

DANIEL LEHMANN

**Classes caractéristiques exotiques et I -connexité
des espaces de connexions**

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 3 (1974), p. 267-306

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_267_0

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSES CARACTÉRISTIQUES EXOTIQUES ET \mathcal{F} -CONNEXITÉ DES ESPACES DE CONNEXIONS

par Daniel LEHMANN

	Pages
1. Introduction.....	267
2. Notations et rappels.....	269
3. Définitions et exemples de \mathcal{F} -connexions.....	271
4. Construction des classes exotiques.....	273
5. Réduction de $\hat{W}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ à une sous-algèbre $W_A(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$...	274
6. Calcul de $H^*(W_A(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$	277
7. \mathcal{F} -connexité des espaces de connexions, et rigidité des classes exotiques.....	280
8. Déformations de classes exotiques.....	284
9. Exemples de \mathcal{F} -connexité.....	286
10. Quelques applications.....	290

1. Introduction.

Des classes caractéristiques dites “secondaires” ou “exotiques” ont été définies pour les feuilletages de codimension q et les Γ -structures, notamment par Bott et Haefliger [2], généralisant l’invariant de Godbillon-Vey correspondant au cas $q = 1$. Parmi les différentes façons de procéder, l’une d’elles, exposée par Bott [1], est basée sur les techniques de Chern-Simons utilisant la courbure des connexions.

Le but de ce travail est double : d’une part généraliser la construction de Bott pour l’appliquer à d’autres situations géométriques

que celles issues des Γ -structures, d'autre part préciser —grâce à la notion de \mathcal{J} -connexité— l'argument d'invariance homotopique et les théorèmes de rigidité permettant d'affirmer que les classes exotiques obtenues ne dépendent pas des connexions choisies.

Le § 2 est consacré à quelques rappels concernant en particulier l'homomorphisme de Chern-Weil

$$I(G) \xrightarrow{\lambda_\omega} A^*(M)$$

où ω est une connexion sur un G -fibré principal différentiable $E \rightarrow M$, $A^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles extérieures sur M , et $I(G)$ l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie \underline{G} invariants par $\text{ad}(G)$. Après avoir donné au § 3 quelques exemples de \mathcal{J} -connexions (c'est-à-dire de connexions ω telles que $\lambda_\omega(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J}$, où \mathcal{J} est un idéal homogène de $I(G)$), on construit au § 4 les classes exotiques secondaires associées à une \mathcal{J} -connexion ω et une \mathcal{J}' -connexion ω' à l'aide d'un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \xrightarrow{\rho_{\omega, \omega'}} A^*(M), \quad \hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \text{ ne dépendant que de } G, \mathcal{J}, \mathcal{J}'.$$

Si A désigne un système de générateurs homogènes de l'idéal maximal $I^+(G)$, on définit une sous-algèbre différentielle $W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ de $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$, beaucoup plus maniable, et l'on montre au § 5 que les homomorphismes induits en cohomologie par $\rho_{\omega, \omega'}$ et $\rho_{\omega, \omega'}|_{W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')}$ ont même image dans $H^*(M, \mathbf{R})$. Le § 6 est consacré au calcul de $H^*(W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}'))$ dans quelques cas particuliers. On introduit au § 7 la notion de " \mathcal{J} -connexité" d'un ensemble de connexions, et l'on montre que l'homomorphisme $\rho_{\omega, \omega}'^*$ induit en cohomologie par $\rho_{\omega, \omega}'$ ne dépend pas du choix des connexions ω et ω' pourvu, par exemple, que celles-ci varient dans des ensembles C et C' de connexions respectivement \mathcal{J} -connexe et \mathcal{J}' -connexe : on interprète en particulier les classes exotiques secondaires comme des obstructions à ce que C et C' se coupent. Cette situation est généralisée au cas où C n'est que \mathcal{J}_1 -connexe (avec $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$). La \mathcal{J} -connexité d'un ensemble de connexions implique en particulier que 2 connexions quelconques de cet ensemble peuvent être jointes par une courbe différentiable par morceaux dans l'espace des \mathcal{J} -connexions ; mais c'est en fait une propriété plus forte comme le prouvent les exemples de déformations de classes exotiques exhibés au § 8. On reprend l'étude, au § 9, des exemples du § 3, mais du point de vue de la \mathcal{J} -connexité. Un certain nombre

de problèmes géométriques peuvent s'interpréter sous la forme suivante : est-ce que 2 ensembles donnés de connexions C et C' se coupent ? Nous en donnons des exemples au § 10 ; l'exotisme fournit alors des obstructions dont les nullités sont des conditions nécessaires à ce que C et C' se coupent ; exceptionnellement, ces conditions peuvent aussi être suffisantes.

Kamber et Tondeur [7^I], [7^{II}], [7^{III}] ont étudié la situation d'un G -fibré principal $E \rightarrow M$, dont la base est munie d'un feuilletage \mathcal{F} de co-dimension r , et muni d'une part d'une H -réduction (H désignant un sous groupe fermé de G), d'autre part d'une connexion dont la restriction à chaque feuille de \mathcal{F} est plate (généralisation des connexions de Bott lorsque E est le fibré principal associé au fibré transverse à \mathcal{F}). Leur étude recoupe en partie un cas particulier de la nôtre (faite indépendamment) correspondant à $\mathcal{F} = \mathcal{F}(> r)$ (idéal homogène des polynômes de degré $> r$) et $\mathcal{F} = \text{Ker}(I(G) \rightarrow I(H))$. Par des méthodes hypercohomologiques, ils rendent leur théorie valable dans les cas analytique et algébrique, où les connexions globales peuvent ne pas exister.

Le contenu de cet article a été en partie résumé, sans démonstration, dans [9].

2. Notations et rappels (Cf. par exemple Chern-Simons [3]).

Soit G un groupe de Lie, \underline{G} son algèbre de Lie, $I(G) = \bigoplus_{k \geq 0} I^k(G)$ l'algèbre graduée des polynômes à coefficients réels sur \underline{G} (c'est-à-dire des formes \mathbf{R} -multilinéaires symétriques), invariants par la représentation adjointe de G . Si $f \in I^k(G)$ et si $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sont des formes différentielles de degré respectifs d_1, \dots, d_k à coefficients dans \underline{G} sur une même variété, $f(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ désigne la $(d_1 + d_2 + \dots + d_k)$ -forme à coefficients réels sur cette variété, obtenue par antisymétrisation des arguments de f . Si $i \leq k$, $f(\gamma_1, \dots, \gamma_i)$ désignera la forme obtenue en faisant la convention que le *dernier* argument γ_i est répété $k - i + 1$ fois.

Soit $E \rightarrow M$ un G -fibré principal différentiable. On conviendra d'identifier formes sur M et formes basiques sur E . On notera $A^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles à coefficients réels sur M et, pour

toute connexion ω sur E , $\lambda_\omega : I(G) \rightarrow A^{\text{pair}}(M)$ l'homomorphisme d'algèbres de Chern-Weil défini par $\lambda_\omega(f) = f(\Omega)$ ($\Omega =$ courbure de ω , $f(\Omega)$ $2k$ -forme fermée).

On notera partout I le segment $[0,1]$. Soit

$$\int_0^1 : A^r(M \times I) \rightarrow A^{r-1}(A)$$

l'intégration le long des fibres de $M \times I \rightarrow M$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}] &= 0, \\ \int_0^1 [g(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}}] &= \\ &= \left[\int_0^1 g(x, t) dt \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \end{aligned}$$

Si ω' est une autre connexion sur E , on notera $[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]$ la connexion sur $E \times I \rightarrow M \times I$ définie par :

$$[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0, \quad [\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]|_{E \times \{t\}} = t\omega' + (1-t)\omega,$$

et $\Delta_{\omega, \omega'} : I^k(G) \rightarrow A^{2k-1}(M)$ l'application composée $\int_0^1 \circ \lambda_{[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega}]}$.

(Notant Ω_t la courbure sur $E \times \{t\}$ de la connexion $t\omega' + (1-t)\omega$, la courbure $\tilde{\Omega}$ de $[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]$ est égale à $(dt \wedge \omega' - \omega) + \Omega_t$, de sorte que

$$f(\tilde{\Omega}) = (dt \wedge k f(\omega' - \omega, \Omega_t)) + f(\Omega_t)$$

et

$$\Delta_{\omega, \omega'}(f) = k \int_0^1 f(\omega' - \omega, \Omega_t) dt.$$

Rappelons la formule

PROPOSITION 2.1. (S. Chern). —

$$d \circ \Delta_{\omega, \omega'} = \lambda_{\omega'} - \lambda_\omega,$$

qui prouve en particulier que la classe de cohomologie de $\lambda_\omega(f)$ ne dépend pas de ω : on notera $\lambda : I(G) \rightarrow H^{\text{pair}}(M, R)$ l'homomorphisme d'algèbres de Chern-Weil induit en cohomologie.

Si $G = GL(q, \mathbb{R})$ et si $Q \rightarrow M$ désigne le fibré vectoriel de rang q associé à un G -fibré principal $E \rightarrow M$, on notera parfois λ_{∇} et $\Delta_{\nabla, \nabla'}$ les homomorphismes précédents où ∇, ∇' désignent les lois de dérivations ou connexions sur Q associées à ω et ω' , et $[\overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{\nabla'}]$ la connexion sur $Q \times I \rightarrow M \times I$ associée à $[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]$.

3. Définitions et exemples de \mathcal{F} -connexions.

Soit \mathcal{F} un idéal homogène de $I(G)$ ($\mathcal{F} \subset I^+(G) = \bigoplus_{k \geq 1} I^k(G)$).

On appellera \mathcal{F} -connexion sur un G -fibré principal $E \rightarrow M$ toute connexion ω sur E telle que :

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \lambda_{\omega}(f) = 0$$

(il s'agit de la forme différentielle $\lambda_{\omega}(f)$, et pas seulement de sa classe de cohomologie). On remarquera que cette notion est respectée par l'image réciproque des fibrés et des connexions.

Si P désigne une propriété du degré des polynômes homogènes sur \underline{G} , on notera $\mathcal{H}(P)$ l'idéal homogène engendré par les polynômes homogènes dont le degré vérifie P . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ désignent des polynômes homogènes $\in I^+(G)$, on notera $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ l'idéal homogène qu'ils engendrent.

Exemple 1. – Si $\dim M = n$, il est clair que toute connexion sur $E \rightarrow M$ est une $\mathcal{F} \left(> \left[\frac{n}{2} \right] \right)$ -connexion.

Exemple 2. – Si une connexion ω est plate (c'est-à-dire sans courbure) c'est une $I^+(G)$ -connexion.

Exemple 3. – Si la courbure Ω d'une connexion ω vérifie $\Omega^{r+1} \equiv 0$ ($\Omega^{r+1} = \Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ pour le produit extérieur défini par $\underline{G} \times \underline{G} \times \dots \times \underline{G} \rightarrow \underline{G} \otimes \underline{G} \otimes \dots \otimes \underline{G}$), ω est une $\mathcal{F}(> r)$ -connexion. Les exemples 1, 2, 7 et 8 sont des cas particuliers de cette situation.

Si $G = GL(q, \mathbb{R})$, $I(G) = \mathbb{R}[c_1, \dots, c_q]$ avec

$$\det(I + tA) = 1 + \sum_{i=1}^q c_i(A) t^i \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R})$$

($c_1 = \text{Trace}, \dots, c_q = \text{déterminant}$). On notera $Q \rightarrow M$ le fibré vectoriel associé à E , et on confondra parfois la connexion ω sur E et la loi de dérivation ∇ associée sur Q .

Exemple 4. — Si ∇ est une connexion sur Q à groupe d'holonomie inclus dans un sous-groupe compact de $GL(q, \mathbf{R})$, c'est une \mathcal{J} (impair)-connexion : en effet, une telle connexion respecte une métrique riemannienne sur Q , et

$$\lambda_{\nabla}(c_{2i+1}) = 0 \quad (\text{cf. [1] p. 29}).$$

Exemple 5. — Si Q est orientable, et si ∇ a un groupe d'holonomie inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$, c'est une $\frac{1}{2}\mathcal{J}$ -connexion.

Exemple 6. — Si Q se décompose sous la forme $Q'_k \oplus (q - k)$ d'une somme de Whitney d'un fibré de rang k et d'un fibré trivial de rang $q - k$, et si le groupe d'holonomie d'une connexion ∇ sur Q est inclus dans $GL(k, \mathbf{R}) \times \{1_{\mathbf{R}^{q-k}}\}$ (ou dans un autre sous-groupe de $GL(q, \mathbf{R})$ conjugué du précédent), ∇ est une $\frac{1}{2}\mathcal{J}(c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{q-\frac{1}{2}})$ -connexion.

Exemple 7. — (connexions "basiques" de Bott [1], et plus généralement connexions "adaptées" de Martinet [10]).

Soit L un système différentiel (ou sous-fibré vectoriel différentiable de $T(M)$) sur une variété M de dimension n . Soit Q le fibré quotient, supposé de rang q :

$$0 \rightarrow L \xleftarrow{\sigma} T(M) \xleftarrow{\pi} Q \rightarrow 0.$$

On dira, d'une connexion ∇ sur Q qu'elle est "*adaptée*" à une scission λ de la suite exacte ci-dessus si, $\forall X \in \Gamma(L)$, $\nabla_X \sigma = \pi[X, \lambda(\sigma)]$; (de telles connexions existent). On dit que le système différentiel L est de classe maximale $\leq r$ ($q \leq r \leq n$) s'il existe un sous-fibré vectoriel différentiable D de L , de dimension $n - r$, tel que $[X, Y]$ soit une section de L pourvu que X soit une section de D et Y une section de L . On démontre alors (Martinet) que toute connexion adaptée est une $\mathcal{J}(> r)$ -connexion, si la classe maximale de L est $\leq r$. [Bien entendu, cela n'a d'intérêt que si $r < \frac{n}{2}$, en vertu de l'exemple 1].

Si $r = q$, le système différentiel L est intégrable, et les connexions adaptées sont les connexions basiques de Bott, Q étant le fibré transverse à un feuilletage de codimension q .

Exemple 8. – (Connexions “transverses projetables” de Molino [11]). Si le fibré Q , transverse à un feuilletage de codimension q , admet une connexion transverse projetable (c’est-à-dire localement image réciproque d’une connexion sur le fibré tangent à l’espace des feuilles), une telle connexion transverse projetable est une $\mathcal{G}(\gt \frac{q}{2})$ -connexion (Molino). (C’est par exemple le cas si le feuilletage admet une métrique quasi-fibrée ; cf. aussi Pasternak [12]).

4. Construction des classes exotiques.

Nous allons généraliser une construction faite par Bott dans le cas du fibré transverse à un feuilletage ([1]). Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux idéaux homogènes de $I(G)$. Si $f \in I^k(G)$, notons respectivement \bar{f} et \bar{f}' sa classe d’équivalence modulo \mathcal{G} et modulo \mathcal{G}' . Graduons les algèbres $I(G)/\mathcal{G}$ et $I(G)/\mathcal{G}'$ en posant, $\forall f \in I^k(G)$, $\dim \bar{f} = \dim \bar{f}' = 2k$.

Soit $\Lambda(I^+(G))$ l’algèbre extérieure construite sur l’espace vectoriel réel sous-jacent à l’idéal maximal $I^+(G)$. On définit une graduation sur $\Lambda(I^+(G))$ en posant, $\forall f \in I^k(G)$ ($k > 0$) : $\dim f = 2k - 1$.

On identifiera $I(G)/\mathcal{G}$, $I(G)/\mathcal{G}'$ et $\Lambda(I^+(G))$ à des sous-algèbres de l’algèbre produit tensoriel gradué

$$\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = I(G)/\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{R}} I(G)/\mathcal{G}' \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda(I^+(G))$$

($I^+(G)$ est identifié à une partie de $\Lambda(I^+(G)) \subset \hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$) par l’isomorphisme $I^+(G) \xrightarrow{h} \Lambda^1 I^+(G)$. On définit une différentielle (de degré + 1) sur $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ en posant : $d(\bar{f}) = d(\bar{f}') = 0 \quad \forall f \in I(G)$, et $df = \bar{f}' - \bar{f} \quad \forall f \in I^+(G)$.

Soit $E \rightarrow M$ un G -fibré principal différentiable, et supposons qu’il existe sur E une \mathcal{G} -connexion ω et une \mathcal{G}' -connexion ω' : on définit alors un homomorphisme d’algèbres différentielles graduées $\rho_{\omega, \omega'} : \hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \rightarrow A^*(M)$ en posant :

$$\rho_{\omega, \omega'}(\bar{f}) = \lambda_{\omega}(f) \quad , \quad \rho_{\omega, \omega'}(\bar{f}') = \lambda_{\omega'}(f)$$

et

$$\rho_{\omega, \omega'}(f_1 \wedge \dots \wedge f_r) = \Delta_{\omega, \omega'}(f_1) \wedge \dots \wedge \Delta_{\omega, \omega'}(f_r) \quad (f_i \in I^+(G)).$$

Notons $\rho_{\omega, \omega'}^* : H^*(\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$ l'homomorphisme d'algèbres graduées induit en cohomologie.

On appellera *classes caractéristiques exotiques* (ou secondaires) associées à $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \omega, \omega'$ les éléments de $\text{Im } \rho_{\omega, \omega'}^* - \text{Im } \lambda$.

5. Réduction de $W(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ à une sous-algèbre $W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$.

Soit A un système de générateurs homogènes de l'idéal $\Gamma^+(G)$ et soit $\Lambda(A)$ l'algèbre extérieure construite sur le \mathbf{R} -espace vectoriel engendré par A . Notons $W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ la sous-algèbre différentielle graduée de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ égale à $I(G)/\mathcal{G} \otimes_{\mathbf{R}} I(G)/\mathcal{G}' \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(A)$, et $\rho_{\omega, \omega'}^A$ la restriction de $\rho_{\omega, \omega'}^*$ à $W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$.

Remarque. — Je dois à Kamber et Tondeur d'avoir attiré mon attention sur le cas particulier où \underline{G} est réductive (cf. Koszul [8]) : $I(G)$ est alors une algèbre de polynômes $\mathbf{R}[\mu_1, \dots, \mu_\ell]$, et si l'on prend pour A l'ensemble $\{\mu_1, \dots, \mu_\ell\}$, $\Lambda(A)$ s'identifie à $H^*(\underline{G}, \mathbf{R})$.

THEOREME 5.1. — *Les morphismes $(\rho_{\omega, \omega'}^A)^*$ et $(\rho_{\omega, \omega'}^*)^*$, induits en cohomologie, ont même image dans $H^*(M, \mathbf{R})$.*

Soient f_1, \dots, f_r des polynômes homogènes $f_i \in \Gamma^{k_i}(G)$. On prendra garde à bien distinguer le produit des polynômes $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_r$ (de dimension $2 \left(\sum_{i=1}^r k_i \right) - 1$ dans $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$) et le produit $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ dans l'algèbre extérieure (de dimension $2 \left(\sum_{i=1}^r k_i \right) - r$ dans $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$).

LEMME 5.2. — *Soit $f = u \cdot v$ le produit de deux polynômes u et v , homogènes appartenant à $\Gamma^+(G)$. Posons :*

$$f_1 = \bar{u}v + \bar{v}u \quad (f_1 \in \hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')).$$

La différence $f - f_1$ est alors un cocycle dans $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, dont l'image par $\rho_{\omega, \omega'}$ est un cobord.

On a en effet $df = \overline{u\bar{v}} - \overline{uv}$, et

$$df_1 = \bar{u}(\bar{v} - v) + \bar{v}(\bar{u} - u) = \overline{u\bar{v}} - \overline{uv}.$$

Donc $f - f_1$ est un cocycle.

Soit $\tilde{\Omega}$ la courbure de $[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]$ sur $E \times I$ et $\Omega_t = \tilde{\Omega}|_{E \times \{t\}}$ la courbure de $\omega_t = t\omega' + (1-t)\omega$ sur E .

On identifiera implicitement les formes basiques sur un fibré principal avec leur projection sur la base.

Rappelons que, pour $f \in I^k(G)$,

$$f(\tilde{\Omega}) = dt \wedge kf(\omega' - \omega, \Omega_t) + f(\Omega_t)$$

de sorte que :

$$\Delta_{\omega, \omega'}(f) = \int_0^1 f(\tilde{\Omega}) = k \int_0^1 f(\omega' - \omega, \Omega_t) dt$$

tandis que :

$$\lambda_{\omega}(f) = f(\Omega) = \int_0^1 f(\Omega) dt \quad (\Omega = \Omega_0)$$

$$\lambda_{\omega'}(f) = f(\Omega') \quad (\Omega' = \Omega_1).$$

D'autre part, si $u \in I^k(G)$, $v \in I^{\ell}(G)$ ($k, \ell > 0$), et si $f = u \cdot v$, on a : $f(\tilde{\Omega}) = u(\tilde{\Omega}) \wedge v(\tilde{\Omega})$, soit :

$$f(\tilde{\Omega}) = dt \wedge [ku(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge v(\Omega_t) + \ell v(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge u(\Omega_t)] + u(\Omega_t) \wedge v(\Omega_t).$$

Ainsi, $\rho_{\omega, \omega'}(f - f_1) = \rho_{\omega, \omega'}(uv - \overline{uv} - \overline{v}u)$ est égal à

$$\int_0^1 (ku(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [v(\Omega_t) - v(\Omega')] + \ell v(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [u(\Omega_t) - u(\Omega')]) dt.$$

Notons $\Delta_{\omega, \tilde{\omega}} u$ (resp. $\Delta_{\omega', \tilde{\omega}} v$) la forme basique sur $E \times \mathbb{R}$ dont la valeur en (z, t) est égale à $(\Delta_{\omega, \omega_t} u)_z$ [resp. $(\Delta_{\omega', \omega_t} v)_z$].

Soit α la forme $\Delta_{\omega, \tilde{\omega}}(u) \wedge v(\tilde{\Omega}) + \Delta_{\omega', \tilde{\omega}}(v) \wedge u(\tilde{\Omega})$. Puisque $u(\tilde{\Omega})$ et $v(\tilde{\Omega})$ sont des cocycles, et puisque

$$d(\Delta_{\omega, \tilde{\omega}}(u)|_{E \times \{t\}}) = u(\Omega_t) - u(\Omega)$$

$$d(\Delta_{\omega', \tilde{\omega}}(v)|_{E \times \{t\}}) = v(\Omega_t) - v(\Omega'),$$

$$d\alpha = dt \wedge U + V \quad (\text{où } V \wedge dt = 0)$$

avec

$$\begin{aligned} U = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega', \omega_t}(v)) \wedge u(\Omega_t) + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega, \omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t) \\ + ku(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [v(\Omega_t) - v(\Omega')] \\ + \ell u(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [u(\Omega_t) - u(\Omega)] \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 d\alpha = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega', \omega_t}(v)) \wedge u(\Omega_t) + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega, \omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t) \right] dt \\ + \rho_{\omega, \omega'}(f - f_1).$$

D'autre part, d'après le th. 3.10 (p. 15) de [1],

$$\int_0^1 d\alpha = d \left(\int_0^1 \alpha \right) + \alpha_{\text{Ex}\{1\}} - \alpha_{\text{Ex}\{0\}} = d \left(\int_0^1 \alpha \right) + \rho_{\omega, \omega'}(f_1).$$

D'après le théorème 1 de [6], on a d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega', \omega_t}(v)) = \text{cobord} + \ell v(\omega' - \omega, \Omega_t)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega, \omega_t}(u)) = \text{cobord} + ku(\omega' - \omega, \Omega_t).$$

Puisque $u(\Omega_t)$ et $v(\Omega_t)$ sont des cocycles,

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega', \omega_t}(v)) \wedge u(\Omega_t) dt = \text{cobord} + \int_0^1 (\ell v(\omega' - \omega, \Omega_t) u(\Omega_t)) dt$$

et

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{\omega, \omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t) \right) dt = \text{cobord} + \int_0^1 k[u(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge v(\Omega_t)] dt$$

$$\text{et } d \left(\int_0^1 \alpha \right) + \rho_{\omega, \omega'}(f_1) = \text{cobord} + \rho_{\omega, \omega'}(f) + \rho_{\omega, \omega'}(f - f_1).$$

Donc $\rho_{\omega, \omega'}(f - f_1) = \text{cobord}$, d'où le lemme.

Démonstration du théorème. — Soit $f = u \cdot v$ le produit de 2 polynômes homogènes u et v , appartenant à $I^+(G)$. Identifiant toujours

$\Gamma^+(G) = \Lambda^1(\Gamma^+(G))$ à une partie de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, tout élément X de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ contenant f peut s'écrire sous la forme $X = f \wedge X' + X''$ où ni X' , ni X'' ne contiennent f (ce qui signifie que f n'appartient pas au sous-espace vectoriel de $\Gamma^+(G)$ engendré par les facteurs des éléments décomposables de $\Lambda(\Gamma^+(G))$ intervenant dans X' et X'') : on en déduit que dX' et dX'' non plus ne contiennent pas f , et par conséquent, si

$$dX = (\bar{\bar{f}} - \bar{f}) X' - f \wedge dX' + dX''$$

est nul, c'est que l'on a simultanément :

$$(\bar{\bar{f}} - f) X' + dX'' = 0 \quad \text{et} \quad dX' = 0.$$

Soit alors $X_1 = f_1 \wedge X' + X''$ où $f_1 = \bar{u}v + \bar{\bar{v}}u$.

Puisque $df_1 = df = \bar{\bar{f}} - \bar{f}$,

$$dX_1 = (\bar{\bar{f}} - \bar{f}) X' - f_1 \wedge dX' + dX''.$$

Ainsi, si X est un cocycle de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, il en est de même de X_1 . D'autre part, $\rho_{\omega, \omega'}(X - X_1) = \rho_{\omega, \omega'}(f - f_1) \wedge \rho_{\omega, \omega'}(X')$ est un cobord (en effet $\rho_{\omega, \omega'}(X')$ est un cocycle puisque X' en est un, et $\rho_{\omega, \omega'}(f - f_1)$ est un cobord d'après le lemme). Ainsi, les cocycles $\rho_{\omega, \omega'}(X)$ et $\rho_{\omega, \omega'}(X_1)$ sont cohomologues. Puisque tout polynôme $f \in \Gamma^+(G)$ est combinaison linéaire de produits $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ de polynômes $a_i \in A$, il suffit de réitérer un nombre fini de fois la construction précédente pour prouver que tout cocycle $X \in W(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ peut être remplacé par un cocycle $X_0 \in W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ tel que $\rho_{\omega, \omega'}(X)$ et $\rho_{\omega, \omega'}(X_0)$ soient cohomologues. Ceci achève la démonstration du théorème

Convention. – Si $G = GL(q, \mathbf{R})$, on notera $W(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ l'algèbre $W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ obtenue en prenant $A = \{c_1, \dots, c_q\}$. On notera h_i l'image de c_i par l'isomorphisme canonique $\Gamma^+ G \xrightarrow{h} \Lambda^1 \Gamma^+(G)$.

6. Calcul⁽¹⁾ de $H^*(W(\mathcal{G}, \mathcal{G}'))$.

Supposons pour simplifier $G = GL(q, \mathbf{R})$. Pour tout sous-ensemble $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ de $\{1, \dots, q\}$, on notera \mathfrak{k}_{α} l'idéal homogène

(1) Je dois à J.P. Jouanolou d'avoir attiré mon attention sur le rôle que devait jouer, dans ce calcul, la structure de complexe de Koszul.

de $I(G)$ engendré par les c_{α_i} , $\mathbf{R}[c_\alpha]$ la sous-algèbre $\mathbf{R}[c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_k}]$ de $I(G)$ et $\Lambda(h_\alpha)$ la sous-algèbre $\Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r})$ de

$$\Lambda(h_1, \dots, h_q) = \Lambda(A).$$

THEOREME 6.1. — i) *L'inclusion dans $W(\mathcal{G}(> r), \mathbb{Z}c_\alpha)$ de la sous-algèbre différentielle graduée $\mathbf{R}[c_n, \dots, c_q]/\mathcal{G}(> r) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(h_\alpha)$ induit un isomorphisme en cohomologie.*

ii) *En particulier, pour $r = 0$, on obtient :*

$$H^*(W(\Gamma^+(GL(q, \mathbf{R})), \mathbb{Z}c_\alpha)) = \Lambda(h_\alpha).$$

Notons $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$ le complémentaire de α dans $\{1, \dots, q\}$.

Notons U la sous-algèbre de $\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{G}(> r) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[c_\beta]$ engendrée par les différentielles $dh_{\beta_u} = c_{\beta_u} - \bar{c}_{\beta_u}$ ($1 \leq u \leq \ell$) (\bar{c}_{β_u} désignant la classe de c_{β_u} modulo $\mathcal{G}(> r)$). Notons W' la sous-algèbre différentielle $U \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(h_\alpha)$ et W'' la sous-algèbre différentielle

$$\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{G}(> r) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(h_\alpha).$$

Il est alors clair que l'algèbre $W(\mathcal{G}(> r), \mathbb{Z}c_\alpha)$ qui est égale à $\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{G}(> r) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[c_\beta] \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(h_\alpha) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda(h_\beta)$ est encore égale au produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées $W' \otimes_{\mathbf{R}} W''$, et par conséquent :

$$H^i(W(\mathcal{G}(> r), \mathbb{Z}c_\alpha)) = \sum_{p+q=i} H^p(W') \otimes_{\mathbf{R}} H^q(W'').$$

Le théorème résultera donc immédiatement du

LEMME 6.2. — $H^p(W') = 0$ si $p > 0$, et $H^0(W) = \mathbf{R}$.

En effet, W' est égale encore à l'algèbre extérieure $\Lambda_U(h_\beta)$ construite sur de U -module libre de base h_β et la différentielle d applique $\Lambda_U^i(h_\beta)$ dans $\Lambda_U^{i-1}(h)$ avec $du = 0 \forall u \in U$: cela signifie que W' est ainsi muni d'une structure de complexe de Koszul, avec sa graduation homologique $W'_i = \Lambda_U^i(h_\beta)$, dont on notera $H_*(W')$ l'homologie. Puisque $U \subset \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{G}(> r) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[c_\beta]$ et que $\mathbf{R}[c_\beta]$ est un anneau de polynômes, $c_{\beta_1} - \bar{c}_{\beta_1}$ n'est pas diviseur de 0 dans U ; puisque $U/dh_{\beta_1}, \dots, dh_{\beta_{\ell-1}}$ peut s'identifier à la sous-algèbre

de U engendrée par $dh_{\beta_u} = c_{\beta_u} - \overline{c_{\beta_u}}, \dots, dh_{\beta_\ell} = c_{\beta_\ell} - \overline{c_{\beta_\ell}}$, on montre de même que $c_{\beta_u} - \overline{c_{\beta_u}}$ n'est pas diviseur de 0 dans $U/dh_{\beta_1}, \dots, dh_{\beta_{n-1}}$, ceci $\forall u = 1, \dots, \ell$: on en déduit (cf. par exemple Serre [14] p. IV.4) que

$$H_p(W') = 0 \quad \forall p > 0.$$

D'autre part

$$H_0(W') = U/dh_{\beta_1}, \dots, dh_{\beta_\ell} \cong \mathbf{R}.$$

Soit maintenant x un i -cocycle de W' (graduation cohomologique) ; si x n'est pas un cobord, c'est que $x \in W_0 = U$; puisque $d : W_1 \rightarrow U$ a pour image l'idéal maximal U^+ des termes de $\dim > 0$ dans U , on peut même affirmer que $x \in U^0 = W^0$: ainsi $H^p(W') = 0 \forall p > 0$, et $H^0(W') = \mathbf{R}$.

THEOREME 6.3. (J. Vey). — Soit toujours r un entier ≥ 0 et $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, q\}$. Notons J l'ensemble des suites d'entiers $j = (j_1, \dots, j_a)$, éventuellement vides, telles que $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_a \leq q$ et $j_1 + \dots + j_a \leq r$ si $j \neq \emptyset$. Notons \mathfrak{S} l'ensemble des suites d'entiers $i = (i_1, \dots, i_b)$, éventuellement vides, telles que $i_1 < i_2 < \dots < i_b$ et $\{i_1, \dots, i_b\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Notons $c_j h_i$ l'élément

$$\overline{c_{j_1} c_{j_2} \dots c_{j_a}} \cdot h_{i_1} \wedge h_{i_2} \wedge \dots \wedge h_{i_b}$$

de $\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \otimes \Lambda(h_\alpha)$. Posons, pour $i \in \mathfrak{S}$, $i_0 = i_1$ si $i \neq \emptyset$ et $i_0 = +\infty$ si $i = \emptyset$. Dire que $c_j h_i$ est un cocycle équivaut à $(j_1 + \dots + j_a) + i_0 > r$, puisque

$$d(c_j h_i) = \sum_{\lambda=1}^b \overline{c_{j_1} c_{j_2} \dots c_{j_a} \cdot c_{i_\lambda}} h_{i_\lambda} \wedge \dots \wedge \widehat{h_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge h_{i_b}$$

Notons, pour $j \in J$, $j_0 = j_1$ si $j \neq \emptyset$ et $j_0 = +\infty$ si $j = \emptyset$. Une base de $H^*(\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \otimes \Lambda(h_\alpha))$ est alors fournie par les classes de cohomologie des cocycles $c_j h_i$ vérifiant $(j_1 + \dots + j_a) + i_0 > r$ et $i_0 \leq j_0$.

La démonstration, donnée dans [4] pour $r = q$, se généralise sans difficulté au cas général.

THEOREME 6.4. — Soient α et α' deux sous-ensembles de $\{1, \dots, q\}$. Soit $\beta = \beta_1, \dots, \beta_\ell$ le complémentaire de $\alpha \cup \alpha'$ dans $\{1, \dots, q\}$. Notons U_β et V_β les sous-algèbres de $\mathbf{R}[c_\beta] \otimes \mathbf{R}[c_\beta]$ engendrés respectivement par les $c_{\beta_u} \otimes 1 + 1 \otimes c_{\beta_u}$ ($1 \leq u \leq \ell$) et $c_{\beta_u} \otimes 1 - 1 \otimes c_{\beta_u}$ ($1 \leq u \leq \ell$), de sorte que $\mathbf{R}[c_\beta] \otimes \mathbf{R}[c_\beta] = U_\beta \otimes V_\beta$.

$$H^*(W(\{c_\alpha\}, \{c_{\alpha'}\})) = U_\beta \otimes \Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'}).$$

En effet, notons $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}'$ les complémentaires de α et α' dans $\{1, \dots, q\}$ [$\beta = \bar{\alpha} \cap \bar{\alpha}'$]. L'algèbre $W(\{c_\alpha\}, \{c_{\alpha'}\})$ est alors égale au produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées

$$W_1 \otimes W_2 \otimes W_3 \otimes W_4$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = \mathbf{R}(c_{\bar{\alpha}-\bar{\alpha}'}) \otimes \Lambda(h_{\bar{\alpha}-\bar{\alpha}'}) \\ W_2 = \mathbf{R}(c_{\bar{\alpha}'-\bar{\alpha}}) \otimes \Lambda(h_{\bar{\alpha}'-\bar{\alpha}}) \\ W_3 = V_\beta \otimes \Lambda(h_\beta) \\ W_4 = U_\beta \otimes \Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'}) \end{array} \right.$$

où W_1 , W_2 et W_3 sont acycliques et W_4 a une différentielle nulle. Le théorème en résulte.

Remarque. — U_β correspond évidemment aux classes caractéristiques réelles ordinaires, et $\Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'})$ aux classes exotiques.

7. \mathcal{J} -connexité des espaces de connexions et rigidité des classes exotiques.

Grâce à un argument d'invariance homotopique, on pourrait croire que les classes exotiques ne dépendent pas du choix des connexions ω et ω' , pourvu que l'on fasse varier celles-ci dans des ensembles connexes (ou au moins convexes) de \mathcal{J} -connexions et de \mathcal{J}' -connexions. Nous donnerons au § 8 des contre exemples montrant qu'il n'en est rien. On a besoin d'une notion plus forte que la connexité, et que nous appellerons \mathcal{J} -connexité.

Soit \mathcal{J} un idéal homogène de $I(G)$, $E \rightarrow M$ un G -fibré principal, et ω_0, ω_1 deux \mathcal{J} -connexions sur E . Nous dirons que ω_0 et ω_1 sont “différentiablement \mathcal{J} -homotopes” s’il existe une \mathcal{J} -connexion $\tilde{\omega}$ sur le G -fibré principal $E \times I \rightarrow M \times I$ telle que

$$\tilde{\omega}|_{E \times \{0\}} = \omega_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}|_{E \times \{1\}} = \omega_1.$$

[Notons plus généralement ω_s la connexion induite par $\tilde{\omega}$ sur $E \times \{s\}$: ω_s est une \mathcal{J} -connexion, de sorte que ω_0 et ω_1 peuvent être jointes par une famille différentiable de \mathcal{J} -connexions ; mais nous verrons que l’hypothèse est en fait plus forte].

Nous dirons plus généralement que ω_0 et ω_1 sont “ \mathcal{J} -homotopes” s’il existe une suite finie $\omega_0 = \omega_{s_0}, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \dots, \omega_{s_k} = \omega_1$ de \mathcal{J} -connexions telle que, $\forall i = 0, \dots, k - 1$, ω_{s_i} et $\omega_{s_{i+1}}$ soient différentiablement \mathcal{J} -homotopes : la \mathcal{J} -homotopie (notée $\underline{\mathcal{J}}$) est la relation d’équivalence engendrée par la \mathcal{J} -homotopie différentiable.

Un ensemble C de \mathcal{J} -connexions sera dit “ \mathcal{J} -connexe” s’il est non vide et si 2 connexions quelconques de cet ensemble sont toujours \mathcal{J} -homotopes.

Remarque. — Tout sous-ensemble non vide d’un ensemble \mathcal{J} -connexe est encore \mathcal{J} -connexe ; en particulier un ensemble \mathcal{J} -connexe n’est pas nécessairement connexe (il le sera toutefois s’il est maximal parmi les ensembles \mathcal{J} -connexes).

THEOREME 7.1. — *L’algèbre $\text{Im } \rho_{\omega, \omega'}$ ne dépend que de la composante \mathcal{J} -connexe de ω , et de la composante \mathcal{J}' -connexe de ω' .*

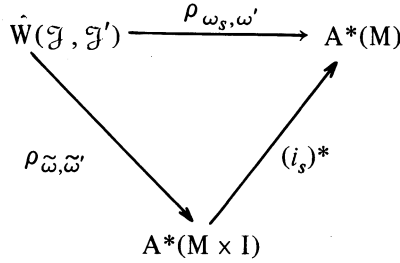
Il suffit de démontrer que les homomorphismes

$$W(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \begin{matrix} \xrightarrow{\rho_{\omega_0, \omega'}} \\ \xrightarrow{\rho_{\omega_1, \omega'}} \end{matrix} A^*(M)$$

sont (algébriquement) homotopes, pourvu que ω_0 et ω_1 soient différentiablement \mathcal{J} -homotopes.

Notant $i_s : M \rightarrow M \times I$ l’application $x \rightarrow (x, s)$, il suffit de démontrer que le diagramme suivant est un diagramme commutatif d’homomorphismes d’algèbres différentielles

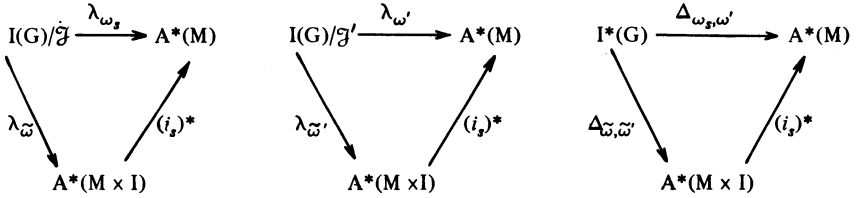
$$(\text{car } i_0 \sim i_1 \Rightarrow \rho_{\omega_0, \omega'} \sim \rho_{\omega_1, \omega'}),$$



où $\tilde{\omega}$ désigne une \mathcal{G} -connexion sur $E \times I$ joignant ω_0 et ω_1

$$\omega_s = \tilde{\omega}|_{E \times s} \quad \text{et où} \quad \tilde{\omega}' = [\omega', \vec{\omega}']$$

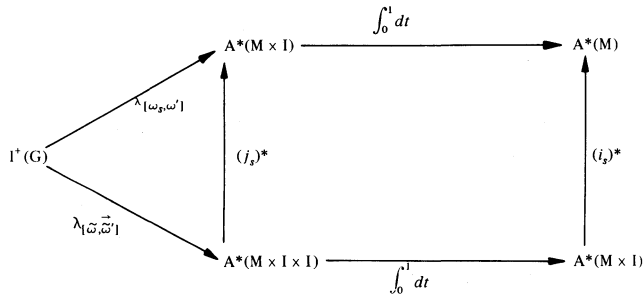
(notations du § 2). Pour que ceci ait un sens, il faut d'abord vérifier que $\tilde{\omega}'$ est une \mathcal{G}' -connexion, sachant que ω' en est une : c'est immédiat, car ω' est l'image réciproque de ω par la projection $M \times I \rightarrow M$. Il reste alors à vérifier la commutativité des 3 diagrammes :



Celle des 2 premiers est immédiate puisque

$$\tilde{\omega}|_{E \times \{s\}} = \omega_s \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}'|_{E \times \{s'\}} = \omega'$$

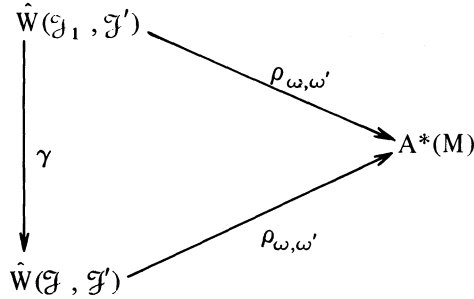
Notant $j_s : M \times I \rightarrow M \times I \times I$ l'application $(x, t) \rightarrow (x, t, s)$, la commutativité du 3^{ème} diagramme équivaut à celle de



Le triangle commute car $[\overrightarrow{\tilde{\omega}}, \overrightarrow{\tilde{\omega}'}]_{M \times I \times \{s\}} = [\overrightarrow{\omega_s}, \overrightarrow{\omega'}]$.

Le rectangle commute de façon évidente.

Soit plus généralement \mathcal{F}_1 un idéal inclus dans \mathcal{F} : toute \mathcal{F} -connexion ω est à fortiori une \mathcal{F}_1 -connexion, de sorte que le diagramme commute pour toute \mathcal{F} -connexion ω et \mathcal{F}' -connexion ω' ,



γ désignant l'épimorphisme naturel induit par $I(G)/\mathcal{F}_1 \rightarrow I(G)/\mathcal{F}$.
 Du morceau de suite exacte

$$\dots \rightarrow H^i(\hat{W}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}')) \xrightarrow{\gamma^*} H^i(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\text{Ker } \gamma) \rightarrow \dots,$$

on déduit le

COROLLAIRE 7.2. — *Si ω varie dans un ensemble C de \mathcal{F} -connexions qui n'est que \mathcal{F}^1 -connexe, les classes exotiques $\rho_{\omega, \omega'}^*([\alpha])$ ne dépendent pas de ω , pourvu que $\partial[\alpha] = 0$.*

Avec les notations ci-dessus

THEOREME 7.3. — (Interprétation des classes exotiques comme obstructions).

Soit \mathcal{F}^1 un idéal de $I(G)$ inclus dans \mathcal{F} , et $K^(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$ la sous-algèbre de $H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$ formé des classes de cohomologie $[\alpha]$ telles que $\partial[\alpha] = 0$.*

Supposons l'ensemble C de \mathcal{F} -connexions \mathcal{F}_1 -connexe et C' \mathcal{F}' -connexe. Alors :

i) *la restriction $\rho : K^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$ de $\rho_{\omega, \omega'}^*$ à $K^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$ est indépendante des connexions ω et ω' choisies respectivement dans C et C' .*

ii) *s'il existe une classe exotique non nulle dans $\text{Im } \rho$, alors $C \cap C' = \emptyset$.*

La partie i) du théorème résulte immédiatement de 7.1 et 7.2. Supposons $C \cap C' \neq \emptyset$: puisque ρ est indépendant des connexions $\omega \in C$ et $\omega' \in C'$, on peut choisir $\omega = \omega' \in C \cap C'$; or, la forme de courbure $\tilde{\Omega}$ de $[\omega, \vec{\omega}']$, égale à $dt \wedge (\omega' - \omega) +$ (terme sans dt), devient ici $\tilde{\Omega} = (p_1)^{-1} \Omega$ où $p_1 : E \times \mathbf{R} \rightarrow E$ désigne la 1^{ère} projection, et n'a pas de terme en dt : on en déduit

$$\int_0^1 \lambda_{[\omega, \vec{\omega}]}(f) = \Delta_{\omega, \omega}(f) = 0 \quad \forall f \in \Gamma^+(G),$$

et par conséquent les classes exotiques qui sont dans $\text{Im } \rho$ doivent être nulles.

Remarque. – Le théorème 7.3 ci-dessus s'applique en particulier au cas où C est \mathcal{F} -connexe avec $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, auquel cas

$$K^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = H^*(W'(\mathcal{F}, \mathcal{F}')).$$

8. Déformations de classes exotiques.

Exemple 1. – Prenons

$$G = GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^* \quad , \quad M = S^1 \quad \text{et} \quad Q = \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow S^1$$

(fibré trivial de dim 1).

$$\text{On a } I(G) = \mathbf{R}[c_1] \text{ (où } c_1(a) = a \quad \forall a \in \mathbf{R} = \mathbf{R}^*).$$

PROPOSITION 8.1. – *L'ensemble C de toutes les connexions sur Q est convexe (donc connexe), formé de $\Gamma^+(G)$ -connexions (elles sont toutes sans courbure, car $\dim S^1 = 1$), et n'est cependant pas $\Gamma^+(G)$ -connexe.*

Nous allons en effet construire une classe exotique non nulle, en prenant $\mathcal{F}' = \mathcal{F} = \Gamma^+(G)$, $C' = C$.

Puisque $C \cap C' \neq \emptyset$, il en résultera que C n'est pas $\Gamma^+(G)$ -connexe, d'après le th. 7.3.

Tout d'abord $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \Lambda(h_1)$ avec différentielle nulle.

$$H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = \Lambda(h_1).$$

Soit σ la section définissant la trivialisation canonique de

$$Q : \sigma(\theta) = (1, \theta) \in \mathbf{R} \times S^1 \quad (\theta \in S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}).$$

Soient ω , et ω' deux connexions définies respectivement par les lois $\frac{\nabla}{\partial\theta} \sigma = f \cdot \sigma$ et $\frac{\nabla'}{\partial\theta} \sigma = g \cdot \sigma$ où f, g sont 2 fonctions

C^∞ de S^1 dans \mathbf{R} . La connexion $\tilde{\nabla} = [\overline{\nabla}, \overline{\nabla}']$ sur $Q \times I \rightarrow S^1 \times I$ a une courbure qui vérifie : $\tilde{\Omega} = (g - f) dt \wedge d\theta$.

On en déduit $\rho_{\omega, \omega'}(h_1) = (g - f) d\theta$.

Il est clair que l'on peut obtenir ainsi toutes les 1-formes sur S^1 . Par exemple si ∇^s désigne, pour $s \in \mathbf{R}$, la connexion définie par $\frac{\nabla^s}{\partial\theta} \sigma = s \cdot \sigma$, $\rho_{\omega_{s_0}, \omega_s}(h_1) = (s - s_0) d\theta$: l'application $s \rightarrow \rho_{\omega_{s_0}, \omega_s}[h_1]$ est donc un isomorphisme de groupes de \mathbf{R} sur $H^1(S^1, \mathbf{R})$.

Exemple 2. – Thurston ([15]) a montré qu'il existe sur S^3 une famille F_s de feuilletages de codimension 1 telle que l'invariant de Godbillon-Vey varie continument. On en déduit la

PROPOSITION 8.2. (Thurston). – *Sur le fibré vectoriel trivial $\mathbf{R} \times S^3 \rightarrow S^3$, il existe un ensemble connexe de $(c_1)^2$ -connexions, qui n'est pas $(c_1)^2$ -connexe.*

Prenant en effet

$$G = GL(1, \mathbf{R}), \quad I(G) = \mathbf{R}[c_1].$$

Prenant $\mathcal{F} = \mathbb{Z}(c_1)^2$ et $\mathcal{F}' = I^+(G)$,

on obtient $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \mathbf{R}[c_1]/(c_1)^2 \otimes \Lambda(h_1)$

a pour cohomologie $\mathbf{R} \cdot 1 \otimes \mathbf{R}(\overline{c_1} \cdot h_1)$. Prenant pour Q_s le fibré transverse au feuilletage F_s de codimension 1, pour ω_s une connexion basique (c'est une $(c_1)^2$ -connexion), et pour ω'_s la connexion plate associée à une trivialisation de Q_s (c'est une $I^+(G)$ -connexion), l'invariant de Godbillon-Vey est égal à $\rho_{\omega_s, \omega'_s}(\overline{c_1} \cdot h_1)$. D'après la définition même de la famille F_s , il est possible de se ramener au cas d'un seul fibré $\mathbf{R} \times S^3 \rightarrow S^3$, avec $\omega'_s = c^{te}$ et $\omega_s =$ famille différentiable de $(c_1)^2$ -connexions sur ce fibré.

Exemple 3. — Sur une variété compacte M de dimension 3, prenons $Q = T(M)$, $\mathcal{F} = I^+(GL(3, \mathbb{R}))$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(> 1)$: toute connexion sur Q est une \mathcal{F}' -connexion, et toute connexion respectant une métrique riemannienne est une \mathcal{F} -connexion. Prenons pour ω la connexion de Lévi-Civita d'une métrique riemannienne sur M , et pour ω' une connexion triviale respectant cette métrique (M est parallélisable). On a alors : $H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = \Lambda(h_2, h_3)$ et $\int_M \rho_{\omega, \omega'}(h_2)$ est un nombre réel dont la classe modulo \mathbb{Z} n'est autre que l'invariant de Chern-Simons [3] ; en particulier $\rho_{\omega, \omega'}^*[h_2]$ peut n'être pas nul (c'est le cas si $M = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$). Puisque $\forall s \in I$, la connexion

$$\omega_s = s\omega' + (1 - s)\omega$$

est à la fois une \mathcal{F} et une \mathcal{F}' -connexion, l'application $s \rightarrow \rho_{\omega, \omega_s}^*[h_2]$ est une déformation évidente de la classe exotique $\rho_{\omega, \omega'}^*[h_2]$.

9. Exemples de \mathcal{F} -connexité.

Pour un ensemble de connexions, "connexe" voudra dire dans la suite : "connexe par arcs différentiables par morceaux".

THEOREME 9.1. — *Tout ensemble connexe non vide de connexions sur $E \rightarrow M$ vérifiant $\Omega^{r+1} \equiv 0$ (cf. exemple 3, § 3) est un ensemble de $\mathcal{F}(> r)$ -connexion qui n'est que $\mathcal{F}(> r + 1)$ -connexe.*

Remarque. — Cet ensemble n'est en général pas $\mathcal{F}(> r)$ -connexe comme le prouvent les exemples 1 et 2 du § 8.

Soit en effet $(\omega_s)_{s \in I}$ une famille différentiable de connexions sur E vérifiant $(\Omega_s)^{r+1} \equiv 0 \forall s$. Soit $\tilde{\omega}$ la connexion sur $E \times I \rightarrow M \times I$ définie par $\tilde{\omega}|_{E \times \{s\}} = \omega_s$ et $\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$. Elle a pour courbure : $(\tilde{\Omega})_{z,s} = ds \wedge \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\right)_{z,s} + (\Omega_s)_z$, de sorte que $f(\tilde{\Omega})$, qui est égal à $k ds \wedge f\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}, \Omega_s^{k-1}\right) + f(\Omega_s^k)$ pour $f \in I^k(G)$, est nul si $k - 1 \geq r + 1$ c'est-à-dire $k > r + 1$.

COROLLAIRE 9.2. — Si le fibré E est plat, tout ensemble connexe non vide de connexions sans courbure sur E est $\mathfrak{G}(> 1)$ -connexe.

cf. aussi plus loin le théorème 9.6. (partie (i)).

COROLLAIRE 9.3. — Tout ensemble connexe non vide de connexions sur $E \rightarrow M$ est $\mathfrak{G}\left(> \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$ -connexe, si $n = \dim M$.

En fait, on a le résultat plus fort suivant :

PROPOSITION 9.4. — Tout ensemble non vide de connexions sur $E \rightarrow M$ est $\mathfrak{G}\left(> \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ -connexe, si $n = \dim M$.

En effet, si ω et ω' sont 2 connexions sur E , $[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega'}]$ est une connexion sur $E \times I \rightarrow M \times I$: c'est donc une $\mathfrak{G}\left(> \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ -connexion puisque $\dim(M \times I) = n + 1$. (Cf. l'exemple 1 du § 3).

Sorite. — Soit P une propriété de l'ensemble des G -connexions (c'est-à-dire de l'ensemble des couples (E, ω) , formés d'un G -fibré principal différentiable E et d'une connexion ω sur E). On dira que ω est une "P-connexion" si (E, ω) possède la propriété P . On supposera en outre que l'image réciproque d'une P-connexion est une P-connexion. Généralisant les définitions du § 7, on dira que deux P-connexions ω_0 et ω_1 sur un même G -fibré principal $E \rightarrow M$ sont "différentiablement P-homotopes" s'il existe une P-connexion $\tilde{\omega}$ sur $E \times I \rightarrow M \times I$ telle que $\tilde{\omega}|_{E \times \{0\}} = \omega_0$ et $\tilde{\omega}|_{E \times \{1\}} = \omega_1$. On définit de même la "P-homotopie" (notée $\omega_0 \stackrel{P}{\cong} \omega_1$) et la P-connexité. On démontre de façon immédiate :

LEMME 9.5. — Si P' est une autre propriété de l'ensemble des G -connexions, respectée par image réciproque, et telle que $P \Rightarrow P'$, alors

$$(\omega_0 \stackrel{P}{\cong} \omega_1) \Rightarrow (\omega_0 \stackrel{P'}{\cong} \omega_1).$$

THEOREME 9.6. — i) Si E est trivial, tout ensemble connexe non vide de connexions triviales (c'est-à-dire à holonomie nulle) est $I^+(G)$ -connexe [alors qu'un ensemble connexe de connexions sans courbure n'est pas nécessairement $I^+(G)$ -connexe, comme on l'a vu au § précédent].

ii) L'ensemble des connexions sur un fibré vectoriel Q (de dimension q) pour lesquelles il existe une métrique riemannienne invariante, est \mathcal{F} (impair)-connexe.

iii) L'ensemble des connexions sur Q (supposé orientable) pour lesquelles il existe une forme volume invariante est $\{c_1\}$ -connexe.

iv) L'ensemble des connexions sur $Q = Q'_k \oplus (q - k)$ qui respectent la décomposition ci-dessus est $\{c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_q\}$ -connexe.

v) L'ensemble des connexions adaptées sur le fibré transverse à un système différentiel de classe maximale $\leq r$ est $\mathcal{F}(> r)$ -connexe.

vi) L'ensemble (supposé non vide) des connexions transverses projetables à un feuilletage de codimension q est $\mathcal{F}(> \frac{q}{2})$ -connexe.

Dans chacun des cas ci-dessus, on notera P la propriété correspondante donnée dans le tableau ci-dessous, et on va appliquer le lemme au cas où P' est la propriété d'être une \mathcal{F} -connexion.

hypothèse sur E	P	\mathcal{F}
E est trivial	connexion triviale	$\Gamma^+(G)$
$G = GL(q, \mathbf{R})$	groupe d'holonomie inclus dans un groupe compact de $GL(q, \mathbf{R})$	\mathcal{F} (impair) $= \{c_1, c_3, \dots\}$
Q est orientable	groupe d'holonomie inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$	$\{c_1\}$
$Q = Q'_k \oplus q - k$	connexion respectant la décomposition ci-contre	$\{c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_q\}$
Q est le fibré transverse à un système différentiel de classe maximale $\leq r$	connexion adaptée	$\mathcal{F}(> r)$
Q est le fibré transverse à un feuilletage admettant une connexion transverse projectable	connexion transverse projectable	$\mathcal{F}(> \frac{q}{2})$

i) soit $\omega_s (s \in I)$ une famille C^∞ de connexions triviales. Soit $z_0 \in E$ et σ_s la section de E , horizontale pour ω_s , et passant par z_0 ; on définit une section $\tilde{\sigma}$ de $E \times I \rightarrow M \times I$ en posant

$$\tilde{\sigma}(x, s) = (\sigma_s(x), s),$$

et une connexion $\tilde{\omega}$ sur $E \times I$ en imposant à $\tilde{\sigma}$ d'être horizontale pour $\tilde{\omega}$: il est clair que $\tilde{\omega}$ réalise une P-homotopie entre ω_0 et ω_1 .

ii) Soit ∇^0 une connexion respectant la métrique g^0 sur $Q \rightarrow M$, et ∇^1 " " " " g^1 " " $Q \rightarrow M$. Soit $g^t = tg^1 + (1 - t)g^0$ ($-\epsilon < t < 1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ assez petit pour que g^t soit une métrique sur Q).

Soit \tilde{g} la métrique sur $Q \times]-\epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow M \times]-\epsilon, 1 + \epsilon[$ définie par $\tilde{g}|_{M \times \{t\}} = g^t$, et soit $\tilde{\nabla}$ une connexion sur $Q \times]-\epsilon, 1 + \epsilon[$, respectant \tilde{g} ; notant ∇'^t la connexion induite par $\tilde{\nabla}$ sur $Q \times \{t\} \simeq Q$, $\tilde{\nabla}$ définit une P-homotopie entre ∇'^0 et ∇'^1 : $\nabla'^0 \underset{P}{\simeq} \nabla'^1$.

Soit \tilde{g}^0 la métrique sur $Q \times I \rightarrow M \times I$ obtenue à partir de g^0 par image réciproque $M \times I \rightarrow M$, et $[\nabla^0, \nabla'^0]$ la connexion sur $Q \times I$ obtenue par combinaison affine de ∇^0 et ∇'^0 : $[\nabla^0, \nabla'^0]$ respecte \tilde{g}^0 et réalise une P-homotopie entre ∇^0 et ∇'^0 : $\nabla^0 \underset{P}{\simeq} \nabla'^0$; et, de même $\nabla^1 \underset{P}{\simeq} \nabla'^1$.

iii) Remplaçant g^0 et g^1 par des formes volumes η_0 et η_1 , la démonstration de iii) est analogue à celle de ii), une fois remarqué que l'on peut toujours orienter Q , supposer les formes η_0 et η_1 positives (car $\nabla\eta = 0 \Rightarrow \nabla(-\eta) = 0$), et que les formes volumes > 0 forment un espace convexe.

iv) Si ∇^0 et ∇^1 sont deux connexions sur $Q = Q'_k \oplus (q - k)$, respectant la décomposition précédente, $[\nabla^0, \nabla^1]$ est une connexion sur $Q \times I \rightarrow M \times I$, respectant la décomposition

$$Q \times I = (Q'_k \times I) \oplus (q - k)$$

obtenue à partir de celle de Q par image réciproque $M \times I \rightarrow M$, et réalisant une P-homotopie entre ∇^0 et ∇^1 .

v) Soient ∇^0 et ∇^1 deux connexions sur le fibré Q transverse à un système différentiel $0 \rightarrow L \xrightleftharpoons[s_0]{s_1} T(M) \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 0$ de classe maximale $\leq r$, correspondant à des scissions s_0 et s_1 de la suite ci-dessus :

$$\begin{cases} \nabla_x^0(\pi y) - \nabla_y^0(\pi x) - \pi([x, y]) = -\pi[s_0 x, s_0 y], \\ \nabla_x^1(\pi y) - \nabla_y^1(\pi x) - \pi([x, y]) = -\pi[x_1 x, s_1 y]. \end{cases}$$

Soient $s_t = ts_1 + (1 - t)s_0$ le projecteur obtenu par combinaison affine, et $R_t = \text{Ker } s_t$ le supplémentaire correspondant de L dans $T(M)$. Identifiant $T(M \times I)$ à $(p_1)^{-1} T(M) \oplus 1$, on définit un système différentiel \bar{L} sur $M \times I$ en posant : $\bar{L} = (p_1)^{-1} L \oplus 1$; et on définit un supplémentaire \bar{R} de \bar{L} dans $T(M \times I)$ en posant $\bar{R}|_{M \times \{t\}} = R_t$: le fibré quotient $\bar{Q} = T(M \times I)/\bar{L}$ est égal à $(p_1)^{-1}(Q) = Q \times I \rightarrow M \times I$. Soit $\bar{\nabla}$ une connexion sur \bar{Q} adaptée à \bar{R} ; si la classe maximale de L est $\leq r$, celle de \bar{L} aussi, de sorte que les connexions $\bar{\nabla}^0$ et $\bar{\nabla}^1$ induite par $\bar{\nabla}$ sur $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ sont P-homotopes. Il reste à montrer que $\bar{\nabla}^0$ et ∇^0 d'une part, $\bar{\nabla}^1$ et ∇^1 d'autre part sont P-homotopes également. Prenant cette fois-ci $\bar{R}^0 = (p_1)^{-1} R^0$, $[\bar{\nabla}^0, \bar{\nabla}^0]$ est une P-homotopie sur \bar{Q} , adaptée à \bar{R}^0 , pour le système différentiel \bar{L} de classe maximale $\leq r$. De même, $\bar{\nabla}^1$ et ∇^1 sont P-homotopes.

vi) Soient ∇^0 et ∇^1 deux connexions transverses projetables sur le fibré Q transverse à un feuilletage de codimension

$$q : 0 \rightarrow L \rightarrow T(M) \rightarrow Q \rightarrow 0$$

(L fibré tangent aux feuilles). Notant $p_1 : M \times I \rightarrow M$ la 1^{ère} projection, $\bar{L} = (p_1)^{-1} L \oplus 1$ est un feuilletage de même codimension q sur $M \times I$, dont le fibré quotient \bar{Q} est égal à $(p_1)^{-1} Q = Q \times I \rightarrow M \times I$. La connexion $[\nabla^0, \nabla^1]$ sur \bar{Q} est transverse projetable, et par conséquent $\nabla^0 \stackrel{P}{\cong} \nabla^1$.

10. Quelques applications.

1/ *Théorèmes de rigidité*

a) On a vu (th. 6.1) que

$$\begin{aligned} H^*(W(\mathcal{F}(> r), \{c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_k}\})) = \\ = H^*(R[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{F}(> r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k})). \end{aligned}$$

et qu'une base de la cohomologie est fournie par les classes de cohomologie des cocycles $c_j h_i$ vérifiant $|j| + i_0 > r, i_0 \leq j'_0$. (th. 6.3, avec ses notations).

Soient ω une connexion vérifiant $\Omega^{r+1} \equiv 0$, et ω' une $\{c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_k}\}$ connexion sur un même fibré vectoriel de dimension q .

THEOREME 10.1 (J.L. Heitsch). — Si $|j| + i_0 > r + 1$ (avec les notations du théorème 6.3), $\rho_{\omega, \omega'}^*([c_j h_i])$ ne dépend que de la composante connexe (par arcs différentiables par morceaux) de ω dans l'espace des connexions vérifiant $\Omega^{r+1} \equiv 0$.

Considérons en effet l'homomorphisme

$$\partial : H^p(\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{F}(> r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k})) \rightarrow H^{p+1}(\text{Ker } \gamma)$$

associé à la suite exacte d'algèbres différentielles graduées

$$0 \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{F}(> r + 1)$$

$$\otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{F}(> r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}) \rightarrow 0.$$

Notant \bar{f}^r la classe d'équivalence modulo $\mathcal{F}(> r)$ de $f \in I^+(G)$, $\partial[c_j h_i]$ est égal à la classe de cohomologie dans $\text{Ker } \gamma$ de l'élément

$$\sum_{\lambda=1}^b \pm c_{j_1} \dots c_{j_a} c_{i_\lambda}^{r+1} h_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{h_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge h_{i_b}$$

appartenant à $\mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]/\mathcal{F}(> r + 1) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k})$, et est donc nul si $|j| + i_0 > r + 1$. Il suffit donc d'appliquer 7.2 et 9.1 pour conclure.

On redémontre ainsi, par une autre méthode et sans utiliser de formule de dérivation, le théorème de rigidité de J.L. Heitsch ([6]).

b) *Etude générale du cas où C' est un ensemble de connexions sans courbure et où $\mathcal{F}' = I^+(G)$.*

On a alors : $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = I(G)/\mathcal{F} \otimes \Lambda(I^+(G))$.

Supposons, pour simplifier, $G = GL(q, \mathbf{R})$ et soit, comme d'habitude, h_1 l'image de c_1 par l'isomorphisme $I^+(G) \xrightarrow{h} \Lambda^1(I^+(G)) \subset \Lambda I^+(G)$. Pour tout $f \in I(G)$, on notera \bar{f} sa classe modulo \mathcal{F} .

Tout élément X de $\hat{W}(\mathcal{F}, I^+(G))$ peut s'écrire sous la forme $X = h_1 Y + Z$, où Y et Z (donc aussi dY et dZ) ne contiennent pas de terme en h_1 .

THEOREME 10.2. — *Supposons que X soit un cocycle de $\hat{W}(\mathcal{F}, I^+(G))$, ω une \mathcal{F} -connexion et ω' une connexion sans courbure. La classe de cohomologie $\rho_{\omega, \omega'}^*([X])$ dans $H^*(M, \mathbf{R})$ ne dépend alors que de la composante connexe de ω' dans l'espace des connexions sans courbure, sous l'une des 2 hypothèses suivantes :*

i) Y est un cobord de la forme dV (V ne contenant pas h_1),

ii) Y est de la forme $\sum_i \bar{a}_i \cdot Y_i$, où les Y_i sont des cocycles

et les a_i des polynomes de degré ≥ 1 .

Puisque $dX = -h_1 \cdot dY + dZ - \bar{c}_1 \cdot Y$, dire que X est un cocycle signifie que Y en est un, et que $dZ = \bar{c}_1 \cdot Y$. Nous allons d'abord montrer comment la 2^{ème} hypothèse peut se ramener à la 1^{ère}.

Soit donc

$$X = h_1 \cdot \left(\sum_i \bar{a}_i Y_i \right) + Z \quad \text{avec} \quad dY_i = 0 \quad \forall i,$$

et

$$dZ = \bar{c}_1 \sum_i \bar{a}_i Y_i.$$

Posons $X_1 = \sum_i h(c_1 a_i) Y_i + Z$. La différence $X - X_1$ est égale à $\sum_i (\bar{a}_i h_1 - h(c_1 a_i)) \cdot Y_i$. Puisque Y_i est un cocycle, $X - X_1$ est un cocycle et son image par $\rho_{\omega, \omega'}^*$ est un cobord d'après le lemme 5.2. On a donc $\rho_{\omega, \omega'}^*([X]) = \rho_{\omega, \omega'}^*([X_1])$ et X_1 ne contient pas le terme h_1 , donc vérifie l'hypothèse i).

De la suite exacte d'algèbres différentielles graduées :

$$0 \rightarrow I(G)/\mathcal{F} \otimes \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{c}}_1 \otimes \Lambda(I^+(G)) \rightarrow I(G)/\mathcal{F} \otimes \mathbf{R} [c_1]/(c_1)^2 \otimes \Lambda(I^+(G)) \\ \xrightarrow{\gamma} I(G)/\mathcal{F} \otimes \Lambda(I^+(G)) \rightarrow 0$$

($\bar{\bar{c}}_1$ désignant la classe de c_1 modulo $\mathcal{F}(> 1)$), on déduit l'homomorphisme

$$\partial : H^i(I(G)/\mathcal{F} \otimes \Lambda(I^+(G))) \rightarrow H^{i+1}(I(G)/\mathcal{F} \otimes \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{c}}_1 \otimes \Lambda(I^+(G))).$$

D'après 7.2 et 9.1, il suffit de prouver que $\partial([X]) = 0$ sous l'hypothèse i). Or $\partial([X])$ est la classe de cohomologie de $\overline{c}_1 \cdot Y$ dans $\text{Ker } \gamma$, qui est évidemment nulle sous l'hypothèse considérée (si $Y = dV$, V ne contenant pas $h_1, \overline{c}_1 \cdot Y$ est la différentielle de $\overline{c}_1 \cdot V$ dans $\text{Ker } \gamma$).

Remarque. — L'hypothèse i) est en particulier vérifiée si X ne contient pas de terme en h_1 .

2/ *Obstructions à ce que le groupe d'holonomie d'une connexion plate soit fini.*

Soit $Q \rightarrow M$ un fibré vectoriel plat de rang q , et ∇ une connexion sans courbure sur Q .

Prenons $C = \{\nabla\}$, $\mathcal{F} = I^+(\text{GL}(q, \mathbf{R})) = \{c_1, \dots, c_q\}$
 $C' = \{\text{connexions sur } Q \text{ laissant une métrique invariante}\}$
 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(\text{impair}) = \{c_1, c_3, \dots, c_{\text{impair}} \dots\}$.

D'après 6.1, $H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \dots, h_{\text{impair}} \dots)$.

D'après 9.6, C' est \mathcal{F}' -connexe de sorte que

$$\rho_{\nabla, \nabla'}^* : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \dots) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

ne dépend que de ∇ , et non de ∇' (on notera ρ_{∇}^* cette application). Il résulte alors de 7.3 :

PROPOSITION 10.3. — *Pour que le groupe d'holonomie de ∇ soit inclus dans un sous-groupe compact de $\text{GL}(q, \mathbf{R})$, et en particulier pour qu'il soit fini, il faut que l'exotisme $\text{Im } \rho_{\nabla}^*$ soit nul.*

Cas particulier $q = 1$. — ce cas est intéressant, d'une part parce qu'il fournit aisément des cas où l'exotisme ci-dessus n'est pas nul, d'autre part parce qu'alors la nullité de cet exotisme suffit à impliquer la finitude du groupe d'holonomie.

Donnons nous en effet une métrique riemannienne arbitraire sur le fibré $Q \rightarrow M$ de dimension 1. Soit σ_U une section de norme 1 définie sur un ouvert U de M au-dessus duquel Q est trivial. Soit ∇ une connexion sur Q : on définit une 1-forme scalaire γ_U sur U en posant $\nabla \sigma_U = \gamma_U \cdot \sigma_U$; si U est connexe, toute autre section de norme 1 au-dessus de U est égale à $-\sigma_U$; puisque

$$\nabla(-\sigma_U) = -\nabla \sigma_U = -\gamma_U \cdot \sigma_U = \gamma_U(-\sigma_U),$$

γ_U ne dépend pas du choix fait entre σ_U et $-\sigma_U$, de sorte que les γ_U se recollent : il existe une 1-forme γ sur M (entièrement définie, une fois fixée la métrique riemannienne sur Q). Puisque

$$\nabla_X \nabla_Y \sigma_U - \nabla_Y \nabla_X \sigma_U - \nabla_{[X, Y]} \sigma_U = d\gamma_U(X, Y) \cdot \sigma_U,$$

il revient au même de dire que ∇ est sans courbure ou que γ est une forme fermée.

PROPOSITION 10.4. — *Supposons ∇ sans courbure. La classe de cohomologie $[\gamma]$ de la forme fermée définie ci-dessus ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne sur Q , et est égale à $\rho_{\nabla}^*(-h_1)$. Le groupe d'holonomie de ∇ est fini ou non, selon que cette classe de cohomologie est nulle ou non.*

Soit en effet χ_U la section locale définie par σ_U du fibré principal $E \rightarrow M$ associé à Q , et soit ∇' la connexion sur Q respectant la métrique riemannienne donnée : $\nabla' \sigma_U = 0$. Avec les notations du § 2, $\chi_U^*(t \omega' + (1-t)\omega) = (1-t) \gamma_U$, de sorte que la courbure $\tilde{\Omega}$ de $[\nabla, \nabla']$ vérifie :

$$\chi_U^*(\tilde{\Omega}) = -dt \wedge \gamma_U.$$

On en déduit $\rho_{\nabla, \nabla'}^*(h_1) = -\gamma$, d'où la 1^{ère} partie de la proposition. Supposons γ cohomologue à 0 : il existe une fonction différentiable $\psi : M \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\gamma = -d\psi$.

On définit une nouvelle métrique riemannienne sur Q en imposant aux sections σ_U et $-\sigma_U$ d'avoir pour norme $e^{-\psi}$, et l'on vérifie aisément que ∇ respecte cette nouvelle métrique : son groupe d'holonomie est alors nécessairement inclus dans $O(1) = \{-1, +1\}$ et est isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ selon que Q est ou non trivial ; ceci achève la démonstration de la proposition 10.4.

En particulier, si Q est trivial et si σ est une section partout non nulle, on définit une connexion plate à l'aide de toute 1-forme fermée γ en posant $\nabla \sigma = \gamma \cdot \sigma$. Si $H^1(M, \mathbf{R}) \neq 0$, on peut choisir γ non cohomologue à 0, et l'exotisme $\rho_{\nabla}^*(h_1)$ n'est pas nul.

Revenons au cas général *q quelconque*. Du théorème 10.2, on déduit :

PROPOSITION 10.5. — *Le sous-ensemble $\rho_{\nabla}^*(\Lambda_{\mathbf{R}}(h_3, h_5, \dots))$ ne dépend que de la composante connexe de ∇ dans l'espace des connexions plates. Si, par conséquent, il contient au moins 1 élément non nul, il n'est pas possible de déformer ∇ en une connexion à holonomie finie en restant dans l'espace des connexions plates.*

3/ *Obstruction à ce qu'une connexion plate sur un fibré vectoriel ait un groupe d'holonomie inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$.*

Soit $Q \rightarrow M$ un fibré vectoriel plat, orientable, de dimension q et soit ∇ une connexion sans courbure sur Q . Dire que le groupe d'holonomie de ∇ est inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$ équivaut à affirmer l'existence d'une forme volume η sur Q laissée invariante par ∇ . Prenons

$$C = \{\nabla\}, \mathcal{F} = \Gamma^+(GL(q, \mathbf{R}))$$

$$C' = \{\text{connexions sur } Q \text{ à groupe d'holonomie inclus dans } SL(q, \mathbf{R})\}$$

$$\mathcal{F}' = \{c_1\}.$$

D'après 6.1, $H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1)$. D'après 9.6, C' est \mathcal{F}' -connexe ; de sorte que $\rho_{\nabla, \nabla'}^* : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$ ne dépend que de ∇ (on notera ρ_{∇}^* cette application).

PROPOSITION 10.6. — *Pour que le groupe d'holonomie de ∇ soit inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$, il faut et il suffit que la classe $\rho_{\nabla}^*(h_1) \in H^1(M, \mathbf{R})$ soit nulle.*

La condition est évidemment nécessaire d'après 7.3. Pour démontrer la réciproque, donnons nous une forme volume arbitraire η sur Q (η est une section différentiable de $\Lambda^q Q^*$) et une connexion ∇' laissant η invariante : $\nabla' \sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U$ base locale du module des sections de Q définie sur un ouvert U de M au-dessus duquel Q est trivial, on a :

$$d[\eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)] = \sum_{i=1}^q \eta(\sigma_1^U, \dots, \nabla' \sigma_i^U, \dots, \sigma_q^U),$$

soit :
$$d[\eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)] = \left(\sum_{i=1}^q (\gamma_i^i)^U \right) \cdot \eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U),$$

si l'on a posé
$$\nabla' \sigma_i^U = \sum_{j=1}^q (\gamma_i^j)^U \cdot \sigma_j^U.$$

Puisque ∇ est sans courbure, on peut choisir $\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U$ de façon que $\nabla \sigma_i^U = 0 \ \forall i = 1, \dots, q$, ce que nous supposons. Si χ_U désigne la section locale du fibré principal associé à Q définie par $(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)$, on a, avec les notations du § 2, $\chi_U^* \omega = 0$ et $\chi_U^* \omega' = \gamma'^U$ ou $\gamma'^U = (((\gamma_j^i)^U))_{i,j}$. Si $\tilde{\Omega}$ désigne la courbure de $[\omega, \omega']$, on en déduit :

$$\chi_U^*(\tilde{\Omega}) = dt \wedge \gamma'^U + td \gamma'^U + \frac{1}{2} t^2 [\gamma'^U, \gamma'^U],$$

et $\rho_{\nabla, \nabla'}(h_1) = \int_0^1 \text{Tr } \tilde{\Omega}$ a une restriction à U égale à $\text{Tr } \gamma'^U = \sum_{i=1}^q (\gamma_i^i)^U$,

ce qui prouve en particulier que la forme $\sum_i (\gamma_i^i)^U$ est indépendante de la trivialisaton $\chi_U = (\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)$. Si $\rho_{\nabla}^*(h_1) = 0$, il existe une fonction différentiable $\psi : M \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $d\psi|_U = \sum_i (\gamma_i^i)^U$. Montrons que $\nabla(e^{-\psi} \cdot \eta) = 0$; en effet ,

$$(\nabla(e^{-\psi} \eta)) (\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U) = d(e^{-\psi} \cdot \eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)),$$

puisque $\nabla \sigma_i^U = 0 \ \forall i$. Or

$$d(e^{-\psi} \cdot \eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U)) = e^{-\psi} \cdot (-d\psi + \sum_i (\gamma_i^i)^U) \cdot \eta(\sigma_1^U, \dots, \sigma_q^U) = 0.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 10.7. — *Supposons qu'il existe un revêtement galoisien de groupe Π et de base une variété M telle que $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$. Tout homomorphisme de groupes $\alpha : \Pi \rightarrow \text{GL}^+(q, \mathbf{R})$ prend alors ses valeurs dans $\text{SL}(q, \mathbf{R})$.*

Il suffit en effet d'appliquer la proposition 10.6 au fibré vectoriel $Q \rightarrow M$ de dimension q , associé par α au revêtement galoisien de groupe Π .

Remarque. — Ce corollaire n'a d'intérêt que si l'ordre de Π est infini ; sinon il ne fait qu'énoncer une trivialité.

4/ *Obstruction à la platitude des fibrés stablement plats.*

Supposons le fibré vectoriel différentiable Q' , de rang $k \geq 1$, et stablement plat : il existe un fibré vectoriel trivial (soit $q - k$ son rang) tel que $Q = Q' \oplus (q - k)$ soit plat, i.e. admette une connexion sans courbure.

Prenons pour C l'ensemble des connexions sur Q adaptées à la décomposition $Q' \oplus (q - k)$ (c'est-à-dire laissant invariantes chacune des sections canoniques du fibré trivial $q - k$, et telles que la dérivée covariante d'une section de Q' soit encore une section de Q'), avec $\mathcal{F} = \{c_{k+1}, \dots, c_q\}$, et prenons pour C' l'ensemble des connexions plates sur Q avec $\mathcal{F}' = \Gamma^+(\text{GL}(q, \mathbf{R}))$.

D'après 6.1, on a alors $H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_{k+1}, \dots, h_q)$.

On déduit de 9.6 et 10.2 :

PROPOSITION 10.8. — i) *L'exotisme*

$$\rho_{\nabla, \nabla'}^* : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_{k+1}, \dots, h_q) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

ne dépend pas du choix de ∇ dans C , et ne dépend que de la composante connexe de ∇' dans C' .

ii) *Il existe une bijection évidente entre $C \cap C'$ et l'ensemble des connexions plates de Q' .*

5/ *Transitivité transverse du pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux d'un système différentiel de classe maximale $\leq r$. ($r \geq q$)*

Soit $0 \rightarrow L \rightarrow T(M) \rightarrow Q \rightarrow 0$ un système différentiel (notations du § 3 - exemple 7). Rappelons qu'un automorphisme infinitésimal de L est un champ de vecteurs local X sur M , tel que $\forall Y \in \Gamma(L)$, $[X, Y] \in \Gamma(L)$.

DEFINITION. — *On dira que le pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux de L est "transversalement transitif" s'il existe un sous-faisceau \mathcal{R} de \mathbf{R} -espaces vectoriels du faisceau des automorphismes infinitésimaux de L , localement constant, dont la fibre en chaque point est de dimension q (rang de Q), et dont les sections sont des champs de vecteurs transverses à L .*

Remarque. — Si L est intégrable (i.e. $r = q$), la transitivité transverse implique la transitivité. Si, de plus, le faisceau \mathcal{R} est constant, le groupe des automorphismes finis de L opère transitivement sur l'espace des feuilles.

LEMME 10.9. — *Pour que le pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux de L soit transversalement transitif, il faut et il suffit que Q possède une connexion à la fois adaptée (au sens de Martinet) et plate.*

Soit \mathcal{R} un faisceau vérifiant la définition de la transitivité transverse. Les sections de \mathcal{R} engendrent un sous-fibré vectoriel différentiable R de $T(M)$, supplémentaire de L , et \mathcal{R} est le faisceau des sections à dérivée covariante nulle pour une connexion sans courbure sur R . Notons $\lambda : Q \xrightarrow{\cong} R$ l'isomorphisme inverse de $\pi|_R$ et ∇ la connexion sans courbure sur Q qu'on en déduit par cet isomorphisme, ∇ est adaptée à λ : en effet, soient X_1, \dots, X_q une base locale des sections de \mathcal{R} , et $\sigma_i = \pi X_i$; puisque X_i est un automorphisme infinitésimal de L ,

$$\pi[X, \lambda \sigma_i] = 0 \quad \forall X \in \Gamma(L) \quad \forall i = 1, \dots, q,$$

or $\nabla \sigma_i = 0$; on a donc

$$\nabla_X \sigma_i = \pi[X, \lambda \sigma_i] \quad \forall i = 1, \dots, q \quad \forall X \in \Gamma(L) ;$$

puisque les σ_i forment une base locale du module des sections de Q , ∇ est adaptée à λ .

Réciproquement si ∇ est une connexion plate adaptée à λ sur Q , l'image $\mathcal{R} = \lambda(\mathfrak{Z})$ du faisceau \mathfrak{Z} des germes de sections de Q à dérivée covariante nulle pour ∇ vérifie les conditions de la définition de la transitivité transverse.

Supposons maintenant le système différentiel L de classe maximale $\leq r$, et son fibré transverse Q plat. Prenons pour C l'ensemble des connexions sur Q adaptées au sens de Martinet avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}(> r)$ et $C' = \{\text{connexions plates sur } Q\}$ avec $\mathcal{F}' = \Gamma^+(\text{GL}(q, \mathbf{R}))$. Si $\nabla \in C$ et $\nabla' \in C'$, on en déduit un exotisme $\rho_{\nabla, \nabla'}^* : H^*(W_q^r) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$, qui est en fait indépendant de ∇ puisque C est $\mathcal{F}(> r)$ -connexe, où

$$W_q^r = \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q] / \mathcal{F}(> r) \otimes \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, \dots, h_q).$$

Notons $K^*(W_q^r)$ le sous-espace de $H^*(W_q^r)$ engendré par les cocycles c_j, h_i avec les notations du th. 6.2 vérifiant, en plus des conditions du th. 6.2 :

- ou bien $i_1 \geq 2$,
- ou bien $i_1 = 1, j_1 + \dots + j_a = r, \ell = 1$,
- ou bien $i_1 = 1, j_1 + \dots + j_a = r, i_2 \geq j_1 + 1$.

On déduit de 9.6 et 10.2 :

PROPOSITION 10.10. — *La restriction $\rho_{\nabla'} : K^*(W_q^r) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$ de $\rho_{\nabla, \nabla'}^*$ à $K^*(W_q^r)$ ne dépend que de la composante connexe de ∇' dans C' .*

Exemple. — Si $q = r = 1$, $K^*(W_1^1) = H^*(W_1^1)$ est engendré par c_1, h_1 : si l'invariant de Godbillon-Vey $\rho(c_1, h_1)$ d'un feuilletage de codimension 1 n'est pas nul, le groupe des automorphismes du feuilletage n'opère pas transitivement sur l'espace des feuilles.

6/ *Existence de connexions métriques adaptées pour un système différentiel de classe maximale $\leq r$, et existence de métriques quasi-fibrées pour un feuilletage.*

Soit C l'ensemble des connexions adaptées sur le fibré transverse Q (de dimension q) à un système différentiel L , et soit C' l'ensemble des connexions métriques sur Q . D'après 9.6, C' est \mathcal{F} (impair)-connexe, et si L est de classe maximale $\leq r$ ($r \geq q$), C est $\mathcal{F}(> r)$ -connexe.

D'autre part, d'après 6.1, $W(\mathcal{F}(> r), \mathcal{F}(\text{impair}))$ a même cohomologie que sa sous-algèbre

$$WO_q^r = \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q] / \mathcal{F}(> r) \otimes \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \dots).$$

On en déduit :

PROPOSITION 10.11. — *L'homomorphisme*

$$\rho = \rho_{\nabla, \nabla'}^* : H^*(WO_q^r) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

est indépendant des connexions $\nabla \in C$ et $\nabla' \in C'$. Pour qu'il existe sur Q une connexion métrique adaptée, il faut que $\rho = 0$.

Dans le cas d'un feuilletage ($q = r$), l'existence d'une métrique quasifibrée (cf. [12] et [13]) équivaut à l'existence, sur Q , d'une connexion qui soit à la fois transverse projetable (au sens de Molino[11]) et métrique. Toute connexion transverse projetable étant en particulier adaptée (i.e. ici basique au sens de Bott [1]), une première condition nécessaire d'existence est évidemment que l'homomorphisme ρ de la prop. 10.11 soit nul. Mais si l'on suppose a priori l'existence de connexions transverses projetables, on obtient des obstructions plus fortes en prenant pour C l'ensemble de ces connexions, avec

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(> \frac{q}{2})$, et $C' = \{\text{connexions métriques}\}$ avec $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(\text{impair})$.

Puisque ces ensembles sont respectivement $\mathcal{F}\left(> \frac{q}{2}\right)$ -connexe et $\mathcal{F}(\text{impair})$ -connexe (prop. 9.6), et puisque (6.1) $W(\mathcal{F}\left(> \frac{q}{2}\right), \mathcal{F}(\text{impair}))$ a même cohomologie que sa sous algèbre

$$WO'_q = \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q] / \mathcal{F}\left(> \frac{q}{2}\right) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \dots)$$

on obtient :

PROPOSITION 10.12. – *Si le fibré transverse à un feuilletage de codimension q sur M possède des connexions transverses projetables, l'exotisme*

$$\rho_{\nabla, \nabla'}^* : H^*(WO'_q) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

est indépendant des connexions ∇ et ∇' prises respectivement dans C et C' . Pour que le feuilletage possède une métrique quasifibrée, il faut que cet exotisme soit nul.

APPENDICE
 (février 1973)
 CLASSES EXOTIQUES UNIVERSELLES
 B. CALLENAERE et D. LEHMANN

Dans une note précédente [9] dont nous reprenons les notations, l'un de nous définissait en particulier les classes exotiques associées à une \mathcal{F} -connexion ω et à une \mathcal{F}' -connexion ω' sur un G-fibré principal différentiable. Cette construction est étendue ici aux \mathcal{G} -algèbres différentielles graduées, ce qui permet de définir des classes exotiques universelles.

1. Rappels et notations.

On note ADG la catégorie des \mathbf{R} -algèbres différentielles graduées anti-commutatives ($\beta\alpha = (-1)^{p \cdot q} \alpha \cdot \beta$ où $p = d^0 \cdot \alpha$ et $q = d^0 \cdot \beta$), et \mathcal{G} -ADG, la catégorie des \mathcal{G} -algèbres différentielles graduées (\mathcal{G} désigne une \mathbf{R} -algèbre de Lie de dimension finie, et une \mathcal{G} -ADG est une ADG munie, pour tout élément x de \mathcal{G} , d'une anti-dérivation $i(x)$ de degré -1 et d'une dérivation $\theta(x)$ de degré 0 , vérifiant les relations de H. Cartan*). Soit $B : \mathcal{G}\text{-ADG} \rightarrow \text{ADG}$ le foncteur qui, à tout \mathcal{G} -ADG, associe la sous-algèbre de ses éléments basiques (i.e. annulés par toutes les (anti)dérivations $i(x)$ et $\theta(x)$). Rappelons en particulier que l'algèbre de Weil $W(\mathcal{G}) = \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*)$ est une \mathcal{G} -ADG, qu'un homomorphisme $\omega : W(\mathcal{G}) \rightarrow E$ de \mathcal{G} -ADG est appelé une *connexion* sur E , et que l'homomorphisme

$$\lambda_\omega = B\omega : I^k(\mathcal{G}) \rightarrow (BE)^{2k}$$

est appelé *homomorphisme caractéristique* de la connexion, ou homomorphisme de Chern-Weil ($BW(\mathcal{G})$ est égale à l'algèbre $I(\mathcal{G})$ des polynômes sur \mathcal{G} invariants par la représentation adjointe, et ne contient que des cocycles).

(*) H. Cartan : Notions d'algèbres différentielles (Colloque de Topologie. Bruxelles - 1950 - CBRM).

2. Intégration le long des fibres.

Soit X une ADG, et $A^*(\mathbf{R}) = A^0(\mathbf{R}) \oplus A^1(\mathbf{R})$ l'ADG des formes différentielles sur \mathbf{R} . Le produit tensoriel gradué $\tilde{X} = A^*(\mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} X$ est encore une ADG, et pour $t \in \mathbf{R}$, on définit un homomorphisme $i_t = \tilde{X} \rightarrow X$ de ADG en posant

$$i_t \lrcorner A^1(\mathbf{R}) \otimes X^{k-1} = 0$$

$$i_t(f \otimes \alpha) = f(t) \cdot \alpha \quad \forall f \in A^0(\mathbf{R}) \quad \forall \alpha \in X^k.$$

Si E est une \mathcal{G} -ADG, on munit naturellement \tilde{E} d'une structure de \mathcal{G} -ADG en posant, pour $x \in \mathcal{G}$

$$i(x) (a \otimes \alpha) = a \otimes i(x) \alpha \quad \forall a \in A^*(\mathbf{R}) , \forall \alpha \in E$$

$$\theta(x) (a \otimes \alpha) = a \otimes \theta(x) \alpha \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

On a alors $B\tilde{E} = \tilde{B}E$. D'autre part, $i_t : \tilde{E} \rightarrow E$ est alors un homomorphisme de \mathcal{G} -ADG.

Définissons l'application \mathbf{R} -linéaire $\int : \tilde{E}^k \rightarrow E^{k-1}$ (appelée "intégration le long des fibres") en posant $\int = 0$ sur $A^0(\mathbf{R}) \otimes E^k$ et

$$\int (f dt \otimes \alpha) = \left[\int_0^1 f(t) dt \right] \alpha \text{ sur } A^1(\mathbf{R}) \otimes E^{k-1}$$

On vérifie sans difficulté le

LEMME 1. —

$$d \circ \int - \int \circ d = i_1 - i_0.$$

3. Différence de 2 connexions.

Rappelons qu'une connexion $\omega : W(\mathcal{G}) \rightarrow E$ sur une \mathcal{G} -ADG E est entièrement définie par sa restriction à $\Lambda^1(\mathcal{G}^*) \subset \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*)$. Soit ω' une autre connexion sur E . On définit alors une connexion $\tilde{\omega}$ sur \tilde{E} en posant, pour tout $\xi \in \Lambda^1(\mathcal{G}^*)$:

$$\tilde{\omega}(\xi) = \hat{t} \otimes \omega'(\xi) + (1 - \hat{t}) \otimes \omega(\xi)$$

où $\hat{i} \in A^0(\mathbf{R})$ désigne l'identité sur \mathbf{R} , $\omega'(\xi)$ et $\omega(\xi)$ appartiennent à E^1 et

$$\tilde{\omega}(\xi) \in A^0(\mathbf{R}) \otimes E^1 \subset \tilde{E}^1.$$

Notons $\Delta_{\omega, \omega'} : I^k(\mathcal{G}) \rightarrow (\text{BE})^{2k-1}$ l'application composée

$$\Delta_{\omega, \omega'} = \int \circ \lambda_{\tilde{\omega}}.$$

De la formule évidente $i_t \circ \tilde{\omega} = t\omega' + (1 - t)\omega$, et du lemme 1, on déduit immédiatement le

LEMME 2 (formule de Chern). —

$$\lambda_{\omega'} - \lambda_{\omega} = d \circ \Delta_{\omega, \omega'}.$$

4. Exotisme.

Soit \mathcal{F} un idéal homogène de $I(\mathcal{G})$. Une \mathcal{F} -connexion sur une \mathcal{G} -ADG est une connexion ω telle que $B\omega|_{\mathcal{F}} = 0$.

Soit ω une \mathcal{F} -connexion et ω' une \mathcal{F}' -connexion sur une même \mathcal{G} -ADG E (\mathcal{F}' désignant un autre idéal homogène de $I(\mathcal{G})$). La construction de l'homomorphisme $\rho_{\omega, \omega'} : W(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \rightarrow \text{BE}$ de ADG, donnée [9] pour le cas des fibrés principaux, se généralise immédiatement grâce au lemme 2.

Le cas particulier où \mathcal{F} est de la forme $\mathcal{F}(> q)$ (idéal des polynômes de degré $> q$) et où \mathcal{F}' est de la forme $\text{Ker}(I(\mathcal{G}) \rightarrow I(\mathcal{H}))$ (\mathcal{H} désignant une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G}) a été traité indépendamment par Kamber et Tondeur sous d'autres hypothèses ((2), (3), (4)).

Dans la définition de $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = I(\mathcal{G})/\mathcal{F} \otimes I(\mathcal{G})/\mathcal{F}' \otimes \Lambda(A)$ figure un système A de générateurs de l'idéal $I^+(G)$. Il n'a pas du tout été précisé que A était minimal. On aurait pu en particulier prendre pour A une base de l'espace vectoriel $I^+(\mathcal{G})$. On démontre comme ci-dessus (§ 5) :

THEOREME. — *L'image de $\rho_{\omega, \omega'}^* : H^*(W(\mathcal{F}, \mathcal{F}')) \rightarrow H^*(\text{BE})$ est indépendante de A ; elle est en effet égale à celle obtenue en prenant pour A une base de l'espace vectoriel réel $I^+(\mathcal{G})$.*

Dans le cas particulier où \mathcal{G} est réductive, Kamber et Tondeur nous ont fait remarquer que l'on pouvait prendre pour A l'image par une transgression d'une base de l'espace des éléments primitifs de l'algèbre $\Lambda_1(\mathcal{G}^*)$ des co-chaines invariantes de \mathcal{G} : l'algèbre $\Lambda(A)$ est alors égale à $\Lambda_1(\mathcal{G}^*) = H^*(\mathcal{G}, \mathbf{R})$ (cf. Koszul [8]).

5. \mathcal{F} -homotopie et rigidité des classes exotiques.

Deux \mathcal{F} -connexions ω_0 et ω_1 sur une \mathcal{G} -ADG E seront dites *différentiablement \mathcal{F} -homotopes* s'il existe une \mathcal{F} -connexion $\tilde{\omega}$ sur \tilde{E} telle que $\omega_0 = i_0 \circ \tilde{\omega}$ et $\omega_1 = i_1 \circ \tilde{\omega}$. On appelle \mathcal{F} -homotopie la relation d'équivalence engendrée par la \mathcal{F} -homotopie différentiable.

Les théorèmes du § 7 ci-dessus se généralisent immédiatement.

6. Algèbres de Weil tronquées et exotisme universel.

Pour tout idéal homogène \mathcal{F} de $I(\mathcal{G})$, notons $\hat{\mathcal{F}}$ l'idéal qu'il engendre dans $S(\mathcal{G}^*)$. Notons $W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ l'algèbre $\Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes_{\mathbf{R}} S(\mathcal{G}^*)/\hat{\mathcal{F}}$ et $\pi : W(\mathcal{G}) \rightarrow W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ la projection canonique.

Il est aisé de vérifier le

LEMME 3. —

i) Les anti-dérivations $i(x)$ et $\theta(x)$ de $W(\mathcal{G})$ passent aux quotients et permettent de munir $W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ d'une structure naturelle de \mathcal{G} -ADG.

ii) La projection π est une \mathcal{F} -connexion sur $W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$.

iii) $(W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}), \pi)$ est universel au sens suivant : pour tout couple (E, ω) formé d'une \mathcal{G} -ADG E et d'une \mathcal{F} -connexion $\omega : W(\mathcal{G}) \rightarrow E$, il existe un homomorphisme $\bar{\omega} : W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \rightarrow E$ de \mathcal{G} -ADG et un seul tel que $\bar{\omega} \circ \pi = \omega$.

Soit \mathcal{F}' un autre idéal de $I(\mathcal{G})$, et $\pi' : W(\mathcal{G}) \rightarrow W_{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$ la \mathcal{F}' -connexion universelle. Le produit tensoriel gradué

$$W_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\mathcal{G}) = W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbf{R}} W_{\mathcal{F}'}(\mathcal{G})$$

possède une structure naturelle de \mathcal{G} -ADG. Les inclusions naturelles $\iota : W_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) \rightarrow W_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\mathcal{G})$ et $\iota' : W_{\mathcal{F}'}(\mathcal{G}) \rightarrow W_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\mathcal{G})$ définissent respectivement une \mathcal{F} -connexion et une \mathcal{F}' -connexion sur $W_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\mathcal{G})$.

LEMME 4. — $(W_{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'}(\mathcal{G}), \iota, \iota')$ est universel au sens suivant : pour tout triplet $(E, \bar{\omega}, \bar{\omega}')$ constitué par une \mathcal{G} -ADG E , une \mathfrak{J} -connexion $\bar{\omega} : W_{\mathfrak{J}}(\mathcal{G}) \rightarrow E$ et une \mathfrak{J}' -connexion $\bar{\omega}' : W_{\mathfrak{J}'}(\mathcal{G}) \rightarrow E$, il existe un homomorphisme $f : W_{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'}(\mathcal{G}) \rightarrow E$ de \mathcal{G} -ADG et 1 seul tel que $\bar{\omega} = f \circ \iota$ et $\bar{\omega}' = f \circ \iota'$.

Appliquons la construction du § 4 à $W_{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'}(\mathcal{G})$ munie des connexions $\iota \circ \pi$ et $\iota' \circ \pi'$: on obtient un homomorphisme de ADG

$$\rho : W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') \rightarrow BW_{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'}(\mathcal{G})$$

à travers lequel se factorisent tous les homomorphismes $\rho_{\omega, \omega'}$ du § 4.

*Conjecture.**— Si \mathcal{G} est réductif et si A est l'image par une transgression d'une base de l'espace des éléments primitifs de $\Lambda_1(\mathcal{G}^*)$, ρ induit un isomorphisme en cohomologie.

Cette conjecture est à comparer avec le résultat suivant : Dans le cas particulier $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(> q)$, $\mathfrak{J}' = \text{Ker } I(\mathcal{G}) \rightarrow I(\mathcal{H})$, la paire $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ étant supposée réductive (et $I(\mathcal{G}) \rightarrow I(\mathcal{H})$ surjectif), Kamber et Tondeur [7] ont démontré que $W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ a même cohomologie que l'algèbre des éléments \mathcal{H} -basiques de $W_{\mathfrak{J}(> q)}(\mathcal{G})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOTT, Lectures on characteristic classes and foliations, *Lectures Notes in Math.* n° 279, Springer 1972.
- [2] R. BOTT et A. HEFLIGER, On characteristic classes of Γ -foliations, *Bulletin of An. Math. Soc.*, 1972.
- [3] S. CHÉRN et J. SIMONS, Characteristic forms and transgression 1. (à paraître).
- [4] C. GODBILLON, Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, *Séminaire Bourbaki* — Novembre 1972.
- [5] C. GODBILLON et J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, *Note aux C.R.A.S.* Paris — Juin 1971.

 (*) Cette conjecture a été vérifiée par BOUSSOUF DIENG, et —indépendamment et dans un cadre plus général— par STEPHEN HALPERIN.

- [6] J.L. HEITSCH, Déformation of secondary characteristic classes. (à paraître).
- [7^I] F. KAMBER et P. TONDEUR, Characteristic invariants of foliated bundles. (à paraître dans le Bulletin de l'AMS).
- [7^{II}] F. KAMBER et P. TONDEUR, Derived characteristic classes of L-foliated principal bundles. (A paraître).
- [7^{III}] F. KAMBER et P. TONDEUR, Cohomologie des algèbres de Weil relatives tronquées. (A paraître dans C.R.A.S. Paris).
- [8] J.L. KOSZUL, Cohomologie des algèbres de Lie, *Bulletin de la SMF* – 1950 .
- [9] D. LEHMANN, \mathcal{F} -homotopie dans les espaces de connexions et classes exotiques de Chern-Simons, *Note aux C.R.A.S. Paris* – Octobre 1972 .
- [10] J. MARTINET, Classes caractéristiques des systèmes de Pfaff, (à paraître).
- [11] P. MOLINO, Connexions transverses projetables, *Notes aux C.R.A.S. Paris* – Mars et Mai 1971 .
- [12] PASTERNAK, Foliations and compact Lie group actions, *Commentarii Math. Helvet.* –1972 .
- [13] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle like metrics, *Annals of Math.* – Janvier 1959.
- [14] J.P. SERRE, Algèbre locale - Multiplicités, *Lectures notes in Math* n° 11 – 1965 .
- [15] THURSTON, Non cobordant foliations of S^3 , *Bulletin of Ann. Math. Soc.*, 1972 .

Manuscrit reçu le 31 janvier 1973
accepté par G. Reeb.

Daniel LEHMANN,
Département de Mathématiques
Université de Lille.