Annales de l'institut Fourier

Hélène Airault

Minorantes harmoniques et potentiels - Localisation sur une famille de temps d'arrêt - Réduite forte

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 67-118

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_67_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 67-118

MINORANTES HARMONIQUES ET POTENTIELS LOCALISATION SUR UNE FAMILLE DE TEMPS D'ARRÊT-RÉDUITE FORTE

par Hélène AIRAULT

Introduction.

Dans la théorie classique, on a la décomposition de Riesz suivante : si E est un espace localement compact, P_t un semi-groupe sur E, toute fonction excessive sur E est la somme d'une fonction harmonique dans E et d'un potentiel (3) ; une fonction excessive u est un potentiel si sa seule minorante harmonique est nulle. Si B_n est une suite croissante de compacts dont les intérieurs recouvrent E, on a la caractérisation suivante : (3). Pour que u soit un potentiel, il faut et il suffit que $P_{B_n^c}\, u$ tende vers 0 p.p. On a la généralisation suivante de ce résultat : Si A est un fermé de E, on obtient la décomposition de Riesz ci-dessous.

Toute fonction excessive est somme d'une fonction harmonique dans le complémentaire de A et d'un potentiel dans le complémentaire de A. On dit qu'une fonction excessive u est un potentiel dans le complémentaire de A si sa seule minorante au sens fort, harmonique dans le complémentaire de A est nulle.

Dans la partie I, on localise, les propriétés d'harmonicité d'une fonction excessive sur une famille $\mathcal{C}$ de temps d'arrêt. On obtient la décomposition de Riesz :

Toute fonction excessive est la somme d'une fonction $\mathcal{C}$-harmonique et d'un $\mathcal{C}$-potentiel. Un $\mathcal{C}$-potentiel est caractérisé par : sa plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique au sens fort est la fonction O.

Si on fait sur la famille $\mathcal{C}$ l'hypothèse de séparabilité : il existe une suite (τ_n) de $\mathcal{C}$ telle que :

$$\forall \tau \in \mathcal{T}, \quad \text{il existe } n \text{ tel que} \quad \tau \leqslant \tau_n \tag{A}$$

(Une telle suite est appelée dominante),

les potentiels h sont caractérisés par l'ensemble qui porte leur mesure spectrale μ^h.

On a : h est $\mathcal{T}$-harmonique équivaut à μ^h est portée par :

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{T}} = \{z \in \mathfrak{U} \mid k_z \text{ est } \mathcal{T}\text{-harmonique}\} \tag{1}$$

h est un $\mathcal{T}$-potentiel équivaut à μ^h portée par : $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_{\mathcal{T}}$; $\mathfrak{U}$ étant l'espace des sorties (2).

Dans la partie II, on fait l'hypothèse de séparabilité (A) sur la famille $\mathcal{T}$. Dans le § 1, on considère des familles fondamentales de temps d'arrêt.

La famille $\mathcal{T}$ de temps d'arrêt est *fondamentale* si elle vérifie l'hypothèse (A) de séparabilité et si la suite dominante (τ_n) tend vers le temps de vie ξ P_x p.s. pour tout x appartenant à E.

Si $\mathcal{T}$ est une famille fondamentale de temps d'arrêt, par exemple la famille des premiers temps de sortie des compacts de $E - F$ où F est un ensemble polaire, on a une deuxième caractérisation des $\mathcal{T}$-potentiels : h est un $\mathcal{T}$-potentiel équivaut à :

$$\lim_{n \to +\infty} P(h(X_{\tau_n})) = 0 \quad \text{où} \quad (\tau_n) \text{ est une suite dominante de } \mathcal{T} \tag{2}$$

Dans le § 2 on cherche une *caractérisation du type* (2) des $\mathcal{T}$-potentiels, pour une famille $\mathcal{T}$ de temps d'arrêt qui ne vérifie pas l'hypothèse : "$\mathcal{T}$ est fondamentale".

On est ainsi amené à calculer de façon explicite la plus grande minorante $\mathcal{T}$-harmonique au sens fort d'une fonction excessive h. Si $\mathcal{T}$ est une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$. On pose :

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

$$\Omega(\mathcal{T}) = \{\tau = \zeta \ ; \ \forall n \ \tau_n < \zeta\}$$

$$T\Omega(\mathcal{T}) = \bigcup_{t \geqslant 0} (t < \zeta)\, \theta_t\, \Omega(\mathcal{T})$$

$$R_\tau = \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \xi) \quad ; \quad S_\tau = \bigcup_{t \geqslant 0} (t < \xi)\, (\tau \circ \theta_t + t = \xi)$$

Les résultats sont les suivants :

Soit h une fonction excessive γ-intégrable.

1) Pour un temps d'arrêt τ, il existe une fonction excessive unique $F_\tau h$, réduite forte [5] et [12] telle que (théorème 2) pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$F_\tau h(x) = h(x)\ E_x^h[R_\tau]$$

2) Pour la famille $\mathcal{C}$, il existe une fonction excessive unique $K_{\mathcal{C}} h$ telle que (théorème 1) pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$K_{\mathcal{C}} h(x) = h(x)\ E_x^h[T\Omega(\mathcal{C})]$$

La fonction F_τ h est une minorante de h avec l'ordre fort sur les fonctions excessives et :

$$h - F_\tau h = G_\tau h \quad \text{où} \quad G_\tau h(x) = h(x)\ E_x^h(S_\tau)$$

pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

F_τh est une minorante avec l'ordre fort de $P_\tau h$ où $P_\tau h$ est la fonction excessive réduite définie par $P_\tau h(x) = E_x[h(X_\tau)]$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$ (théorème 3).

La fonction excessive $K_{\mathcal{C}} h$ est une minorante avec l'ordre fort de h (théorème 4).

On obtient finalement (théorème 6) :

La plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique avec l'ordre fort d'une fonction excessive h est égale à :

$$F_\tau h + K_{\mathcal{C}} h$$

Dans le § 3, on fait quelques remarques complémentaires sur la réduite forte $F_\tau h$, d'une fonction excessive h. Soit w une fonction excessive et τ un temps d'arrêt tel que $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$, p.s. ; si h est une fonction excessive inférieure à $P_\tau w$, avec l'ordre fort, alors $F_\tau h = h$.

On généralise alors une remarque de J. Azéma (8) et on obtient des informations sur la mesure spectrale de la réduite forte $F_\tau w$ d'une fonction excessive w : si τ est un temps d'arrêt qui vérifie $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$ p.s. et si w est une fonction excessive, alors :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf (\mu^{P_\tau w}, \mu^w)$$

Cette relation n'est pas toujours vraie et la condition $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$ n'est pas une condition nécessaire pour qu'elle soit vérifiée.

Si A est un ensemble fermé polaire, pour toute fonction excessive w telle que μ^w est portée par A, on a pour tout temps d'arrêt τ :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf (\mu^w, \mu^{P_\tau w})$$

Dans la partie III, on fait toujours sur la famille $\mathcal{C}$, l'hypothèse de séparabilité (A) ; on caractérise les $\mathcal{C}$-potentiels et on examine des cas particuliers de familles $\mathcal{C}$ de temps d'arrêt :

a) La famille $\mathcal{C}$ satisfait à l'hypothèse (H) si et seulement si on a la caractérisation suivante des $\mathcal{C}$-potentiels

$$h \text{ est un } \mathcal{C}\text{-potentiel équivaut à } K_{\mathcal{C}} h = 0 \tag{3}$$

b) $\mathcal{C}$ satisfait à (R) si et seulement si

$$\text{les } \mathcal{C}\text{-potentiels sont caractérisés par } F_\tau h = 0 \tag{4}$$

où $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$, [$(\tau_n)$ étant une suite dominante dans $\mathcal{C}$].

c) Si h est un $\mathcal{C}$-potentiel,

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] = E_x [h(X_\tau)]$$

Si $\mathcal{C}$ est une famille semi-fondamentale qui vérifie l'hypothèse (H), on a : h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si

$$\forall x \text{ tel que } h(x) < +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} E_x [h(X_{\tau_n})] = E_x [h(X_\tau)] \tag{5}$$

Dans la partie IV, on ne fait plus l'hypothèse (A) de séparabilité sur la famille $\mathcal{C}$ de temps d'arrêt. On obtient des caractérisations des $\mathcal{C}$-potentiels analogues à celles de (3), (4) et (5) en considérant une famille $\mathcal{C}'$ de temps d'arrêt contenue dans $\mathcal{C}$ et qui vérifie l'hypothèse de séparabilité (A).

Evidemment h est un $\mathcal{C}'$-potentiel entraîne h est un $\mathcal{C}$-potentiel. On a les résultats suivants :

a) Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt *contenue dans* $\mathscr{C}$. Soit $\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction excessive w, w est un $\mathscr{C}$-potentiel entraîne : $F_\tau w = 0$

2) $\left.\begin{array}{l} h \text{ est un } \mathscr{C}\text{-potentiel} \\ \text{et } K_{\mathscr{C}'} h = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow h$ est un $\mathscr{C}'$-potentiel.

b) Soit $\mathscr{C}' = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt contenue dans $\mathscr{C}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) pour toute fonction excessive w, w est un $\mathscr{C}$-potentiel entraîne:

$$K_{\mathscr{C}'} w = 0$$

2) $\left.\begin{array}{l} h \text{ est un } \mathscr{C}\text{-potentiel} \\ \text{et } F_\tau h = 0 \\ (\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n) \end{array}\right\}$ si et seulement si h est un $\mathscr{C}'$-potentiel

Dans la partie V, on donne brièvement quelques applications de la $\mathscr{C}$-théorie.

1) On considère la famille des premiers temps de sortie des compacts de D où D est une partie ouverte de E.

2) Soit $\mathscr{F}$ la famille des ensembles finement ouverts relativement compacts contenus dans un ensemble finement ouvert O. (10).

O est une réunion d'une suite croissante d'ensembles (A_n) de $\mathscr{F}$ et d'un ensemble semi-polaire. On applique les résultats à la famille des premiers temps de sortie des ensembles A_n.

Dans ce cas, on utilise les résultats de la partie IV.

3) On introduit l'hypothèse de séparabilité sur la famille $\mathscr{C}$, dans la théorie du potentiel fin en définissant des ensembles qui sont l'analogue des compacts dans l'exemple 1.

Soit O un ensemble finement ouvert, et soit τ_0 le premier temps de sortie de O. Pour tout entier $k > 0$, on pose :

$$O_k = \left\{ x \in O \mid E_x[e^{-\tau_0}] < 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

On prend pour $\mathscr{C}$ la famille des premiers temps de sortie des ensembles O_k. Les résultats de la partie V sont repris dans (9) et d'autres applications y sont données. Les notations sont celles de (1) et (5).

Notations et hypothèses.

On suivra [1]. E est un espace métrique localement compact séparable, $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre de ses ensembles universellement mesurables et m une mesure sur $\mathcal{B}$. Soit $X = (X_t, \zeta, \mathcal{N}_t, P_x)$ un processus de Markov ayant comme fonction de transition :

$$p(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, m(dy)$$

et soit $(\Omega, \mathcal{N})$ l'espace des évènements élémentaires. $\mathcal{N}$ désigne la σ-algèbre sur Ω engendrée par les ensembles

$$\{\omega \mid X_t(\omega) \in \Gamma\}, \; t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Gamma \in \mathcal{B}.$$

$\mathcal{N}_t$ est la σ-algèbre sur $\Omega_t = (\zeta > t)$ engendrée par les ensembles $[X \in \Gamma]$ où $\Gamma \in \mathcal{B}$ et $s \in [0, t]$. Soient

$$g_\alpha(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, x, \Gamma)\, dt = \int g_\alpha(x, y)\, m(dy)$$

les noyaux de Green, où $g_\alpha(x, y)$ sont des fonctions positives $\mathcal{B}$-mesurables.

Les opérateurs P_t et G_α correspondent aux noyaux $p(t, x, \Gamma)$ et $g_\alpha(x, \Gamma)$. Ils envoient l'ensemble V des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables positives dans lui-même. Une fonction f de V est excessive si

$$\forall t > 0,\; P_t f \leqslant f \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0} P_t f = f.$$

Soit γ la mesure de référence [mesure standard [1]] sur la σ-algèbre $\mathcal{B}$.

En particulier γ possède la propriété : il existe des constantes $C_\varphi < +\infty$ telles que pour toute fonction excessive h, on ait : $(h, \varphi) \leqslant C_\varphi \gamma(h)$ pour $\varphi \in W$ où W est un système support [2, p. 95] : les fonctions à support compact.

Toute fonction excessive h nulle γ-p.p. est nulle partout [2, lemme 1.1 p. 104].

Toutes les fonctions excessives considérées dans la suite sont intégrables par rapport à la mesure γ. Soit h une fonction excessive et soit

$$E_h = \{x \in E \mid 0 < h(x) < +\infty\}$$

On pose :

$$p^h(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{h(x)} \displaystyle\int_\Gamma p(t, x, dy)\, h(y) & \text{si} \quad x \in E_h \\ 1_\Gamma(x) \quad \text{si} \quad x \in E - E_h & \end{cases}$$

Soit $X = (X_t^h, \zeta^h, \mathfrak{N}_t^h, P_x^h)$ le h-processus correspondant à la fonction de transition $p^h(t, x, \Gamma)$.

