JEAN-PIERRE ROSAY

Sur les algèbres uniformes ayant mêmes parties réelles que certaines algèbres

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 3 (1974), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 1-14

SUR LES ALGÈBRES UNIFORMES AYANT MÊMES PARTIES RÉELLES QUE CERTAINES ALGÈBRES

par Jean-Pierre ROSAY

Pour tout espace topologique compact X on note $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(X)$) l'algèbre de toutes les fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$), munie de la norme de la convergence uniforme sur X. Pour toute algèbre uniforme A on notera Re A l'espace vectoriel des parties réelles des éléments de A. Pour tout ouvert U borné de $\mathbf{C}$ on notera ∂U la frontière de U et $A(U)$ l'algèbre uniforme sur ∂U constituée par les éléments de $\mathcal{C}(\partial U)$ admettant un prolongement continu sur $\overline{U}$ dont la restriction à U soit analytique.

On appelle domaine circulaire de connectivité n tout domaine de $\mathbf{C}$ formé du disque unité ouvert privé de $n-1$ disques fermés deux à deux disjoints tous inclus dans le disque unité ouvert.

PROPOSITION 1. – *Soit n un entier > 2. Soit* U *un domaine circulaire de connectivité n. Soit* B *une algèbre uniforme sur* ∂U *telle que* $\operatorname{Re} B = \operatorname{Re} A(U)$. *Il existe un domaine circulaire* U' *de même connectivité et* φ *un homéomorphisme de* ∂U *sur* $\partial U'$ *indéfiniment dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas tels que* $B = A(U') \circ \varphi$.

Le cas $n = 1$ (i.e. $A(U)$ est l'algèbre du disque) a été traité par J. O'Connell [2]. Les idées de son article sont reprises ici. Le cas $n = 2$ est complètement traité à la fin de cet article. De même que le cas $n = 3$ pour lequel on montre que l'on peut prendre $U' = U$ et tous les homéomorphismes φ permis sont décrits.

1. Préliminaire. Un lemme sur les algèbres de fonctions.

Le lemme suivant n'est pas original. Il emprunte des idées plusieurs fois utilisées par J. Wermer et il se trouve aussi presque tel quel (au moins sa première partie) dans l'article de J. O'Connell [2].

On note D le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{T}$ sa frontière. Soient X un espace topologique compact et $\mathfrak{A}$ une algèbre uniforme sur X. Soit un compact $Y \subset X$ tel qu'il existe une mesure orthogonale à $\mathfrak{A}$ dont le support contienne Y. Soit $f \in \mathfrak{A}$ un élément de norme 1 dont la restriction à Y est un homéomorphisme sur $\mathbf{T}$. Pour tout $g \in \mathfrak{A}$ soit g^* l'élément de $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ défini par $g^*(f(x)) = g(x)$ pour tout $x \in Y$. Soit S l'enveloppe polynomiale de l'image par f du complémentaire de Y (i.e. l'ensemble des $\zeta \in \mathbf{C}$ tel que : $|P(\zeta)| \leqslant \sup\limits_{x \in X - Y} |P(f(x))|$ pour tout polynôme P).

LEMME. – *Pour tout $g \in \mathfrak{A}$, g^* admet un prolongement unique $\widetilde{g}^*$ sur* $\mathbf{T} \cup (D - S)$, *continu en tout point de* $\overline{D} - S$ *et dont la restriction à* $D - S$ *est analytique.*

Si h est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbf{C}$ *et si $h(f) = \zeta \in \overline{D} - S$, pour tout $g \in \mathfrak{A}$ $h(g) = \widetilde{g}^*(\zeta)$.*

Démonstration. – Soit μ une mesure orthogonale à $\mathfrak{A}$ dont le support contienne $f^{-1}(\mathbf{T} - S)$. Pour tout $g \in \mathfrak{A}$ soit ψ_g la fonction définie sur $D - S$ par

$$\psi_g(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{g(x)}{f(x) - \zeta}\, d\mu(x) \qquad \text{pour tout} \qquad \zeta \in D - S\ .$$

Notons μ^* la mesure sur $\mathbf{T}$ image par f de la restriction de μ à Y. D'après le théorème de F. et M. Riesz et par un argument de balayage sur la mesure image de μ par f, μ^* est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T} - S$ c'est-à-dire $\mu^* \mid \mathbf{T} - S = h(e^{i\theta})\, dz$ avec $h \in L^1$.

On montre que pour presque tout $e^{i\theta} \in \mathbf{T} - S$ $\psi_g(\zeta)$ tend vers $h(e^{i\theta})\, g^*(e^{i\theta})$ quand ζ tend vers $e^{i\theta}$ non tangentiellement (on utilise le fait que $\psi_g(\zeta) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_X \frac{g(x)}{f(x) - \zeta}\, d\mu(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{g(x)}{f(x) - \dfrac{1}{\overline{\zeta}}}\, d\mu(x)$, car cette dernière intégrale est nulle, et une propriété classique de la transformée de Cauchy).

