ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LAMOUREUX

Sur quelques phénomènes de captage

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 4 (1973), p. 229-243
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_229_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 4 (1973), 229-243.

SUR QUELQUES PHÉNOMÈNES DE CAPTAGE

par Claude LAMOUREUX

Les feuilletages $\mathcal{F}$ étudiés dans ce travail sont de codimension un transversalement de classe C^2. La variété connexe X qu'ils feuillettent est quelconque, c'est-à-dire compacte ou non compacte.

Dans les conditions que définit notre théorème 3 de [3], nous avons pu conclure qu'une feuille de $\mathcal{F}$ coupée par au moins deux transversales fermées de classes d'homotopie « suffisamment différentes » et nulle part dense était nécessairement captée. Inversement cela nous a donné des situations dans lesquelles une feuille non captée doit être localement dense.

Le théorème 1 de ce travail concerne la situation diamétralement opposée, c'est-à-dire une feuille F telle que la famille des classes d'homotopie des transversales fermées à $\mathcal{F}$ coupant F au point x_0 engendre dans π_1 (X, x_0) un groupe à zéro ou un générateur : une telle feuille est dite de nombre $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ inférieur ou égal à un; une feuille F non captée et de nombre $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ inférieur ou égal à un, doit être propre, Cf. Théorème 1.

L'enveloppe de la feuille F de l'alinéa précédent (c'est-à-dire la réunion des feuilles de $\mathcal{F}$ différentes de F et adhérentes à F), a de plus une composition particulièrement remarquable : c'est une réunion de feuilles fermées qu'aucune transversale fermée ne coupe. En conséquence, l'adhérence de la feuille F dans X contient au moins une feuille fermée du feuilletage, Cf. Théorème 1.

D'autres hypothèses que le non-captage de la feuille F peuvent cependant impliquer les mêmes conclusions pour la feuille F et pour la structure de son enveloppe : par exemple l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est sans éléments évanouissants au sens de Novikov, Cf. Théorème 1.

Ce théorème 1 constitue d'ailleurs à nos yeux le résultat le plus important de ce travail, bien que son énoncé puisse sembler au premier abord plus technique que la plupart de ceux de ses corollaires. Ses hypothèses et ses conclusions sont illustrées par de nombreux exemples à la fin de ce travail : l'un d'eux nous montre que la feuille F concernée par le théorème 1 peut fort bien ne pas être fermée.

A titre d'exemple, le théorème 1 est appliqué aux variétés non compactes dont le groupe fondamental est fini ou est une extension finie de Z; il est appliqué ensuite à des variétés, cette fois compactes, de façon assez détaillée, mais non exhaustive. Ces applications constituent, à un certain point de vue, des théorèmes d'existence de feuilles fermées et de feuilles compactes.

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème 1, nous exposons la notion de captage et celles de ses propriétés utiles dans la suite; puis la notion-clef de sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ du feuilletage $\mathcal{F}$ en x_0, qui est un sous-semi-groupe, en général sans élément-unité, de $\pi_1(X, x_0)$. Nous donnons les propriétés du sécant d'homotopie dont nous avons besoin ici. C'est à partir du sécant d'homotopie qu'est défini le nombre $d(F, \mathcal{F})$ intervenant dans l'énoncé du théorème 1. Enfin nous démontrons le lemme fondamental : il trouvera d'autres applications dans un travail ultérieur. A l'aide de résultats antérieurs, le lemme fondamental permet de ramener la démonstration du théorème 1 à celle du lemme 4, qui concerne certaines propriétés algébriques du sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

Un cas particulier du théorème 1 et quelques corollaires ont été annoncés en [4].