On peut choisir les processus X^h, correspondant à toutes les fonctions excessives h de façon à prendre le même espace d'évènements élémentaires et tel que $(X_t^h, \zeta^h, \mathfrak{N}_t^h)$ ne dépende pas de h. On écrira :

$$X^h = (X_t, \zeta, \mathfrak{N}_t, P_x^h) \qquad \text{[cf. 1]}$$

et on ne complètera pas les tribus $\mathfrak{N}_t$ par rapport aux mesures P_x^h.

On omet h dans la notation X^h ou P_x^h lorsque $h = 1$.

On dira qu'une variable aléatoire τ positive est un temps d'arrêt si :

$$\tau \leqslant \zeta \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \quad ; \quad (\tau < t < \zeta) \in \mathfrak{N}_t .$$

On suppose que :

$$\forall t \geqslant 0 \, , \, (\tau < t < \zeta) \in \mathfrak{N}_t$$

si et seulement si

$$\forall t \geqslant 0 \, , \, (\tau \leqslant t < \zeta) \in \mathfrak{N}_t .$$

[13 lemme 3.3 p. 101]

Pour un temps d'arrêt τ, on définit sur $\Omega_\tau = (\tau < \zeta)$ la σ-algèbre $\mathfrak{N}_\tau$:

$$A \in \mathfrak{N}_\tau \quad \text{si} \quad A \in \mathfrak{N}, A \subset \Omega_\tau \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \,(A \,;\, \tau < t < \zeta) \in \mathfrak{N}_t .$$

On suppose que le processus X est un M-processus spécial [1] et standard [13] (donc continu à droite). En particulier, la propriété suivante est vérifiée

Pour toute suite croissante de temps d'arrêt (τ_n) qui tend vers un temps d'arrêt τ, on a :

$$P_x - \text{p.s.} \lim_{n \to +\infty} X_{\tau_n} = X_\tau \quad \text{sur} \quad (\tau < \zeta)$$

On supposera que pour toute fonction excessive h, p.s. l'application : $t \to h(X_t(\omega))$ est continue à droite.

Soit τ un temps d'arrêt. Si $A \in \mathcal{M}_\tau$ et $x \in \{0 < h < +\infty\}$, on a : [5, lemme 1, chapitre I]

$$h(x)\ P_x^h(A) = E_x[1_A h(X_\tau)]$$

Soit h une fonction excessive, on pose :

$$P_\tau h(x) = E_x[1_{(\tau<\zeta)}\ h(X_\tau)]$$

On dira qu'un temps d'arrêt τ vérifie la propriété $(*)$ si :

$$\forall t > 0 \quad \tau \circ \theta_t + t \geqslant \tau \quad \text{et} \quad \tau \circ \theta_t + t \nearrow \tau \quad \text{quand} \quad t \searrow 0.$$

Soit h une fonction excessive, si le temps d'arrêt τ satisfait $(*)$, la fonction $P_\tau h$ est excessive.

On fera l'hypothèse que tous les temps d'arrêt considérés vérifient la propriété $(*)$. On définit sur la σ-algèbre $\mathcal{M}$ [1, 3.7]. Les mesures :

$$P^h(A) = \int \gamma(dx)\ h(x)\ P_x^h(A)$$

Soit $\mathcal{E}$ le compactifié de Martin construit dans [1] et soit i l'application de E dans $\mathcal{E}$. On pose :

$$Z_t = i(X_t).$$

Soit h une fonction excessive. Pour $x \in E_h$, la limite

$$Z_\zeta = \lim_{t\to\zeta} Z_t \text{ existe } P_x^h \text{ p.s.}$$

La mesure μ^h définie par :

$$\mu^h(\Gamma) = P^h(Z_\zeta \in \Gamma)$$

est la mesure spectrale de h.

On a une représentation intégrale sur l'espace des sorties $\mathcal{U}$ [1] :

$$h(x) = \int k_z(x)\ \mu^h(dz)$$

Pour tout $x \in E_h$, $\forall A \in \mathcal{M}_\tau$ où τ est un temps d'arrêt, on a :

$$h(x)\ P_x^h(A) = \int k_z(x)\ P_x^{k_z}(A)\ \mu^h(dz)$$

$$P^h(A) = \int P^{k_z}(A)\ \mu^h(dz)$$

et si h_1 et h_2 sont deux fonctions excessives telles que $h_1 \leqslant h_2$, on a :

$$P^{h_1}(A) \leqslant P^{h_2}(A).$$

PARTIE I

$\mathcal{C}$-DECOMPOSITION DE RIESZ

DEFINITION 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt. On dit que la fonction excessive h est $\mathcal{C}$-harmonique si $\forall \tau \in \mathcal{C}$, on a : $P_\tau h = h$.*

Remarque. – Pour un temps d'arrêt τ, et une fonction excessive h, la condition $P_\tau h = h$ équivaut à $P^h(\tau = \zeta) = 0$. Voir [5, lemme 1, chapitre I].

Sur l'ensemble des fonctions excessives, on considère l'ordre fort.

Soient f et g deux fonctions excessives, on dit que f est une minorante forte de g s'il existe une fonction excessive h telle que $g = f + h$.

DEFINITION 2. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt. On dit qu'une fonction excessive h est un $\mathcal{C}$-potentiel si toute minorante forte $\mathcal{C}$-harmonique de h est nulle.*

On obtient la décomposition d'une fonction excessive h en la somme d'une fonction $\mathcal{C}$-harmonique et d'un $\mathcal{C}$-potentiel de la façon suivante :

Soit $\mathfrak{S}_h$ l'ensemble des fonctions excessives $\mathcal{C}$-harmoniques inférieure avec l'ordre fort à h.

LEMME 1. – $v = \sup\limits_{u \in \mathfrak{S}_h} u$ *est la plus grande minorante forte, $\mathcal{C}$-harmonique de h.*

Démonstration.

v est excessive [11]

v est $\mathcal{C}$-harmonique : $\forall \tau \in \mathcal{C}$; $\forall x$ tel que $v(x) < +\infty$,

$$\mathrm{E}_x(v(\mathrm{X}_\tau)) = \mathrm{E}_x[\sup_{u\in\mathscr{S}_h} u(\mathrm{X}_\tau)] \geqslant \sup_{u\in\mathscr{S}_h} \mathrm{E}_x[u(\mathrm{X}_\tau)] = v(x)$$

comme $\mathrm{E}_x[v(\mathrm{X}_\tau)] \leqslant v(x)$ on a l'égalité.

LEMME 2. – Soit $z \in \mathfrak{U}$; k_z *n'est pas* $\mathscr{C}$*-harmonique équivaut à* k_z *est un* $\mathscr{C}$*-potentiel.*

Démonstration. – Soit k_z^1 la plus grande minorante $\mathscr{C}$-harmonique de k_z au sens fort. On a, pour la fonction k_z^1, les deux possibilités :

$$k_z^1 = 0 \quad \text{ou} \quad k_z^1 = k_z\,,$$

car k_z est excessive extrémale.

Pour une famille $\mathscr{C}$ de temps d'arrêt, on a une partition de l'espace des sorties :

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\mathscr{C}} \cup \mathfrak{V}_{\mathscr{C}}$$

où
$$\mathfrak{U}_{\mathscr{C}} = \{z \in \mathfrak{U} \mid k_z \text{ est } \mathscr{C}\text{-harmonique}\}$$

$$\mathfrak{V}_{\mathscr{C}} = \mathfrak{U} - \mathfrak{U}_{\mathscr{C}} = \{z \in \mathfrak{U} \mid k_z \text{ est un } \mathscr{C}\text{-potentiel}\}$$

LEMME 3. – *Soit* w *une fonction excessive.* μ^w *est portée par* $\mathfrak{U}_{\mathscr{C}}$ *entraîne* w *est* $\mathscr{C}$*-harmonique.*

COROLLAIRE. – w *est un* $\mathscr{C}$*-potentiel entraîne* μ^w *est portée par* $\mathfrak{V}_{\mathscr{C}}$.

Pour avoir une réciproque du lemme 3, on introduit une hypothèse de séparabilité sur la famille $\mathscr{C}$.

DEFINITION 3. – *Soit* $\mathscr{C}$ *une famille de temps d'arrêt. Une famille dénombrable* $(\tau_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *de temps d'arrêt contenue dans* $\mathscr{C}$ *est dite "dominante" si* $\forall\tau \in \mathscr{C}$, *il existe* τ_i *tel que* $\tau \leqslant \tau_i$.

LEMME 4. – *Soit* $\mathscr{C}$ *une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une famille dominante* $\mathscr{C}' = (\tau_i)_{i\in\mathrm{I}}$. *Pour une fonction excessive* h, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) h *est* $\mathscr{C}$*-harmonique,*

2) h *est* $\mathscr{C}'$*-harmonique.*

Démonstration.

$$\text{si} \quad (\tau \leqslant \tau_i) \quad \text{on a} \quad (\tau_i < \zeta) \subset (\tau < \zeta)$$

LEMME 5. – *Soit $\mathcal{T}$ une famille dénombrable de temps d'arrêt. Pour une fonction excessive h, les conditions :*

1) *h est $\mathcal{T}$-harmonique,*

2) *μ^h est concentrée sur $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$.*

sont équivalentes.

Démonstration. – Si h est $\mathcal{T}$-harmonique, soit $\tau \in \mathcal{T}$; γ p.s. pour $x \in \mathrm{E}$, on a :

$$\mathrm{E}_x[\mathrm{H}(\tau)] = h(x), \quad \text{or} \quad h(x) = \int k_z(x)\, \mu^h(dz)$$

donc :
$$\int [k_z(x) - \mathrm{P}_\tau k_z(x)]\, \mu^h(dz) = 0 \quad \text{p.p.}$$

On intègre par rapport à γ. Donc, pour z appartenant à un ensemble μ^h-négligeable A_τ, on a :

$$\int \gamma(dx)\, [k_z(x) - \mathrm{P}_\tau k_z(x)] = 0 \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}_\tau k_z = k_z$$

Comme on a une famille dénombrable $\mathcal{T}$. μ^h est concentrée sur $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$. La réciproque est évidente.

THEOREME – *Soit $\mathcal{T}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une famille dominante $\mathcal{T}'$.*

1) *Soit h une fonction excessive :*

h est $\mathcal{T}$-harmonique si et seulement si μ^h est portée par $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$.

h est un $\mathcal{T}$-potentiel si et seulement si μ^h est portée par $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}$.

2) *Toute fonction excessive h se décompose en la somme d'une fonction h' $\mathcal{T}$-harmonique et d'un $\mathcal{T}$-potentiel h'' :*

$$h' = \int_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}} k_z\, \mu^h(dz) \quad \text{et} \quad h'' = \int_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}} k_z\, \mu^h(dz)$$

Dans la suite, toute famille $\mathcal{T}$ de temps d'arrêt contiendra une suite croissante dominante de temps d'arrêt (on ne mentionnera pas à nouveau cette hypothèse).

De plus on ne considérera que des familles $\mathscr{C}$ de temps d'arrêt qui vérifient les propriétés :

1) $\forall \tau' \in \mathscr{C}$ et $\forall s \geqslant 0$, si on pose $\tau' \circ \theta_s + s = \tau$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \quad \tau \circ \theta_t + t = \tau \quad \text{sur} \quad (\tau > t) \text{ p.s. } (**)$$

2) Soit τ'_1 et $\tau'_2 \in \mathscr{C}$

posons
$$\tau_1 = \tau'_1 \circ \theta_t + t$$
$$\tau_2 = \tau'_2 \circ \theta_t + t$$

si $\tau_1 \leqslant \tau_2$, on a $\tau_2 \circ \theta_{\tau_1} + \tau_1 = \tau_2$ p.s. $(***)$

PARTIE II

1. Familles h-fondamentales de temps d'arrêt.

DEFINITION 1. — *On dira que $\mathcal{C}$ est une famille h-fondamentale de temps d'arrêt si $\mathcal{C}$ vérifie la propriété suivante : il existe dans $\mathcal{C}$ une suite croissante dominante telle que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \ \mathrm{P}_x^h \text{ p.s.} \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathrm{E}_h = \{0 < h < +\infty\}$$

Remarque. — Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \ \mathrm{P}^h$ p.s. si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \ \mathrm{P}_x^h \text{ p.s. } \forall x \in \mathrm{E}_h$$

On dira fondamentale pour 1-fondamentale. 1-fondamentale entraîne h-fondamentale.