Pour tout $\zeta \in D - S$ tel que $\Psi_1(\zeta) \neq 0$ on pose $\widetilde{g}^*(\zeta) = \dfrac{\psi_g(\zeta)}{\psi_1(\zeta)}$ ·

La fonction ψ_1 a en certains points de chaque composante connexe de $\mathbf{T} - \mathrm{S}$ une limite non tangentielle non nulle. Donc d'après un théorème de Privalov, en presque tout point de $\mathbf{T} - \mathrm{S}$ ψ_1 a une limite non tangentielle non nulle. Donc en presque tout point de $\mathbf{T} - \mathrm{S}$ $\widetilde{g}^*$ a une limite non tangentielle égale à g^*. D'après le même théorème de Privalov il est immédiat que si g et $g_1 \in \mathfrak{A}$, $\widetilde{g}^* \widetilde{g}_1^* = (\widetilde{gg_1})^*$. Les homomorphismes d'une algèbre de Banach dans $\mathbf{C}$ étant de norme $\leqslant 1$ on en déduit que $\widetilde{g}^*$ est une fonction bornée et donc se prolonge aux zéros de ψ_1. On en déduit immédiatement la première partie du Lemme. Il est évident que le prolongement $\widetilde{g}^*$ obtenu ne dépend pas de la mesure μ choisie, c'est essentiellement ce qui va servir pour démontrer la seconde partie.

Soit maintenant h un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbf{C}$ tel que $h(f) = \zeta \in \overline{\mathrm{D}} - \mathrm{S}$. Soit $g \in \mathfrak{A}$. Montrons que $f(g) = \widetilde{g}^*(\zeta)$. C'est facile si $\zeta \in \mathbf{T} - \mathrm{S}$, nous supposons donc que $\zeta \in \mathrm{D} - \mathrm{S}$. Soit ν une mesure représentative de l'homomorphisme h. Considérons la mesure $\mu = (f - \zeta)\,\nu$. C'est une mesure orthogonale à $\mathfrak{A}$.

Soit 0 la composante convexe de $\mathrm{D} - \mathrm{S}$ contenant ζ, $\partial\, 0 \cap (\mathbf{T} - \mathrm{S})$ contient un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{T}$. Il est immédiat que l'image réciproque par f de cet intervalle est contenue dans le support de la mesure μ. Cette propriété de μ suffit pour que l'on puisse déduire que pour tout $\zeta_1 \in 0$ on a :

$$\widetilde{g}^*(\zeta_1) = \frac{\displaystyle\int_X \frac{g(x)}{f(x) - \zeta_1}\, d\mu(x)}{\displaystyle\int_X \frac{1}{f(x) - \zeta_1}\, d\mu(x)}$$

En effet, pour les mêmes raisons que précédemment et toujours en vertu du théorème de Privalov, le membre de droite définit lui aussi une fonction analytique bornée sur 0 dont g^* est la valeur au bord sur $\partial\, 0 \cap (\mathbf{T} - \mathrm{S})$.

Il suffit alors d'utiliser le fait que $\mu = (f - \zeta)\,\nu$ et que ν est représentative de h pour obtenir que $\widetilde{g}^*(\zeta) = h(g)$.

Et ceci achève la démonstration du Lemme.

2. Démonstration de la proposition 1.

On note $X_1, \ldots, X_n$ les composantes connexes de ∂U, X_1 désignant le cercle unité de $\mathbf{C}$. Le fait que n est différent de 2 n'interviendra qu'après le Lemme 2' ci-après.

Remarques. –

i) Soit $u \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$. Pour que $u \in \operatorname{Re} A(U)$ il faut et il suffit :

– que le conjugué harmonique (fonction multivoque) de u soit continu jusqu'à la frontière, c'est une condition locale de régularité sur u.

– que les périodes du conjugué harmonique de u soient nulles. D'où l'on déduit que pour que $u \in \operatorname{Re} A(U)$ il faut et il suffit :

a) que u ait la propriété locale de régularité mentionnée.

b) que $u \in \overline{\operatorname{Re} A(U)}$ (la fermeture de $\operatorname{Re} A(U)$ dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$).

ii) Il est bien connu que si U est de connectivité n $\overline{\operatorname{Re} A(U)}$ est de codimension $n-1$ dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$.

iii) Des deux remarques précédentes il résulte facilement qu'il existe $k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$ tels que la fonction $u \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$, définie par $u(e^{i\theta}) = \cos\theta$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et $u(x) = k_i$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ et tout $x \in X_i$, appartienne à Re A.