1. Captage; sécant d'homotopie.

Nous avons dégagé en [3] la notion suivante :

Définition 1. — *Une feuille* G *d'un feuilletage topologique* $\mathcal{F}$ *de codimension un de* X *est dite captée par une feuille* F *de* $\mathscr{F}$ *s'il existe une application continue* i: $[0, 1[\times S^1 \to X$, *telle que :*

— i *est transverse à* $\mathscr{F}$ *et induit un feuilletage topologique* $\mathscr{G}$ *sur* $[0, 1[\times S^1$;

— $\gamma = \{0\} \times S^1$ *est une feuille de* $\mathscr{G}$ *et est contenue dans* $i^{-1}(F)$;

— γ *est un cycle-limite de* $\mathscr{G}$ *au sens de Poincaré ;*

— *il existe une feuille de* $\mathscr{G}$ *contenue dans* $i^{-1}(G)$ *dont l'adhérence dans* $[0, 1[\times S^1$ *contient la feuille* γ.

Nous avons les propriétés suivantes :

i) Si la feuille G est captée par la feuille F, F est adhérente à G et porte un lacet d'holonomie monotone d'au moins un côté.

ii) Une feuille captée n'est pas fermée.

iii) Une feuille-ressort au sens de [2] est captée par elle-même; elle n'est pas propre.

iv) Si G est captée par F et si G est adhérente à la feuille H, H est captée par F.

v) L'adhérence d'une feuille non captée est une réunion de feuilles non captées.

Toutefois l'adhérence d'une feuille non captée n'est pas, en général, une réunion de feuilles d'holonomie triviale.

Soit x_0 un point d'une feuille F d'un feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement orienté de la variété X, pointée par x_0. Nous considérons le cercle S^1 pointé et orienté de la façon habituelle.

Nous appelons « *transversale fermée* τ *orientée à* $\mathscr{F}$ *en* x_0 » toute application continue τ de S^1 dans X telle que :

— τ est pointée ;

— τ est transverse au feuilletage $\mathscr{F}$;

— τ respecte les orientations en présence.

A une telle transversale fermée τ orientée à $\mathscr{F}$ en x_0 correspond un élément bien défini de $\pi_1(X, x_0)$ qui est noté $[\tau]$.

Nous définissons ainsi le sécant d'homotopie de $\mathscr{F}$ en x_0, Cf. [3] :

Définition 2. — *Le sécant d'homotopie du feuilletage transversalement orienté* $\mathscr{F}$ *en* x_0, *noté* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, *est l'ensemble* *des éléments de* $\pi_1(X, x_0)$ *qui sont la classe d'une transversale fermée orientée à* $\mathcal{F}$ *en* x_0.

Le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ est un *sous-semi-groupe* de $\pi_1(X, x_0)$: soient deux éléments $u = [\tau]$ et $v = [\tau']$ de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$; d'après la construction habituelle, il existe une transversale fermée orientée à $\mathcal{F}$ en x_0, notée τ'', telle que $[\tau''] = [\tau].[\tau']$; donc u.v. est aussi élément de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

En particulier, pour tout élément u de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ et pour tout nombre entier n strictement positif, u^n est encore un élément de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

En revanche, u^{-1} n'est pas toujours dans $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, et $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ *n'est pas, en général, un groupe.* D'après ce qui précède, pour que $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ ait un élément inversible dans $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, il faut que l'élément $1 = u.u^{-1}$ appartienne à $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, donc que la feuille F soit coupée par une transversale fermée homotope à zéro dans X.

Si l'on change l'orientation transverse de $\mathcal{F}$, on obtient un nouveau sécant d'homotopie correspondant au précédent par l'application $x \to x^{-1}$ de $\pi_1(X, x_0)$ dans lui-même.

Si l'on choisit un nouveau point-base x'_0 de X dans la feuille F, on obtient un nouveau sécant d'homotopie, sous-semi-groupe de $\pi_1(X, x'_0)$; il est conjugué du précédent. Les conjugaisons obtenues dépendent du choix du chemin de la feuille F reliant x_0 à x'_0 et elles conjuguent aussi le groupe fondamental de X.

Le semi-groupe $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ jouit de la propriété fontorielle suivante : si f est une application de Y dans X transverse à $\mathcal{F}$, et si $f^*(\mathcal{F})$ désigne le feuilletage induit sur Y et orienté de façon cohérente, alors pour tout point x_0 de Y on a l'inclusion suivante :

$$f_*(\Pi S(x_0, f^*(\mathcal{F}))) \subset \Pi S(f(x_0), \mathcal{F}).$$

Le sécant d'homotopie est donc en ce sens un *invariant* par conjugaison topologique.