LEMME 1. — *Soit h une fonction excessive et soit $\mathcal{C}$ une famille h-fondamentale de temps d'arrêt. La plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort est la régularisée excessive v de :*

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_{\tau_n} h(x)$$

De plus : on a $v(x) = u(x)$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$

Démonstration. — On utilise au cours de la démonstration le résultat : si τ est un temps d'arrêt, alors :

$$\mathrm{P}_\tau h(x) = \mathrm{E}_x[h(\mathrm{X}_\tau)] = h(x)\, \mathrm{E}_x^h[\tau < \zeta] \quad ; \quad (x \text{ tel que } h(x) < +\infty)$$

Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$,

$$u(x) = h(x)\ \mathrm{E}_x^h[\bigcap_n (\tau_n < \zeta)]$$

Montrons que $u(x)$ est préexcessive : $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$ on a :

$\lambda G_\lambda u(x) \leqslant u(x)$

$$\lambda G_\lambda u(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x[h(X_t)\ E^h_{X_t}(\bigcap_n (\tau_n < \zeta))]\ dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x)\ E^h_x[1_{(t<\zeta)} \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)}]\ dt$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta\ P^h_x$ p.s. entraîne :

$$1_{(t<\zeta)} \lim_{h\to+\infty} 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t<\zeta)} = 1_{(t<\zeta)} \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)}\ P^h_x \text{ p.s.}$$

à cause de la propriété (**).

Donc :

$$\lambda G_\lambda u(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x)\ E^h_x[1_{(t<\zeta)} \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)}]\ dt \leqslant u(x)$$

$h(x) - u(x)$ est préexcessive :

$\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$E_x[h(X_t)] - E_x[u(X_t)] = h(x)\ E^h_x[1_{(t<\zeta)}\ (1 - \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)})]$$

ceci est inférieur à

$$h(x)\ E^h_x[1 - \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)}] = h(x) - u(x)$$

Soit v la régularisée excessive de u [2] lemme 1.2.

$$v(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda G_\lambda u(x)$$

D'après ce qui précède, la fonction $h - v$ est excessive. Montrons que v est $\mathscr{C}$-harmonique. Il suffit de montrer γ p.p. pour x :

$$P_{\tau_k} v(x) = v(x)\ \forall k \text{ entier (voir lemme 4, partie I)}$$

Or, $v(x) = u(x)$ sauf sur l'ensemble polaire $\{h = +\infty\}$

Il suffit donc de prouver :

$$P_{\tau_k} u(x) = u(x)\ \gamma \text{ p.p. pour } x.$$

Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} E_x[u(X_{\tau_k})] &= E_x[h(X_{\tau_k})\, E^h_{X_{\tau_k}}(\bigcap_n (\tau_n < \zeta))] \\ &= h(x)\, E^h_x[(\tau_k < \zeta)\, \theta_{\tau_k} : \bigcap_n (\tau_n < \zeta)] \\ &= h(x)\, E^h_x[\bigcap_n (\tau_n < \zeta)] \end{aligned}$$

(d'après la propriété (∗∗∗))

Montrons que v est la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h.

Soit w une minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h :

$$\forall n, \quad \text{on a} \quad w(x) = E_x[w(X_{\tau_n})] \ \gamma \text{ p.p.}$$

Comme $w \leqslant h$, on a :

$$E_x[w(X_{\tau_n})] \leqslant E_x[h(X_{\tau_n})]$$

$w(x) \leqslant u(x)$; $w(x) \leqslant v(x)$ γ p.p. entraîne $w \leqslant v$ partout.

COROLLAIRE. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt. On a :*

$\mathcal{C}$ est h-fondamentale et h est un $\mathcal{C}$-potentiel $\Big\}$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n \to +\infty} P(h(X_{\tau_n})) = 0$

(τ_n *étant une suite dominante de* $\mathcal{C}$)

Démonstration. – Supposons $\mathcal{C}$ h-fondamentale.

En appliquant le lemme précédent, h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si

$$\gamma \text{ p.p.} \lim_{n \to +\infty} P_{\tau_n} h(x) = 0$$

Cela est équivalent à la condition :

$$P^h(\tau_n < \zeta) = \int \gamma(dx)\, h(x)\, E^h_x(\tau_n < \zeta) = P[h(X_{\tau_n})]$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Réciproquement, si $\lim\limits_{n \to +\infty} P^h(\tau_n < \zeta) = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \ \mathrm{P}^h \text{ p.s. et } \mathcal{C} \text{ est } h\text{-fondamentale.}$$

On voit que cela ne dépend pas de la suite dominante de $\mathcal{C}$.

2. Calcul de la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique dans le cas général.

A chaque suite croissante de temps d'arrêt $\alpha = (\tau_n)$ on associe l'ensemble :

$$\Omega(\alpha) = \left\{ \lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \ ; \ \forall n \ \tau_n < \zeta \right\}$$

$\Omega(\alpha)$ s'écrit

$$\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$$

avec $\Omega_1(\alpha) = \left\{ \lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \right\}$ et $\Omega_2(\alpha) = \{\forall n \ \tau_n < \zeta\}$

LEMME 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante croissante $\alpha = (\tau_n)$. Alors les ensembles*

$$\Omega_1(\alpha) = \left\{ \lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2(\alpha) = \{\forall n \ \tau_n < \zeta\}$$

ne dépendent que de $\mathcal{C}$. On les notera $\Omega_1(\mathcal{C})$ et $\Omega_2(\mathcal{C})$.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une famille fondamentale de temps d'arrêt, on a vu (§ 1, lemme 1) que la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique w de h est la régularisée excessive de la fonction :

$$u(x) = h(x) \ \mathrm{E}_x^h[\Omega_1(\mathcal{C}) \cap \Omega_2(\mathcal{C})]$$

Dans ce cas particulier, la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique w de h avec l'ordre fort, l'est aussi avec l'ordre usuel, c'est-à-dire si w' est $\mathcal{C}$-harmonique et si $w \leqslant h$, alors $w' \leqslant w$.

Lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas une famille fondamentale de temps d'arrêt pour que la fonction :

$$u(x) = h(x) \ \mathrm{E}_x^h(\Omega(\mathcal{C})) \quad \text{où} \quad \Omega(\mathcal{C}) = \Omega_1(\mathcal{C}) \cap \Omega_2(\mathcal{C})$$

soit préexcessive, il faudrait faire une hypothèse du genre

$$\forall t \geqslant 0 \quad \theta_t \, \Omega(\mathcal{C}) \cap (t < \zeta) \subset \Omega(\mathcal{C})$$

(voir § 1, démonstration du lemme 1).

Pour une famille $\mathcal{C}$ de temps d'arrêt, on définit l'ensemble des translatés de $\Omega(\mathcal{C})$

$$T\Omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{t \geq 0} [\theta_t \, \Omega(\mathcal{C}) \cap (t < \zeta)]$$

THEOREME 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans lequelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$. Soit h une fonction excessive. Alors, la régularisée $K_{\mathcal{C}} h$ de la fonction :*

$$u(x) = h(x) \; E_x^h [T\Omega(\mathcal{C})]$$

est une minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort. De plus, on a $u(x) = K_{\mathcal{C}}\, h(x)$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

Remarque. – On démontrera que c'est la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort, c'est-à-dire :

si w est $\mathcal{C}$-harmonique et si $h - w$ est excessive, alors

$$w(x) \leqslant u(x) \; \gamma \text{ p.p.},$$

dans le cas où la famille $\mathcal{C}$ satisfait à une hypothèse supplémentaire (hypothèse H).

On démontre le théorème 1 en deux lemmes.

LEMME 2. – *La fonction $u(x) = h(x) \, E_x^h[T\Omega(\mathcal{C})]$ est préexcessive.*

Démonstration. – Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a

$$E_x[u(X_s)] = h(x) \; E_x^h[(s < \zeta) \cap \theta_s \; T\Omega(\mathcal{C})]$$

Or, $\quad (s < \zeta) \cap \theta_s T\Omega(\mathcal{C}) = (s < \zeta) \bigcup_{t \geq 0} \theta_s [\theta_t \Omega(\mathcal{C}) \cap (t < \zeta)]$

$$\theta_s [\theta_t \Omega(\mathcal{C}) \cap (t < \zeta)] \cap (s < \zeta) = \theta_{t+s} \, \Omega(\mathcal{C}) \cap (t + s < \zeta)$$

On a donc :

$$\theta_s T\Omega(\mathcal{C}) \,.\, (s < \zeta) = \bigcup_{t \geqslant s} [\theta_t \, \Omega(\mathcal{C}) \,.\, (t < \zeta)]$$

et

$$E_x[u(X_s)] \leqslant u(x)$$

LEMME 3. – *La régularisée excessive de $u(x)$ est une minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort.*

Démonstration. – Soit v la régularisée excessive de u. Pour que $h - v$ soit excessive, il suffit que $h - u$ soit préexcessive. Montrons que pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$E_x[u(X_s)] \geqslant h(x)\ E_x^h[(s < \zeta)\ ;\ T\Omega(\mathcal{C})]$$

Soit (τ_n) une suite dominante de $\mathcal{C}$. On pose $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$

$$\theta_s[\theta_t \Omega(\mathcal{C}) \cdot (t < \zeta)]\ (s < \zeta) =$$

$$= \theta_s[\tau \circ \theta_t + t = \zeta\ ;\ \forall n\ \tau_n \circ \theta_t + t < \zeta]\ (s < \zeta)$$

$$= (s < \zeta)\ (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)\ \theta_s[\forall n,\ \tau_n \circ \theta_t + t < \zeta]$$

Comme : $$\tau \circ \theta_t + t = \lim_{n \to +\infty} \tau_n \circ \theta_t + t$$

sur l'ensemble $(s < \zeta)\ \ (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$, pour n assez grand, on a :

$$\tau_n \circ \theta_t + t > s$$

Donc :

$$(\tau_n \circ \theta_t + t)\ (\omega_s) + s = \tau_n \circ \theta_t + t$$

sur l'ensemble $(s < \zeta)\ (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$, on a l'égalité

$$\bigcap_n \theta_s(\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta) = \bigcap_n (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)$$

On montre alors facilement comme dans le lemme 1, § 1 que $h - u$ est préexcessive.

Montrons que v est $\mathcal{C}$-harmonique.

Comme (τ_n) est une suite dominante de $\mathcal{C}$, il suffit de montrer (lemme 6, partie I) que γ-p.p. pour x et tout entier n. On a :

$\forall t \geqslant 0\ \ E_x[u(X_{\tau_n})] \geqslant u(x)$ p.p. puisque $v(x) = u(x)$, sauf sur l'ensemble polaire $\{h = +\infty\}$.

Or,

$$E_x[u(X_{\tau_n})] = E_x[h(X_{\tau_n})\ E^h_{X_{\tau_n}}[T\Omega(\mathcal{C})]] =$$

$$= h(x)\ E_x^h[(\tau_n < \zeta)\ \theta_{\tau_n}(\bigcup_{t \geqslant 0} (t < \zeta)\ \theta_t \Omega(\mathcal{C}))]$$

L'ensemble :

$$(\tau_n < \zeta)\ \theta_{\tau_n} \left[\bigcup_{t \geqslant 0} (t < \zeta)\ \theta_t \Omega(\mathscr{C}) \right]$$

contient l'ensemble :

$$(\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geqslant 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k\ \theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t < \zeta)]$$

Or, sur $(\tau_n < \zeta)\ (\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$ on a, pour k assez grand :

$$\theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t) + \tau_n = \tau_k \circ \theta_t + t \quad \text{(hypothèse } *** \text{)}$$

Donc :

$$(\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geqslant 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k\ \theta_{\tau_n} (\tau_k \circ \theta_t + t < \zeta)]$$

$$= (\tau_n < \zeta) \bigcup_{t \geqslant 0} [\tau \circ \theta \ + t = \zeta \quad \text{et} \quad \forall k\ \tau_k \circ \theta_t + t < \zeta] = \mathrm{T}\Omega(\mathscr{C})$$

(voir démonstration lemme 1, § 1).

Le théorème 1 est donc démontré.

DEFINITION 1. – *Soit τ un temps d'arrêt, on définit les ensembles :*

$$\mathrm{R}_\tau = \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) = \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} \theta_t (\tau < \zeta) \tag{3}$$

$$\mathrm{S}_\tau = \bigcup_{t \geqslant 0} (t < \zeta)\ (\tau \circ \theta_t + t = \zeta) \tag{4}$$

R_τ et S_τ *définissent une partition de l'espace de probabilité* $(\zeta > 0)$.

THEOREME 2. – *Soit τ un temps d'arrêt ; pour toute fonction excessive h γ-intégrable, il existe une fonction excessive unique $\mathrm{F}_\tau h$ telle que : pour tout x vérifiant $h(x) < +\infty$, on a :*

$$\mathrm{F}_\tau h(x) = h(x)\ \mathrm{E}_x^h[\mathrm{R}_\tau]$$

Démonstration.