Notation. – Pour toute la suite, soit $u \in \operatorname{Re} A(U)$ une fonction constante sur chaque X_i, $i \in \{2, \ldots, n\}$, et dont la restriction à X_1 soit la fonction $\cos\theta$. Et soit $f \in B$ une fonction telle que $\operatorname{Re} f = u$.

Pour tout $i \{1, \ldots, n\}$ on note Λ_i l'image de X_i par f (pour $i > 1$ c'est un segment de droite vertical ou un point).

LEMME 1. – *La restriction de f à X_1 est un homéomorphisme sur Λ_1. Pour tout $i \in \{2, \ldots, x\}$, Λ_i est contenu dans la fermeture de la composante connexe bornée du complémentaire de Λ_1 ; et si Λ_i est réduit à un point, ce point n'appartient pas à Λ_1.*

Démonstration du Lemme 1. – Soit Λ l'union des Λ_i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Supposons que la restriction de f à X_1 ne soit pas un homéomorphisme sur Λ_1, soit alors $\alpha \in \Lambda_1$ dont l'image réciproque dans X_1 contient deux points distincts. Décomposons Λ en $\Lambda^+ \cup \Lambda^-$, Λ^+ (resp. Λ^-) étant l'ensemble des $\zeta \in \Lambda$ tels que $\operatorname{Re} \zeta \geqslant \operatorname{Re} \alpha$ (resp. $\operatorname{Re} \zeta \leqslant \operatorname{Re} \alpha$). Vu que sur Λ_1 $\operatorname{Re} f = \cos \theta$, $\Lambda_1 \cap \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \{\alpha\}$. Il est immédiat, par application du théorème de Mergeylian, que Λ^+ est un ensemble pic pour $P(f(\partial U))$ (l'algèbre uniforme sur $f(\partial U)$ engendrée par les polynômes) et donc que $f^{-1}(\Lambda^+)$ est un ensemble pic pour B. Mais B et A(U) ont mêmes ensembles pics (cf. [4]) or il est exclu que $f^{-1}(\Lambda^+)$, qui contient un intervalle sur X_1, soit un ensemble pic pour A(U). C'est la contradiction souhaitée.

Le fait que Λ_i pour $i > 1$ soit contenu dans la fermeture de la composante connexe bornée du complémentaire de Λ_1 s'obtient par les mêmes arguments. Ainsi que le fait que si Λ_i est réduit à un point ce point n'appartient pas à Λ_1.

Notation. — Pour tout $g \in B$ on notera g^* la fonction continue sur Λ_1 définie par $g^*(f(x)) = g(x)$ pour tout $x \in X_1$. On note Δ le complémentaire de l'union des Λ_i dans la composante connexe bornée du complémentaire de Λ_1, et naturellement $\overline{\Delta}$ la fermeture de Δ.

LEMME 2. — *Pour tout $g \in B$, g^* admet un prolongement unique* (noté dans la suite $\widetilde{g^*}$) *continu sur* $\overline{\Delta} - \bigcup_{i=2}^{n} \Lambda_i$ *dont la restriction à* Δ *soit analytique.*

Soit h un homomorphisme de B *dans* **C**, *posons* $h(f) = \zeta$; *si* $\zeta \in \overline{\Delta} - \bigcup_{i=2}^{n} \Lambda_i$ *pour tout* $g \in B$ *on a* : $h(g) = \widetilde{g}^*(\zeta)$.

Démonstration du Lemme 2. — Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme général sur les algèbres de fonctions cité ci-dessus, auquel on se ramène en composant f et une transformation conforme de la composante connexe bornée du complémentaire de Λ_1 sur D. Puisque B a mêmes parties réelles que A(U) il existe des mesures orthogonales à B, réelles dont le support contient X_1.

LEMME 3. — *On peut munir un voisinage de* ∂U *dans le spectre de l'algèbre* B *d'une structure de surface de Riemann à bord ayant* ∂U *pour bord de telle sorte que pour tout* $g \in B$, *le transformé de Gelfand de* g *soit analytique sur cette variété.*

Démonstration du Lemme 3. – Au voisinage du point 1 c'est clair d'après le Lemme 2 car il résulte immédiatement du Lemme 1 que $f(1) \notin \bigcup_{i=2}^{n} \Lambda_i$. Le point 1 ne jouant aucun rôle particulier dans ∂U, on en déduit le Lemme.

Notations. – Nous ne pouvons exclure à priori le cas où certains Λ_i seraient réduits à un point. Quitte à changer la numérotation des X_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ nous supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que X_i ne soit pas réduit à un point si et seulement si $i \leqslant i_0$.

Pour tout $\zeta \in \Delta$ soit h_ζ l'unique homomorphisme de B dans C tel que $h(f) = \zeta$.