Soit $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ le groupe engendré par $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ dans $\pi_1(X, x_0)$. S'il est de type fini, nous noterons $d(F, \mathcal{F})$ le nombre minimal d'éléments de $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ qui l'engendrent.

La notation utilisée est justifiée ainsi : d'après ce qui précède, $d(F, \mathcal{F})$ ne dépend ni du choix du point-base x_0 dans la feuille F, ni du choix de l'orientation transverse de $\mathcal{F}$.

D'après [3], une feuille coupée par une transversale fermée homotope à zéro est captée si le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement de classe C^2 (on sait bien qu'alors le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas analytique, qu'il a de l'holonomie, et qu'il contient un élément évanouissant au sens de Novikov, Cf. [1]).

Il en résulte les lemmes suivants pour un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement C^2 et transversalement orientable de codimension un :

LEMME 1. — *Le sécant d'homotopie d'une feuille non captée est un semi-groupe sans élément-unité.*

LEMME 2. — *Le sécant d'homotopie d'une feuille* F *non captée de nombre* $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ *nul, est vide.*

2. Lemme fondamental.

Nous disons qu'une transversale fermée τ rencontre une feuille F, respectivement rencontre la feuille F en une infinité de points, si l'ensemble $\mathrm{I}m\tau \cap \mathrm{F}$ est non vide, respectivement est infini.

Le lemme fondamental s'énonce alors ainsi :

LEMME FONDAMENTAL. — *Soit* F *une feuille d'un feuilletage transversalement orienté* $\mathcal{F}$ *d'une variété* X ; *soit* x_0 *un point de* F.

S'il existe une transversale fermée à $\mathcal{F}$ *rencontrant* F *en une infinité de points, il existe un élément* ω *de* $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ *vérifiant la propriété suivante :*

— pour tout nombre entier N *strictement positif,* ω *peut s'écrire comme le produit de* N *éléments de* $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$.

L'hypothèse du lemme fondamental est vérifiée par exemple dans chacun des quatre cas suivants :

— la feuille F n'est *pas* propre;

— l'enveloppe de F contient une feuille qui n'est *pas* fermée;

— l'enveloppe de F contient une feuille fermée qui *est* coupée par une transversale fermée;

— la feuille F n'est *pas* fermée et il existe une transversale fermée rencontrant *toutes* les feuilles du feuilletage.

Démonstration du lemme fondamental.

Soit τ une transversale fermée à $\mathcal{F}$ rencontrant la feuille F en une infinité de points. Comme $\operatorname{Im}\tau$ est compacte et comme $\operatorname{Im}\tau \cap F$ est un ensemble infini, il existe un ouvert distingué $\mathcal{U}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ et un point y de $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{U} \cap \operatorname{Im}\tau$ contient une suite $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ de points de F contenus deux à deux dans des plaques différentes de $\mathcal{U}$ et tendant de façon monotone vers le point y. Nous entendons par là que, si f est une application distinguée du feuilletage $\mathcal{F}$ associée à $\mathcal{U}$, la suite $f(x_i)$ tend de façon monotone vers le point $f(y)$ de la droite réelle R.

La feuille de $\mathcal{F}$ contenant le point y est adhérente à la feuille F; nous pouvons supposer que y appartient à F uniquement lorsque la feuille F n'est pas propre.

D'après les propriétés du sécant d'homotopie que nous avons données plus haut, il est clair que, pour démontrer le lemme fondamental, il suffit de le faire pour un choix du point-base de X dans F et pour une orientation transverse de $\mathcal{F}$. Nous pouvons donc supposer, sans restreindre la généralité, que x_0 est le point-base de X et que la suite $f(x_i)$ est décroissante. Nous pouvons de même supposer que la transversale fermée τ est orientée.

