Nouvelle définition des* Q-*atlas.*

PROPOSITION. – *Soit* π *une application d'une variété* X sur *un ensemble* S ; *posons* $R = X \times_S X = \{(x, x') \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(x')\}$. *Le couple* (X, π) *est un* Q-*atlas de* S, *si et seulement si, il existe sur* R *une structure de variété telle que :*

α) *les deux projections* p_1 *et* p_2 *de* R *sur* X *sont étales ;*

β) R *est une sous-variété immergée de* $X \times X$.

Tout d'abord, si (X, π) est un Q-atlas, on considère les graphes de difféomorphismes locaux, compatibles avec π ; ils définissent une base d'ouverts de R, ce qui permet d'obtenir la structure de variété sur R. Soit f une application, d'une variété T dans R, telle que $p_1 f$ et $p_2 f$ soient des morphismes ; il est clair que p_1 est étale, donc f est un morphisme.

Réciproquement, si (X, π) vérifie les axiomes α) et β), l'existence des difféomorphismes locaux est facile à voir. De plus, l'application diagonale est un morphisme $x \mapsto (x, x)$ section de la projection $p_1 : R \to X$, donc son image est ouverte dans R pour sa topologie à lui, car p_1 est étale, d'où l'axiome b) des Q-atlas. C.Q.F.D.

Afin d'insister sur l'importance de l'axiome β) nous indiquons le *Contre-exemple* : sur $X = \mathbf{R}$, on considère la relation d'équivalence de graphe $R = \mathbf{R}^2$. On met sur $\mathbf{R}^2$ la structure de variété, définie par la structure fine du feuilletage par les droites $y - x = k$. L'injection $R \to X \times X$ est une immersion et l'axiome α) est vérifié, mais pas β), ce qui est heureux, sinon le point admettrait la droite comme Q-carte !

4. *Réciproque.*

Montrons d'abord la réciproque de la proposition du n° 2.

PROPOSITION. – *Pour qu'un sous-ensemble* S′ *d'une* Q*-variété* S *soit une sous* Q*-variété immergée, il suffit qu'il existe un* Q*-atlas* (X, π) *de* S *tel que* $\pi^{-1}(S')$ *soit une sous-variété immergée de* X. *Alors* $(\pi^{-1}(S'), \pi')$, *où* $\pi' = \pi \mid \pi^{-1}(S')$, *est un* Q*-atlas de* S.

En particulier, la diagonale Δ *de* $S \times S$ *est une sous*-Q*-variété immergée.*

Le corollaire est trivial, car Δ a pour image réciproque le graphe R dans $X \times X$ (cf. prop. du n° 3).

Notons π' la restriction de π à $\pi^{-1}(S')$; π' est surjective. Si $\pi'(x) = \pi'(x')$ dans S′, on peut trouver un voisinage U de x dans $\pi^{-1}(S')$ assez petit pour être une sous-variété de X. Il existe un voisinage V de x dans X, et un difféomorphisme de V sur un voisinage ouvert V′ de x' dans X, compatible avec π. En composant, on a un morphisme de U dans X, à image dans $\pi^{-1}(S')$, et par propriété universelle des sous-variétés immergées, c'est un morphisme dans $\pi^{-1}(S')$. Prenons $x = x'$, et supposons qu'on n'obtienne pas l'identité de U, en composant avec l'injection dans X, et appliquant l'axiome b) à (X, π), on voit que c'est l'identité dans un ouvert U′ de U. Il est facile d'en déduire que les morphismes obtenus sont des difféomorphismes, d'où l'axiome a) pour $(\pi^{-1}(S'), \pi')$. L'axiome b) se déduit de b) supposé vrai pour (X, π). C.Q.F.D.

5. *Image réciproque.*

Soient $f : S_1 \to S$ un morphisme de Q-variétés et $j : S' \to S$ l'injection canonique d'une sous-Q-variété immergée de S. On dit que f est Q-*transversale à* S′ *en un point* t *de* $f^{-1}(S')$, si l'espace tangent $T_{f(t)}S$ est somme de $T_{f(t)}S'$ et de l'image de $T_t S_1$. Comme d'habitude, f sera Q-*transversal* à S′, s'il est Q-transversal à S′ en tout point de $f^{-1}(S')$.

PROPOSITION. — *Soit* $f : S_1 \to S$ *un morphisme* Q-*transversal à la sous*-Q-*variété immergée* S′ *de* S ; *l'image réciproque* $f^{-1}(S')$ *est une sous*-Q-*variété immergée de* S_1.

Soient (X, π) un Q-atlas de S (resp. (X_1, π_1) de S_1) et $\bar{f} : X_1 \to X$ un relèvement de f (on peut toujours remplacer X_1 par un de ses recouvrements, associé à des relèvements locaux). Notons $X' = \pi^{-1}(S')$; d'après la proposition du numéro 2 c'est un Q-atlas de S′ et une sous-variété immergée de X. De plus, $\bar{f}$ est transversal à X′ : la définition est la même pour les variétés que pour les Q-variétés, et en un point, l'espace tangent d'une Q-variété et celui d'un de ses Q-atlas coïncident. Donc $X' \times_X X_1$ est une variété munie d'une application **sur** l'ensemble $f^{-1}(S')$. Donc $X' \times_X X_1$ est un Q-atlas.

Enfin, on remarquera que $\bar{f}^{-1}(X') = X' \times_X X_1$ est une sous-variété immergée de X_1 ; car, si $g : Z \to X' \times_X X_1$ est une application, telle que le composé dans X_1 soit un morphisme, par composition avec $\bar{f}$, on obtient un morphisme u dans X, dont l'image est contenue dans X′. Comme X′ est une sous-variété immergée, u est un morphisme dans X′, et par propriété universelle du produit fibré, g est un morphisme. On pouvait aussi appliquer le numéro 2. La proposition du précédent numéro montre alors que $f^{-1}(S')$ est une sous-Q-variété immergée de S_1. C.Q.F.D.

6. *Produits fibrés.*

Un *couple* de morphismes $f_i : S_i \to S$, $i = 1, 2$, est Q-*transversal* si le morphisme $(f_1, f_2) : S_1 \times S_2 \to S \times S$ est Q-transversal à la diagonale.

THEOREME. — *Soit* $f_i : S_i \to S$, $i = 1, 2$, *un couple* Q-*transversal ; le produit fibré d'ensembles* $S_1 \times_S S_2$ *peut être muni d'une structure* *de* Q-*variété, qui en fait un produit fibré au-dessus de* S *dans la catégorie des* Q-*variétés.*

Du point de vue ensembliste, l'image réciproque par (f_1, f_2) de la diagonale est $S_1 \times_S S_2$; d'après les numéros 4 et 5, c'est une sous-Q-variété immergée de $S_1 \times S_2$. Elle possède la propriété universelle des produits fibrés, car, si $g_i : R \to S_i$, $i = 1, 2$, sont des morphismes de Q-variétés, vérifiant $g_1 f_1 = g_2 f_2$, R s'envoie par (g_1, g_2) dans $S_1 \times S_2$, et son image est contenue dans $S_1 \times_S S_2$. Cette dernière est une sous-Q-variété immergée, et par suite l'application $R \to S_1 \times_S S_2$ est un morphisme de Q-variétés. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. – *Soit* $\lambda : S' \to S$ *un morphisme de* Q-*variétés ; pour tout* $f : E \to S$, *tel que le couple* (λ, f) *soit* Q-*transversal, le morphisme de projection*

$$\lambda^* f : \lambda^* E = E \times_S S' \to S'$$

sera Q-*immersif* (resp. Q-submersif, resp. Q-étale), *si* f *est* Q-*immersif* (resp. Q-submersif, resp. Q-étale).

Cette assertion se vérifie sur les espaces tangents. Remarquons enfin, que si λ est Q-submersive, le couple (λ, f) sera Q-transversal pour tout morphisme f de but S.

3. Quotients de Q-variétés.

1. *Relation d'équivalence* Q-*submersive.*

Une relation d'équivalence dans une Q-variété S est dite Q-*submersive,* si son graphe R peut être muni d'une structure de Q-variété telle que

i) les deux projections de R dans S sont Q-submersives ;

ii) R est une sous-Q-variété immergée de $S \times S$.

Exemple. – La relation d'équivalence définie par une Q-submersion est Q-submersive.

En effet, soit $f' : S' \to S$ Q-submersif ; notant $R = S' \times_S S'$, du corollaire 2.6, on déduit que R est une Q-variété et chaque projection sur S' est Q-submersive. Par construction, R est l'image réciproque de la diagonale de $S \times S$ par (f', f') c'est donc une sous-Q-variété immergée de $S' \times S'$ d'après 2.5.

PROPOSITION. – *Une surjection Q-submersive $f : S' \to S$ possède la propriété universelle des quotients : une application $\lambda : S \to T$ est un morphisme, si et seulement si $g = \lambda f$ en est un.*

La nécessité est évidente.

Réciproquement, il suffit de montrer que λ possède des relèvements locaux qui sont des morphismes de variétés. Mais, f se relève localement par des submersions, qui admettent des sections. En composant une telle section avec un relèvement local de g, on obtient le résultat. C.Q.F.D.

2. *Enoncés préparatoires.*

Premier Lemme. – Soit R une relation d'équivalence Q-submersive dans S ; pour tout Q-atlas (X, π) de S, $R' = \pi^{-1}(R)$ est une sous-variété immergée de $X \times X$, et ses projections sur X sont submersives. Les ensembles S/R et X/R' sont isomorphes.

En effet, R' est une sous-Q-variété immergée de $X \times X$ d'après 2.4, c'est donc une variété d'après 2.1. Enfin, la bijection entre les ensembles S/R et X/R' est claire car $x \, R' y$ si et seulement si $\pi(x) R \pi(y)$. C.Q.F.D.

Second Lemme. – Soit R une relation d'équivalence Q-submersive dans la Q-variété S ; supposons qu'il existe une variété Y et un morphisme de Q-variétés $f : Y \to S$, vérifiant les conditions suivantes :

o) le composé $pf : Y \to S \to S/R$ est surjectif, où $p : S \to S/R$ est la projection canonique ;

i) le morphisme $(f, f) : Y \times Y \to S \times S$ est Q-transversal à R, et l'image réciproque R_Y de R par (f, f) est étale sur Y par chaque projection ;

ii) le morphisme $(id_S, f) : S \times Y \to S \times S$ est Q-transversal à R, et l'image réciproque R' de R par (id_S, f) est une variété, Q-étale sur S et submersive dans Y.

Alors S/R admet Y pour Q-atlas et la projection p est Q-submersive.

Remarques. – Dans la condition i), on notera que R_Y, sous-Q-variété immergée de $Y \times Y$ est une variété.

La conclusion aurait pu s'énoncer : S/R admet une structure de Q-variété, qui en fait un quotient de S dans la catégorie des Q-variétés, i.e. la projection canonique a la propriété universelle des quotients (cf. n° 1).

Preuve. – Les conditions o) et i) font de Y un Q-atlas de $S/R = Y/R_Y$, et ii) nous assure que p est une Q-submersion (noter que R' est un Q-atlas de S). C.Q.F.D.

3. *Quotients.*

Pour démontrer le théorème ci-dessous, nous n'avons plus qu'à prouver l'existence d'une variété Y, satisfaisant les conditions du second lemme précédent, dans le cas où S est une variété X. Pour le cas général, on remplacera S par l'un de ses Q-atlas et on appliquera le premier lemme.

THEOREME. – *Soit* R *une relation d'équivalence* Q*-submersive dans une* Q*-variété* S *; on peut munir* S/R *d'une structure de* Q*-variété, de telle sorte que la projection canonique soit* Q*-submersive.*

En effet, R est une sous-variété immergée de $X \times X$, et, les horizontales $X \times \{y\}$ sont transverses à R, car la seconde projection $p_2 : R \to X$ est submersive. Les classes d'équivalence $\overline{y}$ sont donc des sous-variétés immergées de X, et elles admettent des petites transversales Y_x dans X, où on suppose que : $\dim Y_x + \dim \overline{x} = \dim X$. De plus, si Y_x est une transversale en x à $\overline{x}$ et suffisamment petite, elle est aussi transverse à $\overline{x}'$ en tout point x' assez voisin de x.

En effet, les classes d'équivalence sont les intégrales du champ de plans, image sur X par la première projection du noyau $\operatorname{Ker} Tp_2$, induit sur la diagonale par la seconde projection de R. Il est clair que Y_x sera transverse à ce système dans tout un ouvert, qu'on peut supposer identique à Y_x.

Posons $Y = \coprod_{x \in X} Y_x$; alors

– par construction $Y_x \times \{y\}$ est transverse à R, pour tout y de X, donc $Y \times Y$ et $Y \times X$ sont transverses à R ;

– les sous-variétés immergées définies par $Y \times Y$ et $Y \times X$, R_Y et R' sont submersives sur chaque facteur.

En effet, R_Y est une sous-variété immergée de $Y \times Y$ (resp. R' de $Y \times X$) et les projections sont submersives. De plus, R_Y contient la diagonale de Y, et R' contient le graphe de f.

Enfin, les projections de R_Y sur Y sont étales (resp. de R' sur X et Y) car leurs fibres sont de dimension nulle. C.Q.F.D.

CHAPITRE 2

Q-VARIETES ANALYTIQUES ET GROUPES DE LIE

A l'exclusion du numéro 0 du § 5, consacré aux champs de vecteurs et théorème de Frobenius, généralisés aux Q-variétés, le cadre sera celui des Q-variétés analytiques. L'objet de ce chapitre est de répondre à la question suivante, posée par Pierre Gabriel :

"Un Q-groupe de Lie possède-t-il un Q-atlas qui soit un vrai groupe de Lie" ?

4. Q-variétés en groupes.

1. DEFINITION. – *Une Q-variété en groupe est une paire* (S , G), *formée d'une Q-variété analytique* S *et d'un groupe* G, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

i) *les ensembles sous-jacents à* S *et* G *coïncident ;*

ii) *l'application* $(x , y) \mapsto xy^{-1}$ *de* $S \times S$ *dans* S *est un morphisme de Q-variétés analytiques.*

Dans la suite, à moins qu'il n'y ait ambiguité, on notera G la Q-variété en groupe (S , G).

Une Q-variété en groupe possède les structures sous-jacentes de Z Q-variété et de groupe, mais non celle de groupe topologique.

Exemples. – Tout groupe de Lie est une Q-variété en groupe.

– L'ensemble des géodésiques du tore de pente μ, avec μ irrationnel. On considère le plongement de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{R}$ défini par

$$(m , n) \mapsto m\alpha + n\beta$$

où α et β sont deux nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, et le plongement de $\mathbf{Z}$ dans le cercle $\mathbf{T}$ obtenu par passage au quotient, soit $n \mapsto \overline{n\beta}$ en notant $\overline{n\beta}$ la classe de $n\beta$ modulo (α).

On sait déjà, cf. 1.3, que $\Gamma = \mathbf{R}/\mathbf{Z}^2 = \mathbf{T}/\mathbf{Z}$ est une Q-variété réelle. L'addition sur $\mathbf{R}$ est compatible avec une congruence modulo (α , β), où α et β sont deux nombres réels, linéairement indépendants sur **Q**. On en déduit la loi de groupe sur Γ, qui, en utilisant **R** comme Q-cartes locales vérifie l'axiome ii).

– Le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe distingué immergé, cf. n° 3.

2. *Q-variété tangente.*

Remarquons tout d'abord que, étant données deux Q-variétés S et S′, il y a identité entre les Q-variétés $T(S \times S')$ et $TS \times TS'$.

Les ensembles sous-jacents sont en effet les mêmes ; de plus, tout produit d'une Q-carte de S et d'une Q-carte de S′ est une Q-carte du produit, d'où le résultat.

Proposition. – *La Q-variété tangente* TG *d'une Q-variété en groupe* G *peut être canoniquement munie d'une structure de Q-variété en groupe, et la Q-variété en groupe* TG *est produit semi-direct de* $\mathfrak{g} = T_e G$ *et du groupe* G.

Soit $m : G \times G \to G$ la multiplication ; alors

$$M = Tm : TG \times TG = T(G \times G) \to TG$$

est un morphisme de Q-variétés. De même pour le passage à l'inverse. On notera que, dans les fibres, cette loi n'est autre que l'addition. D'où la première moitié de la proposition.

On a noté $\mathfrak{g} = T_e G$ l'espace vectoriel tangent à l'origine e de G. Soit $j : \mathfrak{g} \to TG$ l'inclusion canonique,

$p : TG \to G$ la fibration canonique,

$s : G \to TG$ la section nulle ;

il faut montrer que

$$0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{j} TG \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} G \to e$$

est une suite exacte scindée, dont les morphismes sont des morphismes de Q-variétés en groupes.

La dernière assertion est triviale, de plus $p \circ s = id_G$ et $p \circ j = e$. Le seul problème est de voir l'exactitude en TG, qui découle de ce que $\mathfrak{g}$ n'est autre que l'espace tangent à l'origine. C.Q.F.D.

3. *Quotients.*

La relation d'équivalence définie dans un groupe de Lie par un sous-groupe de Lie a la propriété du prolongement des homotopies [4]. Le feuilletage d'un groupe de Lie défini par un sous-groupe distingué immergé n'a donc pas d'holonomie transversale, et le quotient est canoniquement muni d'une structure de Q-variété en groupe. Plus généralement :

THEOREME. – *Soit* H *un sous-groupe distingué immergé d'une* Q-*variété en groupe* G ; *alors* G/H *peut être canoniquement muni d'une structure de* Q-*variété en groupe, qui en fait un quotient dans la catégorie des* Q-*variétés en groupes.*

En effet, la relation d'équivalence associée à un sous-groupe distingué immergé est Q-submersive comme on le voit en identifiant le graphe R à G x H. Le quotient G/H a donc une structure canonique de Q-variété quotient, en plus de sa structure de groupe, et on a (G x G)/(H x H) = G/H x G/H par produit direct de Q-submersions. La propriété universelle des quotients de Q-variétés montre alors que l'axiome ii) est vérifié. C.Q.F.D.

5. Algèbre de Lie d'une Q-variété en groupe.

0. *Champs de vecteurs sur une* Q-*variété.*

On appelle *champ de vecteurs sur une* Q-*variété* S une section du fibré tangent TS, qui soit un morphisme de Q-variétés.

Soit (X, π) un Q-atlas de S ; si V est un champ de vecteurs sur S, alors $\pi^{-1}(V)$ est un champ de vecteurs sur X invariant par les difféomorphismes locaux de X au-dessus de S. Inversement, un tel champ de vecteurs dans un Q-atlas induit un unique champ de vecteurs sur S.

Le *crochet* [V , W] *de deux champs de vecteurs sur* S est l'unique champ de vecteurs sur S défini par $[\pi^{-1}(V), \pi^{-1}(W)]$ sur le Q-atlas (X, π) de S. Ceci est indépendant du Q-atlas utilisé.

On appelle *distribution involutive,* de dimension p sur S, la donnée d'un sous fibré M de rang p de TS, invariant par le crochet, i.e. tel que $[V, W]$ soit contenu dans M pour tout couple (V, W) de champs de vecteurs contenus dans M.

THEOREME. – *Soit* M *une distribution involutive sur une* Q-*variété* S ; *par tout point* s *de* S *passe une intégrale maximale* L_s *unique.*

Appelons *sous*-Q-*variété de* S toute Q-variété L dont l'ensemble sous-jacent soit un sous-ensemble de S, et telle que l'injection canonique soit une Q-immersion. Une *intégrale de la distribution* M sera une sous-Q-variété L de S, telle que, en tout point s de L l'espace tangent T_sL coïncide avec M_s.

De la compatibilité du crochet usuel et des morphismes de variétés (cf. [3] p. 85), il est clair que si (X, π) est un Q-atlas de S, $\pi^{-1}(M)$ est une distribution involutive, de plus invariante par les difféomorphismes locaux au-dessus de S.

En un point, il y a unicité du "germe d'intégrale" de M, comme on le voit sur une Q-carte. Ceci va impliquer de manière usuelle l'unicité de *l'intégrale maximale* contenant s. Une intégrale maximale de M sera un élément maximal parmi les intégrales connexes de M (cf. 1.5).

Soit L_s l'intégrale maximale passant par s ; $\pi^{-1}(L_s)$ est une réunion d'intégrales maximales F_x de la distribution involutive $\pi^{-1}(M)$ sur X, et c'est un Q-atlas de L_s. En effet, l'axiome a) résulte de l'invariance de $\pi^{-1}(M)$ par difféomorphismes locaux au-dessus de S et l'axiome b) est trivial. C.Q.F.D.