LEMME 4. – *Les ensembles* Λ_i *sont disjoints deux à deux pour* $i \in \{1, \ldots, i_0\}$. *Pour tout* $i \in \{2, \ldots, i_0\}$ *il existe un recouvrement de* X_i *par deux intervalles fermés* X_i' *et* X_i'' *d'intersection réduite à deux points tel que : la restriction de* f *à* X_i' *et la restriction de* f *à* X_i'' *sont des homéomorphismes sur* Λ_i, *et pour tout* $x \in X_i'$ (*resp.* X_i'') *si* $\zeta \in \Delta$ *et* ζ *tend vers* $f(x)$ *avec* $\operatorname{Re} \zeta \geqslant \operatorname{Re} f(x)$ (*resp.* $\operatorname{Re} \zeta \leqslant \operatorname{Re} f(x)$) *alors* h_ζ *tend vers* x.

Indications sur la démonstration du Lemme 4.

Notre démonstration est une succession de petites remarques utilisant constamment les lemmes précédents.

Il suffira pour indiquer la méthode de traiter deux points de la démonstration.

i) Montrons que si i et $j \in \{2, \ldots, i_0\}$ $i \neq j$ alors $\Lambda_i \cap \Lambda_j$ est vide. Supposons en effet que $\Lambda_i \cap \Lambda_j$ contienne un point ζ. Nous supposerons que ζ n'est pas une extrémité de Λ_i ni de Λ_j (cas pour lesquels nous donnerons une indication). Alors ζ a au moins quatre prédécesseurs par f dans $X_i \cup X_j$, soient x_1, x_2, x_3 et x_4. Soient V_1, V_2, V_3, V_4 quatre voisinages disjoints deux à deux de ces points dans le spectre de B. Du fait qu'un voisinage de $X_i \cup X_j$ dans le spectre de B est une surface de Riemann avec $X_i \cup X_j$ pour bord, que f n'est constante ni sur X_i ni sur X_j, que la partie réelle de f est constante sur X_i et X_j il est immédiat que l'image par $\hat{f}$ (le transformé de Gelfand de f) de chacun de ces voisinages contient une demi-boule centrée en ζ. Il est alors évident qu'il existerait h et h' distincts dans le spectre de B et tels cependant que $h(f) = h'(f)$ et $h(f) \in \Delta$ ce qui est contraire au Lemme 2. Si ζ est, par exemple, une extrémité de Λ_i, pour tout $x \in X_i$ tel que $f(x) = \zeta$ et tout voisinage V de x dans le spectre de B $\hat{f}(V)$ contient toute une boule centrée en ζ. Et ceci permet de conclure comme précédemment.

ii) On montre par le même genre d'arguments que pour tout $i \in \{2, \ldots, i_0\}$ tout ζ dans (l'intervalle) Λ_i a une image réciproque dans X_i réduite à deux points, sauf si ζ est une extrémité de Λ_i auquel cas cette image réciproque est réduite à un point. Soit $x \in X_i$ tel que $f(x)$ ne soit pas une extrémité de Λ_i, il existe un voisinage de x dans le spectre de B dont l'image par $\hat{f}$ est entièrement située soit dans l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} f(x)$ soit dans l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} f(x)$. Supposons que ce soit le premier des cas qui se présente et montrons alors que si $\zeta \in \Delta$ et ζ tend vers $f(x)$ avec $\operatorname{Re} \zeta \geqslant \operatorname{Re} f(x)$ alors h_ζ tend vers x. En effet, soit V_x un voisinage de x dans le spectre de B. Il existe $r > 0$ telle que l'ensemble des $\zeta \in \mathbf{C}$ vérifiant $\| \zeta - f(x) \| \leqslant r$ et $\operatorname{Re} \zeta \geqslant \operatorname{Re} f(x)$ soit inclus dans $\hat{f}(V_x)$. Donc pour tout $\zeta \in \Delta$ suffisamment proche de $f(x)$ et de partie réelle $\geqslant \operatorname{Re} f(x)$, $h_\zeta \in V_x$.

Notation. – On notera Δ' le complémentaire de $\bigcup_{i=2}^{i_0} \Lambda_i$ dans la composante connexe bornée du complémentaire de Λ_1. Soit U$'$ un domaine circulaire de connectivité i_0 conformément équivalent à Δ', cf. par exemple [3] p. 169, et soit T une transformation conforme de Δ' sur U$'$.