Il existe un intervalle fermé $[a, b]$ du cercle tel que :

— $\tau(a) = x_0$, $\tau(b) = y$;
— $\tau([a, b])$ ne contient aucun des points $x_1, \ldots, x_i, \ldots$

Nous notons par x_0y la restriction de τ à cet intervalle $[a, b]$.

On peut aussi supposer qu'il existe une application continue g de $I = [0, 1]$ dans X telle que :

— $g(0) = y$, $g(1) = x_0$, et $g(I)$ est contenu dans $\mathcal{U}$;
— $g(I)$ contient tous les points de la suite (x_i);
— g est un homéomorphisme sur son image;
— g est transverse à $\mathcal{F}$.

Nous notons yx_0 le choix d'une telle application g; pour tout i strictement positif nous notons par z_i le point $yx_0^{-1}(x_i)$. Nous notons enfin par yx_i la restriction de yx_0 à $[0, z_i]$, et par x_jx_i, si j est strictement supérieur à i, la restriction de yx_0 à $[z_j, z_i]$.

Pour tout i strictement positif nous choisissons un chemin c_i de la feuille F qui relie x_0 à x_i.

Selon une construction maintenant bien connue, Cf. [1], il existe une transversale fermée orientée à $\mathcal{F}$ en x_0 dont la classe d'homotopie dans $\pi_1(X, x_0)$ est celle du lacet $x_0y.yx_j.c_j^{-1}$ pour tout entier j strictement positif; nous notons par τ_j le choix d'une telle transversale fermée orientée.

De même nous notons par τ_{ij}, pour tout couple d'entiers i et j tels que $0 < i < j$, le choix d'une transversale fermée orientée à $\mathcal{F}$ en x_0, dont la classe d'homotopie dans $\pi_1(X, x_0)$ est celle du lacet $c_j.x_jx_i.c_i^{-1}$.

Les transversales fermées introduites dans les deux alinéas précédents ont leurs classes d'homotopie dans $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ liées par de nombreuses relations.

En effet, si $j > i \geqslant 1$, la classe $[\tau_j].[\tau_{ji}]$ est la classe d'homotopie du lacet $x_0y.yx_j.c_j^{-1}.c_j.x_jx_i.c_i^{-1}$; comme pour ces valeurs de i et j, le chemin $yx_j.x_jx_i$ est homotope, à extrémités fixes, au chemin yx_i, cette classe est aussi celle de τ_i. D'où $[\tau_i] = [\tau_j].[\tau_{ji}]$.

De plus, si $k > j > i \geqslant 1$, on peut démontrer de façon analogue, que $[\tau_{ki}] = [\tau_{kj}].[\tau_{ji}]$.

Considérons la suite infinie d'égalités suivantes qui en résulte :

$$\begin{aligned}
[\tau_1] &= [\tau_1], \\
&= [\tau_2].[\tau_{2,1}], \\
&= [\tau_3].[\tau_{3,2}].[\tau_{2,1}], \\
&= \cdots \\
&= [\tau_N].[\tau_{N,N-1}] \cdots [\tau_{3,2}].[\tau_{2,1}], \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Puisque les classes $[\tau_j]$, $[\tau_{ji}]$ appartiennent toutes à $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ il suffit alors de poser $\omega = [\tau_1]$, et le lemme fondamental est démontré.

3. Énoncé et démonstration du théorème 1; corollaires.

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un transversalement orientable et transversalement de classe* C^2 *d'une variété* X *quelconque. Soit* F *une feuille de $\mathcal{F}$ telle que*

d(F, $\mathcal{F}$) est inférieur ou égal à un. Supposons que l'une des quatre hypothèses suivantes est vérifiée :

i) *la feuille* F *n'est pas captée ;*

ii) *le feuilletage* $\mathcal{F}$ *est sans holonomie ;*

iii) *le feuilletage* $\mathcal{F}$ *est transversalement analytique ;*

iv) *le feuilletage* $\mathcal{F}$ *est sans éléments évanouissants au sens de Novikov.*

Alors la feuille F *est propre ; son adhérence contient une feuille fermée ; si la feuille* F *n'est pas fermée, son enveloppe est une réunion non vide de feuilles fermées qu'aucune transversale fermée ne coupe.*

Sous les hypothèses du Théorème 1 et avec ses notations, nous avons de plus :

Remarque 1. — La feuille F est *fermée* et de sécant d'homotopie vide lorsque d(F, $\mathcal{F}$) est nul.