1) Posons $v(x) = h(x)\ \mathrm{E}_x^h[\mathrm{R}_\tau]$. La fonction v est préexcessive, car pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a, pour $s \geqslant 0$:

$$\mathrm{E}_x[v(\mathrm{X}_s)] = \mathrm{E}_x\left[h(\mathrm{X}_s)\,\mathrm{E}^h_{x_s}\Big(\bigcap_{0\leqslant t<\zeta}(\tau\circ\theta_t + t < \zeta)\Big)\right] =$$

$$= h(x)\,\mathrm{E}^h_x\left[(s<\zeta)\,\theta_s \bigcap_{0\leqslant t<\zeta}(\tau\circ\theta_t + t<\zeta)\right]$$

$$= h(x)\,\mathrm{E}^h_x\left[(s<\zeta)\bigcap_{0\leqslant t<\zeta}(\tau\circ\theta_t + t<\zeta)\right]$$

car :

$$(\tau\circ\theta_s + s<\zeta) = \bigcap_{t\leqslant s}(\tau\circ\theta_t + t<\zeta) \quad \text{sur} \quad (s<\zeta)$$

De plus, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a

$$\widetilde{v}(x) = \lim_{s\to 0}\mathrm{E}_x[v(\mathrm{X}_s)] = h(x)\,\mathrm{E}^h_x[\mathrm{R}_\tau] = v(x)$$

On voit immédiatement que $h - v$ est préexcessive :

$$\mathrm{E}_x[h(\mathrm{X}_s)] - \mathrm{E}_x[v(\mathrm{X}_s)] =$$

$$= h(x)\,\mathrm{E}^h_x\left[1_{(s<\zeta)}\Big(1 - \lim_{t\to\zeta}1_{(\tau\circ\theta_t+t<\zeta)}\Big)\right] \leqslant h(x) - v(x)$$

THEOREME 3. – *Soit h une fonction excessive γ-intégrable et soit τ un temps d'arrêt.*

$\mathrm{F}_\tau h$ est une minorante de h avec l'ordre fort sur les fonctions excessives :

$$h - \mathrm{F}_\tau h = \mathrm{G}_\tau h \quad \textit{où} \quad \mathrm{G}_\tau h(x) = h(x)\,\mathrm{E}^h_x[\mathrm{S}\ ]$$

pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

$\mathrm{F}_\tau h$ est une minorante avec l'ordre fort de la fonction excessive $\mathrm{P}_\tau h$.

Démonstration. – La première affirmation est évidente puisque R_τ et S_τ définissent une partition de $\Omega_0 = (\zeta > 0)$

Montrons que $\mathrm{F}_\tau h$ est une minorante avec l'ordre fort de $\mathrm{P}_\tau h$.

Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$\mathrm{P}_\tau h(x) - \mathrm{F}_\tau h(x) = h(x)\,\mathrm{E}^h_\sigma\left[(\tau<\zeta) - \bigcap_{0\leqslant t<\zeta}(\tau\circ\theta_t + t<\zeta)\right] =$$

$$= h(x)\,\mathrm{E}^h_x\left[(\tau<\zeta)\bigcup_{0<t}(t<\zeta)(\tau\circ\theta_t + t = \zeta)\right]$$

$E_x[P_\tau h(X_s) - F_\tau h(X_s)] =$

$$= h(x)\, E_x^h \left[(s < \zeta)\,(\tau \circ \theta_s + s < \zeta) \bigcup_{s<t} (t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)\right]$$

Comme :

$$(s < \zeta)\,(\tau \circ \theta_s + s < \zeta) \bigcup_{s<t} (t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$$

est contenu dans

$$(\tau < \zeta) \bigcup_{0<t} (t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)$$

On a :

$$E_x[P_\tau h(X_s) - F_\tau h(X_s)] \leqslant P_\tau h(x) - F_\tau h(x)$$

Pour une famille $\mathcal{C}$ *de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante* $\alpha = (\tau_n)$, *on pose :*

$$R(\mathcal{C}) = R_\tau = \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)$$

où $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$

THEOREME 4. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante* $\alpha = (\tau_n)$ *et soit* $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$, *pour toute fonction excessive* h, *la fonction excessive* $F_\tau h$ *est une minorante* $\mathcal{C}$*-harmonique de* h *avec l'ordre fort.*

Démonstration. — Montrons que $\widetilde{v} = F_\tau h$ *est harmonique. Il suffit de voir que* γ-p.p. pour x

$$E_x[\widetilde{v}(X_{\tau_n})] = \widetilde{v}(x) \quad \text{pour tout entier } n.$$

Or, $\widetilde{v}(x) = v(x)$ sauf sur l'ensemble $\{h = +\infty\}$ qui est polaire, donc :

$$E_x[\widetilde{v}(X_{\tau_n})] = E_x[v(X_{\tau_n})]$$

Si $h(x) < +\infty$, on a :

$$E_x[v(X_{\tau_n})] = h(x)\, E_x^h \left[(\tau_n < \zeta) \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)\right]$$

Or :

$$(\tau_n < \zeta) \supset (\tau < \zeta)$$

Donc :

$$h(x)\ \mathrm{E}_x^h\left[(\tau_n < \zeta) \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta + t < \zeta)\right] = v(x)$$

On a ainsi obtenu deux fonctions excessives $F_\tau h$ et $K_{\mathscr{C}} h$ qui sont des minorante $\mathscr{C}$-harmoniques de h avec l'ordre fort à l'aide des ensembles $T\Omega(\mathscr{C})$ et $R(\mathscr{C})$.

***Etude des ensembles* $\mathbf{T\Omega(\mathscr{C})}$ *et* $\mathbf{R(\mathscr{C})}$.**

Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt tels que $\tau_2 \leqslant \tau_1$. On note $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ l'ensemble $\{\tau_1 = \zeta\ ;\ \tau_2 < \zeta\}$. On appelle $\mathscr{S}$ la classe des ensembles de la forme $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ où τ_1 et τ_2 parcourent l'ensemble des temps d'arrêt ; et soit $\widetilde{\mathscr{S}}$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{S}$.

Remarque. – On peut toujours supposer $\tau_1 \geqslant \tau_2$ dans $\Omega(\tau_1, \tau_2)$.

LEMME 4. – *$\mathscr{S}$ est une semi-algèbre de Boole dans $\Omega_0 = (\zeta > 0)$* (6 p. 25).

Démonstration. – $\phi \in \mathscr{S}$ puisque $\Omega(\tau, \tau) = \phi$; $\Omega_0 \in \mathscr{S}$ puisque

$$\Omega(\zeta, 0) = \Omega_0$$

$\mathscr{S}$ est stable par intersection finie car

$$\Omega(\tau_1, \tau_2) \cap \Omega(\tau_1', \tau_2') = \{\inf(\tau_1, \tau_1') = \zeta \quad ; \quad \sup(\tau_2, \tau_2') < \zeta\}$$

Le complémentaire de $\Omega(\tau_1, \tau_2) = \{\tau_1 < \zeta\} \cup \{\tau_2 = \zeta\}$ est réunion disjointe et finie d'éléments de $\mathscr{S}$.

LEMME 5. – *Soient w et h deux fonctions excessives. Si w est inférieure ou égale à h avec l'ordre fort, alors $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$, on a :*

$$w(x)\ \mathrm{E}_x^w[\Omega(\tau_1, \tau_2)] \leqslant h(x)\ \mathrm{E}_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

De plus, pour tout $A \in \mathscr{S}$ on a :

$$w(x)\ \mathrm{E}_x^w[A] \leqslant h(x)\ \mathrm{E}_x^h[A]$$

Démonstration.

$$w(x)\ E_x^w[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[w(X_{\tau_2})] - E_x[w(X_{\tau_1})]$$

$$h(x)\ E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[h(X_{\tau_2})] - E_x[h(X_{\tau_1})]$$

Comme $h - w$ est excessive et que $\tau_2 \leqslant \tau_1$, on a le premier résultat en appliquant le théorème d'arrêt de Doob.

La deuxième relation :

$$w(x)\ E_x^w(A) \leqslant h(x)\ E_x^h(A)$$

si $A \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ résulte immédiatement du lemme 4 et de (6)-prop. 1.6.1 p. 25) puisque les fonctions d'ensembles $h(x)\ E_x^h(\cdot)$ et $w(x)\ E_x^w(\cdot)$ sont σ-additives sur $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

LEMME 6. – *Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives. On pose :*

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

Pour tout ensemble A *appartenant à la tribu* $\widetilde{\mathfrak{S}}$, *on a* $\forall x$ *tel que* $h(x) < +\infty$

$$h(x)\ E_x^h(A) = h_1(x)\ E_x^{h_1}[A] + h_2(x)\ E_x^{h_2}[A]$$

Démonstration. – En effet, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a

$$h(x)\ E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = E_x[h(X_{\tau_2})] - E_x[h(X_{\tau_1})]$$

en prenant $\tau_1 \geqslant \tau_2$.

Or :

$$E_x[h(X_{\tau_i})] = E_x[h_1(X_{\tau_i})] + E_x[h_2(X_{\tau_i})]\ ;\ i = 1, 2$$

donc, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$

$$h(x)\ E_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = h_1(x)\ E_x^{h_1}[\Omega(\tau_1, \tau_2)] + h_2(x)\ E_x^{h_2}[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

pour tout élément $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ appartenant à $\mathfrak{S}$.

Les deux fonctions d'ensembles :

$$h(x)\ E_x^h[\cdot] \quad \text{et} \quad h_1(x)\ E_x^{h_1}[:] + h_2(x)\ E_x^{h_2}[\cdot]$$

coïcident sur $\mathfrak{S}$, donc sur $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

LEMME 7. — *Soit h une fonction excessive et λ un réel positif, on a : pour tout ensemble* A *appartenant à la tribu* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ *et pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.*

$$h(x)\, \mathrm{E}_x^h(\mathrm{A}) = h(x)\, \mathrm{E}_x^{\lambda h}(\mathrm{A})$$

Démonstration. — Soit τ un temps d'arrêt. Pour tout réel λ positif, on a

$$\lambda h(x)\, \mathrm{E}_x^h[\tau < \zeta] = \lambda \mathrm{E}_x[h(\mathrm{X}_\tau)] = \mathrm{E}_x[\lambda h(\mathrm{X}_\tau)] = \lambda h(x)\, \mathrm{E}_x^{\lambda h}[\tau < \zeta]$$

LEMME 8. — *Soient (h_n) une suite croissante de fonctions excessives, et soit $h = \lim\limits_{n \to +\infty} h_n$. Alors, pour tout ensemble* A, *appartenant à la tribu* $\widetilde{\mathfrak{F}}$, *on a, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$*

$$h(x)\, \mathrm{E}_x^h[\mathrm{A}] = \lim_{n \to +\infty} h_n(x)\, \mathrm{E}_x^{h_n}[\mathrm{A}]$$

Démonstration. — Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, et tout élément $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ de $\mathfrak{F}$, on a :

$$h(x)\, \mathrm{E}_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = \lim_{n \to +\infty} h_n(x)\, \mathrm{E}_x^{h_n}[\Omega(\tau_1, \tau_2)]$$

en utilisant toujours :

$$h(x)\, \mathrm{E}_x^h[\Omega(\tau_1, \tau_2)] = \mathrm{E}_x[h(\mathrm{X}_{\tau_2})] - \mathrm{E}_x[h(\mathrm{X}_{\tau_1})]$$

On prolonge à $\widetilde{\mathfrak{F}}$.

Soit $\mathrm{A} \in \widetilde{\mathfrak{F}}$:

$$\limsup_{n \to +\infty} h_n(x)\, \mathrm{E}_x^{h_n}(\mathrm{A}) \leqslant h(x)\, \mathrm{E}_x^h(\mathrm{A}) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} h_n(x)\, \mathrm{E}_x^{h_n}(\mathrm{A})$$

LEMME 9. — *Soit* B *l'ensemble aléatoire :*

$$\mathrm{B} = \{(t, \omega) \mid \omega \in \theta_t\, \Omega(\mathcal{C})\}$$

Alors, la projection de B *sur Ω est égale à* $\mathrm{T}\,\Omega(\mathcal{C})$. *Si on munit* $\mathbf{R}_+$ *de la tribu borélienne* $\mathcal{B}$, *l'ensemble aléatoire* B *est une partie mesurable de l'espace produit* $(\mathbf{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B} \oplus \widetilde{\mathfrak{F}})$ [7].

Démonstration. – On définit le processus $B_t(\omega) = 1_B(t, \omega)$. Soit $(\tau\ )$ une suite dominante de $\mathfrak{T}$ et soit $\tau = \lim\limits_{k \to +\infty} \tau_k$.

Pour tout k, on définit le processus B^k par :

$$B_t^k(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad \omega \in \theta_t\,[\tau = \zeta \ ; \ \tau_k < \zeta]$$

$$B_t^k(\omega) = 0 \quad \text{sinon}$$

1) *Pour tout k, le processus* B_t^k *est continu à droite.*

Soit (t_n) une suite décroissante de réels qui tend vers t. *Si*

$\forall n \quad \omega \in \theta_{t_n}[\tau = \zeta \ , \ \tau \ < \zeta]$ *alors* $\omega \in \theta_t\,[\tau = \zeta \ ; \ \tau_k < \zeta]$

En appliquant la propriété (*). On a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \tau \circ \theta_{t_n - t} + t_n - t = \tau$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \tau \circ \theta_{t_n} + t_n = \tau \circ \theta_t + t$

Si $\forall n \quad \omega \notin \theta_{t_n}[\tau = \xi \ ; \ \tau_k < \zeta]$ alors $\omega \notin \theta_t\,[\tau = \zeta \ ; \ \tau_k < \zeta]$

2) *On approche* (B_t^k) *par des processus* $B^{k,n} = (B_t^{k,n})$ *qui sont* $\mathcal{B} \otimes \widetilde{\mathfrak{F}}$*-mesurables.*

On pose, pour tout entier n

$$B_t^{k,n}(\omega) = B_0^k(\omega)\, I_{\{t=0\}} + \sum_h B^n_{\frac{h+1}{n}} \cdot I_{\left\{\frac{h}{n} \leqslant t < \frac{h+1}{n}\right\}}$$

On a $B_t^k = \lim\limits_{n \to +\infty} B_t^{k,n}$ puisque B_t^k est continu à droite.