Le produit de composition $T \circ \hat{f}$ est défini au moins sur $(\hat{f})^{-1}(\Delta)$. Le lemme 4 montre que l'on peut prolonger par continuité cette application sur $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ obtenant ainsi un homéomorphisme de $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ sur $\partial U'$. Et on peut donner la version suivante améliorée du Lemme 2 (après élimination des singularités non essentielles) :

LEMME 2$'$. – *Il existe un homéomorphisme φ de l'union des X_i pour $i \in \{1, \ldots, i_0\}$ sur $\partial U'$ tel que pour tout $g \in B$ $g \circ \varphi^{-1} \in A(U')$.*

Fin de la démonstration de la proposition. – Il ne nous faut d'abord démontrer que $i_0 = n$, au moins si $n \neq 2$. Si $i_0 < n$, toute fonction continue sur $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ est limite uniforme sur $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ de restrictions de fonctions de $A(U)$. Donc toute fonction continue réelle sur $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ est limite uniforme sur $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$ de restrictions de parties réelles d'éléments de B. Ceci est en contradiction avec le Lemme 2′ sauf si $i_0 = 1$. Supposons donc que $i_0 = 1$ et montrons que ceci est absurde si $n > 2$. Les Λ_i sont alors tous réduits à un point pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, ils sont deux à deux disjoints sinon il est facile de voir que la codimension de la fermeture de Re B dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$ serait $< n - 1$. On en déduit que les fermetures Zariski, dans le spectre de B, des X_i pour $i \in \{2, \ldots, n\}$ sont deux à deux disjointes (on appelle fermeture Zariski de X_i l'ensemble des éléments h de spectre de B tels que $h(g) = 0$ pour tout $g \in B$ nul sur X_i – ici on considèrera les fonctions $g_i = f - f(X_i)$).

Notons $f^{(2)}$ un élément de B dont la partie réelle soit constante sur chaque X_i, $i \neq 2$ et tel que, α désignant le centre du cercle X_2 et ρ son rayon, $\operatorname{Re} f(\alpha + \rho e^{i\theta}) = \cos\theta$ pour tout $\theta \in [0\ 2\pi[$. Notons, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\Lambda_i^{(2)}$ l'image de X_i par $f^{(2)}$.

Tous les lemmes précédents s'énoncent aussi bien avec $f^{(2)}$ qu'avec f, les rôles joués par X_1 et X_2 étant permutés. Du Lemme 2′ il ressort que $\Lambda_1^{(2)}$ est réduit à un point, car sinon f serait constante sur X_1. De ce qui précède, on déduit que les fermetures Zariski des X_i sont deux à deux disjointes pour $i \in \{1\} \cup \{3, \ldots, n\}$. Le même argument sur X_3 au lieu de X_2 montre que les fermetures Zariski des X_i sont deux à deux disjointes pour $i \in \{1, 2\} \cup \{4, \ldots, n\}$. Mais ici, et ici seulement, nous avons utilisé le fait que $n > 2$. Et nous avons obtenu que les X_i ont des fermetures Zariski deux à deux disjointes pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ceci est rendu impossible par le théorème des idempotents de Silov. Et par suite on a bien $i_0 = n$.

Dans ce qui suit U′ est donc un domaine circulaire de même connectivité que U et φ un homéomorphisme de ∂U sur $\partial U'$ tel que $B \subset A(U') \circ \varphi$. Nous allons montrer que φ est indéfiniment dérivable et que $B = A(U') \circ \varphi$.

Considérons E (resp. E′) l'espace vectoriel des mesures réelles sur ∂U (resp. $\partial U'$) orthogonales à l'algèbre $A(U)$ (resp. $A(U')$) ; E est donc l'espace vectoriel des mesures réelles sur ∂U orthogonales à B.

Tout élément μ de E (resp. E') s'écrit $\mu = h(z)\,|dz|$ où h est une fonction indéfiniment dérivable sur l'union des X_i. En effet μ est une mesure réelle orthogonale à l'algèbre du disque, par balayage sur X_1 on obtient donc la mesure nulle et ceci démontre que $\mu\,|\,X_1$ est de la forme $h(z)\,|dz|$ où h est une fonction indéfiniment dérivable sur X_1 ; il en est évidemment de même pour $X_2, \ldots, X_n$.

D'autre part, en tout point $x \in \partial U$ il existe une mesure réelle orthogonale à A(U) de la forme $h(z)\,|dz|$ telle que $h(x) \neq 0$ (et même chose pour U' évidemment).

Montrons le par exemple si $x \in X_1$. Considérons une transformation conforme de U sur un domaine délimité par deux cercles et des arcs de cercle tous centrés en 0, et tel que l'image de X_1 soit l'un des deux cercles. La mesure $i\,\dfrac{dz}{z}$ sur le bord convenablement orienté de cet ouvert (les arcs de cercle sont comptés deux fois, une fois dans chaque sens) fournit, via la transformation conforme, une mesure réelle sur ∂U orthogonale à A(U) ayant la propriété souhaitée.