La feuille F est *fermée* lorsqu'il existe une transversale fermée rencontrant toutes les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$.

Remarque 2. — Rappelons le contenu du Corollaire 1 de [5] : une feuille est compacte lorsqu'elle n'est pas captée et lorsque son adhérence contient une feuille compacte.

La feuille F est donc *compacte* lorsqu'elle n'est pas captée et lorsque la variété X est compacte.

Remarque 3. — Nous constaterons plus loin sur des exemples que la conclusion du théorème 1 est optimale : en effet la feuille F n'est *pas* fermée en général.

Remarque 4. — On sait qu'une feuille F d'un feuilletage topologique sans singularités et transversalement orientable d'un ouvert $\mathcal{V}$ de S^2 est propre, et que si elle n'est pas fermée (dans $\mathcal{V}$), son enveloppe (dans $\mathcal{V}$) est une réunion non vide de feuilles fermées que ne coupe aucune transversale fermée.

Démonstration du Théorème 1. — D'après les propriétés rappelées plus haut lors de la définition du sécant d'homotopie, chacune des hypothèses du théorème 1 implique que le sécant d'homotopie du feuilletage $\mathcal{F}$ en tout point de la feuille F étudiée est sans élément-unité.

Supposons que l'une au moins des propriétés suivantes soit vérifiée :

— la feuille F n'est pas propre;
— l'enveloppe de F contient une feuille qui n'est pas fermée;
— l'enveloppe de F contient une feuille fermée qui est coupée par une transversale fermée.

Alors il existe une transversale fermée coupant F en une infinité de points.

Pour démontrer, par l'absurde, le théorème 1, il suffit donc de démontrer le lemme 4 suivant, après avoir choisi une orientation transverse de $\mathcal{F}$:

LEMME 4. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement orienté d'une variété* X *quelconque. Soit* F *une feuille de* $\mathcal{F}$ *telle que* $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ *est inférieur ou égal à un. S'il existe une transversale fermée à* $\mathcal{F}$ *rencontrant* F *en une infinité de points, le sécant d'homotopie de* $\mathcal{F}$ *en tout point de la feuille* F *a un élément-unité.*

Démonstration.

Choisissons un point x_0 dans la feuille F.

Considérons tout d'abord le cas où $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ est nul : l'existence d'une transversale fermée coupant F entraîne que $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ n'est pas vide; comme $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ est nul, $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ est réduit à l'élément-unité 1 de $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$.

Considérons maintenant le cas où $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ n'est pas nul. Soit α un générateur de $\mathrm{G}\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$.

Si α est d'ordre fini, tout élément de $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ est d'ordre fini et le semi-groupe $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ contient bien l'élément-unité 1.

Si α n'est pas d'ordre fini, tout élément de $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ s'écrit de façon unique $u = \alpha^{n(u)}$, où $n(u)$ est un entier relatif éventuellement nul. Si deux éléments u et v de $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$ ont des exposants $n(u)$ et $n(v)$ non nuls et de signes différents (supposons $n(u) > 0$ et $n(v) < 0$), nous considérons l'élément $w = v^{n(u)}.u^{|n(v)|}$ de $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$. Comme le sécant d'homotopie est un semi-groupe, w appartient à $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathcal{F})$. Mais $w = \alpha^0 = 1$.

Pour démontrer le lemme 4, nous pouvons donc supposer que tous les éléments de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ sont des puissances strictement positives d'un même élément α.

