ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CARL S. HERZ

Une généralisation de la notion de transformée de Fourier-Stieltjes

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 145-157

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_145_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 145-157

UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE TRANSFORMÉE DE FOURIER-STIELTJES

par Carl HERZ

Le présent article comporte une version de mes conférences à Orsay en juin 1970, où j'ai démontré que l'algèbre $B_p(G)$ d'un groupe moyennable est le banach dual à l'espace $PF_p(G)$ des p-pseudofonctions, c'est-à-dire, le complété de $L_1(G)$ pour la norme de convolution de $L_p(G)$.

L'algèbre $B_2(G)$, notée $\mathcal{V}(G)$ dans [5], répond exactement à la notion de l'algèbre des transformées de Fourier-Stieltjes si le groupe G est moyennable, d'où le titre.

Nous donnons, dans l'article même, toutes les définitions nécessaires. Cependant, le lecteur peut bien regarder [3], [5], [4] et [7] pour un aperçu du sujet. Les groupes compacts, commutatifs, nilpotents, et résolubles sont des exemples de groupes moyennables. Nous renvoyons le lecteur à [2] pour une liste des propriétés dont jouissent de tels groupes ; voir aussi [7].

Fixons une fois pour toutes un nombre p, $1 < p < \infty$ et notons p' son indice conjugué : $1/p + 1/p' = 1$. Etant donné un ensemble X on pose $l_p(X)$ le banach constitué par les applications $u : X \to \mathbf{C}$ telles que

$$\|u\|_p = \left\{ \sum_{x \in X} |u(x)|^p \right\}^{1/p} < \infty .$$

Notons $\mathrm{END}_p(X)$ l'algèbre de banach des opérateurs bornés sur $l_p(X)$. Ainsi un élément $k \in \mathrm{END}_p(X)$ est une application $k : X \times X \to \mathbf{C}$ telle que $|||k|||_p < \infty$, où $|||k|||_p$ est la meilleure constante c telle que

$$\left| \sum_{x,y \in X} k(x, y)\, u(y)\, v(x) \right| \leqslant c \left(\sum |u(y)|^p \right)^{1/p} \left(\sum |v(x)|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

Disons que $k \in \mathrm{END}_p(\mathrm{X})$ est un noyau fini si l'application $k : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbf{C}$ est nulle sauf sur un ensemble fini de points.

On définit une algèbre de Banach commutative avec unité $\mathrm{V}_p(\mathrm{X})$ comme suit. Les éléments $\varphi \in \mathrm{V}_p(\mathrm{X})$ sont des applications

$$\varphi : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbf{C}$$

pour lesquelles il existe une constante $\|\varphi\|_{\mathrm{V}}$ telle que

$$|||\varphi k|||_p \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{V}} \; |||k|||_p$$

pour chaque noyau fini $k \in \mathrm{END}_p(\mathrm{X})$. Ici φk désigne la multiplication ponctuelle, $\varphi k(x, y) = \varphi(x, y)\; k(x, y)$.

Soit maintenant X un espace séparé localement compact. Notons X_d l'ensemble assujetti à X, c'est-à-dire, X muni de la topologie discrète. Nous posons $\mathrm{V}_p(\mathrm{X})$ la sous-algèbre de Banach de $\mathrm{V}_p(\mathrm{X}_d)$ consituée par les éléments qui correspondent aux applications continues $\varphi : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbf{C}$. Evidemment, V_p donne un foncteur contravariant de ELC (espaces topologiques séparés localement compacts) dans ABCU (algèbres de Banach commutatives avec unité).

Pour un groupe G localement compact, l'algèbre $\mathrm{V}_p(\mathrm{G})$ est définie en termes de la structure topologique de l'espace G. Pour faire intervenir sa structure algébrique nous posons $\mathrm{B}_p(\mathrm{G})$ l'ensemble des applications continues $\varphi : \mathrm{G} \to \mathbf{C}$ telles que $\Phi \in \mathrm{V}_p(\mathrm{G})$ où $\Phi(x, y) = \varphi(xy^{-1})$. Ainsi $\mathrm{B}_p(\mathrm{G})$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mathrm{V}_p(\mathrm{G})$ composée des éléments invariants pour la translation à droite simultanément dans les deux variables. Or, $\mathrm{B}_p(\mathrm{G})$ est une algèbre de Banach pour les opérations algébriques ponctuelles avec la norme $\|\varphi\|_{\mathrm{B}} = \|\Phi\|_{\mathrm{V}}$. Il est clair que B_p est un foncteur contravariant de GLC (groupes localement compacts) dans ABCU. Ceci veut dire que si $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme (homomorphisme continu) de groupes localement compacts alors $\varphi \to \varphi \circ h$ donne une contraction

$$\mathrm{B}_p(\mathrm{H}) \to \mathrm{B}_p(\mathrm{G}).$$

L'intérêt de B_p découle des théorèmes qui suivent. Avant de les énoncer il faut introduire deux autres algèbres, A_p et PF_p.

D'emblée $\mathrm{A}_p(\mathrm{G})$ est le plus petit banach de fonctions continues sur G qui contient toutes les fonctions de la forme $f = v * \check{u}$ où $u \in \mathrm{L}_p(\mathrm{G})$ et $v \in \mathrm{L}_{p'}(\mathrm{G})$, les espaces de Lebesgue étant construits à partir de la mesure de Haar invariante à gauche sur G. La formule $f = v * \check{u}$ correspond à

$$f(x) = \int_G u(x^{-1}y)\, v(y)\, dy = \int_G u(y)\, v(xy)\, dy.$$

L'addition, et ultérieurement la multiplication, sur $A_p(G)$ sont les opérations ponctuelles de fonctions.

THEOREME 1. — i) *Si* $f \in A_p(G)$ *alors* $f \in B_p(G)$ *et* $\|f\|_B \leqslant \|f\|_A$. ii) *Si* $f \in A_p(G)$ *et* $\varphi \in B_p(G)$ *alors* $\varphi f \in A_p(G)$ *et* $\|\varphi f\|_A \leqslant \|\varphi\|_B \|f\|_A$. iii) *Si le groupe* G *est moyennable alors* $B_p(G)$ *s'identifie avec l'algèbre de multiplicateurs de* $A_p(G)$ *et réciproquement* A_p *est l'idéal fermé de* B_p *engendré par les éléments à support compact.*

Un convoluteur de $L_p(G)$ est un opérateur qui commue avec les translations à droite. Ils forment une algèbre de Banach avec unité pour la multiplication d'opérateurs. En particulier, si $k \in L_1(G)$ alors k donne lieu à un convoluteur de $L_p(G)$ par $u \to k * u$ où

$$k * u(x) = \int_G k(y)\, u(y^{-1}x)\, dy.$$

Soient $|||k|||_p$ la norme de convoluteur et $PF_p(G)$ le complété de $L_1(G)$ pour cette norme. Or, PF_p est une algèbre de Banach pour la convolution dont la norme coïncide avec la norme de fonctionnelle linéaire sur A_p donnée par $f \to \int_G k(x)\, f(x)\, dx$ pour $f \in A_p$, $k \in PF_p$.

THEOREME 2. — iv) *L'algèbre* $B_p(G)$ *opère sur l'espace* $CONV_p(G)$ *des convoluteurs de* $L_p(G)$ *de sorte que si* $\varphi \in B_p$ *et* $T \in CONV_p$ *alors* $|||\varphi T|||_p \leqslant \|\varphi\|_B\, |||T|||_p$ *où, pour le cas particulier d'un convoluteur provenant d'une fonction* $k \in L_1(G)$, *le produit* φk *est le produit ordinaire.* v) *Si le groupe* G *est moyennable alors* $B_p(G)$ *s'identifie au banach dual de* $PF_p(G)$ *pour l'accouplement*

$$\langle \varphi, k \rangle = \int_G \varphi(x)\, k(x)\, dx \quad \text{où} \quad \varphi \in B_p,\ k \in L_1.$$

Les énoncés i), ii) et iv) sont vieux ; je les ai déjà démontrés, avec une définition plus compliquée de B_p, dans [5] (la démonstration n'y est donnée que pour $p = 2$ mais le cas général n'exige aucun changement sérieux). L'énoncé iii) est un corollaire banal de

i) et ii) une fois que l'on sache l'existence pour tout compact K du groupe moyennable G et pour chaque $\epsilon > 0$ d'une fonction $f \in A$ (G) telle que $f = 1$ sur K et $\| f \|_A < 1 + \epsilon$. En effet, un multiplicateur φ de A_p est évidemment une fonction continue sur G. Pour vérifier qu'une fonction continue appartient à B_p il s'agit de vérifier des inégalités dont chacune n'importe que sur les points d'un compact de G ; or ces inégalités pour le multiplicateur φ reviennent à la considération des $\varphi f \in A_p$ pour lesquelles i) donne ce qu'il faut démontrer.

Le but de cet article est donc de démontrer v), un énoncé qui est faux pour chaque groupe non-moyennable. (Pour qu'on ait $\left| \int k(x)\, dx \right|_p \leqslant |||k|||_p$ pour chaque $k \in L_1(G)$ il faut et il suffit que G soit moyennable). Pour le cas $p = 2$ le résultat est connu car $PF_2(G)$ n'est autre que l'algèbre C^* du groupe moyennable G et $B_2(G)$ son algèbre de Fourier-Stieltjes, voir [3, Ch. 2]. La preuve antérieure pour $p = 2$ est tout à fait hilbertienne et n'admet pas d'extension à $p \neq 2$. La démonstration que nous donnons ici est malheureusement complètement abstraite et non-intuitive.

Les ingrédients initiaux sont assez naturels. On considère $END_p(G) = HOM(L_p(G), L_p(G))$ l'espace des opérateurs bornés sur $L_p(G)$. Soit $COMP_p(G)$ le sous-espace fermé de $END_p(G)$ engendré par les opérateurs de rang fini ; en fait $COMP_p(G)$ est constitué des opérateurs compacts sur $L_p(G)$. Soit $TC_p(G) = L_p(G) \otimes L_{p'}(G)$, le produit tensoriel banachique qui, ici, s'identifie aux opérateurs à trace sur $L_p(G)$. Par leur dualité fonctorielle, END est le banach dual à TC ; grâce à la nature des espaces L_p, on a aussi que TC est le dual de COMP. Or, en écrivant $C = COMP_p(G)$, nous avons $TC_p(G) = C'$ et $END_p(G) = C''$. Le groupe G a une représentation fortement continue dans $L_p(G)$ par translation à droite, $x \to \rho(x)$ où pour $u \in L_p(G)$ on pose $\rho(t)\, u(x) = u(xt)\, \Delta^{1/p}(t)$ où Δ désigne la fonction modulaire du groupe. De cette représentation on arrive à l'action de G sur $END_p(G)$ où $t \in G$ opère sur $T \in END_p(G)$ par $T \to \rho(t)\, T\rho(t^{-1})$. En tout cas, G opère sur C, C', et C'' par des isométries, l'action étant d'ailleurs fortement continue sur C et C'.

Soit $(C'')^G$ le sous-espace de C'' constitué par les éléments fixes sous l'action de G. Alors $(C'')^G$ n'est autre que $CONV_p(G)$.

Soit $(C')_G$ le quotient de C' dont le noyau est le sous-espace fermé engendré par les éléments $\pi(x)T - T$ pour $x \in G$, $T \in C'$ où π donne l'action de G sur C'. Il est évident que $(C'')^G$ est le banach dual à $(C')_G$, et pour les groupes moyennables $(TC_p(G))_G$ s'identifie à $A_p(G)$ comme on verra.

Est-ce que $(C')_G$ s'identifie avec le dual d'un sous-espace de C ? Le seul candidat possible pour ce sous-espace est $(C)^G$ mais alors, $(C)^G = (0)$ si G n'est pas compact car il n'y a pas de convoluteur compact non-trivial sur $L_p(G)$ d'un groupe non-compact. Au contraire, si G est compact alors $(C)^G = PF_p(G)$. Pour voir cette égalité on peut raisonner de la manière suivante. D'une part si k est une fonction continue sur G alors une convolution par k est un opérateur compact sur $L_p(G)$; par passage à la fermeture dans $END_p(G)$ on a $PF_p \subset COMP_p$. D'autre part, $COMP_p$ est engendré par les opérateurs de rang 1, c'est-à-dire les noyaux de la forme $\kappa(x, y) = f(x)\, g(y)$ où $f \in L_p$, $g \in L_{p'}$; $(C)^G$ est donc engendré par les opérateurs κ^G où $\kappa \in C$ et $\kappa^G(x, y) = \int_G \kappa(xt, yt)\, dt$. Dans ce cas $\int \kappa^G(x, y)\, u(y)\, dy = k * u(x)$ où $k(x) = \int_G f(xt)\, g(t)\, dt$, ce qui entraîne $(C)^G \subset PF_p$. Voir aussi [1].

La démonstration facile de l'énoncé (v) pour le cas de groupes compacts ne s'adapte pas directement au cas général. Il faut compliquer les choses et à ce propos il convient de généraliser un peu. Soient X un espace séparé localement compact et μ une mesure de Radon positive sur X ; l'exemple le plus intéressant pour nous étant $X = G$, un groupe localement compact, et μ une mesure de Haar invariante à gauche. Notons C l'espace des opérateurs compacts sur $L_p(X, \mu)$ dont le dual est $C' = TC_p(X, \mu) = L_p(X, \mu) \otimes L_{p'}(X, \mu)$. Soit Ω l'anneau (algébrique, aucune topologie n'est imposée sur Ω) engendré par les applications $\omega : X \times X \to \mathbf{C}$ de la forme $\omega(x, y) = \omega_1(x)\, \omega_2(y)$ où ω_1 et ω_2 sont des fonctions continues à support compact. Nous appelons noyau spécial un opérateur K sur $L_p(X, \mu)$ de la forme $Ku(x) = \int_X \kappa(x, y)\, u(y)\, d\mu(y)$ où $\kappa(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y)$, les f_i et les g_i étant des fonctions continues à support compact. L'espace des noyaux spéciaux est dense dans C et il est facile de voir que l'opération de Ω sur les noyaux spéciaux par multiplication ordinaire s'étend à une action sur C.

Posons $W_p(X, \mu) = C \otimes_\Omega C'$, un espace de Banach dont le dual est $W'_p(X, \mu) = \mathrm{HOM}^\Omega(C', C')$. Avis au lecteur : c'est le formalisme qui compte ; nous allons expliciter les notions, mais on risque de se perdre dans les complications inutiles en essayant de mettre les preuves sous une forme concrète. En effet, pour étudier C' il suffit de regarder les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $T = u \otimes v$ où $u \in L_p(X, \mu)$ et $v \in L_{p'}(X, \mu)$. La dualité entre un noyau spécial $K \in C$ est un tel $T \in C'$ est donné par

$$\langle K, T \rangle = \langle Ku, v \rangle = \iint \kappa(x, y)\, u(y)\, v(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x).$$

Si l'on définit $\omega' T$ par $\langle K, \omega' T \rangle = \langle \omega K, T \rangle$ où $\omega \in \Omega$, alors $(\omega' T)(y, x) = \omega(x, y)\, T(y, x)$. L'espace $C \otimes_\Omega C'$ est le quotient de $C \otimes C'$ par le plus petit sous-espace fermé contenant les

$$(\omega K) \otimes T - K \otimes (\omega' T).$$

L'espace $W'_p(X, \mu)$ est constitué des multiplicateurs de $TC_p(X, \mu)$, où par multiplicateur on entend un opérateur qui commute avec les multiplications ω' pour $\omega \in \Omega$. Cette description de W'_p sera utile dans la suite mais pour éviter les embêtements avec le produit tensoriel banachique on va utiliser l'isomorphie naturelle

$$\mathrm{HOM}^\Omega(C', C') = \mathrm{HOM}^\Omega(C, C'').$$

Or, soit $\varphi : X \times X \to C$ une application continue ; dire que $\varphi \in W'_p(X, \mu)$ équivaut à dire qu'il existe une constante c telle que $|||\varphi K|||_p \leqslant c|||K|||_p$ pour chaque noyau spécial, $|||\varphi K|||_p$ étant la norme de l'opérateur sur $L_p(X, \mu)$ donné par le noyau $(\varphi\kappa)(x, y) = \varphi(x, y)\, \kappa(x, y)$. La meilleure constante c est la norme de φ dans W'_p.

LEMME 1. — *Pour chaque mesure de Radon μ sur X il y a inclusion de $V_p(X)$ dans $W'_p(X, \mu)$ avec diminution de la norme.*

LEMME 2. — *Si μ est une mesure de Radon sur X qui charge chaque ouvert non-vide alors $V_p(X)$ coïncide isométriquement avec le sous-espace de $W'_p(X, \mu)$ constitué par les éléments continus.*

Pour ne pas interrompre le fil de l'argument je reporte les démonstrations des deux lemmes à la fin de l'article. Par ailleurs, pour le but de l'article on peut prendre l'énoncé du lemme 2 comme la définition de $V_p(G)$ dans le cas $X = G$, un groupe localement compact, et μ sa mesure de Haar (c'était ma définition originale).

La première étape fondamentale dans la démonstration de (v) dans le théorème 2 est d'introduire une contraction linéaire bizarre

$$\widetilde{Q} : L_1(X , \mu) \otimes L_1(X , \mu) \to W_p(X , \mu).$$

Il suffit de définir $\widetilde{Q}(k \otimes \ell)$ où k, $\ell \in L_1(X , \mu)$ et de vérifier que $\|\widetilde{Q}(k \otimes \ell)\| \leqslant \|k\|_1 \ \|\ell\|_1$. On peut écrire $k = k_1 k_2$, $\ell = \ell_1 \ell_2$ où k_1, $\ell_1 \in L_p(X , \mu)$ et k_2, $\ell_2 \in L_{p'}(X , \mu)$. Posons $\kappa(x , y) = k_1(x)\, \ell_2(y)$ et $T(y , x) = \ell_1(y)\ k_2(x)$ de sorte que $\kappa \in C$, $\|\kappa\| \leqslant \|k_1\|_p \ \|\ell_2\|_{p'}$ et $T \in C'$, $\|T\| \leqslant \|\ell_1\|_p \ \|k_2\|_{p'}$. A condition de choisir les factorisations telles que $\|k\|_1 = \|k_1\|_p \ \|k_2\|_{p'}$ et $\|\ell\|_1 = \|\ell_1\|_p \ \|\ell_2\|_{p'}$ on aura $\|\kappa \otimes T\| \leqslant \|k\|_1 \ \|\ell\|_1$. Evidemment l'élément $\kappa \otimes T \in C \otimes C'$ dépend des choix de factorisation mais son image dans $W_p = C \otimes_\Omega C'$ en est indépendante. Il faut aussi vérifier la bilinéarité, chose fâcheuse mais sans difficulté essentielle. Il est évident que $\widetilde{Q}$ est un épimorphisme de Banach (contraction linéaire d'image dense). Son adjoint est le monomorphisme

$$\widetilde{Q}' : W_p'(X , \mu) \to L_\infty(X \times X,\ \mu \times \mu),$$

ce qui revient à dire que les éléments de W_p' sont bien des "fonctions". (Il faut entendre par L_∞ le dual de L_1 ; il n'y a aucun problème pour les μ qui ne sont pas σ-finies).

Revenons au cas $X = G$, un groupe localement compact, et μ sa mesure de Haar invariante à gauche. Il y a une représentation fortement continue σ de G dans $C = \mathrm{COMP}_p(G)$ où pour un noyau spécial κ, $(\sigma(t)\kappa)\ (x , y) = \kappa(xt , yt)\ \Delta(t)$. L'action duale σ' sur $C' = L_p(G) \otimes L_{p'}(G)$ est donnée par $\sigma^*(t)\ (u \otimes v) = \rho_p(t)\ u \otimes \rho_{p'}(t) v$ où pour $w \in L_r(G)$ l'isométrie $\rho_r(t)$ est $\rho_r(t)\ w(x) = w(xt)\ \Delta^{1/r}(t)$. Ainsi σ donne lieu à une représentation sur $W_p(G) = C \otimes_\Omega C'$ de sorte qu'on arrive à un nouvel espace $QF_p(G) = (W_p(G))_{G'}$ le quotient de W_p par le plus petit sous-espace fermé contenant les images des $\sigma(t) K \otimes \sigma^*(t) T - K \otimes T$ pour $K \in C$, $T \in C'$.

Le groupe G opère sur $L_1(G)$ par ρ_1. On voit sans difficulté que $\widetilde{Q}$ donne lieu à un épimorphisme

$$\overline{Q} : L_1(G) \otimes_G L_1(G) \to QF_p(G),$$

mais $L_1(G) \otimes_G L_1(G)$ est canoniquement isomorphe à $L_1(G)$ par $k \otimes \ell \to k * \ell'$ où $\ell'(x) = \ell(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})$.

En effet, $L_1(G) \otimes_G L_1(G)$ est le quotient de $L_1 \otimes L_1$ par le plus petit sous-espace fermé contenant les $\rho(t)\, k \otimes \rho(t)\, \ell - k \otimes \ell$ ou, ce qui revient à la même chose, les $\rho(t)\, k \otimes \ell - k \otimes \rho(t^{-1})\, \ell$. Grâce à l'existence des unités approchées dans l'algèbre de convolution $L_1(G)$, ce sous-espace fermé est également engendré par les

$$(k * u') \otimes \ell - k \otimes (\ell * u)$$

pour $u \in L_1(G)$. L'élément $k * u' \in L_1(G)$ apparaît comme élément de $L_1(G) \otimes_G L_1(G)$ en tant que limite des $(k * u') \otimes \ell \approx k \otimes (\ell * u)$ lorsque ℓ parcourt une identité approchée convenable. D'autre part, chaque $k \in L_1(G)$ est limite de $k * u'$ avec $\|u'\|_1 \leqslant 1$.

En résumé on a prouvé la

PROPOSITION 1. – *Il existe un* BAN-*épimorphisme*

$$Q : L_1(G) \to QF_p(G).$$

(BAN est la catégorie dont les morphismes sont les applications linéaires de banachs de norme $\leqslant 1$).

Notre tâche principale est de démontrer, pour G un groupe moyennable, que Q se prolonge à un isomorphisme (isométrique) de $PF_p(G)$ avec $QF_p(G)$. Il s'agit, évidemment, de prouver l'égalité $\|Q(k)\| = |||k|||_p$ mais on n'y parviendra pas par un chemin direct. Il faut d'abord étudier son dual.

Le dual de $QF_p = (W_p)_G$ est $(Q'_p)^G$, l'algèbre des multiplicateurs de TC_p qui sont invariants par la translation simultanée à droite. Or, l'espace A_p est défini comme la co-image de l'application

$$P : L_p(G) \otimes L_{p'}(G) \to C_0(G)$$

donnée par $P(u \otimes v) = v * \check{u}$. Par abus de notation, on peut continuer à noter P l'application quotient

$$P : TC_p(G) \to A_p(G).$$

Les opérateurs de $(W'_p)^G$ laissent stable le noyau de P. Donc, pour $\Phi \in (W'_p)^G$ et $F \in TC_p$ on a $P(\Phi F) = \varphi P(F)$, ce qui donne lieu à une application $\Phi \to \varphi$ de $(W'_p)^G$ sur un espace $B_p(G)$ d'opérateurs sur $A_p(G)$. D'autre part, si $f \in A_p$ et on définit $F : G \times G \to C$ par $F(x, y) = f(xy^{-1})$ alors $F \in (W'_p)^G$ et $\|F\| \leqslant \|f\|_A$. Ceci veut dire que si $T \in TC_p$ et on pose $S(y,x) = f(xy^{-1})\,T(y,x)$, alors S est également dans TC_p et $\|S\| \leqslant \|f\|_A\ \|T\|$; ce fait est prouvé dans [4] et [6]. On trouve ainsi que A_p est une algèbre pour la multiplication ordinaire des fonctions, que les opérateurs de B_p commuent avec la multiplication dans A_p, et que l'application $(W'_p)^G \to B_p$ est biunivoque. On va identifier $(W'_p)^G$ avec B_p. Puisque les éléments de B_p sont des multiplicateurs de A_p, un espace de fonctions continues, ceux-là sont des fonctions continues. Ceci démontre que les multiplicateurs Φ de TC_p qui sont invariants par translation sont forcément de la forme $\Phi(x,y) = \varphi(xy^{-1})$ où φ est une fonction continue, en particulier $\Phi : G \times G \to \mathbf{C}$ est continue.

Le théorème 1 est maintenant complètement démontré et l'énoncé (iv) va de soi. Si $k \in L_1(G)$ alors l'opérateur de convolution lui correspondant est donné par le noyau κ défini par $\kappa(x,y) = k(xy^{-1})\,\Delta^{-1}(y)$ d'où le fait que φk correspond à $\Phi\kappa$ pour $\Phi(x,y) = \varphi(xy^{-1})$. L'identité $\langle k * u , v \rangle = \langle k , v * \check{u} \rangle$ pour $k \in L_1$, $u \in L_p$, $v \in L_{p'}$ montre que $|||k|||_p$ est exactement la norme de k comme fonctionnelle linéaire $f \to \int_G k(x)\, f(x)\, dx$ sur A_p. Le banach dual à A_p est, par définition, l'espace PM_p des p-pseudomesures et PF_p, l'espace des p-pseudofonctions, n'est autre que la fermeture dans PM_p de L_1. En dualisant la proposition 1 nous avons la

PROPOSITION 2. – *L'algèbre* $B_p(G)$ *s'identifie avec le banach dual à l'espace vectoriel normé constitué par* $L_1(G)$ *muni de la norme* QF_p *qui est plus forte que la norme* PF_p.

Pour achever la preuve du théorème 2 il suffit d'établir le

LEMME 3. – *Si le groupe* G *est moyennable alors*

$$\left| \int_G k(x)\, \varphi(x)\, dx \right| \leqslant |||k|||_p\ \|\varphi\|_B \qquad \textit{pour} \qquad k \in L_1(G)\,,\ \varphi \in B_p(G)\,.$$

Preuve. – Posons $\ell = \varphi k$. De l'énoncé (iv), sans hypothèse de moyennabilité, on a $|||\ell|||_p \leqslant \|\varphi\|_B\ \ |||k|||_p$. Si G est moyennable alors $\left| \int_G \ell(x)\, dx \right| \leqslant |||\ell|||_p$.

Dans le cas de groupes généraux il y a plusieurs problèmes qui se posent. Afin d'élucider la situation considérons la boule unité E de $A_p(G)$ et sa compactifiée $\overline{E}$ pour la topologie $\sigma(L_1, A_p)$. Cet ensemble $\overline{E}$ est la boule-unité du banach dual à $PF_p(G)$. Il s'ensuit de la proposition 2 que $\overline{E}$ est contenue dans la boule-unité de $B_p(G)$. L'algèbre B_p étant toujours une algèbre de multiplicateurs de A_p, celle-ci contenant des fonctions égales à 1 sur un compact donné, il en résulte que chaque fonction à support compact dans B_p appartient à A_p. Donc nous avons l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3. – *Pour un groupe* G *localement compact arbitraire le banach* $PF'_p(G)$ *dual à* $PF_p(G)$ *consiste de fonctions bornées continues sur* G, *et il y a des* BAN-*monomorphismes canoniques*

$$A_p(G) \to PF'_p(G) \to B_p(G).$$

Question 1. – La flèche à gauche, est-elle une isométrie ?