$B_t^{k,n}$ est $\widetilde{\mathfrak{F}}$ mesurable puisque pour t fixé, l'ensemble $\theta_t\,[\tau = \zeta, \tau_k < \zeta]$ est $\widetilde{\mathfrak{F}}$-mesurable. Donc B est $\mathcal{B} \otimes \widetilde{\mathfrak{F}}$-mesurable.

3) Pour tout t, $B_t = \inf\limits_k B_t^k = \lim\limits_{k \to +\infty} B_t^k$ est $\mathcal{B} \otimes \widetilde{\mathfrak{F}}$-mesurable.

COROLLAIRE. – *Soit P une mesure de probabilité sur* $\widetilde{\mathfrak{F}}$, *alors* $T\Omega(\mathfrak{T})$ *appartient à la tribu complétée de* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ *par* P. *En particulier, soit h une fonction excessive, et soit la probabilité* P_x^h, *alors* $T\Omega(\mathfrak{T})$ *appartient à la tribu* $\widetilde{\mathfrak{F}}_h$*complétée de* $\widetilde{\mathfrak{F}}$ *pour* P_x^h.

Démonstration. – Cela résulte immédiatement au théorème 20 chapitre I [7].

Pour une fonction excessive h, on a défini la fonction excessive $K_{\mathcal{C}} h$ par :

$$\forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty, \; K_{\mathcal{C}} h(x) = h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathcal{C})]$$

THEOREME 5. — 1) *Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives et soit $h = h_1 + h_2$, alors :*

$$K_{\mathcal{C}} h = K_{\mathcal{C}} h_1 + K_{\mathcal{C}} h_2$$

En particulier, si h et w sont deux fonctions excessives telles que $h - w$ est excessive, alors :

$$K_{\mathcal{C}} w \leqslant K_{\mathcal{C}} h$$

2) *Soit h une fonction excessive et soit λ un réel positif, on a :*

$$K_{\mathcal{C}}(\lambda h) = \lambda K_{\mathcal{C}} h$$

3) *Soit h_n une suite croissante de fonctions excessives et soit $h = \lim_{n \to +\infty} h_n$, on a :*

$$K_{\mathcal{C}} h = \lim_{n \to +\infty} K_{\mathcal{C}} h_n$$

[*la suite* $K_{\mathcal{C}} h_n$ *n'est pas croissante*]

Démonstration.

1) Soit P une probabilité qui domine P_x^h, $P_x^{h_1}$ et $P_x^{h_2}$. D'après le corollaire du lemme 9 :

$$T\Omega(\mathcal{C}) = L \cup N$$

où L appartient à la tribu $\widetilde{\mathcal{S}}$ et N est P_x^h et P_x^w-négligeable. D'après le lemme 6 :

$$h(x)\, E_x^h[L] = h_1(x)\, E_x^{h_1}[L] + h_2(x)\, E_x^{h_2}[L]$$

2) Résulte immédiatement du lemme 7.

3) On prend une probabilité P qui domine P_x^h et $P_x^{h_n}$, $\forall n$ et on passe à la limite en utilisant le lemme 8 et le corollaire du lemme 9.

LEMME 9. — *L'ensemble $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ appartient à $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Démonstration

$$\bigcap_{\zeta > t \geqslant 0} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) = \bigcap_{\substack{r \in \mathrm{Q}^+ \\ r < \zeta}} (\tau \circ \theta_r + r < \zeta)$$

(son complémentaire appartient à $\tilde{\mathcal{S}}$).

THEOREME 6. – *Soit τ un temps d'arrêt.*

1) *Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives et soit $h = h_1 + h_2$, alors :*

$$\mathrm{F}_\tau h = \mathrm{F}_\tau h_1 + \mathrm{F}_\tau h_2$$

En particulier, si h et w sont deux fonctions excessives telles que : $w \leqslant h$, alors :

$$\mathrm{F}_\tau w \leqslant \mathrm{F}_\tau h$$

2) *Soit h une fonction excessive et λ un réel positif :*

$$\mathrm{F}_\tau (\lambda h) = \lambda \mathrm{F}_\tau h$$

3) *Soit h_n une suite croissante de fonctions excessives et soit $h = \lim\limits_{n \to +\infty} h_n$, alors :*

$$\mathrm{F}_\tau h = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F}_\tau h_n$$

(La suite $\mathrm{F}_\tau h_n$ n'est pas croissante)

Démonstration. – Il suffit de mettre R_τ à la place de $\mathrm{T}\Omega(\mathcal{C})$ et de prolonger comme dans le théorème 5.

Remarque. – $h_1 \leqslant h_2$ n'entraîne pas $\mathrm{F}_\tau h_1 \leqslant \mathrm{F}_\tau h_2$.

Dans le cas de la translation uniforme sur **R**, vers la droite, soit h_1 la fonction excessive de mesure spectrale $\epsilon_{\{0\}}$ [mesure de Dirac au point $\{0\}$] et h_2 la fonction excessive de mesure spectrale $\epsilon_{\{2\}}$. Soit

$$\mathrm{A} = [-1, +1] \quad \text{et soit} \quad \tau = \inf \{t > 0 \mid \mathrm{X}_t \in \mathrm{A}\}$$

$$\mathrm{F}_\tau h_1 = h_1 \quad \text{mais} \quad \mathrm{F}_\tau h_2 = 0$$

Soit S le cône des fonctions excessives et τ un temps d'arrêt. Pour tout élément de $\mathrm{S} - \mathrm{S}$, de la forme $u = u_1 - u_2$ où $u_1 \in \mathrm{S}$ et

$u_2 \in S$, on pose : $F_\tau u = F_\tau u_1 - F_\tau u_2$. $F_\tau u$ est déterminé de manière unique [théorème 6, (1)] F_τ définit une forme linéaire sur l'espace vectoriel $S - S$, non positive en général.

Calcul de la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique d'une fonction excessive h.

THEOREME 7. — *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$ et soit $\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$.*

Pour toute fonction excessive h, la plus grande minorante $\mathcal{C}$ harmonique de h est la régularisée excessive $\widetilde{w} = F_\tau h + K_{\mathcal{C}} h$ de la fonction :

$$w(x) = h(x)\, E_x^h [T\Omega(\mathcal{C}) \cup R_\tau]$$

et l'on a $\widetilde{w}(x) = w(x)$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

Dans la démonstration, on va utiliser le lemme suivant.

LEMME 11. — *Si w est $\mathcal{C}$-harmonique, pour tout x tel que $w(x) < +\infty$, on a :*

$$w(x)\, E_x^w [T\Omega(\mathcal{C})] = w(x)\, E_x^w \left[\bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta)\, \theta_t \Omega_1(\mathcal{C})\right]$$

Démonstration. — w est $\mathcal{C}$-harmonique entraîne, pour tout x tel que $0 < w(x) < +\infty$

$$E_x[w(X_t)] = w(x)\, E_x^w [\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta] \quad \forall n$$

donc

$$w(x)\, E_n^w [1_{(t<\zeta)} - 1_{(\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)}] = 0 \quad \forall n$$

c'est-à-dire :

$$P_x^w \text{ p.s. } (t < \zeta) = (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta)$$

Or :

$$T\Omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{t \geq 0} [\tau \circ \theta_t + t = \zeta \ ; \ \forall n\ (\tau_n \circ \theta_t + t < \zeta) \ ; \ (t < \zeta)]$$

donc :

$$P_x^w [T\Omega(\mathcal{C})] = P_x^w [S_\tau]$$

Démonstration du théorème 7. – Les deux ensembles $T\Omega(\mathscr{C})$ et $R(\mathscr{C})$ sont disjoints, donc la régularisée excessive $\widetilde{w}$ de :

$$w(x) = h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathscr{C})] + h(x)\, E_x^h[R_\tau]$$

est une minorante $\mathscr{C}$-harmonique de h.

C'est une minorante avec l'ordre fort puisque, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$,

$$E_x[w(X_s)] \geqslant h(x)\, E_x^h[(s < \zeta)\, R_\tau] + h(x)\, E_x^h[(s < \zeta)\, T\Omega(\mathscr{C})]$$

(voir démonstration du lemme 3 et démonstration du théorème 2).

Donc :

$$E_x[h(X_s) - w(X_s)] \leqslant h(x)\, E_x^h[(s < \zeta) - (s < \zeta) \cap (R \cup T\Omega(\mathscr{C}))]$$

Montrons que $\widetilde{w}$ est la plus grande minorante $\mathscr{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort.

Soit u une minorante $\mathscr{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort. Alors pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a :

$$u(x)\, E_x^u[T\Omega(\mathscr{C})] \leqslant h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathscr{C})] \text{ (théorème 5)} \tag{6}$$

et

$$u(x)\, E_x^u[R(\mathscr{C})] \leqslant h(x)\, E_x^h[R(\mathscr{C})] \text{ (théorème 5)} \tag{7}$$

D'après le lemme 10 :

$$u(x)\, E_x^u[T\Omega(\mathscr{C})] = u(x)\, E_x^u[S_\tau] \tag{8}$$

En ajoutant (6) et (7) et en utilisant (8) on obtient :

$$u(x) \leqslant h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathscr{C}) \cup R(\mathscr{C})]$$

puisque :

$$\Omega_0 = R(\mathscr{C}) \cup S_\tau$$

et :

$$u(x)\, E_x^u[R(\mathscr{C}) \cup S_\tau] = u(x)$$

3. Compléments – Problèmes sur les mesures spectrales.

On peut calculer la mesure spectrale de la réduite forte $F_\tau h$ d'une fonction excessive h si τ est un temps d'arrêt tel que :

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau, \text{ p.s.}$$

LEMME 1. — *Soit w une fonction excessive et τ un temps d'arrêt tel que*

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau \text{ p.s.}$$

Soit h une fonction excessive inférieure à $P_\tau w$ avec l'ordre fort, alors $F_\tau h = h$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $G_\tau h = 0$.

Or :

$$S_\tau = \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}^+} (r < \zeta)\,(\tau \circ \theta_r + r = \zeta)$$

Comme on a une réunion dénombrable, il suffit de montrer que $\forall t \geq 0$, on a : $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$

$$h(x)\, E_x^h[(t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] = 0$$

Or :

$$h \leq P_\tau w$$

Donc :

$$h(x)\, E_x^h[(t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] \leq$$

$$\leq P_\tau w(x)\, E_x^{P_\tau w}[(t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)]$$

$$P_\tau w(x)\, E_x^{P_\tau w}[(t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] =$$

$$= E_x[P_\tau w(X_t)] - E_x[E_{X_t}(P_\tau w(X_\tau))]$$

Or :

$$P_\tau w(X_\tau) = E_{X_\tau}[w(X_\tau)] = w(X_\tau)$$

car

$$\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$$

Donc :

$$P_\tau w(x)\, E_x^{P_\tau w}[(t < \zeta)\,(\tau \circ \theta_t + t = \zeta)] = 0$$

COROLLAIRE (8). — *Soit w une fonction excessive, τ un temps d'arrêt tel que $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$ p.s. Si h est une fonction excessive inférieure à $P_\tau w$ avec l'ordre fort, alors $P_\tau h = h$.*

Démonstration. — $F_\tau h \leq P_\tau h \leq h$.

THEOREME 1. – *Soit τ un temps d'arrêt tel que $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$* p.s. *et soit w une fonction excessive.* $F_\tau w$ *est la plus grande fonction excessive qui est inférieure à w et à $P_\tau w$ avec l'ordre fort, c'est-à-dire :*

$$h \preccurlyeq w \quad et \quad h \preccurlyeq P_\tau w \quad entraîne \quad h \leqslant F_\tau w$$

En particulier :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf (\mu^{P_\tau w}, \mu^w)$$

Démonstration. – $h \preccurlyeq P_\tau w$ entraîne d'après le lemme 1 $F_\tau h = h$. Comme $h \preccurlyeq w$, on a $F_\tau h \leqslant F_\tau w$, donc $h \leqslant F_\tau w$.

D'après le théorème 3, § 2, $F_\tau h$ est une minorante avec l'ordre fort de h et de $P_\tau h$.

Remarques :

1) En général, pour une fonction excessive w, la mesure spectrale $\mu^{F_\tau w}$ peut être strictement inférieure à inf $(\mu^{P_\tau w} ; \mu^w)$.

Par exemple, considérons le balayage fort des fonctions excessives dans le cas de la translation uniforme sur $\mathbf{R}$ de vitesse 1.