Les hypothèses du lemme 4 nous permettent d'appliquer le lemme fondamental à $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$: la classe ω obtenue peut aussi s'écrire $\alpha^{n(\omega)}$. Posons $N = n(\omega) + 1$, et appliquons le lemme fondamental: il existe N éléments u_i de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ tels que $\omega = u_1 . \ldots . u_N$; il en résulte une égalité du genre $\alpha^{n(\omega)} = \alpha^{n_1} . \ldots . \alpha^{n_N}$, où les entiers n_i sont positifs et supérieurs ou égaux à 1. Le nombre $N' = n_1 + \cdots + n_N$ est supérieur ou égal à N; donc $N' - n(\omega)$ est un entier strictement positif d'après le choix de N. Mais l'égalité précédente s'écrit aussi $1 = \alpha^{N'-n(\omega)} \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

Le lemme 4 est démontré.

Pour illustrer le théorème 1, nous en donnerons quelques conséquences dans un cas très particulier.

Dans toute la fin de ce paragraphe, X désigne une variété quelconque dont le groupe fondamental est une extension finie de Z.

Nous considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un transversalement de classe C^2 de la variété X, dont le bord est une réunion de feuilles.

COROLLAIRE 1. — *Toute feuille* F *non captée du feuilletage* $\mathcal{F}$ *de* X *est propre; ou bien elle est fermée, ou bien son enveloppe est une réunion non vide de feuilles fermées qu'aucune transversale fermée ne coupe; l'adhérence de* F *contient une feuille fermée de* $\mathcal{F}$.

Toute feuille exceptionnelle ou localement dense de $\mathcal{F}$ *est captée.*

COROLLAIRE 2. — *Supposons que le feuilletage* $\mathcal{F}$ *vérifie l'une des hypothèses suivantes:* $\mathcal{F}$ *est sans holonomie,* $\mathcal{F}$ *est transversalement analytique, ou bien encore* $\mathcal{F}$ *est sans éléments évanouissants au sens de Novikov. Alors:*

— *toute feuille de* $\mathcal{F}$ *est propre;*

— *l'enveloppe de toute feuille de* $\mathcal{F}$ *est une réunion de feuilles fermées que ne coupe aucune transversale fermée.*

Les conclusions du corollaire 2 entraînent pour le feuilletage $\mathscr{F}$ les deux propriétés suivantes, même si X *n'est pas* compacte :

— tout ensemble fermé saturé de $\mathscr{F}$ contient un ensemble fermé saturé minimal;

— les seuls ensembles minimaux de $\mathscr{F}$ sont les feuilles fermées.

Les conclusions du corollaire 2 impliquent aussi que le feuilletage possède au moins une feuille fermée. Rappelons que lorsqu'il existe de plus une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\mathscr{F}$, toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont fermées.

Les remarques concernant le théorème 1 s'appliquent évidemment aux corollaires 1 et 2.

Démonstration des corollaires 1 *et* 2. Il suffit évidemment de démontrer ces corollaires pour le feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}$ induit sur un revêtement fini $\tilde{X}$ de X. Nous pouvons donc supposer que le groupe fondamental de X est Z, et que $\mathscr{F}$ est transversalement orientable. Alors le nombre $d(F, \mathscr{F})$ associé à toute feuille F de $\mathscr{F}$ est bien défini; de plus il est inférieur ou égal à un puisque $\pi_1(X)$ est cyclique. Pour démontrer le corollaire 1 nous appliquons le théorème 1 avec l'hypothèse i); pour démontrer le corollaire 2 et les remarques qui le suivent, nous appliquons le théorème 1 avec l'une des hypothèses ii), iii), iv).

4. Quelques applications dans le cas compact.

Dans tout ce paragraphe, $\mathscr{F}$ désigne un feuilletage transversalement de classe C^2, transversalement orientable d'une variété compacte connexe X dont le bord est une réunion de feuilles de $\mathscr{F}$.