Remarque. – Autrement dit la *structure fine* de variété Y sur X associée à $\pi^{-1}(M)$, obtenue par recollement des structures de variétés des F_x, est un Q-atlas de S, pour une structure de Q-variété T ; on caractérise T par le fait que M est le fibré tangent à T. De la propriété 9.3.2. de [2b], on déduit une propriété analogue pour les Q-variétés:

Pour qu'un morphisme $f : Z \to S$ soit une intégrale de M, il faut et il suffit que f soit un morphisme de Z dans T.

1. *Algèbre et sous-algèbres de Lie de* G.

En 4.2 on a montré que

$$0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{j} \mathrm{TG} \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{G} \to e$$

est une suite exacte scindée dans la catégorie des Q-variétés en groupes.

Soit ξ un vecteur tangent à l'origine d'une Q-variété en groupe G ; on note L_ξ le champ de vecteurs sur G défini par $L_\xi(g) = s(g)\,j(\xi)$.

L'application L_ξ est un morphisme de G dans TG car $s : G \to TG$ en est un ainsi que la translation à droite par $j(\xi)$ dans TG.

On rappelle que j, p et s sont respectivement, l'inclusion canonique, la fibration canonique et la section nulle. D'autre part, $s(g)\,j(\xi)$ n'est autre que le vecteur tangent en g, image de ξ par l'application linéaire tangente $T(g)$ à la translation à gauche par g. Autrement dit $T(g'g^{-1})\,L_\xi(g) = L_\xi(g')$, et L_ξ est *invariant à gauche.*

Inversement, un champ de vecteurs invariant à gauche sur G définit un vecteur tangent à l'origine.

Nous pouvons ainsi, grâce au crochet, faire de $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

PROPOSITION. — *A toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'une* Q-*variété en groupe* G, *est associée une sous-*Q-*variété en groupe* H *de* G.

D'après la remarque du n° précédent, le sous-fibré M image de $\mathfrak{h} \times G$ par $(\xi, g) \mapsto s(g)\,j(\xi)$ à valeurs dans TG définit une structure fine sur G, soit Γ et la propriété universelle indiquée montre que Γ est une Q-variété en groupe. L'intégrale maximale H passant par l'origine est une Q-variété en groupe de par la même raison. C.Q.F.D.

Remarque. — On ne sait pas si H est une sous-Q-variété immergée, mais on déduit comme cas particulier de la propriété universelle des intégrales la propriété suivante :

Soit $\varphi : G' \to G$ un morphisme de Q-variétés en groupes, avec G' connexe, tel que l'image par la dérivée à l'origine de φ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de G' soit contenue dans $\mathfrak{h}$. Alors $\varphi(G') \subset H$ et φ considéré comme application de G' dans H est un morphisme de Q-variétés en groupes.

En effet, $\varphi(G')$ doit être contenue dans une Q-variété intégrale connexe de $\mathfrak{h} \times G$ contenant l'origine. C.Q.F.D.

2. *Relèvement d'un morphisme d'algèbres de Lie.*

On remarque d'abord que si G et G′ sont deux Q-variétés en groupes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, leur produit G x G′ est une Q-variété en groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. En effet $T_{e,e'}(G \times G') = T_e G \times T_{e'} G'$.

PROPOSITION. – *Soit* G (resp. G′) *une* Q-*variété en groupe, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) ; *à tout morphisme* $\mathfrak{h} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *d'algèbres de Lie, on peut associer : une* Q-*variété en groupe* H, *un morphisme étale de* Q-*variétés en groupes* $p : H \to G$, *et un morphisme* $h : H \to G'$, *tels que* $T_e h (T_e p)^{-1} = \mathfrak{h}$, *où* T_e *indique l'application tangente à l'origine.*

On considère le graphe $\Gamma(\mathfrak{h})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. D'après la proposition précédente, il définit un sous-groupe H de G x G′.

La projection π_1 (resp. π_2) de G x G′ sur G (resp. G′) et sa restriction p (resp. h) à H sont des morphismes de Q-variétés en groupes. L'application tangente à l'origine $T_e p : \Gamma(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme, d'où l'énoncé. C.Q.F.D.

3. *Identification des* Q-*variétés en groupes.*

THEOREME. – *Soient* G *une variété en groupe connexe et simplement connexe,* G′ *une* Q-*variété en groupe et* $\mathfrak{h} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *un morphisme de leurs algèbres de Lie. Il existe un morphisme de* Q-*variétés en groupes, soit* $h : G \to G'$, *qui relève* $\mathfrak{h}$.

En effet, H, qui est Q-étale au-dessus de G, est une vraie variété, 2.1. On peut supposer aussi H connexe. Par suite H et G sont connexes et $p : H \to G$ est étale, donc un revêtement. Comme G est simplement connexe, p est un isomorphisme (les notations sont celles du numéro précédent). C.Q.F.D.

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe *quelconque* de G. D'après [2] p. 177, il existe sur H une structure de groupe de Lie qui en fait un sous-groupe immergé. La relation d'équivalence modulo H a pour graphe l'image de G x H par l'application $(g', g) \mapsto (g, gg')$ de G x G dans lui-même ; elle est donc Q-submersive. Si H est une sous-variété immergée de G, G x H est une sous-variété immergée de G x G, et le graphe aussi. Le quotient est une Q-variété G/H. Si H est distingué dans G, alors G/H est une Q-variété en groupe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, où $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) est l'algèbre de Lie de G (resp. H).

En particulier, soit H un sous-groupe de G tel que toute application continue de **R** dans G dont l'image est contenue dans H est constante ; on dira que H est *pseudo-discret.* Alors G/H est une Q-variété en groupe et G est un Q-atlas de G/H. On obtient ainsi toute Q-variété en groupe Γ.

COROLLAIRE. – *Toute* Q-*variété en groupe* Γ *possède un* Q-*atlas* G *qui est un groupe de Lie connexe et simplement connexe. De plus* Γ *est quotient de* G, *au sens des* Q-*variétés en groupes, par un sous-groupe pseudo-discret.*

En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ, et soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. D'après le théorème, il existe un homomorphisme $\varphi : G \to \Gamma$ induisant l'identité sur $\mathfrak{g}$. Alors φ est Q-étale, donc un Q-atlas de Γ ; si $N = \operatorname{Ker} \varphi$, alors G est aussi un Q-atlas de G/N et comme l'application bijective Ψ de G/N sur Γ se relève en l'identité de G, c'est un isomorphisme de Q-variétés. Enfin, comme φ est Q-étale, l'algèbre de Lie de H est triviale, donc H est pseudo-discret. C.Q.F.D.

Remarque. – On peut maintenant conclure que le sous-groupe de Γ associé à une sous-algèbre de Lie est une sous-Q-variété immergée. En effet, c'est vrai pour les groupes de Lie [2] p. 177 déjà cité. On applique alors le critère 2.4 permettant de reconnaître les sous-Q-variétés immergées en remontant dans un Q-atlas, qui est ici un groupe de Lie.

Il faut remplacer dans l'énoncé 3.5 de [1] sous-groupe dénombrable par sous-groupe pseudo-discret.

CHAPITRE 3

GROUPE FONDAMENTAL ET REVETEMENTS DES Q-VARIETES

6. Revêtements.

1. *Q-revêtements.*

Dans la suite du paragraphe, la Q-variété S considérée sera connexe, et les variétés, Q-variétés et morphismes seront pointés.

Un morphisme surjectif de variétés $f : X \to Y$ sera appelé un *prérevêtement,* si c'est un fibré localement trivial à fibre discrète, et *revêtement,* si de plus X est connexe.

THEOREME. – *Soit* $f : (M , m_0) \to (S , s_0)$ *un morphisme* Q-*étale surjectif de* Q-*variétés pointées ; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *il existe un* Q-*atlas* (X , π) *de* S, *tel que l'image réciproque* $\pi^{-1}(M)$ *soit un prérevêtement de* X ;

ii) *pour tout* Q-*atlas* $(Y , \bar{\omega})$ *de* M, $\bar{\omega}^{-1}(M)$ *est un prérevêtement de* Y.

Dans ces conditions, f est appelé un Q-*prérevêtement,* ou un Q-*revêtement* si de plus M est connexe.

LEMME. – *Soit*

$$\begin{tikzcd} Z \times_X Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\bar{\omega}"] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

un carré cartésien, dans la catégorie des variétés, où α, π *sont étales,* α *est surjectif et* $\bar{\omega}$ *est un prérevêtement ; alors* π *est un prérevêtement.*

En effet, soit x dans X ; il existe y dans Y tel que $x = \alpha(y)$, et un voisinage ouvert U de y, tel que $\alpha|_U$ soit un difféomorphisme sur un ouvert V de X, et tel aussi que $\bar{\omega}^{-1}(U) = \coprod_{\pi(z)=x} W_z$ où chaque W_z est difféomorphe à U par $\bar{\omega}$, et contient z.

Alors $\pi^{-1}(V) = \beta\left(\coprod_{\pi(z)=x} W_z\right)$, car β est surjectif, et chaque βW_z est difféomorphe à V, car $\pi\beta$ est un difféomorphisme de W_z sur V. D'où le lemme.

Pour démontrer le théorème, il suffit d'appliquer le lemme à la face antérieure du diagramme ci-dessous, où le produit fibré $M \times_S X \times_S Y$ est représenté par

$$N = (M \times_S X) \times_X (X \times_S Y) = (M \times_S X) \times_M (M \times_S Y) =$$
$$= (M \times_S Y) \times_Y (X \times_S Y). \text{ C.Q.F.D.}$$

$$\begin{tikzcd}
 & M \times_S X \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \arrow[dd] \\
N \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \times_S Y \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & X \arrow[rr] & & S \\
X \times_S Y \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2. *Critères et exemples.*

PROPOSITION. — *Soit $f : (M, m_0) \to (S, s_0)$ un morphisme Q-étale surjectif de Q-variétés pointées connexes ; une condition nécessaire et suffisante pour que (M, f) soit un Q-revêtement, est que $\pi^{-1}(M)$ soit un Q-prérevêtement de N pour une* (resp. toute) *Q-variété* (N, π) *Q-étale surjective dans* S.

Il s'agit d'élargir, à la catégorie des Q-variétés Q-étales surjectives dans S, le théorème précédent.

On considère en effet un Q-atlas (X, p) de N : la composition par π en fait un Q-atlas de S, et il suffit d'appliquer 6.1 au diagramme commutatif ci-dessous, où $\bar{\omega} = \pi p$. C.Q.F.D.

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{\omega}^{-1}(M) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\pi^{-1}(M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & M \arrow[dd, "f"] \\
 & X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\bar{\omega}"] & \\
N \arrow[rr, "\pi"] & & S
\end{tikzcd}$$

Critère. – Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un Q-atlas connexe (X, π) de S soit un Q-revêtement est que les deux projections $X \times_S X \rightrightarrows X$ soient des prérevêtements.

Cet énoncé est un corollaire trivial du théorème précédent. Il va nous permettre de donner des exemples non triviaux de Q-revêtements.

Exemples. – Tout Q-revêtement d'une variété est un revêtement et inversement, tout revêtement d'une variété est un Q-revêtement.

– Si une variété X est un Q-revêtement de S, c'est un Q-atlas.

– L'action différentiable (resp. analytique) et libre d'un groupe discret dénombrable G sur une variété différentielle (resp. analytique) connexe X en fait un Q-revêtement de $S = X/G$.

Il suffit pour le voir d'appliquer le critère.

– En particulier, la droite $\mathbf{R}$ et le cercle S^1 sont des Q-revêtements de la Q-variété $\Gamma = \mathbf{R}/\mathbf{Z}^2 = S^1/\mathbf{Z}$, espace des géodésiques du tore de pente irrationnelle.

Z • On notera qu'un revêtement d'un Q-atlas de S n'a aucune raison d'être un Q-revêtement de S.

3. *Transitivité et produits de Q-revêtements.*

De la fonctorialité des images réciproques, on déduit la transitivité des Q-revêtements en utilisant les énoncés correspondants pour les variétés.

PROPOSITION. – i) *Si* (S_1, f) *est un Q-revêtement de* S *et* (S_2, g) *un Q-revêtement de* S_1, (S_2, fg) *est un Q-revêtement de* S.

ii) *Un morphisme de Q-revêtements est un Q-revêtement.*

Pour ii) il faut encore vérifier que $Im\, g = S_1$; or S_1 est connexe, et $Im\, g$ est un domaine de Q-carte ainsi que son complémentaire. C.Q.F.D.

Cet énoncé ii) choquera moins, si l'on songe que les Q-variétés sont "localement" aussi régulières que les variétés.

Contrairement à ce qui se passe dans la catégorie QVE/S il n'est plus nécessaire de se restreindre à des produits finis, cf. 13.1.

PROPOSITION. – *La sous-catégorie pleine* QR/S *de* QVE/S, *formée des Q-revêtements de* S, *possède des produits quelconques.*

Soit $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de Q-revêtements de S, et $R = \prod_{\substack{S \\ \lambda \in \Lambda}} R_\lambda$ leur produit fibré ensembliste sur S. Il existe toujours un Q-atlas (X, f) simplement connexe, mais non forcément connexe, de S. Chaque image réciproque $f^{-1}(R_\lambda)$ est isomorphe à $X \times F_\lambda$, où F_λ est discret, et $f^{-1}(R) = X \times \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)$, comme ensemble. De par l'hypothèse de connexité sur S, les fibres F_λ et $F = \prod_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ sont parfaitement définies. Enfin, les ensembles $(X \times F) \times_R (X \times F)$ et $(X \times_S X) \times F$ coïncident, comme étant $(fp_i)^{-1}(R) = p_i^{-1}(X \times F)$, où p_i désigne l'une des deux projections de $X \times_S X$ dans X.

On considère la structure de variété sur $X \times F$ (resp. sur $(X \times_S X) \times F$) définie par celle de X (resp. $X \times_S X$) et la structure discrète de F. Il est clair qu'on fait ainsi de $X \times F$ un Q-atlas de R, et un prérevêtement de X. Il suffit de prendre alors la composante connexe $\widetilde{R}$ du point base $r = (r_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, i.e. la plus grande sous-Q-variété connexe de R contenant r, pour terminer la démonstration et obtenir un Q-atlas de ce qu'il faut. C.Q.F.D.

4. *Le Q-revêtement universel.*

On appellera *Q-revêtement universel* de la Q-variété connexe S, un objet initial dans la catégorie QR/S.

THEOREME. – *Toute Q-variété connexe possède un Q-revêtement universel.*

En effet, ceci est corollaire de la proposition précédente, si l'on considère l'ensemble des classes d'isomorphisme de Q-revêtements de S. Pour vérifier que c'est un ensemble, il suffit de majorer le cardinal d'un Q-revêtement de S. Pour cela, soient (X, π) un Q-atlas simplement connexe, et Σ l'ensemble des suites finies

$$\sigma = (s_0, U_0, s_1, \ldots, U_p, s_{p+1}) ,$$

où s_0 est le point base de S, s_i sont des points de S, et U_i des ouverts connexes et simplement connexes de X, tels que l'image $\pi(U_i)$ contienne s_i et s_{i+1}, pour $0 \leqslant i \leqslant p$. Etant donné le Q-revêtement (M, f) de point base m_0 de S, à tout σ de Σ, on associe le relèvement de s_{p+1} dans M obtenu par relèvements successifs $\gamma(s_0) = m_0, \gamma(s_1), \ldots$ grâce à la trivialisation du revêtement induit sur U_i. Soit $\varphi : \Sigma \to M$ l'application ainsi obtenue ; $\varphi(\Sigma)$ et son complémentaire sont des domaines de Q-cartes, M est connexe et s'identifie à $\varphi(\Sigma)$ qui est non vide : donc card M est majoré par card Σ.

Une Q-variété connexe sera dite *simplement connexe* si elle est isomorphe à tout Q-revêtement d'elle-même.

De la transitivité des Q-revêtements, on déduit

PROPOSITION. – *Une condition nécessaire et suffisante pour que le Q-revêtement* $(\hat{S}, f)$ *de* S *soit universel, est que la Q-variété* $\hat{S}$ *soit simplement connexe.*

5. *Identification des espaces à opérateurs.*

THEOREME. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une Q-variété admette une variété comme Q-revêtement est qu'elle soit quotient d'une variété connexe par l'action libre d'un groupe discret.*

Par hypothèse, $S = X/G$ a une structure de Q-variété quotient, donc la relation d'équivalence définie par G est Q-submersive. De ce que G est discret et opère librement, on déduit que chaque projection $X \times_S X \to X$ est un revêtement et que la projection canonique $X \to S$ est Q-étale. D'où la conclusion d'après 2. Réciproquement, le Q-revêtement universel est alors une variété, et un Q-atlas de la Q-variété S. Le lecteur vérifiera que le groupe des automorphismes du Q-revêtement universel opère de façon simplement transitive dans la fibre ; il s'identifie alors à la fibre pointée, d'où l'assertion. C.Q.F.D.

7. Le groupe fondamental.

Le cadre naturel de ce paragraphe est topologique ; on restera toutefois dans la catégorie des Q-variétés pour conserver l'unité d'exposition, et on supposera donnée une Q-variété S connexe, et donc connexe par arcs.

1. *Homotopie.*

Deux chemins f_0, f_1 : $I = [0,1] \to S$ sont *homotopes* (resp. *homotopes avec extrémités fixes*) s'il existe une application B-continue cf. 16.2 $H : I^2 \to S$, telle que

$$\begin{cases} H(t,0) = f_0(t) \\ H(t,1) = f_1(t) \quad \text{pour tout } t \text{ de } I\,. \end{cases}$$

(resp. et aussi,

$$H(0,u) = f_0(0) = f_1(0)$$
$$H(1,u) = f_0(1) = f_1(1) \quad \text{pour tout } u \text{ de I})\,.$$

Sur cette définition, il est clair que l'homotopie, (resp. l'homotopie avec extrémités fixes) est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins dans S.

On définit de manière usuelle l'inversion et la composition des chemins dans S : notant Inv. et Com. les applications continues définies par

$$\mathrm{Inv}(t) = 1 - t \quad \text{de I dans I}\,,$$
$$\text{et } \mathrm{Com}(t) = 2t \quad \text{de I dans } I_1 \amalg I_2/_{1_1 \sim 0_2} = [0,2]\,,$$

l'inverse $\overline{f}$, et le composé $f_1 f_2$ de chemins tels que $f_1(1) = f_2(0)$, est un chemin dans S.

PROPOSITION. — i) *L'homotopie avec extrémités fixes est compatible avec l'inversion et la composition des chemins dans* S.

ii) *La composition des classes d'homotopie de chemins avec extrémités fixes est associative.*

iii) *La classe d'homotopie avec extrémités fixes du chemin constant* $\widetilde{s_0}$ *est un élément neutre à droite et à gauche pour la composition des classes de chemins.*

Toutes ces propriétés se démontrent de la manière classique (cf. par exemple [2]). Il s'agit en effet de trouver des applications continues du carré I^2 dans lui-même, ou du carré dans le rectangle, qui composées avec les homotopies données fourniront le résultat. Le fait que le but soit une Q-variété ou un espace topologique n'intervient pas : tout se passe à la source. C.Q.F.D.

2. *Le groupe fondamental.*

Appelons *lacet en* s_0 un chemin dans S d'extrémités s_0, et notons $\pi_1(S, s_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie de lacets en s_0.

COROLLAIRE. – *Muni de la loi de composition des classes de lacets,* $\pi_1(S, s_0)$ *est un groupe, qu'on appelle groupe fondamental de* S *au point* s_0.

On vérifie, encore de façon classique, que si f est un chemin de s_0 à s_1, l'application qui au lacet γ en s_0 associe $\varphi_f(\gamma) = \overline{f}\gamma f$, définit, par passage au quotient, un isomorphisme du groupe $\pi_1(S, s_0)$ sur $\pi_1(S, s_1)$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f.

Comme par hypothèse S est connexe, donc connexe par arcs, on peut parler du groupe fondamental de S, qui est défini à isomorphisme près.

3. *Relation avec les Q-revêtements.*

PROPOSITION. – *Soit* (M , p) *un Q-revêtement de* S ; *la projection* p *fait de* $\pi_1(M, m_0)$ *un sous-groupe de* $\pi_1(S, s_0)$.