Puisque $B \subset A(U') \circ \varphi$ $E \supset E' \circ \varphi$. Mais E et E' ont même dimension donc $E = E' \circ \varphi$. De ce qui précède on déduit que φ est un homéomorphisme indéfiniment dérivable de ∂U sur $\partial U'$ dont la dérivée ne s'annule pas. Soit alors $l \in A(U')$ montrons que $l \circ \varphi \in B$. Puisque $E = E' \circ \varphi$ $\mathrm{Re}(l \circ \varphi)$ appartient à la fermeture de Re A(U) dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$; d'autre part d'après un résultat de O'Connell [2], φ étant un homéomorphisme indéfiniment dérivable dont la dérivée ne s'annule pas, le conjugué harmonique de $\mathrm{Re}\,(l \circ \varphi)$ est continu jusqu'à la frontière de U. Donc d'après les remarques du début $\mathrm{Re}\,(l \circ \varphi) \in \mathrm{Re}\,A(U)$. Donc il existe $g \in B$ telle que $\mathrm{Re}\,g = \mathrm{Re}\,(l \circ \varphi)$, d'où $\mathrm{Re}\,g \circ \overline{\varphi}^1 = \mathrm{Re}\,l$ et puisque $g \circ \overline{\varphi}^1$ et $l \in A(U')$ $g = l \circ \varphi +$ constante. Par suite $l \circ \varphi \in B$ et ceci démontre l'autre inclusion $B \supset A(U') \circ \varphi$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

3. Domaines de connectivité 3.

Soit U un domaine circulaire de connectivité 3 dont la frontière ∂U est constituée de trois cercles disjoints deux à deux X_1, X_2, X_3 tous centrés sur l'axe réel, X_1 désignant toujours le cercle unité de **C** et X_2 étant "sur la droite" de X_3. Remarquons que tout domaine circulaire de connectivité 3 est conformément équivalent à un domaine de ce type.

PROPOSITION 2 (avec les notations ci-dessus). – *Si* B *est une algèbre uniforme sur* ∂U *telle que* $\operatorname{Re} B = \operatorname{Re} A(U)$ *il existe un homéomorphisme* φ *de* ∂U *sur lui-même, dont pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$ *la restriction à* X_i *soit l'identité ou la symétrie par rapport à l'axe réel, tel que* $B = A(U) \circ \varphi$.

Réciproquement pour tout homéomorphisme φ *du type décrit* $\operatorname{Re} A(U) = \operatorname{Re} A(U) \circ \varphi$.

Démonstration. – Commençons par quelques remarques sur E l'espace vectoriel de dimension 2 des mesures réelles sur ∂U orthogonales à $A(U)$ (ces remarques se généralisent immédiatement pour la plupart au cas des domaines de connectivité quelconque).

Pour tout r et $\rho \in]0\ 1[$, $r < \rho$, et tout $\alpha \in]0\ \pi[$. Soit $D^{\alpha}_{r,\rho}$ le domaine borné de $\mathbf{C}$ dont la frontière est constituée de $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_r$ les cercles centrés en 0 de rayons respectifs 1 et r et de $\mathbf{T}^{\alpha}_{\rho}$ l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| = \rho$ et $\arg |z| \leqslant \alpha$.

Soit τ (resp. τ_1) une transformation conforme de U sur un domaine $D^{\alpha}_{r,\rho}$ (resp. $D^{\alpha_1}_{r_1,\rho_1}$) réelle sur l'axe réel, et telle que $\tau(X_1) = \mathbf{T}_1$, $\tau(X_2) = \mathbf{T}^{\alpha}_{\rho}$, $\tau(X_3) = \mathbf{T}_r$ (resp. $\tau_1(X_1) = \mathbf{T}^{\alpha_1}_{\rho_1}$, $\tau_1(X_2) = \mathbf{T}_1$, $\tau_1(X_3) = \mathbf{T}_{r_1}$). Pour obtenir l'existence de τ (et τ_1) il suffit partant d'une transformation conforme T de U sur un domaine $D^{\alpha_0}_{r_0,\rho_0}$ de poser

$$\tau(z) = \sqrt{T(z)\, \overline{T(\bar{z})}}$$

(a posteriori $\tau = T$).

Comme noté précédemment la mesure $\dfrac{dz}{iz}$ sur le bord de $D^{\alpha}_{r,\rho}$ (resp. $D^{\alpha_1}_{r_1,\rho_1}$) convenablement compté fournit transportée sur ∂U par τ (resp. τ_1) une mesure μ (resp. μ_1) réelle orthogonale à $A(U)$. On a : $\mu(X_1) = 2\pi$, $\mu(X_2) = 0$, $\mu(X_3) = -2\pi$, $|\mu|(X_2) = 2\alpha$, et de même $\mu_1(X_1) = 0$, $\mu_1(X_2) = 2\pi$, $\mu_1(X_3) = -2\pi$, $|\mu_1|(X_1) = 2\alpha_1$.