Puisque X est compacte, nous pourrons utiliser [5], par l'intermédiaire de la Remarque 2 ci-dessus, chaque fois que cela sera possible. Nous obtenons alors les corollaires suivants :

Corollaire 3. — *Une feuille* F *de* $\mathscr{F}$ *de nombre* $d(F, \mathscr{F})$ *inférieur ou égal à un qui n'est pas captée est une feuille compacte.*

Corollaire 4. — *Si* $\mathscr{F}$ *est transversalement analytique, ou sans éléments évanouissants, toute feuille* F *de* $\mathscr{F}$ *de nombre* $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ *inférieur ou égal à un, est une feuille propre ; si* F *n'est pas compacte, toute feuille de l'enveloppe de* F *est une feuille compacte.*

Corollaire 5. — *Si le groupe fondamental de* X *est une extension finie de* Z, *une feuille de* $\mathscr{F}$ *est compacte si et seulement si elle n'est pas captée. Si de plus* $\mathscr{F}$ *est sans holonomie, toute feuille de* $\mathscr{F}$ *est compacte.*

Dans le cas C^2, la conclusion de la seconde partie du corollaire 5 peut aussi être démontrée d'une façon fort différente : mais il faut alors combiner les résultats profonds sur les feuilletages sans holonomie de Sacksteder, Reeb, Tischler et Moussu.

Corollaire 6. — *Si le groupe fondamental de* X *est une extension finie de* Z, *et si* $\mathscr{F}$ *est analytique ou sans éléments évanouissants, toute feuille est propre et d'enveloppe composée de feuilles compactes qu'aucune transversale fermée ne coupe ; le feuilletage* $\mathscr{F}$ *contient au moins une feuille compacte.*

L'existence d'éléments évanouissants entraîne d'après Novikov, Cf. [1], l'existence d'une feuille compacte homéomorphe à T^2, lorsque le feuilletage étudié est de classe C^2, orientable, et de dimension deux : le corollaire 6 et la classification des surfaces compactes entraînent donc le

Corollaire 7. — *Tout feuilletage* C^2 *de codimension un d'une variété compacte de dimension trois dont le groupe fondamental est une extension finie de* Z, *contient une feuille compacte homéomorphe à* P^2, S^2, K^2 *ou* T^2.

Les feuilletages étudiés au corollaire 7 ne peuvent vraisemblablement pas posséder de feuilles compactes non homéomorphes à l'une des quatre variétés P^2, S^2, K^2, T^2. Evidemment, P^2 et K^2 ne peuvent être les feuilles d'un feuilletage orientable.

Les remarques suivantes concernent les feuilletages C^2 transversalement orientés $\mathscr{F}'$ sans éléments évanouissants d'une variété X' compacte, connexe, sans bord, de groupe fondamental Z (Cf. Corollaire 6).

1. Le feuilletage $\mathcal{F}'$ est sans holonomie si et seulement si toutes ses feuilles sont simplement connexes ou de groupe fondamental sans élément d'ordre infini; car un lacet dont la classe d'homotopie dans sa feuille est d'ordre infini est évidemment librement homotope à une transversale fermée au feuilletage et on peut appliquer le théorème 1 de [3].

S'il existe une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\mathcal{F}'$, toutes les feuilles de $\mathcal{F}'$ sont compactes d'après une remarque antérieure.

2. D'après une remarque orale de H. Rosenberg, toute feuille non compacte de $\mathcal{F}'$ est sans holonomie; on peut alors démontrer l'existence d'une feuille compacte dans $\mathcal{F}'$, par l'absurde, en utilisant les théorèmes profonds de Sacksteder sur les feuilletages sans holonomie des variétés compactes, et les résultats de Reeb, Tischler et Moussu sur les feuilletages définis par des formes fermées sur les variétés compactes : pour que $\mathcal{F}'$ n'admette aucune feuille compacte, il faut que le groupe fondamental de X' admette un quotient de la forme $Z \oplus Z$, ce qui est évidemment impossible.

Cette seconde démonstration ne fournit alors plus la structure de l'enveloppe des feuilles de $\mathcal{F}'$ et devient inopérante lorsque X' n'est plus compacte.

3. L'hypothèse faite dans le corollaire 6 est optimale, dans la mesure où

i) il est impossible que le groupe fondamental de X soit fini;

ii) lorsque le groupe fondamental de X est $Z \oplus Z$, les feuilles sont, dans certains exemples, toutes partout denses.

4. Nous poursuivrons l'étude des feuilletages rencontrés dans ce paragraphe dans un travail ultérieur.

5. Exemples et contre-exemples relatifs au théorème 1.

Les quatre affirmations suivantes montrent qu'en un certain sens, les hypothèses et les conclusions du théorème 1 sont optimales.

Pour simplifier, nous avons seulement considéré l'hypothèse i) du théorème 1 : la feuille étudiée F n'est pas captée.

Les trois premières affirmations seront illustrées par des exemples de feuilletages de variétés compactes, mais, conformément à la remarque 2 ci-dessus, la quatrième impose un exemple de feuilletage d'une variété non compacte.

1. *Il existe des feuilles* (captées) *de* $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ *inférieur ou égal à un qui sont exceptionnelles ou localement denses.*

2. *Il existe des feuilles* (captées) *de* $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ *inférieur ou égal à un qui sont propres, non fermées, et dont l'adhérence contient des feuilles non fermées.*

3. *Il existe des feuilles non captées de* $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ *égal à deux, qui ne sont pas propres et dont l'adhérence ne contient aucune feuille fermée.*

4. *Il existe des feuilles non captées de* $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ *égal à un, qui sont propres non fermées.*

Les affirmations 1 et 2 seront justifiées par la considération des exemples suivants : soit X la variété $S^2 \times S^1$ et soit $\mathscr{F}$ le feuilletage de X obtenu par tourbillonnement autour d'une normale au feuilletage produit de X. Toute feuille de $\mathscr{F}$ est de nombre $d(\mathrm{F}, \mathscr{F})$ inférieur ou égal à un, et il en sera de même de toute feuille de tout feuilletage orienté de X. A l'intérieur du tore plein obtenu, nous pouvons introduire des feuilles exceptionnelles captées, d'après H. Rosenberg et R. Roussarie, Comm. Math. Helvetici, 1970, 45, p. 517-523, ou des feuilles localement denses par l'insertion d'un exemplaire de $T^2 \times I$, muni d'un feuilletage tangent au bord dont les feuilles intérieures sont planes et partout denses. A l'intérieur du tore plein obtenu, nous pouvons introduire aussi des feuilles propres dont l'adhérence ne contient aucune feuille compacte, d'après B. Raymond.

L'affirmation 3 est justifiée par la considération d'un feuilletage analytique $\mathscr{A}$ du tore T^2 dont toutes les feuilles sont partout denses. Toute feuille F de $\mathscr{A}$ est de nombre $d(\mathrm{F}, \mathscr{A})$ égal à deux, et n'est pas captée.

L'affirmation 4 résulte de la considération d'un voisinage bien choisi d'un cycle-limite au sens de Poincaré γ d'un feuilletage analytique $\mathscr{A}'$ de $S^1 \times R$: en retirant un point

x_0 de γ, ou mieux une semi-normale issue de x_0, on fait apparaître dans un nouveau feuilletage $\mathscr{A}''$ des feuilles P, non fermées, non captées, (propres), telles que $d(\mathrm{P}, \mathscr{A}'')$ est exactement égal à un.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HAEFLIGER, Travaux de Novikov sur les feuilletages, Séminaire N. Bourbaki, février 1968, exp. 339, 12 p.

[2] C. LAMOUREUX, Sur les ensembles minimaux. Journées trajectoriennes, Strasbourg, juin 1970, XII.

[3] C. LAMOUREUX, Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces, Differentialtopologie : speziell Blätterungen, Oberwolfach, mai 1971.

[4] C. LAMOUREUX, Une condition pour qu'une feuille soit propre et ait une enveloppe composée de feuilles fermées. Comptes Rendus, 274, 1972, série A, p. 31-34.

[5] C. LAMOUREUX, Quelques conditions d'existence de feuilles compactes. A paraître.

Manuscrit reçu le 15 décembre 1973.
accepté par G. Reeb

C. LAMOUREUX,
5, rue Broussais,
75014 Paris.