Le semi-groupe $P(t, x, S) = 1_S(x + t)$

Les fonctions excessives sont les fonctions décroissantes et continues à droite. La mesure de Lebesgue est une mesure de référence, et la fonction de Green est $g(x, u) = 1_{]x, +\infty[}(u)$.

Soit h la fonction excessive de mesure spectrale $\epsilon_{\{0\}} + \epsilon_{\{2\}}$

$$\begin{aligned} h &= 2 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ h &= 1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ h &= 0 \quad \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{aligned}$$

Balayons h sur $A = \{0\} \cup \{2\}$. Soit $T_A = \inf \{t > 0 \mid X_t \in A\}$

$$P_A h(x) = E_x [h(X_{T_A})] = 1 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$P_A h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$

la mesure spectrale de $P_A h$ est $\mu^{P_A h} = \epsilon_{\{0\}}$.

$P_A h$ est donc inférieure à h avec l'ordre fort, mais $F_A h \neq P_A h$, en effet :

$$F_A h(x) = h(x)\, E_x^h [R_{T_A}] = 0$$

2) L'hypothèse : $\tau \circ \theta_\tau + \tau = \tau$ n'est pas nécessaire pour que :

$$\mu^{F_\tau w} = \inf(\mu^w, \mu^{P_\tau w})$$

Dans le cas du semi-groupe de la translation uniforme sur R de vitesse 1. Soit A la réunion de l'ensemble des points de la suite $1 - \frac{1}{n}$ et du point $\{1\}$, et soit h la fonction excessive de mesure spectrale $\epsilon_{\{1\}}$.

On a :

$$F_A h = P_A h = h$$

LEMME 2. — *Soit $\mathcal{C}$ une famille fondamentale de temps d'arrêt et soit τ un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à $\mathcal{C}$. Si h est une fonction excessive $\mathcal{C}$-harmonique, alors $F_\tau h$ est la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de $P_\tau h$ avec l'ordre fort.*

En particulier :

$$\mu^{F_\tau h} = \inf(\mu^h, \mu^{P_\tau h})$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}$ une famille fondamentale, et soit (τ_n) une suite dominante de $\mathcal{C}$. La plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de $P_\tau h$ pour l'ordre fort est, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$,

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} E_x[P_\tau h(X_{\tau_n})] = h(x)\, E_x^h[\lim_{n \to +\infty} 1_{(\tau \circ \theta_{\tau_n} + \tau_n < \zeta)}]$$

si $(\tau_n < \zeta)$ P_x^h p.s. comme $\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta$ on a :

$$\bigcap_n (\tau \circ \theta_{\tau_n} + \tau_n < \zeta) = \bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)$$

Donc :

$$u(x) = F_\tau h(x)$$

COROLLAIRE 1. — *Si* A *est un ensemble fermé polaire, pour toute fonction excessive w telle que μ^w est portée par* A, *on a, pour tout ensemble presque-borélien* B :

$$\mu^{F_B w} = \inf(\mu^w, \mu^{P_B w})$$

où $\quad F_B w = F_{\tau_B} w \quad$ *avec* $\quad \tau_B = \inf\{t > 0 \mid X_t \in B\}$

COROLLAIRE 2. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille fondamentale de temps d'arrêt et, soit h une fonction excessive et τ un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à $\mathcal{C}$. La plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de $P_\tau h$ pour l'ordre fort est aussi une minorante de h pour l'ordre fort.*

Démonstration. – $h = h_1 + h_2$ où h_1 est $\mathcal{C}$-harmonique et h_2 est un $\mathcal{C}$-potentiel. $P_\tau h = P_\tau h_1 + P_\tau h_2$. Soit (τ_n) une suite dominante de $\mathcal{C}$. La plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h est

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} P_{\tau_n} P_\tau h(x)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} P_{\tau_n} P_\tau h \ (x)$$

D'après le lemme 2, $u(x) = F_\tau h_1(x)$.

C'est aussi une minorante de h avec l'ordre fort.

Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt séparable. Soit B un ensemble presque-borélien. Peut-on "calculer" comme dans le lemme 2 la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique avec l'ordre fort, de $P_B h$ et de h pour une fonction excessive h ?

$P_B h$ est la réduite :

$$P_B h(x) = E_x [h(X_{T_B})] \ \forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty$$

où

$$T_B = \inf \{t > 0 \mid X_t \in B\}$$

PARTIE III

PARTITION DE L'ESPACE DES SORTIES CARACTERISATION DES $\mathcal{C}$-POTENTIELS – CAS PARTICULIERS

1. Décomposition de Riesz.

Soit $\alpha = (\tau_n)$ une suite croissante de temps d'arrêt qui tend vers τ. L'ensemble S_τ (Définition 1, § 2, partie II) contient l'ensemble :

$$T\Omega(\alpha) = \bigcup_{t \geq 0} (t < \zeta)\ \theta_t \Omega(\alpha)$$

$\Omega(\alpha)$ étant l'ensemble :

$$\{\tau = \zeta \quad ; \quad \forall n \ \tau_n < \tau\}$$

En particulier, si h est une fonction excessive $G_\tau h \geqslant K_\alpha h$.

Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$.

DEFINITION 1. – *Une fonction excessive h est $\mathcal{C}_F$-harmonique si* $F_\tau h = h$. *Une fonction excessive h est $\mathcal{C}_K$-harmonique si* $K_{\mathcal{C}} h = h$.

LEMME 1. – *Soit w une fonction excessive $\mathcal{C}$-harmonique.*

w est $\mathcal{C}_K$-harmonique si et seulement si $G_\tau w = w$

Démonstration. – Si w est $\mathcal{C}$ -harmonique, pour tout x tel que $w(x) < +\infty$, on a P_x^w p.s. : $T\Omega(\alpha) = S_\tau$ avec :

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

(voir lemme 11, § 2, partie II).

LEMME 2. – *Soit $z \in \mathcal{U}$ et k_z la fonction excessive extrémale associée. Les seules possibilités sont :*

① $\begin{cases} F_\tau k_z = k_z \\ \text{et } K_{\mathcal{C}} k_z = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} F_\tau k_z = 0 \\ \text{et } K_{\mathcal{C}} k_z = k_z \end{cases}$ ③ $\begin{cases} F_\tau k_z = 0 \\ \text{et } K_{\mathcal{C}} k_z = 0 \end{cases}$

Démonstration. – D'après le théorème 7, § 2, partie II, et le lemme 4, partie I, § 1,

$$\mathrm{F}_\tau k_z + \mathrm{K}_\alpha k_z = k_z \quad \text{ou} \quad \mathrm{F}_\tau k_z + \mathrm{K}_\alpha k_z = 0$$

Comme $\mathrm{F}_\tau k_z = 0$ ou k_z [lemme 1, chap. IV, § 1, [5], on a le résultat.

DEFINITION 2. – *On pose*

$$\mathcal{U}^{\mathrm{F}}_{\mathcal{C}} = \{z \in \mathcal{U} \mid \mathrm{F}_\tau k_z = k_z\}$$

$$\mathcal{U}^{\mathrm{K}}_{\mathcal{C}} = \{z \in \mathcal{U} \mid \mathrm{K}_{\mathcal{C}} k_z = k_z\}$$

on a alors une partition de l'espace des sorties $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{F}}_{\mathcal{C}} \cup \mathcal{U}^{\mathrm{K}}_{\mathcal{C}} \cup \mathcal{V}_{\mathcal{C}}$$

LEMME 3. – *Soit h une fonction excessive.*
h est $\mathcal{C}_{\mathrm{F}}$-harmonique si et seulement si μ^h est portée par $\mathcal{U}^{\mathrm{F}}_{\mathcal{C}}$.
h est $\mathcal{C}_{\mathrm{K}}$-harmonique si et seulement si μ^h est portée par $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}_{\mathcal{C}}$.

Démonstration. – Cela résulte immédiatement des formules :

$$\mathrm{F}_\tau h = \int \mathrm{F}_\tau k_z \ \mu^h(dz)$$

et

$$\mathrm{K}_{\mathcal{C}} h = \int \mathrm{K}_{\mathcal{C}} k_z \ \mu^h(dz)$$

et du théorème 1, partie I.

2. Hypothèse (H).

DEFINITION 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante (τ_n). Soit*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

On dit que $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (H) *si toute fonction excessive w qui est $\mathcal{C}$-harmonique, est $\mathcal{C}_{\mathrm{K}}$-harmonique.*

THEOREME 1. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante* $\alpha = (\tau_n)$. *La famille* $\mathscr{C}$ *vérifie l'hypothèse* (H) *si et seulement si pour toute fonction excessive h, la plus grande minorante* $\mathscr{C}$*-harmonique de h avec l'ordre fort est la fonction excessive* $K_{\mathscr{C}} h$.

Démonstration. — Supposons que $\mathscr{C}$ vérifie l'hypothèse (H). Soit h une fonction excessive. Il faut montrer : si w est $\mathscr{C}$-harmonique et si $h - w$ est excessive, alors

$$w(x) \leqslant u(x) \ \gamma\text{-p.p.} \qquad \text{où} \qquad u(x) = K_{\mathscr{C}} h(x)$$

D'après le théorème 5, partie II, § 2, $h - w$ est excessive entraîne :

$$K_{\mathscr{C}} w \leqslant K_{\mathscr{C}} h$$

Comme w est $\mathscr{C}$-harmonique, et puisque $\mathscr{C}$ vérifie l'hypothèse (H), on a :

$$w(x) \leqslant u(x)$$

Réciproquement, montrons que $\mathscr{C}$ vérifie l'hypothèse (H).

Soit w une fonction $\mathscr{C}$-harmonique. D'après l'hypothèse, $K_{\mathscr{C}} w = w$ donc w est $\mathscr{C}_K$-harmonique.

LEMME 1. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante* $\alpha = (\tau_n)$. *La famille* $\mathscr{C}$ *vérifie l'hypothèse* (H) *si et seulement si* : $\mathscr{U}^F_{\mathscr{C}} = \phi$.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la définition 1 et du lemme 3 § 1.

THEOREME 2. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante* $\alpha = (\tau_n)$. *Soit*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathscr{C}$ *vérifie l'hypothèse* (H).

2) *Pour toute fonction excessive h, on a :* $F_\tau h = 0$.

Démonstration.

2) ⇒ (1) d'après la définition 1, puisque R_τ et S_τ définissent une partition de l'espace de probabilité $\Omega_0 = (\zeta > 0)$.

1) ⇒ (2)

Si h_1 est $\mathcal{C}$-harmonique, $h_1(x)\, E_x^{h_1}(R_\tau) = 0$ d'après la définition 1.

Si h_2 est un $\mathcal{C}$-potentiel, d'après le théorème 2, § 2,

$$h_2(x)\ E_x^{h_2}(R_\tau) = 0$$

toute fonction excessive h étant égale à la somme d'une fonction $\mathcal{C}$-harmonique h_1, et d'un $\mathcal{C}$-potentiel h_2, on a :

$$h(x)\ E_x^h[R_\tau] = h_1(x)\ E_x^{h_1}[R_\tau] + h_2(x)\ E_x^{h_2}[R_\tau]$$

d'après le théorème 6, § 2, partie II).

COROLLAIRE. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$.*

La famille satisfait à l'hypothèse (H) *si et seulement si on a la caractérisation suivante des $\mathcal{C}$-potentiels. h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si :* $K_{\mathcal{C}} h = 0$.

Démonstration. – Cela résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 2.

3. Hypothèse (R).

DEFINITION 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante (τ_n). Soit*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

On dit que $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (R) *si toute fonction excessive w qui est $\mathcal{C}$-harmonique, est $\mathcal{C}_F$-harmonique.*

LEMME 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$.*

La famille $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (R) *si et seulement si* $\mathfrak{U}_{\mathcal{C}}^K = \phi$.

Démonstration. – Cela résulte immédiatement de la définition 1 et du lemme 3, § 1.

THEOREME 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$.*

La famille $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (R) *si et seulement si pour toute fonction excessive h, la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort est la fonction excessive* $F_\tau h$.

Démonstration. – Elle est copiée sur celle du thèorème 1.

Supposons que $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (R).

Soit h une fonction excessive. Il faut montrer : si w est $\mathcal{C}$-harmonique et si $h - w$ est excessive, alors $w(x) \leqslant F_\tau h$ γ-p.p. D'après le théorème 6, partie 2, § 2, $h - w$ est excessive entraîne $F_\tau w \leqslant F_\tau h$.

Comme w est $\mathcal{C}$-harmonique, d'après l'hypothèse (R), on a $w(x) \leqslant F_\tau h(x)$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{C}$ vérifie (R). Soit w une fonction excessive $\mathcal{C}$-harmonique. D'après l'hypothèse, on a : $F_\tau w = w$.

COROLLAIRE. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$ et soit*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

$\mathcal{C}$ satisfait à (R) *si et seulement si les $\mathcal{C}$-potentiels sont caractérisés par :* $F_\tau w = 0$.

THEOREME 2. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$. Soit $\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse* (R)

2) *Pour toute fonction excessive h, on a :* $K_{\mathcal{C}} h = 0$.