Question 2. – La flèche à droite, est-elle une isométrie ?

La réponse à la question 1 est vraisemblablement "oui" dans tous les cas. Elle est une conséquence de l'hypothèse suivante sur le groupe G et l'indice p.

Hypothèse H. – Soit $k \in L_p(G)$ un élément tel que $\|k * u\|_p \leqslant \|u\|_p$ pour chaque fonction u continue à support compact sur G. Alors k, vu comme convoluteur de $L_p(G)$, est adhérent à la boule-unité de $PF_p(G)$ pour la topologie faible d'opérateurs sur $L_p(G)$.

L'hypothèse H a lieu pour $p = 2$ et G quelconque par le théorème de densité de Kaplansky. Elle a lieu aussi pour G moyennable et p quelconque grâce à l'existence des unités approchées dans $A_p(G)$. Elle entraîne que $PF_p(G)$ est normant pour $A_p(G)$ d'où la réponse affirmative à la question 1. Elle entraîne aussi que l'épimorphisme

$$\overline{P} : L_p(G) \otimes_G L_{p'}(G) \to A_p(G)$$

est un isomorphisme, ce qui permet de conclure que l'application duale $PM_p(G) \to CONV_p(G)$ est un isomorphisme, en particulier surjective.

La question 2 est plus intriquée, même pour $p = 2$. On sait [6] que $B_p(G)$ contient chaque fonction représentative d'une représentation fortement continue de G dans un banach de type p. En particulier, soit FS(G) l'algèbre de transformées de Fourier-Stieltjes sur

G, autrement dit, le dual de l'algèbre $C^*(G)$. Pour tout p, il y a un BAN-monomorphisme $FS(G) \to B_p(G)$. D'après Eymard [2], $PF'_2(G)$ s'identifie isométriquement avec l'idéal fermé de $FS(G)$ engendré par les représentations unitaires de G faiblement contenues dans la représentation régulière. Si le groupe G est moyennable alors $B_2(G) = FS(G)$, mais sinon cette égalité semble douteuse. Pour qu'elle soit vraie il faut que la question 2 ait une réponse affirmative. En fait $B_2(G) = FS(G)$ entraîne la réponse "oui" pour $p = 2$ à la

Question 3. – Est-ce que la multiplication de convolution dans $L_1(G)$ est continue pour la norme QF_p ?

A défaut des réponses affirmatives aux questions 2 et 3 il me semble que $B_p(G)$ n'a qu'un intérêt restreint pour G non-moyennable. D'autre part, pour se servir du foncteur B_p on ne peut pas se borner aux groupes moyennables. Par exemple $G = SU_2$ est compact mais le groupe discret G_d avec la même structure algébrique n'est pas moyennable tandis que $A_p(SU_2)$ s'identifie avec l'algèbre des fonctions continues dans $B_p(G_d)$.

Il reste à démontrer les lemmes 1 et 2.

Démonstration du lemme 1. – On note génériquement δ une famille finie $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de boreliens deux à deux disjoints dans X tels que $0 < \mu(E_i) < \infty$. Soit $L_p^\delta(X, \mu)$ le sous-banach de $L_p(X, \mu)$ constitué par les fonctions constantes sur chaque E_i et soit $P_\delta : L_p \to L_p^\delta$ le projecteur défini par $P_\delta u(x) = \int_{E_i} u d\mu/\mu(E_i)$ si $x \in E_i$ et $P_\delta u = 0$ hors de $\cup E_i$. Si $K \in COMP_p(X, \mu)$ alors $|||P^\delta KP^\delta|||_p$ est une fonction croissante de δ (où l'ensemble des δ est partiellement ordonné par raffinement) dont la limite supérieure est $|||K|||_p$. Si K correspond au noyau spécial κ et $\varphi \in V_p(X)$ alors on associe à $P^\delta KP^\delta$ la matrice

$$\kappa_{ij} = \int\int_{E_i \times E_j} \kappa(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)/\mu(E_i)\,\mu(E_j).$$

A condition de raffiner δ convenablement, la matrice qui correspond à $P^\delta \varphi KP^\delta$ diffère aussi peu qu'on veut de $\varphi(x_i, x_j)\kappa_{ij}$ où $x_i \in E_i$. On trouve alors que pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque δ, il existe un raffinement δ' tel que

$$|||P^{\delta'} \varphi KP^{\delta'}|||_p \leqslant (\|\varphi\|_V + \epsilon)\, |||P^{\delta'} KP^{\delta'}|||_p$$

car en calculant la norme dans $V_p(S)$ où S est un ensemble fini on ne change rien en remplaçant $\ell_p(S)$ par $L_p(S, \nu)$ où ν est un poids qui charge chaque point.

Démonstration du lemme 2. – Pour conclure que la fonction $\varphi : X \times X \to \mathbf{C}$ appartient à $V_p(X)$ avec $\|\varphi\|_V \leqslant 1$ il suffit de vérifier que pour chaque ensemble fini $S \subset X$ on a $\varphi_S \in V_p(S)$ et $\|\varphi_S\|_V \leqslant 1$ où φ_S est la restriction de φ à S. Soit φ un élément continu de $W'_p(X, \mu)$ avec $\|\varphi\| \leqslant 1$. Etant donné $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on choisit $\delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ tel que E_i est un voisinage de x_i de sorte que $|\varphi(x) - \varphi(x_i)| < \epsilon$ pour $x \in E_i$. Définissons φ^δ par

$$\varphi^\delta(x, y) = \iint_{E_i \times E_j} \varphi(\xi, \eta)\, d\mu(\xi)\, d\mu(\eta)/\mu(E_i)\,\mu(E_j)$$

pour $(x, y) \in E_i \times E_j$, $\varphi^\delta = 0$ hors de $\cup(E_i \times E_j)$. Si $K \in \mathrm{COMP}^\delta(X, \mu)$ alors $\varphi^\delta K = P^\delta(\varphi K)$. Ceci montre que $\varphi^\delta \in (W_p^\delta)'(X, \mu)$ et que sa norme est $\leqslant 1$, la norme de φ dans $W'_p(X, \mu)$. D'autre part $L_p^\delta(X, \mu)$ est isomorphe à $L_p(S, \nu)$ pour un certain poids ν, et, par suite, $(W_p^\delta)'(X, \mu)$ s'identifie avec $V_p(S)$. Donc $\|\varphi_S^\delta\|_V \leqslant 1$, mais on voit facilement que $\|\varphi_S - \varphi_S^\delta\|_V < n\epsilon$. Ici le n est fixe (n = cardinalité de S) tandis que le ϵ est arbitraire. Il s'ensuit que $\|\varphi_S\|_V \leqslant 1$.

Note historique. – Les notes prises pendant mes conférences à Orsay ne furent jamais préparées pour la distribution générale. Une rédaction à cette époque aurait différé de la présente sous deux aspects. Lors de mes conférences j'ignorai les propriétés fonctionnelles de B_p, et j'utilisais une définition de $V_p(G)$ en termes de la mesure de Haar sur G ; voir la remarque qui suit l'énoncé du lemme 2. Avec cette définition, je suivai un chemin direct à la démonstration du fait que B_p est le dual de PF_p. La présentation fut difficile à suivre, et j'espère l'avoir améliorée. Le style à part, le seul changement essentiel depuis 1970 est la nouvelle définition de l'algèbre V_p qui met en évidence le fait qu'elle est un foncteur. Je ne prétend pas avoir annoncé que B_p est un foncteur avant la diffusion de cet article, et les résultats de N. Lohoué (C.R. Acad. Sci. Paris 272A (1971) p. 27-29), qui donnent plusieurs exemples du comportement fonctoriel de B_p défini sur les groupes abéliens, ont la priorité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.F. BACHELIS & J.E. GILBERT, Banach spaces of compact multipliers and their dual spaces, *Math. Zeit.*, 125 (1972), 285-297.

[2] M.M. DAY, Amenability and equicontinuity, *Studia Math.*, 31 (1968), 481-494.

[3] Pierre EYMARD, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, 92 (1964), 181-236.

[4] Pierre EYMARD, Algèbres A_p et convoluteurs de L^p, Séminaire Bourbaki 367 (1969/70).

[5] C. HERZ, Remarques sur la Note précédente de M. Varopoulos, *C.R. Acad. Sci.* Paris, A 260 (1965), 6001-6004.

[6] C. HERZ, The theory of p-spaces with an application to convolution operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 (1971), 69-82.

[7] C. HERZ, Harmonic synthesis for subgroups, *Annales de l'Inst. Fourier*, 23 (1973), 91-123.

Manuscrit reçu le 5 septembre 1973
accepté par J.P. Kahane.

Carl HERZ,
Department of Mathematics
Mc Gill University
Montréal (Canada)
H3C 3G1.