Tout d'abord, la projection induit un homomorphisme des groupes fondamentaux : c'est d'ailleurs vrai de tout morphisme de Q-variétés. Le seul problème est de montrer que p_* est injectif. Pour cela, on observe que tout chemin, et toute homotopie avec extrémités fixes dans S se relèvent dans M, et ceci de façon unique dès qu'on fixe le relèvement de l'origine. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. – *Soit* (M , p) *un Q-revêtement de* S ; *si le groupe fondamental de* S *est trivial, la projection* p *est un isomorphisme.*

En effet, p est déjà un "isomorphisme local" comme Q-revêtement, il suffit de vérifier que p est aussi une bijection. De la proposition, on déduit que deux chemins quelconques ayant mêmes extrémités dans S se relèvent en deux chemins homotopes ayant mêmes extrémités dans M, d'où l'assertion.

4. *La Q-variété des classes d'homotopie de chemins avec extrémités fixes.*

Des énoncés précédents on déduit, qu'une Q-variété connexe de groupe fondamental trivial est simplement connexe, i.e. elle est son propre Q-revêtement universel.

Pour montrer la réciproque, on construit explicitement un Q-revêtement de groupe fondamental trivial, à partir du $\pi_1(S)$. On obtiendra ainsi une seconde démonstration de l'existence du Q-revêtement universel des Q-variétés connexes.

Notations : S Q-variété connexe,

$Z = \coprod_{(s,s')} U_s \times V_{s'}$, Q-atlas de S x S formé de produits de Q-cartes simplement connexes de S indexées par des points de S,

Γ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins avec extrémités fixes dans S,

$[\gamma]$ la classe d'un chemin γ,

$p : \Gamma \to S \times S$ la projection $p([\gamma]) = (\gamma(0), \gamma(1))$, où $p = (\alpha, \omega)$, α : source, ω : but,

π désignera indifféremment la projection d'un Q-atlas sur la Q-variété correspondante.

Il s'agit de faire du produit fibré d'ensembles $p^{-1}(Z)$ un Q-atlas de Γ, de telle sorte que Γ soit un Q-revêtement de S x S et $\alpha^{-1}(s_0)$ un Q-revêtement de S.

On choisit dans chaque U x V un point base $b = (b_U, b_V)$, ce qui définit une bijection

$$\theta : p^{-1}(U \times V) \to U \times V \times F_b, \quad \text{avec} \quad F_b = p^{-1}(b).$$

En effet, soit λ un chemin de b_U à x dans U (resp. μ de b_V à y dans V) $[\pi(\lambda)]$ (resp. $[\pi(\mu)]$) est indépendante du choix de λ dans U (resp. μ dans V) car U (resp. V) est simplement connexe. Pour $c = [\gamma]$ de Γ tel que $p(c) = \pi(x, y)$, l'élément

$$\theta(x , y , c) = (x , y , [\pi(\lambda)] c [\pi(\bar{\mu})])$$

est parfaitement défini, et réciproquement un (x , y , f) est l'image de $(x , y , [\pi(\bar{\lambda})] f [\pi(\mu)])$ par θ.

L'indépendance vis-à-vis du point base b dans $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ est claire, et si b et b_1 ont même image dans $\mathrm{S} \times \mathrm{S}$, F_b et F_{b_1} sont en bijection canonique.

5. *La* Q-*variété* Γ (suite et fin).

On considère, sur $p^{-1}(\mathrm{Z})$, la structure de variété définie par la structure de variété de Z et la structure discrète sur F_b, pour tout b. Comme il a été vu, si deux points de Z ont même image par π, les fibres sont en bijection, et ceci d'une seule façon.

Il faut vérifier la condition d'existence des difféomorphismes locaux : si $\bar{\omega} : p^{-1}(\mathrm{Z}) \to \Gamma$ envoie (z , c) et (z' , c) au même point c, obligatoirement $\pi(z) = \pi(z')$; il existe alors une bijection $\varphi : \mathrm{F}_z \to \mathrm{F}_{z'}$ et un difféomorphisme local $h : \mathrm{W}_{z'} \to \mathrm{W}_z$ dans Z ; d'où l'axiome a).

Enfin, soient $f, f' : \mathrm{Y} \rightrightarrows p^{-1}(\mathrm{Z})$ deux morphismes tels que $\bar{\omega} f = \bar{\omega} f'$; la considération du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & p^{-1}(\mathrm{Z}) \arrow[r, "\bar{\omega}"] \arrow[d, "p"] & \Gamma \arrow[d, "p"] \\
 & \mathrm{Z} \arrow[r] & \mathrm{S} \times \mathrm{S}
\end{tikzcd}$$

montre que f et f' coïncident sur un ouvert de Y. Le problème est en effet local, on peut supposer le fibré p trivial, et l'assertion l'est aussi.

Proposition. — *La* Q-*variété* Γ *des classes d'homotopie de chemins avec extrémités fixes de* S *est un* Q-*revêtement de* $\mathrm{S} \times \mathrm{S}$.

En effet, $\pi^{-1}(\Gamma) = p^{-1}(\mathrm{Z})$, où (Z , π) est le Q-atlas de $\mathrm{S} \times \mathrm{S}$ défini plus haut, est un prérevêtement de Z, et Γ est un Q-prérevêtement de $\mathrm{S} \times \mathrm{S}$. Comme S est connexe par arcs, il en est de même de $\mathrm{S} \times \mathrm{S}$ et de Γ, donc (Γ , p) est un Q-revêtement.

Remarque. – De ce que S est connexe, on déduit, pour tout couple (b, b') de points de Z une bijection des fibres F_b et $F_{b'}$, mais cette bijection n'est pas unique si b et b' n'ont pas la même image dans $S \times S$.

En effet, si b appartient à la Q-carte $U \times V$ (resp. $b' \in U' \times V'$) il existe une suite finie Σ reliant b à b', cf. 6.4, et on peut supposer $(U \times V) \times_{S \times S} (U' \times V')$ non vide. Soit (b_1, b'_1) un couple dans ce produit fibré, on peut alors joindre b à b_1 dans $U \times V$ et b'_1 à b' dans $U' \times V'$, d'où trois bijections de F_b à F_{b_1}, de F_{b_1} à $F_{b'_1}$ et de $F_{b'_1}$ à $F_{b'}$.

6. *Trivialité du π_1 et simple connexité.*

Etant donné s_0 dans S, on peut reconstruire la Q-variété $L = \alpha^{-1}(s_0)$ comme il a été fait pour Γ.

Il faudrait le faire si l'on était resté dans le cadre topologique.

Il suffit de remarquer que le couple, défini par $j : \{s_0\} \times S \to S \times S$ et $p : \Gamma \to S \times S$, est Q-transversal, et que le produit fibré de Q-variétés obtenu est un Q-prérevêtement de S.

Enfin, tout chemin d'origine s_0 dans S est homotope au chemin constant $\widetilde{s}_0$. La Q-variété L est donc connexe par arcs. Il en résulte aussi que l'identité de L est homotope à la projection de L sur $\widetilde{s}_0$. Alors, L a un groupe fondamental trivial. D'où l'énoncé suivant en appliquant la remarque initiale du numéro 4 :

PROPOSITION. – *Pour tout s_0 de* S, *la* Q-*variété* $L = \alpha^{-1}(s_0) \subset \Gamma$ *est un* Q-*revêtement universel de* S.

On obtient comme corollaire :

THEOREME. – *Il y a équivalence, pour une* Q-*variété connexe* S *entre les assertions suivantes :*

i) S *est simplement connexe ;*

ii) *le groupe fondamental* $\pi_1(S)$ *est trivial.*

CHAPITRE 4

8. Q-variétés et feuilletages de Lie.

0. *Introduction.*

Un *feuilletage de Lie* de codimension p sur une variété, (resp. Q-variété) M est la donnée d'un couple $(\omega, \mathfrak{g})$ dans lequel ω est une 1-forme sur M, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension p, telle que :

i) quelque soit x dans M, l'application linéaire $\omega_x : T_x M \to \mathfrak{g}$ est surjective ;

ii) $d\omega + [\omega, \omega] = 0$.

Fédida a montré [3] que tout feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ sur une variété compacte a la propriété du prolongement des homotopies. Un tel feuilletage n'admet donc pas d'holonomie transversale [4] et le quotient peut être canoniquement muni d'une structure de Q-variété de dimension p, comme il a été dit au chapitre 1.

Dans la note citée, on trouve le résultat suivant, obtenu par un raisonnement analogue à celui de Reeb dans le cas $\mathfrak{g} = \mathbf{R}$ [6] :

PROPOSITION. – *Soient* $(\omega, \mathfrak{g})$ *un feuilletage de Lie de codimension p sur une variété* M, *et* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *; il existe un revêtement galoisien* (W , r) *de* M *et une submersion f de* W *dans* G *telle que* $f^{-1}df = r * \omega$.

Si de plus, M est compacte, f est une fibration localement triviale.

Notre propos est de reprendre cette étude dans le cadre des Q-variétés. Nous utiliserons pour cela une démonstration de l'énoncé précédent inspiré d'une remarque de Bourbaki [2] et plus susceptible de généralisation.

1. *Connexion associée à un feuilletage de Lie.*

Soient M, $(\omega, \mathfrak{g})$ et G comme ci-dessus ; on considère la forme différentielle canonique gauche θ du groupe de Lie G, et la trivialisation correspondante du fibré TG, (cf. chap. 2).

PROPOSITION. – *La forme différentielle* $\eta = pr_1 * \omega - pr_2 * \theta$ *définit une distribution involutive* H *sur* M × G, *dont chaque intégrale maximale est étale dans* M *et submersive dans* G.

En effet, le noyau de η est formé, au point (x, g) de M × G, des vecteurs (X_x, Z_g) de $T_x M \oplus T_g G$ tels que $Z_g = \omega *_{(x,g)} (X_x)$, valeur en (x, g) du *champ fondamental* sur M × G, défini par $\omega(X_x)$ de $\mathfrak{g}$.

Rappelons que, de l'action de G sur M × G définie par les translations à gauche de G sur lui-même, on déduit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M × G ; l'image de l'élément ζ de $\mathfrak{g}$ par cet homomorphisme est appelé le champ fondamental défini par ζ.

Soient $X + \omega * (X)$ et $Y + \omega * (Y)$ deux champs dans H ; de $d\omega + [\omega, \omega] = 0$ et $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$, on déduit : $[X + \omega * (X), Y + \omega * (Y)] = [X, Y] + \omega * ([X, Y])$.

Chaque espace vectoriel $H_{(x,g)}$ est isomorphe par la première projection à $T_x M$ et s'envoie surjectivement dans $\mathfrak{g}$ par la seconde. C.Q.F.D.

On remarquera que H définit une connexion sur M × G considéré comme fibré principal pour G, de base M, en effet : $g' H_{(x,g)} = H_{(x,g'g)}$ pour tout x de M et tout couple g, g' de G, et

$$T_{(x,g)}(M \times G) = H_{(x,g)} \oplus T_g G$$

pour tout (x, g) de M × G.

A x_0 fixé dans M correspond l'intégrale maximale W passant par (x_0, e), qui n'est autre que le fibré d'holonomie de η. Si M est paracompacte, il est classique que sa fibre en x_0 est dénombrable : elle s'identifie en effet au groupe d'holonomie Γ_0, dont l'algèbre de Lie, engendrée par tous les éléments de la forme $\eta([X, Y])$, avec

$$\eta(X) = \eta(Y) = 0, \text{ est nulle [5].}$$

La proposition du n° 0 est ainsi redémontrée.

2. *Formes différentielles sur une Q-variété.*

Un *fibré vectoriel sur une Q-variété* B est un morphisme $p : E \to B$ tel que, pour toute Q-carte (U , π) de B, le produit fibré $\pi * E = U \times_B E$ soit un fibré vectoriel sur U et une Q-carte de E.

Le fibré tangent et les distributions involutives donnent des exemples.

PROPOSITION. — *Toute opération sur les fibrés vectoriels classiques s'étend aux fibrés vectoriels ayant pour base une Q-variété.*

Il en est ainsi pour : l'image réciproque, la somme directe externe ou interne, le produit tensoriel externe ou interne, l'algèbre tensorielle, l'algèbre extérieure, le fibré des homomorphismes, le dual.

En effet, soit Φ le foncteur considéré qui, à la famille finie $V = (V_i)_{i\in I}$ d'espaces vectoriels (resp. $F = (F_i)_{i \in I}$ de fibrés vectoriels) associe l'espace $\Phi(V)$ (resp. le fibré $\Phi(F)$) ; à la donnée $E = (E_i)_{i \in I}$ d'une famille de fibrés sur la Q-variété B_0 et du Q-atlas (X , π) de B, sont associés l'ensemble $\Phi(E) = \bigcup_{b \in B} (E_b)$ et le fibré vectoriel $\Phi(\pi * E)$.

Il suffit de s'assurer de ce que $\Phi(\pi * E)$ est un Q-atlas de $\Phi(E)$. La projection est surjective, il reste un problème local. On peut supposer chaque fibré trivial, et recopier la démonstration sur celle faite lors de la construction du fibré tangent (cf. chap. 1). C.Q.F.D.

La proposition précédente permet de développer un exposé des formes différentielles sur les Q-variétés.

De façon concrète, une p-forme différentielle ω à valeurs dans A ($A = \mathbf{R}$, C ou une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) sera la donnée, pour toute Q-carte (U , π) de S, d'une p-forme ω_U sur U, à valeurs dans A telle que, pour tout changement de Q-cartes $h_{V'V} : V \to V'$, on ait $\omega_V = h^*_{V'V}\, \omega_{V'}$.

PROPOSITION. — *Toute Q-variété en groupe G possède une 1-forme canonique gauche θ, à valeurs dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et vérifiant l'équation de Maurer-Cartan : $d\theta + [\theta , \theta] = 0$.*

En effet, G est quotient d'un groupe de Lie $\hat{G}$ par un sous-groupe pseudo-discret H. La 1-forme canonique gauche de $\hat{G}$ est compatible avec l'action à gauche de H, et définit θ. Enfin, l'équation de Maurer-Cartan est vérifiée dans le Q-atlas. C.Q.F.D.

Le fait que H soit distingué n'est pas essentiel, d'où la variante :

PROPOSITION. – *Toute Q-variété, quotient d'un groupe de Lie par l'action à gauche d'un sous-groupe pseudo-discret, possède une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe, et vérifiant l'équation de Maurer-Cartan.*

3. *Passage au quotient.*

PROPOSITION. – *Soient* $\mathcal{F} = (\omega, \mathfrak{g})$ *un feuilletage de Lie de codimension p sur une variété* M *connexe paracompacte, et* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *; il existe une Q-submersion* $q : \mathrm{M} \to \Gamma_0\backslash \mathrm{G}$, *telle que* $\omega = q^* \hat{\theta} = q^{-1}\, dq$, *où* Γ_0 *est l'image du groupe fondamental de* M *dans* G, *dans l'homomorphisme défini par* ω, *et* $\hat{\theta}$ *est la 1-forme sur* $\Gamma_0\backslash\mathrm{G}$ *induite par la 1-forme canonique sur* G.

Si de plus, M *est compacte, cette Q-submersion se factorise en un morphisme Q-étale de Q-variétés* $\varphi : \mathrm{M}/\mathcal{F} \to \Gamma_0\backslash\mathrm{G}$, *tel que* $d\varphi = \hat{\omega}$, *où* $\hat{\omega}$ *est la 1-forme sur* $\mathrm{M}/\mathcal{F}$ *induite par* ω.

On revient aux notations du n° 1 ; alors W est une intégrale maximale de η dans $\mathrm{M} \times \mathrm{G}$, et Γ_0 est le sous-groupe de G formé des éléments γ de G tels que : $(x, g) \in \mathrm{W}$ implique $(x, \gamma g) \in \mathrm{W}$. On compose $pr_2 \,|\, \mathrm{W}$ avec la projection canonique $\pi : \mathrm{G} \to \Gamma_0\backslash\mathrm{G}$, Q-variété des classes à droite de G par Γ_0. Soit θ la 1-forme canonique de G ; alors $p = \pi\, o pr_2$ est une Q-submersion telle que :

i) $p^{-1}dp = pr_2^* \,\theta = pr_1^* \,\omega$, car $\pi^* \hat{\theta} = \theta$;

ii) $p(z) = p(\gamma z)$ pour tout z de W et γ de Γ_0.

D'où le passage au quotient et la définition de q, avec $q^{-1}\, dq = \omega$, du fait que M s'identifie à W/Γ_0. La dernière partie de l'assertion est claire : les feuilles sont les surfaces de niveau de q qui est une primitive de ω, d'où la définition de l'application $\varphi : \mathrm{M}/\mathcal{F} \to \Gamma_0\backslash\mathrm{G}$. Si M est compacte, $\mathrm{M}/\mathcal{F}$ a une structure de Q-variété quotient d'après [3], et par propriété universelle, l'application φ est un morphisme. C.Q.F.D.

4. *Feuilletages de Lie dans les Q-variétés.*

La dernière proposition pouvait s'obtenir en remarquant que la Q-variété $\Gamma_0\backslash\mathrm{G} = \overline{\mathrm{G}}$, possède une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et que la proposition du n° 1 reste vraie si l'on remplace G par la Q-variété $\overline{G}$. Les intégrales obtenues sont a priori des Q-variétés, mais, de par la condition d'étalement dans M, ce sont des variétés.

On a, plus généralement, le résultat suivant :

LEMME. – *Soient* $(\omega, \mathfrak{g})$ *un feuilletage de Lie sur une Q-variété* S, *et* $\overline{G}$ *le quotient par un sous-groupe dénombrable d'une Q-variété en groupe* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *et de 1-forme canonique gauche* θ. *La 1-forme* $\overline{\eta} = pr_1^* \omega - pr_2^* \overline{\theta}$. *où* $\overline{\theta}$ *est induite par* θ, *définit une distribution involutive* H *sur* $S \times \overline{G}$, *dont chaque intégrale maximale est une Q-variété Q-étale dans* S *et Q-submersive dans* $\overline{G}$.

La chose à vérifier est l'existence, en tout point (s, γ) de $S \times \overline{G}$, d'une décomposition de $T_{(s,\gamma)}(S \times \overline{G})$ en $T_s S \oplus \mathfrak{g}$, ce qui est dû à l'action de G dans $S \times \overline{G}$ et à la présence des champs de vecteurs fondamentaux. Le calcul fait en 1 permet de conclure.

THEOREME. – *Soient* $(\omega, \mathfrak{g})$ *un feuilletage de Lie sur une Q-variété analytique connexe* S *et* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *et de 1-forme canonique* θ ; *si* S *et* $\mathfrak{g}$ *ont même dimension, tout point* s_0 *de* S *possède une Q-carte* (U, π), *un relèvement* u_0 *dans* U *et un difféomorphisme* h, *de* U *dans un voisinage* V *de l'élément neutre de* G, *tels que* $h^* \theta = \pi^* \omega$, *et* $h(u_0) = e$.

De plus, si (U, π) *et* (U', π') *sont deux telles Q-cartes, il existe, pour tout couple* (x, x') *de* $U \times_S U'$, *un voisinage ouvert* W *de* x *(resp.* W' *de* x'*) et un difféomorphisme* $\Psi : W \to W'$, *tels que* $\Psi(x) = x'$, $\pi' \Psi = \pi$ *et* $h' \Psi = h$.

En effet, soit $\widetilde{S}$ l'intégrale maximale passant par (s_0, e) de $\eta = pr_1^* \omega - pr_2^* \theta$ dans $S \times G$; cette intégrale Q-étale dans S et G, est une Q-carte de S au voisinage de s_0. D'autre part, il existe un difféomorphisme local des Q-cartes U et U' au-dessus de S ; le problème de l'unicité est alors réduit à celui de l'intégration, sur une variété, d'une 1-forme à valeurs dans une algèbre de Lie, problème résolu par Bourbaki [2]. C.Q.F.D.

CHAPITRE 5

UNE DEFINITION DE LA COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN FAISCEAU

9. Quelques notations.

1. *Arbres.*

Soient n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$; on note S_p^n l'ensemble des suites de $p - 1$ entiers, $i_1 \dots i_{p-1}$ satisfaisant aux inégalités $0 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_{p-1} \leqslant n - p + 2$. On note S^n l'ensemble somme des ensembles S_1^n, $S_2^n, \dots, S_n^n$, qu'on appellera *arbre type de rang n.*

Pour avoir un arbre, au sens classique du terme, il suffit de considérer, pour chaque p, l'application $i_1 \dots i_{p-1} \mapsto i_1 \dots i_{p-2}$, de S_p^n dans S_{p-1}^n. On remarquera, que l'ensemble S_1^n a un seul élément, la suite vide ϕ.

Dans toute la suite, un *arbre* σ de rang n sera la donnée, d'une application σ de S^n dans un ensemble E, ses éléments seront notés $a_{i_0 \dots i_p}(\sigma)$, et $a(\sigma)$ pour $\sigma(S_1^n)$, ou $\sigma_{i_0 \dots i_p}$ et σ_ϕ.

2. *Boutures.*

Soient k et n deux entiers, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour tout entier p, avec $1 \leqslant p \leqslant n - 1$, on définit une application $h_{k,p}$ de S_p^{n-1} dans S_{p+1}^n par

$$\begin{cases} h_{k,p}(i_1 \dots i_{p-1}) = i_1 \dots i_r(k - r)\, i_{r+1} \dots i_{p-1}, \text{ si } k > i_1, \\ \qquad\qquad\qquad\quad = k i_1 \dots i_{p-1}, \text{ si } k \leqslant i_1, \end{cases}$$

où l'entier r est défini de manière unique par les inégalités $i_r \leqslant k - r \leqslant i_{r+1}$, $1 \leqslant r < p$ (on convient que $i_p = \infty$). On note β_k l'application de S^{n-1} dans S^n qui coïncide avec $h_{k,p}$ sur S_p^{n-1} pour $p = 1, \dots, n-1$; cette application est injective.

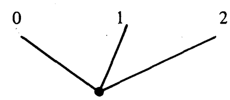
Soit σ un arbre de rang n ; on appellera *k-ième bouture canonique* de σ, l'arbre $\beta_k \sigma$ de rang $n - 1$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, défini par la composition

$$S^{n-1} \xrightarrow{h_k} S^n \xrightarrow{\sigma} E .$$

PLANCHE

S^1 est réduit à un seul élément $\{\phi\}$, noté $\bullet$

S^2_2 est formé des indices



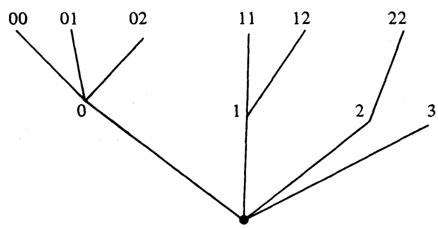
S^2_1 est réduit à un élément

d'où le schéma représentant S^2.

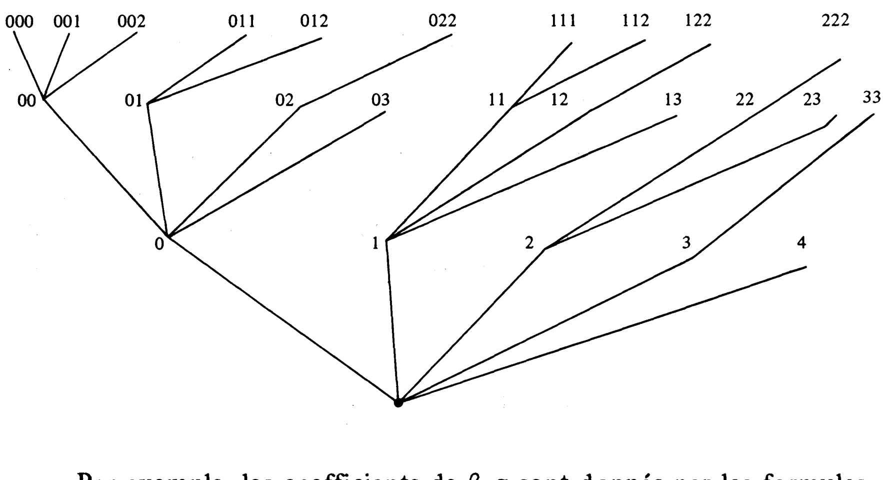
S^3_3 est formé de

S^3_2 de

d'où S^3.



De même pour S^4 :



Par exemple, les coefficients de $\beta_0\sigma$ sont donnés par les formules

$$a(\beta_0\sigma) = a_0(\sigma) ,$$

$$a_{i_1 \ldots i_p}(\beta_0\sigma) = a_{0 i_1 \ldots i_p}(\sigma) .$$

PROPOSITION. – *Il y a les relations suivantes entre les boutures des boutures d'un arbre σ de rang n :*

$$\boxed{\beta_{l-1}\beta_k\,\sigma = \beta_k\,\beta_l\,\sigma \ , \ 0 \leqslant k < l \leqslant n} \ .$$

PROPOSITION. – *La donnée de $n+1$ arbres σ_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ de rang $n-1$, vérifiant les relations*

$$\beta_{l-1}\,\sigma_k = \beta_k\,\sigma_l, \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant k < l \leqslant n \ ,$$

définit, à l'élément $a(\sigma)$ près, un arbre σ de rang n, admettant σ_j pour j-ième bouture canonique, $0 \leqslant j \leqslant n$.

3. *Simplexes.*

Soient n et p deux entiers, tels que $0 \leqslant p \leqslant n$; on note $\Sigma_{p,n}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de

$$[p] = \{0\,,1\,,\ldots,p\} \quad \text{dans} \quad [n] = \{0\,,1\,,\ldots,n\}\ .$$

On appellera *simplexe modèle de rang n* l'ensemble

$$\Sigma^n = \Sigma_{1,n} \cup \Sigma_{2,n} \cup \ldots \cup \Sigma_{n,n}\ .$$

Il y a une bijection de S_p^n dans $\Sigma_{p-2,n}$ définie par

$(i_1\,,\ldots,i_{p-1}) \mapsto (i_1\,,\,i_2+1\,,\ldots,i_{p-1}+p-2)$ pour tout $p \geqslant 2$.

On appellera simplexe de rang n une application α de Σ_n dans un ensemble E. On notera qu'un simplexe de rang n n'est autre qu'un système d'indices $i_0 \ldots i_n$, σ où σ est un arbre de rang n. Enfin, sur cette nouvelle définition, les propositions précédentes sont tout-à-fait triviales.

10. Généralités sur les échelles.

1. DEFINITION. – *On appelle échelle sur un espace topologique* T *la donnée d'un système simplicial* $(E_n\,,\,\partial_{k,n}\,,\,\varepsilon)$ *avec les propriétés suivantes :*

a) E_n *est un espace topologique pour tout* $n \geqslant 0$;

b) *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$, $\partial_{k,n}$ *est une application étale de* E_n *dans* E_{n-1} ;

c) ε *est une application étale surjective de* E_0 *sur* T ;

d) *l'application* $x \mapsto (\partial_{0,1}(x), \partial_{1,1}(x))$ *est une surjection de* E_1 *sur* $E_0 \times_T E_0$;

e) *pour* $n \geqslant 0$, *l'application* $x \mapsto (\partial_{k,n+1}(x))_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ *est une surjection de* E_{n+1} *sur l'espace* $Y_n \subset (E_n)^{n+2}$ *des solutions* $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ *du système d'équations* $\partial_{l-1,n}(x_k) = \partial_{k,n}(x_l)$ *pour* $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$.

Il résulte de e) que l'image par $x \mapsto (\partial_{k,n+1}(x))_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ de E_{n+1} est contenue dans Y_n, donc que les morphismes $\partial_{k,n}$ vérifiant les relations de commutation

$$\partial_{l-1,n}\,\partial_{k,n+1} = \partial_{k,n}\,\partial_{l,n+1}\,, \quad 0 \leqslant k < l \leqslant n+1\ .$$

Enfin, Y_n n'est autre que le noyau simplicial de la famille de morphismes $(\partial_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Un morphisme $\varphi : E \to E'$ entre deux familles $E = \coprod_{i \in I} U_i$ et $E' = \coprod_{j \in J} V_j$ d'ouverts de T′ est une application $\varphi : I \to J$ telle que U_i soit contenu dans $V_{\varphi(i)}$.

La catégorie des familles d'ouverts de T est une sous-catégorie de la catégorie des espaces étalés sur T.

On appellera *échelle spéciale* sur un espace topologique T, la donnée d'une échelle sur T, dont les éléments E_n sont des familles d'ouverts de T et dont les morphismes $\partial_{k,n}$ et ε sont des morphismes de familles d'ouverts de T, pour tout $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. *Cohomologie.*

Rappelons qu'un préfaisceau abélien sur T est un foncteur contravariant de la catégorie des familles d'ouverts de T dans la catégorie des groupes abéliens. Un préfaisceau est un faisceau s'il est exact à gauche et transforme les sommes en produits. Un faisceau s'étend de manière naturelle à la catégorie des espaces étalés sur T.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur T, et E une échelle sur T ou bien $\mathcal{F}$ un préfaisceau et E une échelle spéciale ; on considère le complexe $C^*(E, \mathcal{F})$:

$$\mathcal{F}(E_0) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}(E_1) \to \cdots \to \mathcal{F}(E_n) \xrightarrow{d_n} \mathcal{F}(E_{n+1}) \to \cdots$$

où
$$d_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \, \mathcal{F}(\partial_{k,n+1}) \, .$$

Il est évident que, dans ce complexe différentiel, $d \circ d = 0$. Ceci permet de définir les groupes de cohomologie

$$H^n(E, \mathcal{F}) \quad \text{comme} \quad H^n[C^*(E, \mathcal{F})] \, .$$

3. *Indexation des échelles spéciales. Analyse.*

Soit $(E_n)_{n \geqslant 0}$ une échelle spéciale sur un espace T ; E_0 est une famille d'ouverts de T, $E_0 = \coprod_{i \in I} U_i$. Les conditions sur l'augmentation $\varepsilon : \coprod_{i \in I} U_i \to T$, signifient que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de T, et que $\varepsilon \,|\, U_i$ n'est autre que l'injection dans T. On peut encore écrire $E_0 = \{(x, i) \,|\, x \in U_i \, , \, i \in I\}$. Sur cette forme il est clair que $Y_0 = E_0 \times_T E_0$ est l'ensemble des triples (x, i, j) où x est dans l'intersection $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Si $E_1 = \coprod_{\mu \in M} V_\mu$, les conditions sur $\varphi_0 : E_1 \to Y_0$ impliquent que, pour tout μ, il existe un couple (i, j) tel que V_μ soit inclus dans U_{ij} ; d'où la partition de l'ensemble d'indices M, en $(\Lambda_{ij})_{i,j \in I}$ tels que, $(V_\mu)_{\mu \in \Lambda_{ij}}$ soit un recouvrement ouvert de U_{ij}, pour tout couple (i, j) de $I \times I$.

Alors $E_1 = \coprod_{i_0, i_1 \in I} \; \coprod_{\lambda \in \Lambda_{i_0 i_1}} U_{i_0 i_1, \lambda}$,

$\partial_{0,1}$ est l'inclusion $U_{i_0 i_1, \lambda} \hookrightarrow U_{i_1}$,

et $\partial_{1,1}$ est l'inclusion $U_{i_0 i_1, \lambda} \hookrightarrow U_{i_0}$.

Nous pourrions dès à présent amorcer la récurrence, il peut être toutefois instructif de gravir un échelon supplémentaire.

Il est facile de voir que Y_1 est la somme topologique des intersections de trois ouverts de E_1 de type $U_{i_0 i_1, \lambda_2} \cap U_{i_0 i_2, \lambda_1} \cap U_{i_1 i_2, \lambda_0}$. De ce que E_2 doit fournir un recouvrement de chacune de ces intersections, il découle qu'un ouvert de E_2 peut être indexé par 3 indices i, 3 indices λ et un indice supplémentaire μ.

Si on considère $(\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2\, \mu)$ comme un arbre σ de rang 2 et de boutures $\beta_j \sigma = \lambda_j$, $j \in [0,2]$, on a

$$\bigcup_{(\beta_j \sigma = \sigma_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2}} U_{i_0 i_1 i_2, \sigma} = \bigcap_{k=0}^{2} U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_2, \sigma_k}$$

où $\hat{i}_k$ signifie qu'on omet l'indice i_k. De plus $\partial_{k,2}$ est l'inclusion $U_{i_0 i_1 i_2, \sigma} \hookrightarrow U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_2, \sigma_k}$.

4. *Récurrence.*

Supposons que jusqu'au rang n, les E_j soient des familles d'ouverts, indexées par des indices de la forme $i_0 \ldots i_j$, σ, où i_k appartient à l'ensemble I des indices de E_0, $0 \leqslant k \leqslant j$ et σ est un arbre de rang j, et telles que

i) $\displaystyle\bigcup_{(\beta_k \sigma = \sigma_k)_{k \in [0,j]}} U_{i_0 \ldots i_j, \sigma} = \bigcap_{k=0}^{j} U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_j, \sigma_k}$,

ii) $\partial_{k,j}$ soit l'inclusion $U_{i_0 \ldots i_j, \sigma} \hookrightarrow U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_j, \beta_k \sigma}$, $k \in [0, j]$.

Alors Y_n est formé des intersections de $n+2$ ouverts $U_{i_0^k \ldots i_n^k, \sigma_k}$, tels que l'on ait les relations $\partial_{k,n}(x_l) = \partial_{l-1,n}(x_k)$, i.e. Y_n est la somme topologique des intersections de $n+2$ ouverts du type $U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}, \sigma_k}$ avec $\beta_{l-1} \sigma_k = \beta_k \sigma_l$, $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$.

La condition que $\varphi_n : E_{n+1} \to Y_n$ est égale surjective, signifie que E_{n+1} fournit, pour tout $(n+2)$-uple d'ouverts de E_n du type ci-dessus, un recouvrement de leur intersection. On peut donc indexer les ouverts de E_{n+1}, grâce à des indices de la forme $i_0 \ldots i_{n+1}$, $\sigma_0 \ldots \sigma_{n+1}$, μ, où $\beta_{l-1} \sigma_k = \beta_k \sigma_l$, $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$. De 9.2 on déduit l'existence d'un arbre σ, de j-ième bouture canonique σ_j, d'indice $\sigma(S_1^{n+1}) = \mu$. Il est clair qu'on a les propriétés i) et ii) pour $j = n+1$. On a donc prouvé :

5. PROPOSITION. — *Toute échelle spéciale* E *sur* T *se décrit ainsi :*

a) E_0 *est un recouvrement* $(U_i)_{i \in I}$ *de* T, *et* ε *est la famille des injections canoniques* $U_i \to T$.

b) *Etant donnés* $i_0, \ldots, i_n$ *dans* I, *il existe une famille* $(U_{i_0 \ldots i_n, \sigma})_{\sigma \in A(i_0 \ldots i_n)}$ *d'ouverts de* T, *telle que* $A(i_0 \ldots i_n)$ *se compose de familles indexées par* S^n, *les conditions suivantes étant remplies :*

– *pour* $\sigma = (\sigma_s)_{s \in S^n}$ *dans* $A(i_0 \ldots i_n)$ *et* $k = 0, \ldots, n,$ *la famille* $\beta_k \sigma = (\sigma_{h_k t})_{t \in S^{n-1}}$ *appartient à* $A(i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n)$;

– *supposons donnés* σ_k *dans* $A(i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n)$ *pour* $k = 0, \ldots, n,$ *tels que* $\beta_{l-1} \sigma_k = \beta_k \sigma_l$ *pour* $0 \leqslant k < l \leqslant n$; *soit* L *la partie de* $A(i_0, \ldots, i_n)$ *formée des* σ *tels que* $\beta_k \sigma = \sigma_k$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$; *on a*

$$\bigcap_{k=0}^{n} U_{i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n, \sigma_k} = \bigcup_{\sigma \in L} U_{i_0 \ldots i_n, \sigma}$$

c) *Pour tout* $n \geqslant 0$, *la famille* E_n *est égale à*

$$(U_{i_0 \ldots i_n, \sigma})_{i_0 \in I, \ldots, i_n \in I, \sigma \in A(i_0 \ldots i_n)} .$$

De plus, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, *l'application* $\partial_{k,n}$ *se compose des injections canoniques*

$$U_{i_0 \ldots i_n, \sigma} \to U_{i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n, \sigma_k} \quad \text{avec} \quad \sigma_k = \beta_k \sigma .$$

On remarquera qu'on peut très bien supposer que chaque $A(i_0 \ldots i_n)$ est réduit à un élément. On obtient ainsi une échelle spéciale, qu'il est naturel d'appeler *échelle de Čech*, $E_n = (U_{i_0 \ldots i_n})_{i_0 \in I, \ldots, i_n \in I}$. Dans une telle échelle $\partial_{k,n}$ se compose des injections canoniques $U_{i_0 \ldots i_n} \to U_{i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n}$.

6. *Morphismes d'échelles.*

Soient E et E′ deux échelles (resp. échelles spéciales) sur T ; on appelle *morphisme d'échelles* (resp. *d'échelles spéciales*) $f : E' \to E$ la donnée, pour tout n, d'un morphisme d'espaces étalés sur T (resp. de familles d'ouverts de T) $f_n : E'_n \to E_n$ telle que $f_{n-1} \partial_{k,n} = \partial_{k,n} f_n$, pour tout couple (k, n) avec $0 \leqslant k \leqslant n$, et $\varepsilon f_0 = \varepsilon'$ pour $n = 0$.

On dira aussi, que E′ est une *échelle* (resp. une *échelle spéciale*) *plus fine que* E, s'il existe un morphisme $E' \to E$.

Soit V un sous-espace de T ; toute échelle spéciale E sur T induit par restriction, une échelle spéciale, notée E_V, sur V, dont les ouverts sont $(U_{i_0 \ldots i_n, \sigma} \cap V)$ pour $U_{i_0 \ldots i_n, \sigma}$ dans E, et dont les opérateurs faces sont les restrictions de ceux de E.

Plus généralement, toute application continue $f : T' \to T$, permet de définir un foncteur image réciproque sur la catégorie des échelles (resp. – spéciales) sur T, ce qu'on peut noter de manière sophistiquée $f^{-1}(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}'$. En effet, on peut faire le produit fibré sur T de deux espaces étalés dans T, et pour tout n, $f^{-1}(\mathrm{E}_n) = \mathrm{E}_n \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}'$.

7. *Cofinalité des échelles spéciales.*

Soit E une échelle sur T ; l'augmentation $\varepsilon : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{T}$ est étale surjective ; il existe donc un recouvrement E'_0 de T et un morphisme d'espaces étales dans T, $f_0 : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}_0$. De plus E'_0 est indexé par E_0.

Supposons avoir construit un début d'échelle spéciale E' sur T, jusqu'au rang n, ainsi que des morphismes $(f_j)_{0 < j < n}$, $f_j : \mathrm{E}'_j \to \mathrm{E}_j$ tels que $f_{j-1}\,\partial_{k,j} = \partial_{k,j} f_j$, $0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$. De ce qu'il existe des produits finis, dans la catégorie des espaces étales dans T, on déduit l'existence de noyaux simpliciaux. Soient Y_n et Y'_n les noyaux simpliciaux de $(\partial_{k,n})_{0<k<n}$ dans E et E' ; l'application produit

$$f_n \times \cdots \times f_n : \mathrm{E}'_n \times \cdots \times \mathrm{E}'_n \to \mathrm{E}_n \times \cdots \times \mathrm{E}_n$$

enverra Y'_n dans Y_n, car f_n commute aux $\partial_{k,n}$. Comme E_{n+1} est un espace étalé sur Y_n, il existe une famille d'ouverts E'_{n+1}, qui est plus fine que Y_n et E_{n+1}. On retrouve bien entendu, le procédé de construction des échelles spéciales, et nous pouvons énoncer

PROPOSITION. – *Pour toute échelle* E *sur* T, *on peut trouver une échelle spéciale* E' *sur* T, *plus fine que* E *en tant qu'échelle sur* T.

Autrement dit, les échelles spéciales sur T forment un système cofinal d'échelles sur T.

11. Les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n_s(\mathrm{T}, \mathcal{R})$.

Au numéro 2 précédent, nous avons introduit, pour tout préfaisceau $\mathcal{R}$ et toute échelle spéciale E sur T, le complexe $\mathrm{C}^*(\mathrm{E}, \mathcal{R})$ et les groupes $\mathrm{H}^n(\mathrm{E}, \mathcal{R})$. Tout morphisme $f : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ d'échelles spéciales sur T, définit des morphismes $\mathcal{R}(f_n) : \mathcal{R}(\mathrm{E}_n) \to \mathcal{R}(\mathrm{E}'_n)$ pour $n \geqslant 0$, et donc $\mathrm{C}^*(f) : \mathrm{C}^*(\mathrm{E}, \mathcal{R}) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{E}', \mathcal{R})$ et

$$\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(\mathrm{E}, \mathcal{R}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{E}', \mathcal{R}) ,$$

pour tout $n \geqslant 0$.

1. *Système $\mathcal{D}$ et cohomologie.*

Pour les indices d'une échelle spéciale, on utilise ici la notation condensée des simplexes introduite au numéro 4 du paragraphe 9. On considère les échelles spéciales E telles que tous les indices utilisés appartiennent à T, et vérifiant de plus les conditions suivantes :

a) E_0 est une famille d'ouverts $(U_x)_{x \in T}$ avec $x \in U_x$;

b) E_n est une famille d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_n}$, où Λ_n est un ensemble d'applications de Σ^n dans T telle que, pour tout $\alpha \in \Lambda_n$, on ait $\partial_k \alpha \in \Lambda_{n-1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et

i) $\alpha_{01\ldots n} \in U_\alpha \subset \bigcap\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} U_{\partial_k \alpha}$;

ii) $\alpha_{01\ldots n}$ parcourt cette intersection pour $\partial_k \alpha$ fixés, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Ainsi par exemple, E_1 est une famille d'ouverts $(U_{x_0 x_1, x_{01}})$ où $x_{01} \in U_{x_0 x_1, x_{01}} \subset U_{x_0} \cap U_{x_1}$, et pour x_0 et x_1 fixés, x_{01} parcourt $U_{x_0} \cap U_{x_1}$.

Une échelle spéciale sur T vérifiant ces conditions sera dite appartenir au système $\mathcal{D}$. Etant données deux échelles E et E′ de $\mathcal{D}$, E′ sera dominée par E si, pour tout n, Λ'_n est contenue dans Λ_n, et si de plus E'_α est inclus dans E_α pour tout α de Λ'_n.

On a alors un ensemble ordonné filtrant d'échelles spéciales sur lequel prendre la limite inductive.

Pour tout préfaisceau en groupes $\mathcal{R}$ sur T, on notera $C_s^*(T, \mathcal{R})$ et $H_s^n(T, \mathcal{R})$ les limites inductives sur $\mathcal{D}$ de $C^*(E, \mathcal{R})$ et $H^n(E, \mathcal{R})$.

2. *Cofinalité du système $\mathcal{D}$.*

THEOREME. – i) *Si* $(E_0, \ldots, E_n)$ *est un début d'échelle et s'il s'envoie par* φ *dans le début d'une échelle* E′, *il existe une échelle* E, *prolongeant* $E_0, \ldots, E_n$ *et* φ *se prolonge en un morphisme d'échelles de* E *dans* E′.

ii) *Si* E *est une échelle, il existe une échelle spéciale de* $\mathcal{D}$ *plus fine que* E ;

iii) *Plus précisément, si* E *est comme dans* ii) *et* $\varphi : E \to V$, *où* V *est dans* $\mathcal{D}$, *il existe* $\Psi : U \to E$, *avec* U *de* $\mathcal{D}$ *et* $\varphi\Psi$ *est un morphisme "d'inclusion"*, (U est dominé par V).

Démonstration. – i) On montre d'abord que la catégorie des espaces étalés sur T (resp. la catégorie des familles d'ouverts de T) possède des noyaux simpliciaux.

En effet, chacune des catégories considérées possède des produits, qui sont des produits fibrés au-dessus de T.

Considérons une famille finie $(f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de morphismes de A dans B. Chaque condition $f_k(a_l) = f_{l-1}(a_k)$ définit dans A^{n+2} un *ouvert*. Le sous-espace Y de A^{n+2} des solutions du système $\Sigma_n : f_k(a_l) = f_{l-1}(a_k)$, $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$, est un ouvert de A^{n+2}, et est donc un espace étalé dans T (resp. une famille d'ouverts de T), et ce n'est autre que le noyau simplicial cherché.

L'assertion i) est alors claire ; notant Y_n (resp. Y'_n) le noyau simplicial des applications $(\partial_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n dans E_{n-1} (resp. de E'_n dans E'_{n-1}), le morphisme $(\varphi_n)^{n+2}$ induit un morphisme de Y_n dans Y'_n, et on pose $E_{n+1} = Y_n \times_{Y'_n} E'_{n+1}$. Chaque $\partial_{k,n+1}$ sera défini par la composition de la projection de E_{n+1} dans Y_n et de la k-ième projection $Y_n \to E_n$. On notera φ_{n+1} la seconde projection $E_{n+1} \to E'_{n+1}$, et on vérifiera facilement la compatibilité de φ_{n+1}, φ_n et des opérateurs faces. Cette construction est le pas élémentaire de la récurrence.

ii) D'après 10.7, on peut supposer que E est spéciale. On peut trouver un recouvrement E'_0 de T, indexé par des points de T, et vérifiant $x \in U_x$, plus fin que E_0. Supposons construit $(E'_0, \dots, E'_n)$ un début d'échelle spéciale de type $\mathcal{D}$, plus fin que $(E_0, \dots, E_n)$.

Le noyau simplicial Y'_n s'envoie dans Y_n, et pour chaque ouvert $\mathcal{O}$ de la famille Y'_n, on peut trouver un recouvrement de $\mathcal{O}$, indexé par les points de $\mathcal{O}$ et plus fin que le recouvrement induit par E_{n+1}, d'où E'_{n+1}, φ_{n+1} et les $\partial_{k,n+1}$.

iii) On peut encore supposer que E est spéciale. Tout d'abord il est clair qu'on peut trouver un recouvrement U_0 de T, indexé par T, tel que $x \in U_x$, à la fois plus fin que E_0 et que V_0, et vérifiant $U_x \subset V_x$ pour tout x de T. Supposons construit $(U_0, \dots, U_n)$ un début d'échelle spéciale dans $\mathcal{D}$ qui s'envoie par $(\Psi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ dans le début de E, telle que le composé $\varphi\Psi$ induise une "inclusion" de U_i dans V_i pour tout i de 0 à n. Alors notant $\Lambda_n(U)$ (resp. $\Lambda_n(V)$) la famille d'applications de Σ^n dans T définissant les indices de U_n (resp. V_n), $\Lambda_n(U)$ est inclus dans $\Lambda_n(V)$ et $\varphi\Psi(U_\alpha) \subset V_\alpha$ pour tout α de $\Lambda_n(U)$, $\varphi\Psi$ définissant l'injection canonique.

Etant donné un ouvert $\mathcal{O}$ de la famille $Y_n(U)$ noyau simplicial de (U_n, U_{n-1}), il existe un recouvrement de $\mathcal{O}$, indexé par les points de $\mathcal{O}$, plus fin que le recouvrement induit par E_{n+1}. De plus, $\mathcal{O}$ est inclus par $(\varphi\Psi)^{n+2}$ dans un $\mathcal{O}'$ de $Y_n(V)$, et on peut rapetisser les U_α de manière à ce que chaque U_α soit contenu dans V_α. On aura encore un recouvrement, car, pour tout x de $\mathcal{O}$, x est inclus dans U_α, où $\alpha_{01\ldots(n+1)} = x$. C.Q.F.D.

3. *Relation avec la cohomologie de Čech.*

Une échelle de Čech E est une échelle spéciale ; de la proposition ci-dessus on déduit, pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$ et tout entier n, un morphisme $H^n(E, \mathcal{P}) \to H^n_s(T, \mathcal{P})$, unique si E_0 est un recouvrement $(U_x)_{x\in T}$, avec $x \in U_x$ pour tout x de T.

Soit Z une échelle de Čech plus fine que E, i.e. le recouvrement Z_0 est plus fin que le recouvrement E_0 ; pour tout n on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^n(E, \mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d] & H^n_s(T, \mathcal{P}) \\ H^n(Z, \mathcal{P}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ce qui montre, en passant à la limite inductive, sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de recouvrements $(U_x)_{x\in T}$, l'existence d'un morphisme $c_n : \check{H}^n(T, \mathcal{P}) \to H^n_s(T, \mathcal{P})$.

Proposition. – *Pour tout préfaisceau en groupes* $\mathcal{P}$ *sur* T, *et tout* $n \geqslant 0$, *il existe un homomorphisme*

$$c_n : \check{H}^n(T, \mathcal{P}) \to H^n_s(T, \mathcal{P}) .$$

De plus, c_0 *est un isomorphisme.*

Pour cela nous associons au préfaisceau $\mathcal{P}$ le préfaisceau $\mathcal{F}$ défini par $\mathcal{F}(U) = H^0_s(U, \mathcal{P})$ pour U ouvert dans T.

Alors i) le noyau et le conoyau du morphisme $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ sont évanescents ;

ii) le préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau.

i) En effet, notons $\mathcal{N}(U) = \mathrm{Ker}[\mathcal{P}(U) \to H_s^0(U)]$, et soit γ dans $\mathcal{N}(U)$; alors il existe une échelle spéciale E sur U, telle que le O-cocycle induit par γ soit nul, autrement dit γ induit 0 dans $\mathcal{N}(E_0)$ et $\mathcal{N}$ est évanescent.

Pour le conoyau, soit ξ un élément de

$$K(U) = \mathrm{Coker}[\mathcal{P}(U) \to H_s^0(U)] \ ;$$

ξ provient d'un 0-cocycle d'une échelle spéciale E sur U, et ξ induira 0 dans $K(E_0)$.

ii) Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de l'ouvert U de T et $(\gamma_i)_{i \in I}$ une famille, où $\gamma_i \in H_s^0(U_i , \mathcal{P})$ et $\gamma_i = \gamma_j$ sur $U_i \cap U_j$ pour tout i, j de I. Il faut montrer qu'il existe un et un seul élément γ de $H_s^0(U , \mathcal{P})$, induisant γ_i sur U_i, pour tout i de I.

En effet, pour tout i, il existe une échelle E^i sur U_i et un 0-cocycle ξ_i induisant γ_i. La réunion des E^i engendre une échelle E sur U et les ξ_i définissent une 0-cochaîne de E. La condition $\gamma_i = \gamma_j$ sur $U_i \cap U_j$ implique que la différence $\xi_i - \xi_j = t_{ij}$ soit évanescente. Et pour toute intersection $E_\alpha^i \cap E_\beta^j$ d'un ouvert de E_0^i et d'un ouvert de E_0^j, on peut trouver un recouvrement sur les ouverts duquel t_{ij} induira 0. D'où l'existence d'une échelle spéciale E' sur U, sur laquelle la famille $(\xi_i)_{i\in I}$ induit un 0-cocycle. On en déduit γ. De plus, si γ est non nul, obligatoirement un γ_i au moins est non nul, sinon γ serait induit par un 0-cocycle nul d'une échelle spéciale sur U. C.Q.F.D.

4. *Cohomologie d'un préfaisceau évanescent.*

Nous allons maintenant énoncer le premier des deux théorèmes, qui nous serviront à établir l'isomorphisme de la cohomologie des échelles, et de la cohomologie à valeurs dans un faisceau.

THEOREME. – *Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau en groupes, évanescent, sur l'espace topologique* T ; *pour tout $n \geqslant 0$, on a* $H_s^n(T , \mathcal{P}) = 0$.

On sait que l'homologie commute à la limite inductive, et donc, pour tout préfaisceau $\mathcal{P}$ sur T, les groupes $H_s^n(T , \mathcal{P})$ ne sont autres que les groupes d'homologie du complexe $C_s^*(T , \mathcal{P})$. Il s'agit de montrer que ce complexe est nul si $\mathcal{P}$ est évanescent.

Soit ξ un élément de $C_s^n(T , \mathcal{P})$; ξ est induit par une n-cochaîne γ d'une échelle spéciale E de $\mathcal{O}$. D'après i) du théorème du numéro 2, on va trouver une échelle E' plus fine que E et telle que γ induise 0 comme n-cochaîne de E'. En effet, $\mathfrak{F}$ étant évanescent, on peut trouver une famille d'ouverts E'_n, recouvrant les ouverts de la famille E_n, telle que γ induise 0 dessus, et d'après l'énoncé cité, on peut prolonger $(E_0, \ldots, E_{n-1}, E'_n)$ en une échelle plus fine que E.

D'après iii) du même théorème, il existe une échelle E'' dans $\mathcal{O}$, plus fine que E' et "contenue" dans E. Alors γ induira 0 sur E'' et $\xi = 0$. C.Q.F.D.

5. *Les préfaisceaux* $\widetilde{H}^n(\ , \mathfrak{F})$.

Voici le second énoncé clef.

THEOREME. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau sur* T ; *les préfaisceaux* $U \mapsto \widetilde{H}^n(U, \mathfrak{F})$, *où*

$$\widetilde{H}^n(U, \mathfrak{F}) = H^n_s(U, \mathfrak{F}) \text{ si } n > 0 ,$$

$$\widetilde{H}^0(U, \mathfrak{F}) = \mathrm{Coker}(\mathfrak{F}(U) \to H^0_s(U, \mathfrak{F})) ,$$

$$\widetilde{H}^{-1}(U, \mathfrak{F}) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{F}(U) \to H^0_s(U, \mathfrak{F})) ,$$

sont évanescents pour $n \geqslant 0$.

De plus, le préfaisceau $U \mapsto H^0_s(U, \mathfrak{F})$ *est un faisceau, et c'est le faisceau associé à* $\mathfrak{F}$.

Comme H^0_s coïncide avec $\check{H}^0$, il suffit de vérifier les assertions concernant les degrés strictement positifs, puisqu'on a un théorème analogue en cohomologie de Čech.

Il s'agit d'une généralisation du fait bien connu que si un ouvert d'un recouvrement contient tous les autres, tous les n-cocycles de Čech sont alors des cobords, pour $n > 0$.

Supposons qu'une échelle spéciale E sur V possède un ouvert U_i égal à V. Considérons E' définie de la façon suivante : $E'_n = E^{(i)}_{n+1}$ en notant $E^{(i)}$ la somme topologique des ouverts de E possédant i comme premier indice. Les opérateurs faces de E définissent d'une part des morphismes $\partial_{0,n+1} : E'_n \to E_n$, et d'autre part des faces $\partial'_{k,n} : E'_n \to E'_{n-1}$, en posant $\partial'_{k,n} = \partial_{k+1,n+1}$. Alors E' est une échelle spéciale sur V.

En effet, notant U les ouverts de E, $(U_{ij,\lambda})$, $\lambda \in \Lambda_{ij}$, $j \in I$ est un recouvrement de U_i.

Puis une intersection $U_{ij,\nu} \cap U_{ik,\mu}$ est contenue dans $U_j \cap U_k$ et est donc recouverte par $(U_{jk,\lambda})$ pour $\lambda \in \Lambda_{jk}$. De plus, chaque intersection $U_{ij,\nu} \cap U_{ik,\mu} \cap U_{jk,\lambda}$ est recouverte par $(U_{ijk,\lambda\mu\nu,\sigma})$.

Au rang n, la condition se vérifie de la même façon, par inclusion d'ouverts de E' dans ouverts de E.

L'intersection $W_1 = \bigcap_{0 \leq k \leq n} U_{i\,i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n, \sigma_k}$ de $n+1$ ouverts de E'_{n-1} vérifiant les conditions $\beta_k \sigma_l = \beta_{l-1} \sigma_k$, $0 \leq k < l \leq n$, est contenue dans $W_2 = \bigcap_{0 \leq k \leq n} U_{i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n, \beta_0 \sigma_k}$.

Il est facile de vérifier que les indices $\beta_0 \sigma_k$ vérifient les conditions de commutation, donc il existe dans E_n des ouverts $U_{i_0 \ldots i_n, \sigma}$ avec $\beta_k \sigma = \beta_0 \sigma_k$, assurant un recouvrement de W_2.

Enfin, pour chaque $U_{i_0 \ldots i_n, \sigma}$, le système des $n+2$ ouverts de E_n : $U_{i_0 \ldots i_n, \sigma}$, $(U_{i\,i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_n, \sigma_k})_{0 \leq k \leq n}$ admet lui aussi des indices vérifiant les conditions de commutation, et est recouvert par des ouverts $(U_{i\,i_0 \ldots i_n, \tau})$ de E_{n+1}, et donc de E'_n. Ainsi E'_n est bien étale surjectif sur le noyau simplicial de $(E'_{n-1}, \partial'_{k,n-1})_{0 \leq k \leq n-1}$.

Notant Ψ_n l'inclusion $E'_{n-1} \hookrightarrow E_n$

et f_n le morphisme $\partial_{0,n+1} : E'_n \hookrightarrow E_n$,

un n-cocycle u de E à coefficients dans un préfaisceau $\mathcal{R}$ induit un n-cocycle u' de E' et une $(n-1)$-cochaîne v' de E' par f_n et Ψ_n.

La condition de cocycle s'écrit

$$u' = f_n^* u = \partial^*_{0,n+1} u = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \partial^*_{k,n+1} u$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^h \partial^*_{h,n} \Psi^*_n u = dv' .$$

Autrement dit, u' est un n-cobord.

Conclusion. – Ainsi, partant d'un élément ξ non nul dans $H^n_s(U, \mathcal{R})$, ξ provient d'un n-cocycle γ d'une échelle $E(\gamma)$ sur U. Ce dernier induit, dans chaque ouvert V du recouvrement $E_0(\gamma)$ de U un n-cocycle u de l'échelle induite sur V par $E(\gamma)$, et nous venons de montrer que u est tué dans $H^n_s(V, \mathcal{R})$. C.Q.F.D.

12. Les groupes de cohomologie $H_s^n(T, \mathcal{F})$ et le théorème d'isomorphisme.

1. *Définition.*

A toute petite suite exacte de préfaisceaux sur T, soit

$$0 \to \mathcal{P}' \to \mathcal{P} \to \mathcal{P}'' \to 0,$$

on peut associer des morphismes de connexion ∂^n :

$$H_s^n(T, \mathcal{P}'') \to H_s^{n+1}(T, \mathcal{P}')$$

et la suite

$$0 \to H_s^0(T, \mathcal{P}') \to H_s^0(T, \mathcal{P}) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_s^{n-1}(T, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} H_s^n(T, \mathcal{P}') \to H_s^n(T, \mathcal{P}) \to \cdots$$

est exacte, et fonctorielle par rapport aux petites suites exactes de préfaisceaux sur T.

En effet, pour toute échelle spéciale, E sur T, on a une suite exacte de complexes

$$0 \to C^*(E, \mathcal{P}') \to C^*(E, \mathcal{P}) \to C^*(E, \mathcal{P}'') \to 0 ;$$

et en passant à la limite inductive, qui commute à l'homologie, on obtient le résultat.

PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur* T *engendrant le faisceau $\mathcal{F}$. Les groupes de cohomologie de préfaisceaux,* $H_s^n(T, \mathcal{P})$ *et* $H_s^n(T, \mathcal{F})$ *sont isomorphes pour tout n.*

C'est une conséquence du théorème 11.4 au regard de ce qui précède. En effet, il suffit de considérer les deux petites suites exactes ci-dessous, où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont évanescents :

$$0 \to \mathcal{R}_1 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{F} \to \mathcal{R}_2 \to 0 . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau en groupes sur T, il sera loisible de calculer $H_s^n(T, \mathcal{F})$ en se servant de n'importe quel préfaisceau engendrant $\mathcal{F}$.

2. *La suite exacte de cohomologie.*

Pour toute petite suite exacte $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}'' \to 0$ de faisceaux, la suite de complexes

$$0 \to C_s^*(T, \mathcal{F}') \to C_s^*(T, \mathcal{F}) \to C_s^*(T, \mathcal{F}'') \to 0$$

est exacte. En effet, si $\mathcal{N}$ est le préfaisceau image de v, i.e. défini par

$$\mathcal{N}(U) = Im[v(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)] ,$$

pour tout ouvert U de T, on a des suites exactes de préfaisceaux

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{M} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{R} \to 0$$

où $\mathcal{R}$ est évanescent. Alors, $C_s^*(T, \mathcal{R})$ est nul comme il a été vu en 11.4, et de l'exactitude du foncteur $C_s^*(T, \ )$ sur les préfaisceaux établie au numéro précédent, on déduit l'assertion.

Par application de l'homologie à la suite exacte de complexes ainsi obtenue, on peut écrire une suite exacte de cohomologie :

$$\cdots \to H_s^n(T, \mathcal{F}) \to H_s^n(T, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial} H_s^{n+1}(T, \mathcal{F}') \to H_s^{n+1}(T, \mathcal{F}) \to \cdots$$

On verrait de même qu'à tout morphisme de petites suites exactes de faisceaux, i.e. à tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}'_1 & \to & \mathcal{F}_1 & \to & \mathcal{F}''_1 & \to & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, pour tout $n \geqslant 0$, le diagramme qui s'en déduit

$$\begin{array}{ccc} H_s^n(T, \mathcal{F}'') & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & H_s^{n+1}(T, \mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_s^n(T, \mathcal{F}''_1) & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & H_s^{n+1}(T, \mathcal{F}'_1) \end{array}$$

est commutatif.

C'est encore une conséquence de 11.4 et du numéro 1.

PROPOSITION. – *A toute petite suite exacte de faisceaux sur* T, *soit* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$, *est associée, de manière fonctorielle, une suite exacte de cohomologie*

$$0 \to H_s^0(T, \mathcal{F}') \to H_s^0(T, \mathcal{F}) \to \cdots \to H_s^{n-1}(T, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H_s^n(T, \mathcal{F}') \to H_s^n(T, \mathcal{F}) \to H_s^n(T, \mathcal{F}'') \to \cdots$$

3. *Acyclicité des faisceaux injectifs.*

PROPOSITION. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau injectif sur* T ; *alors* $H_s^n(T, \mathcal{F}) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

En effet, à tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de T et à tout faisceau $\mathcal{F}$ sur T, on associe le faisceau $\mathcal{G}$ défini par

$$\mathcal{G}(U) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U \cap U_i)$$

et l'injection $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, définie de façon évidente.

Etant donnée une échelle E sur T, il lui correspond une famille $(E_i)_{i \in I}$, où chaque E_i est une échelle sur U_i et possède un morphisme $E_i \to E$.

Les assertions ii) et iii) du théorème 11.2 nous assurent alors que

$$H_s^n(T, \mathcal{G}) = \prod_{i \in I} H_s^n(U_i, \mathcal{F}) .$$

Or, pour $n \geqslant 1$, les préfaisceaux $H^n(\ ,\mathcal{F})$ sont évanescents d'après le théorème 2.5 : on peut donc trouver un recouvrement ouvert $(V_j)_{j \in J}$ de T, tel que

$$H_s^n(T, \mathcal{F}) \to H_s^n(T, \mathcal{G}_V)$$

soit nul pour tout $n \geqslant 1$, en notant $\mathcal{G}_V$ le faisceau défini par $\mathcal{F}$ et le recouvrement ouvert $(V_j)_{j \in J}$.

Si $\mathcal{F}$ est injectif, il existe une rétraction $\mathcal{G}_V \to \mathcal{F}$, et $H_s^n(T, \mathcal{F}) = 0$ pour $n \geqslant 1$. C.Q.F.D.

4. *Le théorème d'isomorphisme.*

Soit $\mathcal{L}^*$ une résolution injective d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur T ; on note $C_s^*(T, \mathcal{L}^*)$ la limite inductive, sur le système $\mathcal{D}$, des complexes

$$\mathcal{L}^*(E) = C^*(E, \mathcal{L}^*) .$$

La différentielle $d' : C_s^p(T, \mathcal{L}^q) \to C_s^{p+1}(T, \mathcal{L}^q)$ est la différentielle du complexe $C_s^*(T, \mathcal{L}^q)$, et la différentielle

$$d'' : C_s^p(T, \mathcal{L}^q) \to C_s^p(T, \mathcal{L}^{q+1})$$

est, au facteur $(-1)^p$ près, l'homomorphisme déduit de la différentielle $\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+1}$ de $\mathcal{L}^*$.

Ainsi $d'd'' + d''d' = 0$, et $d = d' + d''$ vérifie $d^2 = 0$.

La seconde suite spectrale du double complexe $C_s^*(T, \mathcal{L}^*)$ a pour termes initiaux

$$''E_2^{pq} = H^p(H_s^q(T, \mathcal{L}^*)) ,$$

mais, d'après le numéro 3, $''E_2^{pq} = 0$ pour $q \geqslant 1$, car $\mathcal{L}^*$ injectif.

La première suite spectrale a pour premiers termes

$$'E_1^{pq} = H^q(C_s^p(T, \mathcal{L}^*)) ;$$

or, $C_s^*(T, \ )$ est un foncteur exact sur la catégorie des préfaisceaux, donc commute à l'homologie et $'E_1^{pq} = C_s^p(T, H^q(\mathcal{L}^*))$. Autrement dit, si l'on considère les préfaisceaux

$$\mathcal{H}^q : U \mapsto H^q(\mathcal{L}^*(U)) = H^q(U, \mathcal{F}) ,$$

on a $$'E_1^{pq} = C_s^p(T, \mathcal{H}^q) ,$$

et $$'E_2^{pq} = H_s^p(T, \mathcal{H}^q) .$$

Enfin, $\mathcal{H}^0$ s'identifie à $\mathcal{F}$, d'où $'E_2^{p0} = H_s^p(T, \mathcal{F})$.

Le théorème 11.4 montre que $'E_2^{pq} = 0$ pour $q \geqslant 1$, car les préfaisceaux $\mathcal{H}^q$ sont alors évanescents. Les deux suites spectrales dégénèrent, de plus elles sont régulières car le double complexe est de graduation positive, et on en déduit, pour tout $n \geqslant 0$, un isomorphisme

$H_s^n(T, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(T, \mathcal{F})$, obtenu comme composé

$$H_s^p(T, \mathcal{F}) = {'E_2^{p0}} \xrightarrow{\sim} H^p(C_s^*(T, \mathcal{L}^*)) \xleftarrow{\sim} {''E_2^{p0}} = H^p(T, \mathcal{F}) .$$

THEOREME. – *Les foncteurs cohomologiques*

$$\mathcal{F} \mapsto H_s^n(T, \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \mapsto H^n(T, \mathcal{F})$$

sur la catégorie des faisceaux sont isomorphes.

CHAPITRE 6

LA COHOMOLOGIE DES Q-VARIETES

13. Echelles et Q-échelles.

1. *Définition.*

Soit S une Q-variété ; on note QVE/S *la catégorie des* Q-*variétés* Q-*étales au-dessus de* S. Dans cette catégorie, les morphismes sont Q-étales ; *la catégorie* VE/S en est la sous-catégorie pleine des *variétés* Q-*étales au-dessus de* S. Rappelons de plus, que si le but d'un morphisme Q-étale est une variété, il en est de même de la source.

On dira qu'un diagramme dans QVE/S (resp. VE/S),

$$\mathrm{Y}_1 \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{Y}_0 \xrightarrow{\ v\ } \mathrm{Y}_{-1} \longrightarrow 0$$

est une *suite exacte,* si v est surjectif et si le morphisme (u_0, u_1) : $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{Y}_{-1}} \mathrm{Y}_0$ est Q-étale (resp. étale) surjectif sur le produit fibré $\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{Y}_{-1}} \mathrm{Y}_0$.

On appelle Q-*échelle* (resp. *échelle*) *sur* S, la donnée d'un système simplicial augmenté dans QVE/S (resp. VE/S),

$$\mathrm{E} = [\mathrm{E}_n\, , (\partial_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}\, , \varepsilon]_{n \geqslant 0}$$

tel que : l'augmentation $\varepsilon : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{S}$ soit surjective, et, pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme $\mathrm{E}_{n+1} \to (\mathrm{E}_n)^{n+2}$ défini par $(\partial_{k,n+1})_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$, se factorise en un morphisme Q-étale (resp. étale) surjectif, sur la sous-Q-variété Y_n (resp. sous-variété) immergée des solutions du système

$$\partial_{k,n}(x_l) = \partial_{l-1,n}(x_k),\ 0 \leqslant k < l \leqslant n+1 \quad \text{si} \quad n > 0\ ,$$

$$\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_0) \quad \text{si} \quad n = 0\ .$$

Par définition les morphismes $\partial_{k,n}$ vérifient les relations

$$\partial_{k,n}\,\partial_{l,n+1} = \partial_{l-1,n}\,\partial_{k,n+1}\, ,\ 0 \leqslant k < l \leqslant n+1\ ,$$

$$\varepsilon\partial_{0,1} = \varepsilon\partial_{1,1}\ .$$

Alors les E_n sont Q-étales au-dessus de S par l'application

$$\varepsilon \partial_{k_0,0} \partial_{k_1,1} \ldots \partial_{k_n,n}$$

indépendante de $k_0 \ldots k_n$.

Insistons sur le fait que ε est Q-étale, de même que les opérateurs faces $\partial_{k,n}$. L'existence des échelles et Q-échelles sur S découlera de celle des noyaux simpliciaux dans les catégories VE/S et QVE/S.

2. *Existence.*

Rappelons que le *noyau simplicial* de $n+1$ morphismes $f_i : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, est, s'il existe, le système universel $g_j : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, tel que $f_k g_l = f_{l-1} g_k$ pour tout couple $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$.

LEMME. – *Les catégories* QVE/S *et* VE/S *possèdent des noyaux simpliciaux.*

Pour VE/S, on utilisera le résultat dans QVE/S, et le fait qu'une Q-variété Q-étale au-dessus d'une variété est une variété.

Soit $f = (f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un $(n+1)$-uple de morphismes de B dans C.

On se place dans la Q-variété $\mathrm{Z} = \mathrm{B} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B} \times_{\mathrm{S}} \ldots \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}$, ($n+2$ facteurs). Chacune des conditions $f_k(b_l) = f_{l-1}(b_k)$ définit un ouvert de Z (pour la topologie introduite en 1.5) car f_k et f_{l-1} sont Q-étales. Une intersection finie de tels ouverts a la même propriété.

L'intersection de Z et de l'ensemble A des solutions du système $\Sigma_n : f_k(b_l) = f_{l-1}(b_k)$, $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$, dans B^{n+2} est donc une Q-variété Q-étale au-dessus de S.

De ce que S est *objet final* dans QVE/S, (i.e. pour tout objet T de la catégorie, il existe un et un seul morphisme de T dans S), on déduit que A est contenu dans Z. C.Q.F.D.

3. *Exemples d'échelles.*

– *L'échelle de Koszul* KX d'un Q-atlas (X, π) de S,

$$(\mathrm{KX})_n = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \ldots \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$$

($n+1$ facteurs) produit fibré au-dessus de S, et

$$\partial_{k,n}(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_n)$$

où x_k signifie qu'on omet le facteur x_k.

Nous renvoyons aux trois articles [4] de Koszul qui étudient cette situation dans le cadre topologique, à quoi nous consacreront le chapitre 7.

– *L'échelle de Čech* du recouvrement $E_0 = \coprod_{i \in I} U_i$ d'une variété X. On pose

$$E_n = \coprod_{i_0 \ldots i_n \in I} U_{i_0 \ldots i_n}, \quad \text{où } U_{i_0 \ldots i_n} = \bigcap_{0 \leqslant k \leqslant n} U_{i_k};$$

et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\partial_{k,n}$ est le morphisme qui envoie par inclusion canonique $U_{i_0 \ldots i_n}$ dans $U_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_n}$, cf. 10.5.

On remarquera que ces deux exemples n'en font qu'un puisque E s'identifie à KE_0.

4. *Morphismes et produits fibrés.*

On définit les *morphismes de Q-échelles* (resp. échelles) *sur* S, comme des familles $f_n : E'_n \to E_n$ de morphismes de Q-variétés Q-étales au-dessus de S, et commutant aux opérateurs faces $\partial_{k,n}$.

On dira que E′ est *plus fine* que E, s'il existe un morphisme $f : E' \to E$.

Proposition. – i) *Le produit fibré de deux Q-échelles sur* S *est un bicomplexe simplicial dont la diagonale est une Q-échelle sur* S (produit cartésien).

ii) *Soit* $f : S' \to S$ *un morphisme de Q-variétés ; l'image réciproque par f d'une Q-échelle sur* S *est une Q-échelle sur* S′.

Soient en effet, E′ et E″ deux Q-échelles sur S ; les éléments du bicomplexe sont $E'_p \times_S E'_q$, et les opérateurs

$$\partial'_{k,p} : E'_p \times_S E''_q \longrightarrow E'_{p-1} \times_S E''_q,$$

$$\partial''_{h,q} : E'_p \times_S E''_q \longrightarrow E'_p \times_S E''_{q-1},$$

définis de façon évidente. De plus, $\partial'\partial'' = \partial''\partial'$.

La Q-échelle diagonale E, ou produit cartésien, est formée de $E_n = E'_n \times_S E''_n$, et $\partial_{k,n} = \partial'_{k,n}\,\partial''_{k,n} = \partial''_{k,n}\,\partial'_{k,n} = \partial'_{k,n} \times_S \partial''_{k,n}$.

Vérifions que E est une Q-échelle sur S : nous sommes assurés de l'existence des noyaux simpliciaux et tous les morphismes considérés sont Q-étales, il reste uniquement à regarder la surjectivité de E_{n+1} sur le noyau simplicial du $(n+1)$-uple $(\partial_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Or, une solution du système

$$\Sigma_n : \partial_{k,n}(x_l) = \partial_{l-1,n}(x_k) \ , \ 0 \leqslant k < l \leqslant n+1 \ ,$$

se définit comme un couple (x', x'') où x' (resp. x'') est une solution du même système relativement à ∂' (resp. ∂'').

Par hypothèse, x' est l'image d'un élément e' de E'_{n+1} et x'' celle d'un e'' de E''_{n+1}, le couple (e', e'') a pour image (x', x''), d'où i).

La démonstration de ii) est identique. C.Q.F.D.

5. *Cofinalité des échelles spéciales sur* S.

Un corollaire immédiat de la proposition 13.4 est que les échelles sur S forment un système cofinal de Q-échelles sur S.

En effet, soit E une Q-échelle sur S ; considérons un Q-atlas (X, π) de S, et la Q-échelle diagonale du produit fibré $E \times_S (KX)$. Cette Q-échelle est plus fine que la Q-échelle E et que l'échelle de Koszul KX, c'est donc une échelle plus fine que E. On peut même se ramener à une *échelle spéciale* sur S, i.e. dont le terme E_n est une somme disjointe d'ouverts de $(KX)_n$.

En effet, soit $\varphi : E \to KX$, une échelle sur S plus fine que KX ; de ce que E_0 est étale sur $(KX)_0 = X$, il existe un recouvrement ouvert U_0 de E_0, tel que sur chaque ouvert de U_0, φ_0 soit un difféomorphisme.

Soit L_0 la somme disjointe d'ouverts de X correspondante. Notons Ψ_0 et ρ_0 les morphismes de L_0 dans E_0 et $(KX)_0$; le diagramme commutatif montre le début de la construction par récurrence d'une échelle spéciale L plus fine que E.

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[dd, "\varphi_0"] & \\
L_0 \arrow[ur, "\Psi_0"] \arrow[dr, "\rho_0"'] & & S \\
 & (KX)_0 \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Supposons la construction faite jusqu'au rang n :

$$\begin{tikzcd}
 & E_n \arrow[rr, "\partial_{k,n}"] \arrow[dd, "\varphi_n"] & & E_{n-1} \arrow[dd, "\varphi_{n-1}"] \\
L_n \arrow[ur, "\Psi_n"] \arrow[rr, "\partial_{k,n}"] \arrow[dr, "\rho_n"'] & & L_{n-1} \arrow[ur, "\Psi_{n-1}"] \arrow[dr, "\rho_{n-1}"'] & \\
 & (KX)_n \arrow[rr, "\partial_{k,n}"] & & (KX)_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Par application du foncteur noyau simplicial, noté Y, on en déduit une application étale composée

$$E_{n+1} \times_{YE_n} YL_n \to E_{n+1} \to (KX)_{n+1} \,.$$

On peut alors trouver un espace L_{n+1}, somme d'ouverts de $(KX)_{n+1}$ tel que l'application naturelle de L_{n+1} dans $(KX)_{n+1}$ se relève en une application de L_{n+1} sur $E_{n+1} \times_{YE_n} YL_n$.

$$\begin{tikzcd}
 & E_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & YE_n \arrow[dd] \\
L_{n+1} \arrow[ur, "\Psi_{n+1}"] \arrow[rr, dashed, "(\partial_{j,n+1})_{0 \leqslant j \leqslant n+1}"] \arrow[dr, "\rho_{n+1}"'] & & YL_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (KX)_{n+1} \arrow[rr, "\sim"] & & Y(KX)_n
\end{tikzcd}$$

Ceci définit du même coup les morphismes Ψ_{n+1}, ρ_{n+1} et $\partial_{j,n+1}$, de plus, par construction ces derniers commutent à ρ et Ψ. D'où la cofinalité des échelles spéciales sur S. C.Q.F.D.

6. *Un ensemble cofinal.*

On obtient un ensemble $\mathcal{R}$, en majorant les cardinaux des ensembles utilisés dans l'indexation des ouverts de L. Nous nous fixons un Q-atlas (X, π) de S, et nous dirons qu'une échelle spéciale L sur S appartient au *système* $\mathcal{R}$ si

a) L_0 est une somme disjointe d'ouverts $(U_x)_{x \in X}$ avec $x \in U_x$;

b) L_n est une famille d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_n}$ de $(KX)_n$, où Λ_n est un ensemble d'applications de Σ^n dans KX telle que, pour tout $\alpha \in \Lambda_n$, $\partial_k \alpha \in \Lambda_{n-1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et

i) $\alpha_{0\,1\ldots n} \in U_\alpha \subset U_{\partial_0 \alpha} \times_S U_{\partial_1 \alpha} \times_S \cdots \times_S U_{\partial_n \alpha}$;

ii) $\alpha_{01\ldots n}$ parcourt ce produit fibré pour $\partial_k \alpha$ fixés, $0 \leqslant k \leqslant n$. Par exemple, si $L_0 = \coprod_{x \in X} U_x$, $L_1 = \coprod_{\substack{x_i \in X \\ y \in X \times_S X}} U_{x_0 x_1, y}$ et

$$U_{x_0} \times_S U_{x_1} = \bigcup_{y \in U_{x_0} \times_S U_{x_1}} U_{x_0 x_1, y} .$$

Considérant de telles échelles, il y a morphisme privilégié de l'une à l'autre : celui défini pour tout α par l'injection $U_\alpha \hookrightarrow V_\alpha$.

Proposition. — i) *Si* $(E_0, \ldots, E_n)$ *est un début d'échelle s'envoyant par* φ *dans le début d'une échelle* E', *il existe une échelle* E *prolongeant* $(E_0, \ldots, E_n)$ *et* φ *se prolonge en un morphisme d'échelles de* E *dans* E'.

ii) *Si* E *est une échelle, il existe une échelle spéciale de type* $\mathcal{R}$ *plus fine que* E.

iii) *Plus précisément, si* E *est comme en* ii) *et* $\varphi : E \to V$, *où* V *est spéciale de type* $\mathcal{R}$, *il existe* $\Psi : U \to E$ *avec* U *spéciale de type* $\mathcal{R}$ *et* $\varphi\Psi$ *un morphisme d'inclusion.*

Démonstration. — i) La construction se fait cran par cran, E_{p+1} est obtenu à partir de E_p comme le produit fibré $YE_p \times_{YE'_p} E'_{p+1}$, où Y désigne le noyau simplicial et $\partial_{k,p+1}$ est le morphisme composé de la projection sur YE_p et de la k-ième face déjà définie sur le noyau simplicial.

ii) L'assertion est évidente à partir des résultats du n° 5.

iii) On peut, d'après ii) supposer E spéciale. Il est clair qu'il existe un recouvrement de X, indexé par X, tel que pour tout x de X on ait $x \in U_x \subset V_x$ et tel qu'il existe un difféomorphisme Ψ_x de U_x sur un ouvert de $\varphi^{-1}(V_x)$.

Supposons la construction faite jusqu'au rang n. Considérons le noyau simplicial YU_n et le produit fibré $YU_n \times_{YE_n} E_{n+1}$, étale sur E_{n+1} (et V_{n+1} par composition). Par hypothèse de récurrence U_n est une somme d'ouverts (U_α) de $(KX)_n$, indexés par une famille Λ_n d'applications de Σ^n dans (KX), telle que $U_\alpha \subset V_\alpha$ pour tout α de Λ_n. Donc YU_n est formé de produits fibrés $n+2$-uples

$$U_{\alpha_0} \times_S \cdots \times_S U_{\alpha_{n+1}} \subset V_{\alpha_0} \times_S \cdots \times_S V_{\alpha_{n+1}} ,$$

où $\partial_k \alpha_l = \partial_{l-1} \alpha_k$, $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$.

De ce que YV_n est formé d'ouverts V_γ de $(KX)_{n+1}$ dont le dernier indice appartient à V_γ et parcourt le produit $V_{\alpha_0} \times_S \cdots \times_S V_{\alpha_{n+1}}$, on déduit l'existence d'une somme U_{n+1} d'ouverts de $(KX)_{n+1}$ plus fine que V_{n+1} et telle que l'application étale $E_{n+1} \to V_{n+1}$ se relève de U_{n+1} sur $E_{n+1} \times_{V_{n+1}} U_{n+1}$. C.Q.F.D.

14. Q-préfaisceaux et Q-faisceaux.

1. *Généralités.*

Etant donnée une Q-variété S, on appelle

i) *Q-préfaisceau sur* S, un foncteur contravariant $\mathcal{P}: VE/S \to Ens$;

ii) *Q-faisceau sur* S, un Q-préfaisceau $\mathcal{F}$ sur S, exact à gauche et transformant les sommes en produits.

Nous renvoyons à 13.1 pour la signification de VE/S et suite exacte dans VE/S.

La condition ii) signifie que, pour toute suite exacte

$$Y_1 \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} Y_0 \xrightarrow{v} Y_{-1} \longrightarrow 0$$

dans VE/S, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y_{-1}) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Y_0) \underset{\mathcal{F}(u_1)}{\overset{\mathcal{F}(u_0)}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(Y_1) \text{ est exacte,}$$

i.e. $\mathcal{F}(v)$ est injective, et si $\mathcal{F}(u_0)(x) = \mathcal{F}(u_1)(x)$, alors $x = \mathcal{F}(v)(y)$.

Remarquons que toute variété Q-étale surjective Z au-dessus de S, définit le Q-faisceau $\mathrm{Hom}_S(\ ,Z)$.

PROPOSITION. – *Tout Q-faisceau sur* S *est représentable dans* QVE/S. *Tout Q-préfaisceau sur* S *engendre un Q-faisceau sur* S.

On ne s'intéresse guère qu'aux Q-préfaisceaux et Q-faisceaux abéliens, i.e. en groupes abéliens. Un Q-préfaisceau $\mathcal{P}$ abélien sera dit *évanescent* si pour $X \in VE/S$ et $a \in \mathcal{P}(X)$, il existe $Y \xrightarrow{u} X$ étale et surjectif tel que $\mathcal{P}(u) . a = 0$.

On remarquera qu'un Q-faisceau sur S s'étend ainsi en un foncteur sur QVE/S, et lui sera par la suite identifié.

2. *Démonstration de la proposition 14.1.*

Soient (X, π) un Q-atlas de S, (x, x') dans $X \times_S X$ et $\mathcal{R}$ un Q-préfaisceau ; $\mathcal{R}(x) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{R}(U)$ coïncide avec $\mathcal{R}(x')$, d'après l'existence et l'unicité du germe de difféomorphisme local au-dessus de S, entre voisinages de x et x'. Pour $s = \pi(x) = \pi(x')$, notons $\mathcal{R}(s) \simeq \mathcal{R}(x) \simeq \mathcal{R}(x')$, $B = \bigcup_{s \in S} \mathcal{R}(s)$, et $\alpha : B \to S$. Alors $\mathcal{R}$ définit par restriction un préfaisceau sur X, l'ensemble $Y = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}(x)$ est canoniquement muni d'une structure de variété et $\varepsilon : Y \to X$ est étale. Ainsi B est quotient de Y par la relation

$(y, y') \in Y \times_S Y$ et y et y' ont même image dans $\mathcal{R}(\pi(\varepsilon(y)))$.
On a la relation $\pi\varepsilon = \alpha\bar{\omega}$, où $\bar{\omega} : Y \to B$ est la projection canonique.

L'existence des difféomorphismes locaux dans Y compatibles avec $\bar{\omega}$ est claire. Soient $f, f' : T \to Y$, deux morphismes de variétés, tels que $\bar{\omega} f = \bar{\omega} f'$; par calcul de diagramme, εf et $\varepsilon f'$ coïncident sur un ouvert de T, et il en est de même pour f et f' car ε est étale.

La Q-variété B définit un Q-faisceau sur S qui, à la variété Q-étale Z au-dessus de S associe $\mathrm{Hom}_S(Z, B)$ ensemble des morphismes de Z dans B au-dessus de S.

Le seul point délicat est la vérification de l'exactitude. Soit $Y_1 \overset{u_0}{\underset{u_1}{\rightrightarrows}} Y_0 \xrightarrow{v} Y_{-1} \longrightarrow 0$ une suite exacte dans VE/S. Il est trivial que la composition par v définit une injection de $\mathrm{Hom}_S(Y_{-1}, B)$ dans $\mathrm{Hom}_S(Y_0, B)$. Si $t \in \mathrm{Hom}_S(Y_0, B)$ est tel que $t_0 u_0 = t_0 u_1$, on peut définir une application h de Y_{-1} dans B en posant $h(y) = t(z)$ pour $y = v(z)$, car, si z' a aussi pour image y par v, on a $t(z) = t(z')$ du fait de l'étalement de Y_1 sur le produit fibré $Y_0 \times_{Y_{-1}} Y_0$ et de la condition $t_0 u_0 = t_0 u_1$.

Si $\mathcal{R}$ est un Q-faisceau sur S, alors $\mathcal{R}$ induit un faisceau sur X, lequel est représenté par $Y = B \times_S X$, et il y a bijection, pour tout ouvert V de X entre les sections de V dans Y et $\mathrm{Hom}_S(V, B)$. Alors B représente aussi le faisceau $\mathcal{R}$ pour toute somme disjointe d'ouverts de X.

Soit Z une variété Q-étale au-dessus de S ; on considère une suite exacte $Z_1 \rightrightarrows Z_0 \to Z \to 0$ dans VE/S, où Z_0 et Z_1 sont des sommes disjointes d'ouverts de X, et on lui applique les deux foncteurs $\mathcal{P}$ et $\mathrm{Hom}_S(\ ,B)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{P}(Z) & \rightarrow & \mathcal{P}(Z_0) & \rightrightarrows & \mathcal{P}(Z_1) \\ & & & \| & & \| \\ 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(Z, B) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_S(Z_0, B) & \rightrightarrows & \mathrm{Hom}_S(Z_1, B) \end{array}$$

La considération du diagramme ci-dessus permet de conclure. C.Q.F.D.

3. *Les groupes* $H^n(S, \mathcal{P})$ *et* $H^n(S, \mathcal{F})$

Soient $E = (E_n)_{n \geq 0}$ une échelle et $\mathcal{P}$ un Q-préfaisceau sur une Q-variété S ; on note $C^*(E, \mathcal{P})$ le complexe $\mathcal{P}(E_n)_{n \geq 0}$, muni des différentielles

$d_n : \mathcal{P}(E_n) \rightarrow \mathcal{P}(E_{n+1})$, définies par

$d_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \ \mathcal{P}(\partial_{k,n+1})$ et $H^*(E, \mathcal{P})$ sa cohomologie.

On désigne par $H^*(S, \mathcal{P})$ la limite inductive des groupes $H^*(E, \mathcal{P})$ quand E parcourt l'ensemble cofinal $\mathcal{R}$ d'échelles sur S, qu'on appelle *la cohomologie de* S *à coefficients dans* $\mathcal{P}$ (cf. 13.6 pour la définition de $\mathcal{R}$).

L'intérêt en est évident, dès qu'on a la

PROPOSITION. — i) *Une petite suite exacte de Q-préfaisceaux sur* S :

$$0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

fournit, de manière fonctorielle, une suite exacte illimitée de cohomologie

$$0 \rightarrow H^0(S, \mathcal{P}') \rightarrow H^0(S, \mathcal{P}) \rightarrow \cdots$$
$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(S, \mathcal{P}'') \rightarrow H^n(S, \mathcal{P}') \rightarrow H^n(S, \mathcal{P}) \rightarrow H^n(S, \mathcal{P}'') \rightarrow$$
$$\rightarrow H^{n+1}(S, \mathcal{P}') \rightarrow$$

ii) *Un Q-préfaisceau évanescent sur* S *est acyclique ;*

iii) *Si le Q-préfaisceau* $\mathcal{P}$ *engendre le Q-faisceau* $\mathcal{F}$ *sur* S, *les groupes* $H^*(S, \mathcal{P})$ *et* $H^*(S, \mathcal{F})$ *coïncident ;*

iv) *Une petite suite exacte de Q-faisceaux sur* S *fournit, de manière fonctorielle, une suite exacte illimitée de cohomologie ;*

v) *Pour* $n \geqslant 1$, *les Q-préfaisceaux* $\mathcal{H}^n(\mathcal{F})$ *sur* S *définis par* $\mathcal{H}^n(\mathcal{F})(V) = H^n(V, \mathcal{F})$ *sont évanescents.*

On remarquera que la définition de la *cohomologie* de S à *valeurs dans un Q-faisceau* $\mathcal{F}$ sur S est implicitement contenue dans l'énoncé iii), où $H^n(S, \mathcal{F})$ signifie bien entendu, cohomologie à coefficients dans le Q-préfaisceau $\mathcal{F}$.

Une suite Σ *de Q-préfaisceaux sur* S *est exacte* si pour tout U de VE/S, $\Sigma(U)$ est exacte.

L'assertion i) est triviale. De ce que VE/S possède des noyaux simpliciaux, cf. 13.2, on peut prolonger un début d'échelle sur S, d'où ii) en raisonnant comme pour 11.4 et 13.5.

Pour iii) on décompose le morphisme $\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ en deux petites suites exactes de Q-préfaisceaux sur S

$$0 \to \mathcal{R}_1 \to \mathcal{G} \to \mathcal{N} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{F} \to \mathcal{R}_2 \to 0$$

où $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont évanescents, et on applique i).

La suite $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ de Q-faisceaux sur S est exacte, si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées : $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}''$ est une suite exacte de Q-préfaisceaux sur S ; – Coker β est évanescent. Des deux petites suites exactes de Q-préfaisceaux sur S

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \operatorname{Im}\beta \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Im}\beta \to \mathcal{F}'' \to \operatorname{Coker}\beta \to 0 \text{ , on déduit iv).}$$

Enfin v) est trivial, car on connaît déjà le résultat dans le cas des variétés. C.Q.F.D.

15. Suites spectrales.

1. *Isomorphisme avec* $R^n\Gamma(S, \mathcal{F})$.

Grâce à l'étude précédente, nous avons obtenu une définition "géométrique" de la cohomologie d'une Q-variété à valeurs dans un

Q-faisceau ; nous allons montrer que cette théorie coïncide avec celle définie en termes de foncteur dérivé, à quoi l'on aurait pu, plus naturellement, penser.

PROPOSITION. – i) *La catégorie des Q-faisceaux sur* S *a assez d'injectifs.*

ii) *Les foncteurs cohomologiques* $\mathcal{F} \to \mathrm{H}^n(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ *et* $\mathcal{F} \to \mathrm{R}^n\Gamma(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ *sur la catégorie des Q-faisceaux sont isomorphes.*

En effet, pour obtenir un Q-faisceau injectif, il suffit de se donner I_{S} injectif pour $s \in \mathrm{S}$ et de considérer le Q-préfaisceau $\mathcal{I}(\mathrm{V}) = \prod\limits_{x \in \mathrm{V}} \mathrm{I}_{\pi(x)}$ pour $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$. La catégorie des groupes abéliens a assez d'injectifs, i.e. tout objet est sous-objet d'un injectif ; d'où i) en plongeant chaque fibre $\mathcal{F}_s$ du Q-faisceau donné $\mathcal{F}$ dans un groupe divisible I_s ; et en considérant le Q-faisceau $\mathcal{I}$ engendré par le Q-préfaisceau $\prod\limits_{x \in \mathrm{V}} \mathrm{I}_{\pi(x)}$. Voir 14.2 pour la définition des fibres $\mathcal{F}_s$.

Quand une catégorie a assez d'injectifs, on sait construire des résolutions injectives et des foncteurs dérivés. Notons $\Gamma(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ les sections de S dans $\mathcal{F}$, et $\mathrm{R}^n\Gamma(\mathrm{S}, \mathcal{F})$ les dérivés droits. Les assertions iv) et v) de la proposition 14.3 impliquent l'acyclicité des injectifs en degrés strictement positifs (comme pour le cas usuel cf. Godement [3]) ; enfin, l'acyclicité des injectifs et iv) de 14.3 assurent l'identité des deux théories cohomologiques, suivant le raisonnement classique [3].

On notera l'utilisation implicite d'une suite spectrale. C.Q.F.D.

2. *Suite spectrale associée à une Q-échelle.*

Ceci généralise le résultat bien connu, suivant lequel on peut associer une suite spectrale à tout recouvrement d'un espace topologique.

PROPOSITION. – *A tout Q-préfaisceau* $\mathcal{F}$ *et toute Q-échelle* E *sur une Q-variété* S *est associée une suite spectrale de terme initial* $\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathrm{E} ; \mathcal{H}^q(\mathcal{F}))$ *aboutissant à* $\mathrm{H}^n(\mathrm{S}, \mathcal{F})$.

$\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ désigne le système de coefficients (Q-préfaisceau) défini par $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})(\mathrm{V}) = \mathrm{H}^q(\mathrm{V}, \mathcal{F})$.

Soit E′ une autre échelle, d'après 13.4, le produit fibré $E \times_S E'$ définit un bicomplexe $\mathcal{F}(E_m \times_S E_n)_{m,n \geqslant 0}$. On en déduit une suite spectrale, de terme initial $E_2^{p,q} = H^p(E, \mathcal{F}^q_{E'})$, où le préfaisceau $\mathcal{F}^q_{E'}$ est défini par $\mathcal{F}^q_{E'}(V) = H^q(V \times_S E', \mathcal{F})$ pour V dans VE/S.

D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier [2], l'aboutissement de cette suite spectrale est $H^n(D, \mathcal{F})$ avec $D_n = E_n \times_S E'_n$ (échelle diagonale). On passe à la limite sur E′, d'une part

$$\varinjlim \mathcal{F}^q_{E'}(V) = H^q(V, \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q(\mathcal{F})(V)$$

et d'autre part $\varinjlim H^n(D, \mathcal{F}) = H^n(S, \mathcal{F})$, car partant d'un ensemble cofinal d'échelles sur S, son image réciproque dans V, Q-étale sur S, est un ensemble cofinal d'échelles sur V. C.Q.F.D.

3. *Suite spectrale de Leray.*

THEOREME. – *Soient* $f : S' \to S$ *un morphisme de* Q-*variétés et* $\mathcal{F}$ *un* Q-*faisceau sur* S′. *On a une suite spectrale de terme initial* $E_2^{p,q} = H^p(S; \mathcal{R}^q f_*(\mathcal{F}))$, *aboutissant à* $H^n(S', \mathcal{F})$.

On note $\mathcal{R}^q f_*(\mathcal{F})$ le Q-faisceau sur S engendré par le Q-préfaisceau $V \mapsto H^q(V \times_S S'; \mathcal{F})$.

En effet, d'après 13.4, l'image réciproque d'une Q-échelle sur S est une Q-échelle sur S′. D'après l'étude du numéro précédent, on peut lui associer une suite spectrale. Le résultat s'obtient par passage à la limite inductive sur un ensemble cofinal d'échelles sur S. C.Q.F.D.

4. *Bicomplexe de "de Rham".*

Voici une autre conséquence de la proposition du numéro 15.2. Notons Ω^* le Q-faisceau sur S, différentiel gradué, des germes de formes différentielles et **R** le Q-faisceau constant sur S de fibre **R**. Alors **R** induit le faisceau constant **R** et Ω^* le faisceau des germes de formes différentielles sur toute variété de VE/S.

Enfin, on a une augmentation $\mathbf{R} \to \Omega^*$, qui fait de Ω^* une résolution de **R**.

En effet, il n'y a localement, i.e. sur une Q-carte, aucune différence entre une Q-variété et une variété.

THEOREME. – *Soient* S *une* Q-*variété différentielle et* E *une échelle sur* S ; *la cohomologie à valeurs réelles* $H^*(S, \mathbf{R})$ *s'obtient comme cohomologie totale du bicomplexe* $C^*(E, \Omega^*)$.

On introduit le Q-préfaisceau $\mathcal{F}_{p,q}(V) = \Omega^p(V \times_S E_q)$ et, pour chaque échelle E′ :

a) Un tricomplexe A(E′) par $A^{p,q,r}(E') = \Omega^p(E_q \times_S E'_r)$;

b) Un bicomplexe B(E′) par $B^{p,n}(E') = \sum_{q+r=n} A^{p,q,r}(E')$;

c) Un bicomplexe C(E′) par $C^{p,n}(E') = \Omega^p(E_n \times_S E'_n)$;

d) Un bicomplexe D(E′) par $D^{n,r}(E') = \sum_{p+q=n} A^{p,q,r}(E')$.

De plus, on pose $A = \varinjlim A(E')$, etc. limites inductives sur un ensemble cofinal d'échelles E′. Au tricomplexe A sont associées six suites spectrales ayant même aboutissement [3].

Alors, $H^r(S, \mathcal{F}_{p,q}) = 0$ sauf pour $r = 0$. En effet, c'est la limite inductive sur E′ de $H^r(E', \mathcal{F}_{p,q})$. Comme le système $E_q \times_S E'$ d'échelles sur E_q est aussi cofinal, $H^r(E', \mathcal{F}_{p,q}) = H^r(\Omega^p(E_q \times_S E'))$ a pour limite $H^r(E_q, \Omega^p)$. Or E_q est une variété et il est classique que les Ω^p sont acycliques sur une variété.

La première suite spectrale du bicomplexe D a pour terme unitial $E_1 = H^0(E_q, \Omega^p) = \Omega^p(E_q)$ avec différentielle $d + d'$ si d (resp. d', resp. d'') est la différentielle correspondant à l'indice p (resp. q, resp. r). Comme D est le bicomplexe associé à A par $D^{n,r} = \sum_{p+q=n} A^{p,q,r}$, on peut obtenir la cohomologie totale $\mathcal{H}$ du tricomplexe A comme cohomologie totale de D, qui d'après ce qui précède est la même que celle du bicomplexe $\Omega^q(E_p)$.

On obtient aussi $\mathcal{H}$ comme cohomologie totale du bicomplexe B. De plus, le théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier [2] fournit une équivalence d'homotopie des bicomplexes B et C. Enfin, les échelles $E \times_S E'$ forment un ensemble cofinal sur S, et on peut identifier C à $C^*(S, \Omega^*)$.

Or le foncteur $C^*(S, \ )$ défini sur la catégorie des Q-faisceaux sur S, à valeurs dans celle des complexes, est exact. On a donc $H^n(C^p(S, \Omega^*)) = 0$ pour $n > 0$ et $p \geqslant 0$, et la cohomologie du bicomplexe $C^*(S, \Omega^*)$ est celle du complexe $H^0(C^p(S, \Omega^*)) = C^p(S, \mathbf{R})$, c'est-à-dire $H^p(S, \mathbf{R})$. C.Q.F.D.

CHAPITRE 7

LA COHOMOLOGIE DES ESPACES A OPERATEURS

16. La catégorie des B-variétés.

1. *Introduction.*

Comme nous l'avons déjà annoncé, ce chapitre est consacré à l'étude de la cohomologie des variétés topologiques. Il faut d'abord examiner, ce qui subsiste de la théorie des Q-variétés quand on passe du cadre différentiel au cadre C^r, où r peut être éventuellement nul. Bien entendu, dès que r sera inférieur à 2, il nous faudra abandonner le théorème 3.3 dont la démonstration utilise essentiellement le théorème de Frobenius.

Pour éviter toute confusion, nous parlerons de B-atlas de classe C^r, B-variétés de classe C^r, B-préfaisceaux, B-faisceaux et B-échelles sur S.

Soit S un ensemble ; un *B-atlas de classe* C^r $(r \geqslant 0)$ est un couple (X, π), où X est une variété de classe C^r et π une application de X **sur** S, tel que les deux conditions ci-dessous soient vérifiées :

Ba) Si x et x' dans X ont même image par π, il existe un voisinage ouvert U de x (resp. U' de x') et un difféomorphisme $f : U \to U'$ de classe C^r, tel que $f(x) = x'$ et $\pi(f(t)) = \pi(t)$, pour tout t dans U.

Bb) Si T est une variété de classe C^r et f, f' deux applications de classe C^r de T dans X telles que $\pi f = \pi f'$, l'ensemble

$$T_0 = \{t \in T \mid f(t) = f'(t)\} \text{ est ouvert dans T.}$$

On vérifie que la compatibilité des B-atlas de classe C^r au-dessus d'un ensemble S est une relation d'équivalence, d'où la définition des *B-variétés de classe* C^r.

2. *Applications* B $-$ C^r *et* B-*étales.*

Pour les Q-variétés nous avions un critère, en termes de relèvements locaux, permettant de reconnaître les morphismes Q-étales (resp. Q-immersifs, Q-submersifs). En fait, c'est ce critère que nous allons prendre ici pour définition.

Une application $f : S \to S'$ est un *morphisme de* B-*variétés de classe* C^r, (ou plus simplement *f est une application* $B - C^r$), si, pour tout point x d'un B-atlas (X, π) de S, et x' d'un B-atlas (X', π') de S' tels que $\pi'(x') = f(\pi(x))$, on peut trouver un voisinage ouvert de x dans X (resp. U' de x' dans X') et une application $\bar{f} : U \to U'$ de classe C^r, telle que $\bar{f}(x) = x'$ et $\pi'(\bar{f}(t)) = f(\pi(t))$, pour tout t dans U.

De plus, l'application f sera B-*étale* (resp. B-*immersive,* B-*submersive*) si ses relèvements locaux $\bar{f}$ le sont.

Bien entendu, pour $r = 0$, les deux dernières définitions perdent leur sens. Insistons sur le fait qu'une application B-continue est B-étale si des relèvements locaux convenables sont des homéomorphismes.

Pour $r \geqslant 1$, il est possible d'obtenir la B-variété tangente TS d'une B-variété S de classe C^r ; on sort de la catégorie des B-variétés de classe C^r, et TS est une B-variété de classe C^{r-1}.

Un B-morphisme $f : S \to S'$, de classe C^r, définit un B-morphisme $Tf : TS \to TS'$, de classe C^{r-1}.

3. *Critères et exemples.*

PROPOSITION. – *Soient* $f : S \to S'$ *et* $g : S' \to S''$ *des* B-*morphismes de classe* C^r ;

i) *si deux des trois applications f, g et gf sont* B-*étales, il en est de même de la troisième.*

ii) *si* S *est une variété de classe* C^r, *le couple* (S, f) *est un* B-*atlas de classe* C^r *de* S', *si et seulement si f est* B-*étale surjective.*

iii) *si* S' *est une variété de classe* C^r, *et si f est* B-*immersive* (resp. B-*étale, pour* $r = 0$), *alors* S *est aussi une variété de classe* C^r.

Preuve. – i) est trivial, à partir de la nouvelle définition. ii) et iii) se montrent exactement comme les énoncés correspondants de la proposition 2.1. C.Q.F.D.

Exemples. – Une variété usuelle.

– Le quotient d'une variété C^r sous l'action libre d'un groupe discret dénombrable opérant C^r-différentiablement.

– Le quotient d'une variété paracompacte feuilletée de classe C^r sans holonomie transversale.

Nous renvoyons à 1.3 pour les vérifications des axiomes, il n'y a rien à changer.

– Le quotient d'une structure feuilletée au sens d'Ehresmann-Shih [3], si l'espace topologique est paracompact, et le feuilletage localement simple sans holonomie transversale. Le *groupe d'holonomie transversale* en x est le groupe des jets transverses réguliers stricts de source et de but x. Les B-cartes de classe C^0 seront les *petits espaces transverses* U/ρ_U, où ρ_U est la relation d'équivalence sur l'ouvert U associée au feuilletage induit. A vrai dire, ce dernier cas est à peine différent du précédent, la condition "localement simple" joue le rôle de "variété" et permet de définir les difféomorphismes locaux de transversales et les différents groupes d'holonomie.

4. *Cohomologie.*

Ayant défini pour toute B-variété S la notion d'application B-étale dans S, nous disposons de tout ce dont nous avons besoin pour construire la cohomologie de S à valeurs dans un B-faisceau, comme limite inductive sur un ensemble cofinal d'échelles sur S, des groupes $H^n(E, \mathcal{F})$.

Le paragraphe suivant est consacré à une interprétation géométrique du chapitre 5 du célèbre article de Grothendieck [5]. Notre propos est de montrer que, dans le cas des espaces à opérateurs, la cohomologie des échelles fournit la cohomologie usuelle, calculée au moyen de la suite spectrale de terme initial $E_2^{p,q} = H^p(G\,; H^q(X\,; \mathcal{A}))$, où $\mathcal{A}$ est un G-faisceau sur X.

17. Cohomologies $H^n(X/G\,; \mathcal{F})$ et $H^n(X\,; G, \mathcal{A})$.

Dans tout le paragraphe G sera un groupe discret dénombrable opérant de façon libre et continue sur une variété topologique X.

1. *G-échelles sur* X.

On appelle *G-échelle sur* X la donnée d'une échelle $E = (E_n)_{n\geqslant 0}$ sur X, et, pour tout n, une action de G sur E_n, compatible avec les opérateurs de face et l'augmentation.

Etant donnée une G-échelle E sur X, on considère le bicomplexe simplicial $P_{m,n} = E_m \times G^{n+1}$ dont la seconde famille d'opérateurs de face est définie par $\partial''_{k,n}(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, g_n)$, où $\hat{g}_k$ signifie qu'on omet le terme g_k.

Les opérateurs $\partial'_{h,m}$ et $\partial''_{k,n}$ commutent évidemment entre eux. Le groupe G est discret et G^{n+1} est identique au sous-ensemble de $(G^n)^{n+1}$ formé des solutions du système

$$\Sigma''_{n-1} : \partial''_{k,n-1}(y_l) = \partial''_{l-1,n-1}(y_k) \ , \ 0 \leqslant k < l \leqslant n \ .$$

On en déduit que l'application de $P_{n,n}$ dans $(P_{n-1,n-1})^{n+1}$, définie par $(\Delta_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$, où $\Delta_{k,n} = (\partial'_{k,n}, \partial''_{k,n})$ est étale surjective sur le sous-espace Y_n de $(P_{n-1,n-1})^{n+1}$, formé des solutions du système

$$\Sigma_{n-1} : \Delta_{k,n-1}(z_l) = \Delta_{l-1,n-1}(z_k) \ , \ 0 \leqslant k < l \leqslant n \ .$$

En effet, par $(\partial'_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $P_{n,n}$ est étale surjectif sur le sous-espace Y'_n de $(E_{n-1})^{n+1} \times G^{n+1}$ formé des solutions du système $(\Sigma'_{n-1})^{n+1}$; on compose alors avec l'application de $(E_{n-1})^{n+1} \times G^{n+1}$ dans $(E_{n-1} \times G^n)^{n+1}$ définie par $(\partial''_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ qui est étale surjective sur le sous-espace Y''_n, des solutions du système $(E_{n-1})^{n+1} \times \Sigma''_{n-1}$. D'où, par restriction à Y'_n, une application étale surjective de Y'_n sur Y_n.

2. *Echelle associée à une G-échelle.*

Faisons agir G sur le complexe bisimplicial $P_{m,n}$ par

$$g(x\,; g_0, \ldots, g_n) = (gx\,; g_0 g^{-1}, \ldots, g_n g^{-1}) \ .$$

Notons $Q_{m,n} = P_{m,n}/G \simeq E_m \times_G G^{n+1} \simeq E_m \times G^n$. Le dernier isomorphisme associe à une classe de représentant $(x\,; g_0, \ldots, g_n)$ l'élément $(g_0 x\,; g_1 g_0^{-1}, \ldots, g_n g_{n-1}^{-1})$; c'est un homéomorphisme car chaque g agit comme homéomorphisme ; de plus $E_m \times G^{n+1}$ est étale sur X, donc $Q_{m,n}$ est B-étale sur X/G. Les opérateurs ∂', ∂'' et Δ, compatibles avec l'action de G, passent au quotient ; notons ∂ l'opérateur ainsi obtenu à partir de Δ. De l'étude faite au numéro précédent, et de ce que le noyau simplicial passe au quotient, on déduit que le système simplicial $\overline{E} = (\overline{E}_n, \partial_{k,n})_{n \geqslant 0}$ est une échelle sur X/G, où $\overline{E}_n = Q_{n,n}$, $(\partial_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n} : Q_{n,n} \to Y_n/G$ et où G agit sur $(P_{n-1,n-1})^{n+1}$ par $g(x_0, \ldots, x_n) = (gx_0, \ldots, gx_n)$.

On dit que E *est l'échelle sur* X/G *associée à la* G-*échelle* E *sur* X.

Exemple. – A l'échelle de Čech $K(\mathcal{U})$, définie par un G-recouvrement $\mathcal{U}$ de l'espace X, est associée l'échelle $\overline{K}(\mathcal{U})$ sur X/G.

3. *Cofinalité et association.*

PROPOSITION. – *Le système d'échelles sur* X/G *associé à un système cofinal* R *de* G-*échelles sur* X, *est cofinal.*

Soit C une B-échelle sur X/G ; on pose $C''_n = C_n \underset{X/G}{\times} X$ avec action évidente du groupe G sur le second facteur.

On a alors une G-échelle C″ sur X ainsi qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux de C″ dans C ; il existe alors une G-échelle E dans R plus fine que C″, et soit $\overline{E}$ la B-échelle associée à E. Pour tout n, on considère $\Psi_n : \overline{E}_n \to E_n$ définie par la première projection $E_n \times G^n \to E_n$ qui n'est pas un morphisme d'ensembles simpliciaux, mais telle que l'application composée de E dans C en est un. Comme ce sont deux B-échelles sur X/G, ce sera un morphisme d'échelles sur X/G. En effet, soit $(x\,; g_0, \ldots, g_n)$ un représentant d'un élément de $\overline{E}_n$, notons φ l'application de E dans C et $H = \varphi \circ \Psi$; alors

$$\Psi_n(x\,; g_0, \ldots, g_n) = g_0 x$$

et $$\Delta_{k,n}(x\,; g_0, \ldots, g_n) = (\partial_{k,n} x\,; g_0, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, g_n)$$

d'où $$\Psi_{n-1}\Delta_{k,n}(x\,; g_0, \ldots, g_n) = g_0\, \partial_{k,n} \Psi_n(x\,; g_0, \ldots, g_n)$$

et, comme $\varphi(gx) = \varphi(x)$, on voit que H est bien un morphisme d'ensembles simpliciaux. C.Q.F.D.

4. B – *et* G-*faisceaux.*

LEMME. – *Il y a équivalence de catégories entre les* B-*faisceaux sur* X/G *et les* G-*faisceaux sur* X.

Rappelons qu'un G-*faisceau sur* X est un faisceau sur X, dans lequel G opère de façon compatible avec ses opérations sur X. La catégorie des G-faisceaux (sous-entendu : abéliens) a les mêmes propriétés que la catégorie des faisceaux sur X, et en particulier a assez d'injectifs.

Soit $\mathfrak{A}$ un G-faisceau sur X ; il est représentable par une variété A, sur laquelle G opère librement et A/G est une B-variété. Notons $\mathcal{E} = \mathrm{VE}/(\mathrm{X}/\mathrm{G})$ la catégorie des variétés topologiques B-étales au-dessus de X/G ; on définit $\mathfrak{F} = \Psi\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{F}(\mathrm{V}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathrm{V}, \mathrm{A}/\mathrm{G})$.

Si U est une B-variété étalée sur X/G, alors G opère librement sur $\mathrm{V} = \mathrm{U} \times_{\mathrm{X}/\mathrm{G}} \mathrm{X}$, et V est un espace étalé sur X. De plus, V/G est une B-variété isomorphe à U. Réciproquement, si V est un espace étalé sur X, avec action de G compatible avec la projection sur X, alors V/G est une B-variété étalée sur X/G et V est isomorphe à $\mathrm{V}/\mathrm{G} \underset{\mathrm{X}/\mathrm{G}}{\times} \mathrm{X}$.

On montre, de la même manière que pour les Q-faisceaux, cf. 14.1, que tout B-faisceau sur X/G est représentable par une B-variété étalée sur X/G.

Le lemme se déduit de ce qui précède. C.Q.F.D.

5. *Suites spectrales.*

PROPOSITION. – *A la donnée d'une* G-*échelle* E *sur* X *et d'un* B-*faisceau* $\mathfrak{F}$ *sur* X/G, *correspond une suite spectrale, de terme initial*

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^q(\mathrm{G}\,;\mathrm{H}^p(\mathrm{E}\,;\mathfrak{A}))$$

aboutissant à la cohomologie $\mathrm{H}^n(\overline{\mathrm{E}}, \mathfrak{F})$, *où* $\overline{\mathrm{E}}$ *est l'échelle sur* X/G *associée à* E, *et* $\mathfrak{A}$ *le* G-*faisceau sur* X *associé à* $\mathfrak{F}$.

Soit $(\mathrm{Q}_{m,n})_{m,n\geqslant 0}$ le bicomplexe simplicial défini au numéro 2 ; chaque $\mathrm{Q}_{m,n}$ est étale au-dessus de X, et on considère le bicomplexe $\mathrm{K}_{m,n} = \mathfrak{F}(\mathrm{Q}_{m,n}) = \mathfrak{A}(\mathrm{P}_{m,n})^{\mathrm{G}}$ sections de $\mathfrak{A}$ sur $\mathrm{P}_{m,n}$ invariantes par G. Les relations de commutation $\partial'\partial'' = \partial''\partial'$ vont impliquer les relations $d'd'' - d''d' = 0$ pour K, où

$$d'_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \mathfrak{F}(\partial'_{k,m}) \ \text{ et } \ d''_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \mathfrak{F}(\partial''_{k,n})\,.$$

Son complexe diagonal est $\mathfrak{F}(\overline{\mathrm{E}}_n)$ et, d'après le théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier [2], la cohomologie de ce dernier est identique à celle du complexe total. D'autre part, deux suites spectrales l'admettent pour aboutissement.

Enfin, un élément de $K_{m,n} = \mathfrak{A}(E_m \times G^{n+1})^G$ peut être regardé comme la donnée d'une famille de sections $f_{g_0,\ldots,g_n}$, de $\mathfrak{A}$ sur E_m, dépendant des variables homogènes $g_0, \ldots, g_n$. Donc ${}'E_1^{p,q}$ est l'ensemble des applications de G^{q+1} dans $H^p(E, \mathfrak{A})$ commutant à l'action de G, et le résultat s'en déduit. C.Q.F.D.

On en déduit deux corollaires, le premier par passage à la limite inductive sur un ensemble cofinal de G-échelles spéciales sur X, le second en remarquant que $H^n(X/G\,;\ )$ est le n-ième foncteur dérivé de $H^0(X/G\,;\ )$ d'après une adaptation aux B-variétés de la proposition 15.1. D'autre part, $H^0(X/G, \mathfrak{F})$ n'est autre que l'ensemble $\Gamma(X, \mathfrak{A})^G$ des sections de $\mathfrak{A}$ sur X invariantes par G :

COROLLAIRES. – *Soient* $\mathfrak{A}$ *un* G-*faisceau sur* X *et* $\mathfrak{F}$ *le* B-*faisceau associé sur* X/G ;

i) *il existe une suite spectrale, de terme initial*

$$E_2^{p,q} = H^q(G\,; H^p(X\,; \mathfrak{A}))$$

aboutissant à $H^n(X/G\,; \mathfrak{F})$.

ii) *pour tout* $n \geqslant 0$, *les groupes* $H^n(X/G\,; \mathfrak{F})$ *et* $H^n(X\,; G, \mathfrak{A})$ *sont isomorphes.*

6. *Cohomologie de Čech.*

Rappelons qu'on appelle G-*recouvrement* de X un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que G agisse sur I avec $g\,U_i = U_{gi}$ pour tout g de G et tout i de I.

Soit $\mathcal{U}$ un G-recouvrement de X, on note $\overline{K}(\mathcal{U})$ l'échelle sur X/G associée à la G-échelle de Čech définie par $\mathcal{U}$. Pour tout B-préfaisceau $\mathfrak{P}$ sur la B-variété X/G, on définit $\check{H}^n(X/G\,; \mathfrak{P})$ comme limite inductive sur un ensemble cofinal de G-recouvrements de X, des groupes $H^n(\overline{K}(\mathcal{U})\,; \mathfrak{P})$.

Pour tout G-recouvrement $\mathcal{U}$ et tout B-préfaisceau $\mathfrak{P}$ sur X/G, il y a isomorphisme entre les groupes $H^n(\overline{K}(\mathcal{U}), \mathfrak{P})$ et $H^n(\mathcal{U}\,; G, \mathfrak{O})$, où $\mathfrak{O}$ est le G-préfaisceau sur X induit par $\mathfrak{P}$. Il y a aussi isomorphisme entre les groupes

$$\check{H}(X/G\,; \mathfrak{P}) \quad \text{et} \quad \check{H}^n(X\,; G, \mathfrak{O})\,.$$

La première assertion est encore un corollaire de la proposition 17.6 par application du théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier déjà cité. La seconde se déduit de la première par passage à la limite.

PROPOSITION. – i) *A tout* B-*faisceau* $\mathfrak{F}$ *sur* X/G, *correspond une suite spectrale de terme initial* $E_2^{p,q} = H^q(G\,; \check{H}^p(X\,; \mathfrak{A}))$ *aboutissant à* $\check{H}^n(X/G\,; \mathfrak{F})$, *où* $\mathfrak{A}$ *est le* G-*faisceau induit par* $\mathfrak{F}$ *sur* X.

ii) *Si* X *est* **paracompact**, *pour tout* B-*faisceau* $\mathfrak{F}$ *sur* X/G, *il y a isomorphisme entre les groupes* $H^n(X/G\,; \mathfrak{F})$ *et* $\check{H}^n(X/G\,; \mathfrak{F})$.

En effet, i) s'obtient par passage à la limite sur un ensemble cofinal de G-recouvrements de X et ii) par la remarque que les suites spectrales aboutissant à l'une et l'autre cohomologie coïncident.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Le premier nombre indique le paragraphe, le second le numéro.

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE 1

[1] R, BARRE, Quotients des Q-variétés différentielles et analytiques, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 270, série A (1970), 1579-1582.

[2] N. BOURBAKI, Variétés différentielles et analytiques. Fascicule des résultats, Hermann, Paris (1971), 2 volumes.

[3] C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups, Princeton (1946).

[4] C. GODBILLON, Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, t. 17,2 (1967), 219-260.

Holonomie transversale, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 264, série A (1967), 1050-1052.

CHAPITRE 2

[1] R. BARRE, Q-variétés analytiques et groupes de Lie, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 272, série A (1971), 1094-1096.

[2] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2 et 3, Hermann, Paris, 1972.

[2b], [3] et [4] identiques à [2], [3] et [4] du Chapitre 1.

CHAPITRE 3

[1] R. BARRE, Revêtements et groupe fondamental des Q-variétés, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 274, série A (1972), 738-740.

[2] C. GODBILLON, Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1971.

CHAPITRE 4

[1] identique à [1] du Chapitre 2. Idem pour [2].

[3] E. FEDIDA, Sur les feuilletages de Lie. *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 272, série A (1971), 999-1002.

[4] identique à [4] du Chapitre 1.

[5] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, Interscience tracts in pure and applied mathematics, 15, New-York, 1963.

[6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.

CHAPITRE 5

[1] R. BARRE, Une définition de la cohomologie à valeurs dans un faisceau, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 287, série A (1968), 153-156.

[2] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

CHAPITRE 6

[1] R. BARRE, Cohomologie des Q-variétés différentielles et analytiques, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 270, série A (1970), 1666-1669.

[2] A. DOLD et D. PUPPE, Homologie nicht additiver Funktoren. Anwendungen, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* t. 11 (1961), 201-312.

[3] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[4] J.L. KOSZUL, Complexes d'espaces topologiques, Colloque intern. du C.N.R.S. *Bull. Soc. Math. France,* t. 87 (1959), 403-408.
Multiplicateurs et classes caractéristiques, *Trans. Amer. Math. Soc.* t. 89 (1958), 256-266.
Espaces fibrés associés et préassociés, *Nagoya Math. J.* t. 15 (1959), 155-169.

CHAPITRE 7

[1] R. BARRE, Cohomologie des espaces à opérateurs, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 268, série A (1969), 1458-1460.

[2] identique à [2] du Chapitre 6.

[3] C. EHRESMANN et SHIH WEISHU, Sur les espaces feuilletés ; théorème de stabilité, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 243 (1956), 344-346.

[4] identique à [4] du Chapitre 1.

[5] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.,* t. 9, (1957), 119-221.

[6] identique à [4] du Chapitre 6.

(Thèse soutenue le 5 juin 1972 à Strasbourg)
accepté par G. Reeb

Raymond BARRE
Département de Mathématique
Centre Universitaire
59 326 VALENCIENNES