Démonstration. – Pour toute fonction excessive h, $h = h_1 + h_2$ où h_1 est $\mathcal{C}$-harmonique et h_2 un $\mathcal{C}$-potentiel. On a : $h_1 = F_\tau h_1$ car $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (R), donc $K_{\mathcal{C}} h_1 = 0$.

Comme h_2 est un $\mathcal{C}$-potentiel (théorème 1, § 2, partie II), on a :

$K_{\mathcal{C}} h_2 = 0$ donc $K_{\mathcal{C}} h = 0$ (théorème 5, § 2, partie II).

Réciproquement :

soit w une fonction excessive qui est $\mathcal{C}$-harmonique.

On a $w(x)\ E_x^w(T\Omega(\mathcal{C})) = 0$ d'après 2.

D'après le théorème 7, § 2, partie II : $F_\tau w = w$.

4. Familles semi-fondamentales de temps d'arrêt.

Remarquons que la condition $h(x)\ E_x^h(\Omega(\mathcal{C})) = 0$ n'entraîne pas en général $h(x)\ E_x^h[T\Omega(\mathcal{C})] = 0$.

h est un $\mathcal{C}$-potentiel entraîne (théorème 1, § 2, partie II). $h(x)\ E_x^h[T\Omega(\mathcal{C})] = 0$, donc $h(x)\ E_x^h(\Omega(\mathcal{C})) = 0$ pour tout $x \in \{0 < h < +\infty\}$.

Pour avoir une réciproque on est amené à poser la définition suivante :

DEFINITION 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$.*

On dit que $\mathcal{C}$ est semi-fondamentale s'il existe une suite (T_k) de temps d'arrêt tels que :

$$T\Omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{k \geqslant 0} \theta_{T_k} \Omega(\mathcal{C}) \cdot (T_k < \zeta)$$

THEOREME 1. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille semi-fondamentale de temps d'arrêt et soit :*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

où (τ_n) est une suite dominante de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (H), *on a h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si*

$$\forall x \quad \textit{tel que} \quad h(x) < +\infty, \ \lim_{n \to +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E_x[h(X_\tau)]$$

Démonstration. – D'après le corollaire du théorème 2, § 2. h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si

pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, $h(x)\ \mathrm{E}_x^h[\mathrm{T}\Omega(\mathcal{C})] = 0$.

Supposons que $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$, on ait $h(x)\ \mathrm{E}_x^h\ [\Omega(\mathcal{C})] = 0$ alors on a pour tout temps d'arrêt τ :

$$h(x)\ \mathrm{E}_x^h\,[(\tau < \zeta)\ \theta_\tau\ \Omega(\mathcal{C})] =$$

$$= h(x)\ \mathrm{E}_x^h\,[\mathrm{E}_{x_\tau}^h(\Omega(\mathcal{C}))] = \mathrm{E}_x\,[h(\mathrm{X}_\tau)\ \mathrm{E}_{x_\tau}^h(\Omega(\mathcal{C}))]$$

Or, l'ensemble $\{x \mid h(x) < +\infty\}$ est polaire donc

$$h(\mathrm{X}_\tau)\ \mathrm{E}_{x_\tau}^h[\Omega(\mathcal{C})] = 0$$

PARTIE IV

CAS D'UNE FAMILLE $\mathcal{C}$ DE TEMPS D'ARRET NON SEPARABLE

Dans les § II, III, précédents, on a toujours considéré une famille $\mathcal{C}$ de temps d'arrêt qui vérifiait l'hypothèse de séparabilité : il existe dans $\mathcal{C}$ une suite croissante dominante de temps d'arrêt.

On ne fait plus maintenant cette hypothèse sur $\mathcal{C}$; on va voir de quelle façon on peut tout de même obtenir des caractérisations des $\mathcal{C}$-potentiels.

LEMME 1. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles de temps d'arrêt telles que $\mathcal{C}'$ est contenue dans $\mathcal{C}$. h est un $\mathcal{C}'$-potentiel entraîne h est un $\mathcal{C}$-potentiel.*

Démonstration. — Soit w une minorante $\mathcal{C}$-harmonique de h avec l'ordre fort, w est $\mathcal{C}'$-harmonique. Si h est un $\mathcal{C}'$-potentiel, $w = 0$ donc h est un $\mathcal{C}$-potentiel.

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ et soit h un $\mathcal{C}$-potentiel, on cherche à quelle condition h est un $\mathcal{C}'$-potentiel.

DEFINITION 1. — *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit τ un temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à $\mathcal{C}$.*

On dit que τ vérifie la condition $(\mathrm{H}_{\mathcal{C}})$ *si pour toute fonction excessive w qui est un $\mathcal{C}$-potentiel, on a :* $\mathrm{F}_\tau w = 0$.

$\mathrm{F}_\tau w$ *est définie, Théorème 2,* § 2, *partie II, par :*

$$\forall x \quad \text{tel que} \quad w(x) < +\infty$$

$$\mathrm{F}_\tau w(x) = w(x)\, \mathrm{E}_x^w \left[\bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta) \right]$$

LEMME 2. — *τ vérifie* $(\mathrm{H}_{\mathcal{C}})$ *si et seulement si* $\forall z \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}$, *on a* $\mathrm{F}_\tau k_z = 0$.

Soit $\mathcal{C}'$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante. $\alpha = (\tau_n)$. Alors $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$ ne dépend pas de la suite dominante (α).

DEFINITION 2. — *Soit $\mathcal{C}'$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante $\alpha = (\tau_n)$ et soit $\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$. On dit que $\mathcal{C}'$ vérifie* $(H_{\mathcal{C}})$ *si τ vérifie* $(H_{\mathcal{C}})$.

Remarque. — $\mathcal{C}'$ vérifie toujours l'hypothèse $(H_{\mathcal{C}'})$.

THEOREME 1. — *Soit $\mathcal{C}'$ une famille de temps d'arrêt dans laquelle il existe une suite dominante. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$\mathcal{C}'$ vérifie* $(H_{\mathcal{C}})$

2) *h est un $\mathcal{C}$-potentiel entraîne h est un $\mathcal{C}'$-potentiel si et seulement si :*

$$\forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty, \; h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$$

$\mathcal{C}'$ n'est pas forcément contenue dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Soit $\alpha = (\tau_n)$ une suite dominante dans $\mathcal{C}'$ et soit $\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$. Supposons que $\mathcal{C}'$ vérifie $(H_{\mathcal{C}})$.

Soit h un $\mathcal{C}$-potentiel, on a (définition 1) $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$,

$$F_\tau h(x) = h(x)\, E_x^h\left[\bigcap_{0 \leq t < \zeta} (\tau \circ \theta_t + t < \zeta)\right] = 0$$

Comme la plus grande minorante $\mathcal{C}'$-harmonique de h est (théorème 7, § 2, partie II) :

$$h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathcal{C}')] + F_\tau h(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que} \qquad h(x) < +\infty$$

h est un $\mathcal{C}'$-potentiel équivaut à : $h(x)\, E_x^h\,[T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}'$ ne vérifie pas la condition $(H_{\mathcal{C}})$: alors il existe un $\mathcal{C}$-potentiel w tel que $F_\tau w > 0$

$$F_\tau w = \int F_\tau h_z\, \mu^w(dz)$$

μ^w est portée par $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}$ (corollaire du lemme, 5, § 1, partie I) donc il existe un *$\mathcal{C}$-potentiel* k_z tel que $F_\tau k_z > 0$ soit $F_\tau k_z = k_z$ donc k_z est *$\mathcal{C}'$-harmonique,* partie II, § 2, théorème 3, et on a :

$$k_z(x)\ E_x^{k_z}\ [S_\tau] = 0 \quad \text{donc} \quad k_z(x)\ E_x^{k_z}\ [T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$$

2) n'est pas vérifiée.

COROLLAIRE. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt contenue dans $\mathcal{C}$. Soit*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) *Pour toute fonction excessive w, w est un $\mathcal{C}$-potentiel entraîne* $F_\tau w = 0$.

2) *h est un $\mathcal{C}$-potentiel et $h(x)\ E_x^h [T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$* $\Big\}$ *si et seulement si h est un $\mathcal{C}'$-potentiel.*

Démonstration. – Cela résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 1.

Remarque. – $\mathcal{C}'$ vérifie (H) entraîne $\mathcal{C}'$ vérifie $(H_{\mathcal{C}})$.

DEFINITION 3. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ une suite croissante de temps d'arrêt n'appartenant pas forcément à $\mathcal{C}$. On pose $\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$. On dit que (τ_n) vérifie l'hypothèse $(R_{\mathcal{C}})$ si pour toute fonction excessive h qui est un $\mathcal{C}$-potentiel, on a : pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, $h(x)\ E_x^h [T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$.*

LEMME 3. – *La suite $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ vérifie $(R_{\mathcal{C}})$: si et seulement si*

$$\forall z \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}, \quad \textit{on a :} \quad k_z(x)\ E_x^{k_z} [T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$$

pour tout x tel que $k_z(x) < +\infty$.

Remarque. – Si on prend $\mathcal{C} = (\tau_n)$, $\mathcal{C}$ vérifie $(R_{\mathcal{C}})$.

THEOREME 2. – *Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt. On pose :*

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{C}'$ *vérifie* $(R_{\mathcal{C}})$.

2) h *est un* $\mathcal{C}$*-potentiel entraîne* h *est un* $\mathcal{C}'$*-potentiel si et seulement si* $F_\tau h = 0$.

$\mathcal{C}'$ *n'est pas forcément contenue dans* $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Montrons que 1) entraîne 2).

Soit h un $\mathcal{C}$-potentiel, 1) entraîne $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$, $h(x)\, E_x^h\, [T\Omega(\mathcal{C}')] = 0$, la plus grande minorante au sens fort, $\mathcal{C}'$-harmonique de h est égale à $F_\tau\, h$.

Théorème 7, § 2, partie II.

Donc h est un $\mathcal{C}'$-potentiel si et seulement si $F_\tau h = 0$.

Réciproquement, 2) entraîne 1).

Si 1) n'est pas vérifié, il existe un $\mathcal{C}$*-potentiel* k_z tel que

$$K_{\mathcal{C}'}\, k_z(x) = k_z(x)\, E_x^{k_z}\, [T\Omega(\mathcal{C}')] > 0$$

$K_{\mathcal{C}'}\, k_z = a k_z$ avec $a > 0$ donc k_z est $\mathcal{C}'$*-harmonique* (théorème 1, § 2, partie II).

On a : $F_\tau k \neq k_z$ donc $F_\tau k_z = 0$.

Remarque. — $\mathcal{C}'$ vérifie (R) entraîne $\mathcal{C}'$ vérifie $(R_{\mathcal{C}})$.

COROLLAIRE — *Soit* $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ *une suite de temps d'arrêt contenue dans* $\mathcal{C}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{C}'$ *vérifie* $(R_{\mathcal{C}})$.

2) $\left.\begin{array}{l} h \textit{ est un } \mathcal{C}\textit{-potentiel} \\ \textit{et } F_\tau h = 0 \\ \left(\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n\right) \end{array}\right\}$ *si et seulement si* h *est un* $\mathcal{C}'$*-potentiel.*

THEOREME 3. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une famille de temps d'arrêt et soit* $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ *une suite croissante de temps d'arrêt contenue dans* $\mathcal{C}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{C}'$ *vérifie* $(H_{\mathcal{C}})$ *et* $(R_{\mathcal{C}})$.

2) *Pour toute fonction excessive w, la plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique avec l'ordre fort de w est* $F_\tau w + K_{\mathcal{C}'} w$.

Démonstration. – Soit w une fonction excessive, $w = w_1 + w_2$ où w_1 est $\mathcal{C}$-harmonique et w_2 est un $\mathcal{C}$-potentiel $\mathcal{C}$-décomposition de Riesz ; partie I).

Comme $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, w_1 est $\mathcal{C}'$harmonique ; donc :

$$F_\tau w_1 + K_{\mathcal{C}'} w_1 = w_1 \quad \text{(théorème 7, partie II).}$$

Le Théorème 5 et le théorème 6 (partie II) entraînent :

$$F_\tau w + K_{\mathcal{C}'} w = w_1 + F_\tau w_2 + K_{\mathcal{C}'} w_2$$

Comme $\mathcal{C}'$ vérifie $(H_{\mathcal{C}})$ et $(R_{\mathcal{C}})$, on a :

$$F_\tau w_2 + K_{\mathcal{C}'} w_2 = 0 \quad \text{donc :} \quad w_1 = F_\tau w + K_{\mathcal{C}'} w$$

Réciproquement, soit w un $\mathcal{C}$-potentiel, sa plus grande minorante $\mathcal{C}$-harmonique avec l'ordre fort est nulle, donc $F_\tau w + K_{\mathcal{C}'} w = 0$.

Remarque. – Soit $\mathcal{C}$ une famille de temps d'arrêt et soit $\mathcal{C}' = (\tau_n)$ une suite croissante de temps d'arrêt contenue dans $\mathcal{C}$. On a l'équivalence des deux conditions :

1) $\mathcal{C}'$ vérifie $(H_{\mathcal{C}})$ et $(R_{\mathcal{C}})$.