Ceci montre que les mesures μ et μ_1 sont linéairement indépendantes donc engendrent E. Pour tous réels a et b il existe ν unique

$\in$ E tel que $\nu(X_1) = a$ et $\nu(X_2) = b$ (ce qui donne une définition intrinsèque de μ et μ_1).

Sur X_1 il y a deux points particuliers, ce sont ceux où la dérivée de la mesure μ_1 s'annule. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe réel. Remarquons enfin que la mesure μ_1 est négative (resp. positive) au voisinage de $+1$ (resp. -1).

Soit, en accord avec la proposition 1, U$'$ un domaine circulaire de connectivité 3 dont la frontière U$'$ est constituée de trois cercles disjoints deux à deux $X'_1\, X'_2\, X'_3$ tous centrés sur l'axe réel, X'_1 désignant le cercle unité de C, X'_2 étant "sur la droite" de X'_3 et φ un homéomorphisme de ∂U sur $\partial U'$ tel que $B = A(U') \circ \varphi$ et $\varphi(X_i) = X'_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Soit τ (resp. τ') une transformation conforme de U (resp. U$'$) sur un domaine $D^{\alpha}_{r,\rho}$ (resp. $D^{\alpha'}_{r',\rho'}$) réelle sur l'axe réel et avec $\tau(X_1) = T_1$ $\tau(X_2) = T^{\alpha}_{\rho}$ $\tau(X_3) = T_r$ et $\tau'(X'_1) = T_1$ $\tau'(X'_2) = T^{\alpha'}_{\rho'}$ $\tau'(X'_3) = T_{r'}$. Posons $\Phi = \tau' \circ \varphi$.

Du fait que les mesures réelles orthogonales à A(U) et A(U$'$) se correspondent par φ on voit que pour tout $z \in \partial U$ $\arg \Phi(z) = \pm \arg \tau(z)$ et que $\alpha' = \alpha$. La fonction nulle sur X_1 et égale sur X_2 (resp. X_3) à $c_2 \operatorname{Re}\left(\dfrac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\right)$ $\left(\text{resp. } c_3 \operatorname{Re} \dfrac{\tau(z)}{|\tau(z)|}\right)$ appartient à Re A(U) si et seulement si $\dfrac{c_2}{c_3} = \dfrac{\rho - \frac{1}{\rho}}{r - \frac{1}{r}}$ (c'est alors la partie réelle d'un multiple de $\tau(z) - \dfrac{1}{\tau(z)}\Big)$. On en déduit que $\dfrac{\rho - \frac{1}{\rho}}{r - \frac{1}{r}} = \dfrac{\rho' - \frac{1}{\rho'}}{r' - \frac{1}{r'}}$. Mais de même intervertissant les rôles de X_1 et X_3 que $\dfrac{\frac{r}{\rho} - \frac{\rho}{r}}{r - \frac{1}{r}} = \dfrac{\frac{r'}{\rho'} - \frac{\rho'}{r'}}{r' - \frac{1}{r'}}$. Et cela montre que $r = r'$ et $\rho = \rho'$. Donc on pouvait prendre U$'$ = U. Que φ soit du type décrit dans l'énoncé de la proposition découle du fait que $\arg \Phi(z) = \pm \arg \tau(z)$ pour tout $z \in \partial U$.

La partie réciproque de la proposition est immédiate à partir de la remarque suivante : si $u \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\partial U)$ et si v est le conjugué harmonique de u, le conjugué harmonique de $u(\overline{z})$ est $-v(\overline{z})$ et a même période que v.

4. Domaines de connectivité 2.

Adoptons une présentation légèrement différente pour les algèbres A(U) : Dans tout ce qui suit $X = \mathbf{T} \times \{0\ 1\}$, $\mathbf{T}$ désignant le cercle unité de $\mathbf{C}$ On définit de la façon suivante les algèbres uniformes sur X, A_r pour $0 \leqslant r < 1$:

Pour tout $r \in]0\ 1[$ si $f \in \mathcal{C}(X)$ $f \in A_r$ si et seulement si il existe une fonction F continue sur l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $r \leqslant |z| \leqslant 1$ et dont la restriction à l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $r < |z| < 1$ soit analytique telle que pour tout $\theta \in [0\ 2\pi[$

$$f(e^{i\theta}, 0) = F(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad f(e^{i\theta}, 1) = F(re^{i\theta}) .$$

On définit A_0 par : si $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \in A_0$ si et seulement si $f(z, 0)$ et $f(z, 1)$ comme fonctions de z appartiennent à l'algèbre du disque et $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, 0) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, 1) \frac{d\theta}{2\pi}$. Le spectre de A_0 consiste donc de deux disques dont les centres sont identifiés.

Les algèbres A_r ont toutes les mêmes parties réelles.

PROPOSITION 3. — (Avec les notations ci-dessus).

Soit $r \in [0\ 1[$ *et soit* B *une algèbre uniforme sur* X *telle que* $\operatorname{Re} B = \operatorname{Re} A_r$. *Il existe* $r' \in [0\ 1[$ α_1 *et* $\alpha_2 \in [0\ 2\pi[$ *tels que* $B = A_{r'} \circ \varphi$, φ *étant un homéomorphisme de* X *sur lui-même tel que :*

$$\varphi(e^{i\theta}, 0) = (e^{i(\alpha_1 + \theta)}, 0) \textit{ pour tout } \theta \in [0\ 2\pi[$$

ou bien $\quad \varphi(e^{i\theta}, 0) = (e^{i(\alpha_1 - \theta)}, 0)$ *pour tout* $\theta \in [0\ 2\pi[$,

et de même $\varphi(e^{i\theta}, 1) = (e^{i(\alpha_2 + \theta)}, 1)$ *pour tout* $\theta \in [0\ 2\pi[$

ou bien $\quad \varphi(e^{i\theta}, 1) = (e^{i(\alpha_2 - \theta)}, 1)$ *pour tout* $\theta \in [0\ 2\pi[$.

Réciproquement, pour tout r *et* $r' \in [0\ 1[$ *et tout homéomorphisme* φ *de* X *sur lui-même du type ci-dessus* $\operatorname{Re} A_r = \operatorname{Re}(A_{r'} \circ \varphi)$.

Démonstration. – Quel que soit $r \in [0 \ 1[$ les mesures sur X réelles et orthogonales à A_r sont les multiples de la mesure dont les restrictions sont $d\theta$ sur $\mathbf{T} \times \{0\}$ et $-d\theta$ sur $\mathbf{T} \times \{1\}$.

De là, la partie réciproque de la proposition est triviale.

Reprenons la démonstration de la proposition 1 au Lemme 2′ X_1 étant remplacé ici par $T \times \{0\}$ et X_2 par $\mathbf{T} \times \{1\}$. Si $i_0 = 2$ il existe un homéomorphisme φ de X sur lui-même et $r' \in]0 \ 1[$ tel que $B = A_{r'} \circ \varphi$ (que $i_0 = n$ est la seule chose, utilisant le fait que $n > 2$, qui ait servi pour finir la démonstration de la proposition 1). Que φ soit du type décrit est immédiat car φ laisse invariantes les mesures réelles orthogonales à A_r. Examinons donc le cas $i_0 = 1$. Dans ce cas il existe f_0 et $f_1 \in B$ constantes et égales à 0 respectivement sur $\mathbf{T} \times \{1\}$ et $\mathbf{T} \times \{0\}$ et dont les restrictions respectivement à $\mathbf{T} \times \{0\}$ et $\mathbf{T} \times \{1\}$ sont des homéomorphismes sur T. Soit φ l'homéomorphisme de X sur lui-même défini par :

$$\varphi(e^{i\theta}, 0) = (f_1(e^{i\theta}, 0), 0) \quad \text{et} \quad \varphi(e^{i\theta}, 1) = (f_2(e^{i\theta}, 1), 1)$$

pour tout $\theta \in [0 \ 2\pi[$. Il est immédiat que $A_0 \circ \varphi \subset B$. D'où on déduit que φ est du type décrit dans l'énoncé et par suite que $\mathrm{Re}\, A_0 \circ \varphi = \mathrm{Re}\, B$ et donc que $A_0 \circ \varphi = B$ (utilisant pour cette dernière déduction un résultat de [1], ou bien le fait que B est antisymétrique d'après [4]).

Note. – Le problème de décrire toutes les algèbres ayant mêmes parties réelles qu'une algèbre de fonctions donnée est considérablement plus simple en plusieurs variables complexes, cf. [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BERNARD, Comparaison d'algèbres de fonctions à l'aide des parties réelles de leurs éléments, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 270 (1970), 29-32.

[2] J. O'CONNELL, Real parts of uniform algebras., *Pac. J. Math.*, 46, n° 1 (1973), 235-247.

[3] R. COURANT, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, *Pure and Applied Math.*, Interscience 1950.

[4] J.P. ROSAY, Sur les algèbres uniformes ayant mêmes parties réelles, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 278 (1974), 761-763.

[5] J.P. ROSAY, Sur la caractérisation de certaines algèbres de fonctions par les parties réelles de leurs éléments, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 278 (1974), 761-763.

Manuscrit reçu le 14 juin 1973
accepté par J.P. Kahane.

Jean-Pierre ROSAY,
Mathématiques
Université de Provence – Centre Saint Jérôme
Marseille.