2) h est un $\mathcal{C}$-potentiel si et seulement si h est un $\mathcal{C}'$-potentiel.

PARTIE V

EXEMPLES DE $\mathcal{C}$-FAMILLES DE TEMPS D'ARRET

1. Cas des fonctions harmoniques dans un ouvert de E.

– Soit D un ensemble ouvert de E. On dit que la fonction excessive h est harmonique dans D si $E_x[h(X_{\tau_\Gamma})] = h(x)$ pour tout $x \in \{0 < h < +\infty\}$ et tout compact Γ contenu dans D.

$\tau_\Gamma = \inf\{t > 0 \mid X_t \in \Gamma\}$ est le premier temps de sortie de Γ. Soit $\mathcal{C}_D$ la famille des premiers temps de sortie des compacts contenus dans D :

LEMME 1. – *La famille $\mathcal{C}_D$ est une famille séparable de temps d'arrêt.*

Démonstration. – D étant localement compact est réunion d'une suite croissante d'ouverts relativement compacts (U_n). La suite (τ_n) des premiers temps de sortie des ensembles U_n est une suite dominante dans $\mathcal{C}_D$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n = \tau_D$ où τ_D est le premier temps de sortie de D.

En effet, $\quad \forall n, \ \tau_n \leqslant \tau_D \quad$ donc $\quad \tau \leqslant \tau_D$

Supposons $\tau < \tau_D$ sur $\tau < \zeta$; $X_\tau = \lim\limits_{n \to +\infty} X_{\tau_n}$ appartient au complémentaire de D, d'où une contradiction.

Soit A un ensemble presque borélien. A est h-polaire si

$$P^h(T_A < \zeta) = 0.$$

La famille $\mathcal{C}_D$ est h-fondamentale si et seulement si le complémentaire de D est h-polaire.

$$(T_A = \inf\{t > 0 \mid X \in A\})$$

On peut appliquer les résultats de la partie III.

On va étudier les caractérisations des $\mathcal{C}_D$-potentiels suivant les propriétés de l'ensemble ouvert D.

THEOREME 1. – *Soit* D *un ensemble ouvert de* E, *et soit* h *une fonction excessive;* h *est un* $\mathcal{C}_D$*-potentiel entraîne* :

$$\lim_{n\to+\infty} E_x[h(X_{\tau_n})] = E_x[h(X_{\tau_D})] \ \forall x \quad \text{tel que} \quad h(x) < +\infty$$

Démonstration. – $\tau_D = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$. On applique le théorème 1, § 2, partie II

$$K_{\mathcal{C}_D} h(x) = h(x)\, E_x^h[T\Omega(\mathcal{C}_D)] = 0 \quad \text{donc} \quad h(x)\, E_x^h[\Omega(\mathcal{C})] = 0$$

mais

$$h(x)\, E_x^h(\Omega(\mathcal{C})] = \lim_{n\to+\infty} E_x[h(X_{\tau_n})] - E_x[h(X_{\tau_D})].$$

La réciproque du théorème 1 n'est pas vraie en général. Par exemple : considérons le mouvement brownien dans le disque $\{|z| \leqslant 2\}$ et soit h une fonction excessive dont la mesure spectrale μ^h est concentrée dans :

$$\left\{ |z| \leqslant \frac{1}{4} \right\} \ ; \quad \text{et soit} \quad D = \left\{ 2 \geqslant |z| > \frac{1}{2} \right\}$$

On a : P_x^h p.s. $\tau_D < \zeta$; $\tau_n < \zeta$ puisque le mouvement brownien est continu.

On se demande pour quels ensembles ouverts D, on a une réciproque, c'est-à-dire la condition (9) caractérise les $\mathcal{C}_D$-potentiels.

On va chercher les ensembles ouverts D pour lesquels la condition :

$$K_{\mathcal{C}_D} h = 0 \text{ caractérise les } \mathcal{C}_D\text{-potentiels.} \tag{10}$$

c'est-à-dire les ensembles pour lesquels $\mathcal{C}_D$ vérifie l'hypothèse (H) (corollaire du théorème 2, partie III).

DEFINITION 1. – *Soit* A *un sous-ensemble presque-borélien de* E. *On dit que* A *est totalement transient si pour toute fonction excessive* w, *on a* $F_{\tau_A} w = 0$ *où* τ_A *est le premier temps d'entrée dans* A :

$$\tau_A = \inf\{t > 0 \mid X_t \in A\}.$$

THEOREME 2. – *Le complémentaire de* D *est totalement transient si et seulement si la condition :*

$K_{\mathscr{C}_D}\, h = 0$ *caractérise les* $\mathscr{C}_D$*-potentiels.*

Une étude plus complète de cette classe d'ensembles sera faite dans (9).

Démonstration. – Il suffit de démontrer que [corollaire du théorème 2, § 2. partie III]. Le complémentaire de D est totalement transient si et seulement si $\mathscr{C}_D$ satisfait l'hypothèse (H). Cela résulte immédiatement de la définition des ensembles totalement transients.

THEOREME 3. – *Soit* D *un ensemble localement fermé de* E ; *une fonction excessive h est un* $\mathscr{C}_D$*-potentiel entraîne* :

$$F_{\tau_D} h = 0 \tag{11}$$

où

$$\tau_D = \inf \{t > 0 \mid X_t \notin D\}$$

Mais en général, la condition $F_{\tau_D}\, h = 0$ n'entraîne pas h est un $\mathscr{C}_D$-potentiel. Par exemple, si le complémentaire de D est un ensemble polaire, la condition (11) est satisfaite pour toute fonction excessive h.

On va chercher les ensembles pour lesquels (11) caractérise les $\mathscr{C}_D$potentiels : c'est-à-dire pour lesquels $\mathscr{C}_D$ vérifie l'hypothèse (R) (corollaire, théorème 3, partie III).

DEFINITION 2. – *Soit* D *une partie ouverte de* E. *On dit que le complémentaire de* D *est un sous-ensemble de pénétration de* E, *si pour toute fonction excessive h, on a :* $K_{\mathscr{C}_D} h = 0$, *où* $\mathscr{C}_D$ *est la famille de temps d'arrêt définie ci-dessus.*

THEOREME 4. – *Soit* D *une partie ouverte de* E. *Le complémentaire de* D *est un ensemble de pénétration si et seulement si, la condition* $F_{\tau_D} h = 0$ *caractérise les* $\mathscr{C}_D$*-potentiels.*

Une étude plus complète des ensembles de pénétration est faite dans (9).

2. Cas des fonctions harmoniques dans une partie presque-borélienne de E.

Soit D un presque-borélien de E. On dit que la fonction excessive h est harmonique dans D si $P_{\tau_S} h = h$, pour tout compact S finement ouvert contenu dans D.

$[\tau_S = \inf \{t > 0 \mid X_t \notin S\}$ est le premier temps de sortie de S].

$\mathcal{C}_D$ la famille des premiers temps de sortie des compacts contenus dans D n'est pas séparable en général.

Par exemple, soit le cas des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin.

Soit 0 un ouvert fin de E ; on considère la famille $\mathcal{F}$ des ensembles finement ouverts d'adhérence compacte contenue dans 0.

Soit $\mathcal{C}_0$ la famille des temps de sortie des ensembles de $\mathcal{F}$. On va chercher comme dans le § I des conditions suffisantes pour que h soit un $\mathcal{F}_0$-potentiel.

Ici la condition de séparabilité (A) n'est pas remplie en général pour la famille $\mathcal{C}_0$.

Supposons qu'il existe une sous-famille dénombrable $\mathcal{F}_0 = (A_n)$ contenue dans $\mathcal{F}$ telle que $0 = \bigcup_n A_n \cup N$ où N est un ensemble semi-polaire. (On suppose la suite A_n croissante). [Ceci est vérifié dans le cas d'un espace harmonique fort [10 p. 29] et [4].

On va utiliser les résultats de la partie IV.

Soit $\mathcal{C}'_0$ la famille des temps de sortie des ensembles de $\mathcal{F}_0$. $\mathcal{C}'_0$ est une famille séparable.

$\forall_n$, A_n est finement ouvert et $\tau_n = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin A_n\}$ donc X_{τ_n} appartient au complémentaire de A et comme la suite A_n est croissante :

$$X_m \in A_n^c \quad \forall m \geqslant n.$$

Soit :

$$\tau = \lim_{n \to +\infty} \tau_n \qquad X_\tau = \lim_{n \to +\infty} X_{\tau_n} \qquad \text{sur} \quad (\tau < \zeta)$$

Donc :

$$X_\tau \in \overline{A_n^c}, \ \forall n$$

X_τ appartient au complémentaire de $\bigcup_n \mathring{A}_n \subset 0'$.

Si on fait l'hypothèse :

$X_\tau = \lim_{n \to +\infty} X_{\tau_n}$ sur $(\tau < \zeta)$ limite au sens de la topologie fine.

On a $\tau \geqslant \tau_{0'}$; $\tau_{0'}$ étant le premier temps de sortie de $0'$, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \tau_{0'} .$$

On peut utiliser les résultats de la partie III pour $\mathcal{C}_{0'}$ et ceux de la partie IV pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{0'}$.

On obtient :

1) $\mathcal{C}_{0'}$ vérifie $(H_{\mathcal{C}_0})$ et $(R_{\mathcal{C}_0})$ si et seulement si pour toute fonction excessive h, h est un $\mathcal{C}_0$-potentiel entraîne h est un $\mathcal{C}_{0'}$-potentiel.

2) Le complémentaire de $0'$ est totalement transient si et seulement si la condition :

$$\lim_{n \to +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E[h(X_{\tau_{0'}})]$$

caractérise les $\mathcal{C}_{0'}$-potentiels.

Démonstration :

1) Résulte de la remarque qui suit le théorème 3 partie IV.

2) Le complémentaire de $0'$ est totalement transient si et seulement si $\mathcal{C}_{0'}$ vérifie l'hypothèse (H). On applique le corollaire du théorème 2 (§ 2 partie II).

3. Introduction d'une hypothèse de séparabilité dans la théorie du potentiel fin.

Soit O un ensemble finement ouvert et soit τ_0 le premier temps de sortie de O. Pour tout entier $k \geqslant 0$. On pose :

$$O_k = \left\{ x \in O \mid E_x(e^{-\tau_0}) < 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

On a : $O = \bigcup_k O_k$. Soit $\mathcal{C} = (\tau_k)$ la suite des premiers temps de sortie des ensembles O_k et soit $\tau = \lim_{k \to +\infty} \tau_k$.

Montrons que : $\tau = \tau_0$ avec l'hypothèse : $X_\tau = \lim_{k \to +\infty} X_{\tau_k}$ sur $(\tau < \zeta)$ au sens de la topologie fine, pour toute suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \tau$.

Les fonctions 1-excessives étant supposées continues à droite sur les trajectoires, on a :

$$E_{X_{\tau_k}}(e^{-\tau_0}) \geqslant 1 - \frac{1}{k}$$

X_{τ_k} appartient à l'ensemble finement fermé :

$$\left\{ x \mid E_x(e^{-\tau_0}) \geqslant 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

donc :

$$X_\tau \in \{x \mid E_x(e^{-\tau_0}) = 1\}, \quad \text{soit} \quad X_\tau \notin O$$

$$\tau \geqslant \tau_0, \quad \text{comme} \quad \tau \leqslant \tau_0, \quad \text{on a} \quad \lim_{k \to +\infty} \tau_k = \tau_0.$$

On a le résultat :

Le complémentaire de 0 est totalement transient si et seulement si la condition :

$$\lim_{n \to +\infty} E[h(X_{\tau_n})] = E[h(X_{\tau_0})]$$

caractérise les $\mathscr{C}$-potentiels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.B. Dynkin, Excessive functions and space of exits of a Markov process, *Theor. Probability Appl.,* 14 (1969), 37-54.

[2] E.B. Dynkin, The Space of exits of a Markov process, *Russian Math. Surveys,* (1969) (4) (24).

[3] P.A. Meyer, Processus de Markov. La frontière de Martin, *Lectures notes in Mathematics.* Vol. 27, (1968) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[4] J.L. Doob, Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 72, (1966), 579-600.

[5] H. AIRAULT, Théorème de Fatou et Frontière de Martin, *Journal of Functional Analysis*, 12 (1973).

[6] J. NEVEU, Calcul des probabilités (prop. 1.6.1. p. 25).

[7] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastique, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1972).

[8] J. AZEMA, Noyau potentiel associé à une fonction excessive d'un processus de Markov, *Annales Inst. Fourier*, 1969 (19.2), 495-526.

[9] H. AIRAULT, Retournement du temps et quelques ensembles exceptionnels en théorie du potentiel (à paraître).

[10] B. FLUGEDE, Finely Harmonic Functions, *Lecture Notes in Mathematics.* 289.

[11] P.A. MEYER, Processus de Markov (1967), *Lectures notes in Mathematics,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. (p. 161, théorème 47).

[12] J.L. DOOB, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431-458.

[13] E.B. DYNKIN, Markov, processes, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1965.

Manuscrit reçu le 25 juin 1973
accepté par M. Brelot.

Hélène AIRAULT,
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris.