ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER

Théorie L^p des sommes trigonométriques apériodiques

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 189-211

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_189_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 189-211.

THÉORIE L^p DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES APÉRIODIQUES

par Yves MEYER

1.

Soient $\Lambda = (\lambda_k)_{-\infty}^{+\infty}$ une suite croissante de nombres réels et S_Λ l'espace vectoriel de toutes les sommes trigonométriques finies $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définies par

$$f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k t} \tag{1}$$

les coefficients a_k sont des nombres complexes et seulement un nombre fini d'entre eux ne sont pas nuls.

Si $\lambda_k = k$ pour tout k, f est 2π-périodique : pour tout x réel on a, si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,

$$\int_x^{x+2\pi} |f(t)|^p \, dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt. \tag{2}$$

Le but de ce travail est de trouver par quoi remplacer (2) si $\lambda_k = k + r_k$ où $r_k \to 0$, $|k| \to +\infty$. Si $p = 2$, Paley et Wiener [1] ont montré qu'il existe une constante $C = C(\Lambda)$ telle que pour tout $f \in S_\Lambda$, on ait

$$\int_x^{x+2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leqslant C \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \tag{3}$$

pour tout x réel. La théorie L^2 est donc satisfaisante et la théorie L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, est donnée par le théorème 1 énoncé ci-dessous.

2.

Dans tout ce qui suit $\Lambda = (\lambda_k)_{-\infty}^{+\infty}$ est une suite strictement croissante de nombre réels telle que

$$\lambda_k - k = r_k \to 0 \ (|k| \to +\infty)$$

et p appartient à l'intervalle $[1, +\infty]$.

Soit $\omega : \mathrm{R} \to [1, +\infty[$ une fonction paire, sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant $\omega(s+t) \leqslant \omega(s)\omega(t)$ pour tous les $s < t$, et croissante sur $[0, +\infty[$.

THÉORÈME 1. — *Supposons que* Λ, ω *et* p *soient définis comme il vient d'être indiqué et qu'il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que* $\omega(t) = o(t^n)$, $|t| \to +\infty$.

Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(4) *il existe un* $\mathrm{T} > 0$ *et une constante* $\mathrm{C}_1 > 0$ *tels que l'inégalité* $\left(\int_x^{x+\mathrm{T}} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \mathrm{C}_1\omega(x)\left(\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ *ait lieu pour tout* x *réel et tout* $f \in \mathrm{S}_\Lambda$.

(5) *Il existe une constante* $\mathrm{C}_2 > 0$ *telle que l'inégalité*

$$\left(\int_x^{x+2n\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \mathrm{C}_2\omega(x)\left(\int_0^{2n\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

ait lieu pour tout x *réel et tout* $f \in \mathrm{S}_\Lambda$.

(6) *On peut trouver une constante* $\mathrm{C}_3 > 0$ *telle que l'inégalité*

$$\left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k e^{ir_k x} e^{ikt}|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \mathrm{C}_3\omega(x)\Big[\left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k e^{ikt}|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k r_k e^{ikt}|^p\, dt\right)^{1/p} + \cdots + \left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k r_k^{n-1} e^{ikt}|^p\, dt\right)^{1/p}\Big]$$

soit satisfaite pour toute suite complexe $(a_k)_{-\infty}^{+\infty}$ *ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.*

Dans deux cas particuliers importants la condition (6) du théorème 1 devient plus maniable : $n = 1$, p quelconque où $n > 1$ et $p = +\infty$.

Si $n = 1$, soit M_p l'algèbre de Banach des multiplicateurs des coefficients de Fourier des fonctions de $\mathrm{L}^p[0, 2\pi]$. La condition (6) s'écrit alors : $(r_k)_{-\infty}^{+\infty} \in \mathrm{M}_p$ et la norme de $(e^{ir_k x})_{-\infty}^{+\infty}$

dans M_p ne dépasse pas $C_3\omega(x)$. Or les progrès de la théorie des intégrales singulières permettent de calculer effectivement ces normes de multiplicateurs dans un grand nombre de cas particuliers.

Si $p = +\infty$, (6) signifie que pour tout x réel, on peut trouver n fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ dans $L^1(0, 2\pi)$ telles que

(7) pour tout $k \in Z$,

$$e^{ir_k x} = 1 + \hat{f}_0(k) + \hat{f}_1(k) r_k + \cdots + \hat{f}_{n-1}(k) r_k^{n-1}$$

cependant que

$$\|f_0\|_1 + \cdots + \|f_{n-1}\|_1 \leqslant C_3\omega(x). \tag{8}$$

Par $\hat{f}(k)$ on entend $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\, dt$; la transcription duale de (6) fournirait des mesures au lieu d'éléments de $L^1[0, 2\pi]$ mais nous verrons au § 4 comment se ramener à ce cas.

La preuve du théorème 1 occupera les § 3 à 6. Des exemples concrets d'application seront donnés au § 7.

3. Modification de Λ.

Soit $\Lambda' = (\lambda'_k)_{-\infty}^{+\infty}$ une seconde suite strictement croissante de nombres réels telle que

$$\lambda'_k = \lambda_k \quad \text{si} \quad |k| \quad \text{est assez grand.} \tag{9}$$

Nous allons montrer directement que si l'une des propriétés (4) ou (5) est satisfaite pour un choix de Λ, n, ω, p, T et C_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, cette même propriété sera satisfaite pour Λ', n, ω, p, T et C'_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$: seules les constantes ont éventuellement changé.

Passer de Λ en Λ' peut se faire en un nombre fini d'étapes au cours desquelles on change seulement la position d'un point. D'autre part le problème est invariant par translation sur Λ ou sur Λ'. On peut donc supposer que $\Lambda = (\lambda_k)_{-\infty}^{+\infty}$, $\Lambda' = (\lambda'_k)_{-\infty}^{+\infty}$, $\lambda'_k = \lambda_k$ si $k \neq 0$, $\lambda'_0 = 0$ (il ne sera pas ici fait usage de ce que $\lambda_k - k \to 0$, $|k| \to +\infty$). Montrons que si (4) est vraie pour Λ, alors (4) est vraie pour Λ'. Dans ces conditions, on a le lemme suivant :

Lemme 1. — *On peut trouver une fonction* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *nulle hors de* $[0, T]$, *appartenant à* $L^q[0, T]$ *et telle que*

$$(10) \quad \int_0^T e^{-i\lambda_k t} h(t)\, dt = 0 \quad si \quad k \neq 0, = 1 \quad si \quad k = 0.$$

Dans le lemme 1, q désigne l'exposant conjugué de p.

Pour prouver le lemme 1, appelons $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de la classe $\mathscr{S}$ de Schwartz dont la transformée de Fourier vaut 1 en λ_0 et 0 en λ_k, $k \neq 0$. On a alors pour tout $f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k t} \in S_\Lambda$, $a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\varphi(t)\, dt$ qui implique

$$(11) \quad |a_0| \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{jT}^{(j+1)T} |f(-t)|\,|\varphi(t)|\, dt \leqslant C(\varphi)\left(\int_0^T |f|^p\, dt\right)^{1/p}$$

grâce à (4), à la croissance lente de $\omega(x)$ et la décroissance rapide de φ. Le lemme 1 découle par dualité de (11).

Lemme 2. — *On peut trouver une fonction* $\tilde{h} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *nulle hors de* $[0, T]$, *appartenant à* $L^q[0, T]$ *et telle que*

$$(12) \quad \int_0^T \tilde{h}(t)\, dt = 1, \qquad \int_0^T e^{-i\lambda_k t}\, \tilde{h}(t)\, dt = 0 \quad si \quad k \neq 0.$$

Appelons en effet $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la fonction entière définie par $H(z) = \int_0^T e^{-izt} h(t)\, dt$; H n'est pas identiquement nulle car (10) interdit à h de l'être. Si $H(0) \neq 0$, on pose $\tilde{h} = ch$ et pour une valeur bien choisie de la constante c on a (12). Si $H(0) = 0$, on remplace h par h_1 définie par

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^t h(s)\, ds.$$

Alors H est remplacée par $H_1(z) = (iz)^{-1} H(z)$ et si $H_1(0) \neq 0$, on pose $\tilde{h} = ch_1$. Si $H_1(0) = 0$ on recommence et puisque l'ordre du zéro de H à l'origine est fini, au bout de m opérations on trouve la fonction $\tilde{h} = ch_m$ cherchée, appartenant à $L^q[0, T]$ et nulle hors de $[0, T]$.

Il est maintenant facile de montrer que si (4) est vrai pour Λ, (4) est vrai pour Λ'. Posons $g(t) = \Sigma' a_k e^{i\lambda_k t}$ où Σ' désigne la somme sur $k \neq 0$, $f(t) = a_0 e^{i\lambda_0 t} + g(t)$ et $f^*(t) = a_0 + g(t)$.

On a successivement

$$\left(\int_x^{x+T} |f^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant |a_0|T^{1/p} + \left(\int_x^{x+T} |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

par l'inégalité triangulaire; $|a_0| \leqslant C\left(\int_0^T |f^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ grâce au lemme 2 et enfin l'on a

$$\begin{aligned}\left(\int_x^{x+T} |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} &\leqslant C_1\omega(x)\left(\int_0^T |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\\ &\leqslant C_1\omega(x)|a_0|T^{1/p} + C_1\omega(x)\left(\int_0^T |f^*(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\end{aligned}$$

en utilisant successivement (4) et l'inégalité triangulaire. Tout cela réuni donne (4) pour f^* ce qu'il fallait montrer.

En ce qui concerne (6), supposons qu'il existe un entier $K \geqslant 1$ tel que (6) ait lieu lorsque $a_k = 0$ pour $|k| \leqslant K$. Alors (6) a lieu en toute généralité. Écrivons en effet

$$f(t) = \Sigma a_k e^{ikt} = \sum_{|k|\leqslant K} + \sum_{|k|>K} = f_1(t) + f_2(t)$$

et de même $F(t) = \Sigma a_k e^{ir_k x} e^{ikt} = F_1(t) + F_2(t)$. Appelons R l'opérateur défini par $(Rf)(t) = \Sigma a_k r_k e^{ikt}$ (toutes les sommes écrites sont finies). En désignant par $\|f\|_p$ la quantité $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p\,dt\right)^{1/p}$, on a

$$\begin{aligned}\|F\|_p \leqslant \|F_1\|_p + \|F_2\|_p &\leqslant \sum_{|k|\leqslant K} |a_k| + \|F_2\|_p\\ &\leqslant \sum_{|k|\leqslant K} |a_k| + C_3\omega(x)[\|f_2\|_p + \|Rf_2\|_p + \cdots + \|R^{n-1}f_2\|_p].\end{aligned}$$

On a évidemment $|a_k| \leqslant \|f\|_p$ pour tout k et l'on majore $\|R^j f_2\|_p$ par $\|R^j f\|_p + \|R^j f_1\|_p \leqslant \|R^j f\|_p + \sum_{|k|\leqslant K} |a_k|$ (en supposant que $|r_k| \leqslant 1$ pour tout k, ce qui est toujours possible). Finalement tout se trouve majoré par

$$C_3'\omega(x)[\|f\|_p + \cdots + \|R^{n-1}f\|_p] \quad \text{car} \quad \omega(x) \geqslant 1.$$

On retiendra le résultat suivant :

Proposition 1. — *Pour démontrer* (4) *ou* (5) *on peut remplacer* $(\lambda_k)_{-\infty}^{+\infty}$ *par une autre suite strictement croissante* $(\lambda'_k)_{-\infty}^{+\infty}$ *telle que* $\lambda'_k = \lambda_k$ *si* $|k| \geqslant K$. *Pour démontrer* (6), *on peut se restreindre au cas où* $a_k = 0$ *lorsque* $|k| \leqslant K$.

4. Une proposition sur les algèbres de Banach de suites.

Soit X une algèbre de Banach unitaire dont les éléments ξ sont des suites $(x_k)_{-\infty}^{+\infty}$ de nombres complexes; l'addition et la multiplication se font composante par composante mais $\|\xi\| \geqslant \sup_k |a_k|$.

Proposition 2. — *Soient* ξ *un élément de* X *et* $n \geqslant 1$ *un entier tels que*

$$\xi = (x_k)_{-\infty}^{+\infty} \qquad où \qquad x_k \to 0 \ (|k| \to +\infty)$$

et

(13) $\|e^{it\xi}\| = o(t^n)$ *lorsque* t *est réel et que* $|t| \to +\infty$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, *on peut écrire*

$$\xi = \eta + \zeta \qquad où \qquad \eta = (y_k)_{-\infty}^{+\infty}, \quad \zeta = (z_k)_{-\infty}^{+\infty}$$

et

(14) $\|\eta^n\| \leqslant \varepsilon$ *tandis que* $z_k = 0$ *pour tout* k

sauf éventuellement un ensemble fini.

La preuve de la proposition 2 découle très simplement du calcul symbolique dans une algèbre de Banach.

Remarquons tout d'abord que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\|e^{it\xi}\| \geqslant |e^{itx_k}|;$$

la majoration (13) entraîne donc que chaque x_k est réel.

Soit $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire, de la classe $\mathcal{D}$ de Schwartz et telle que $\alpha(t) = t$ si $|t| \leqslant 1$. Posons

$$\hat{\alpha}(u) = 2\pi\beta(u)$$

et formons l'intégrale vectorielle de Bochner

$$\eta = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\xi}\beta(\varepsilon u)\, du \tag{15}$$

dont la convergence est assurée par la décroissance rapide de β et la croissance lente de $\|e^{iu\xi}\|$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$y_k = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux_k}\beta(\varepsilon u)\, du = \varepsilon\alpha(\varepsilon^{-1}x_k). \tag{16}$$

On a donc $y_k = x_k$ si $|x_k| \leqslant \varepsilon$ et $z_k = x_k - y_k = 0$ si $|k|$ est assez grand.

Pour majorer $\|\eta^n\|$, appelons $2\pi\beta_n$ la transformée de Fourier de la fonction α^n et formons

$$Y = \varepsilon^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\xi}\beta_n(\varepsilon u)\, du. \tag{17}$$

On a encore $Y = (Y_k)_{-\infty}^{+\infty}$ où

$$Y_k = \varepsilon^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux_k}\beta_n(\varepsilon u)\, du = \varepsilon^n \left[\alpha\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right)\right]^n = y_k^n$$

ce qui implique $Y = \eta^n$. Cependant la représentation intégrale (17) entraîne

$$\|Y\| = \|\eta^n\| \leqslant \varepsilon^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{iu\xi}\|\, |\beta_n(\varepsilon u)|\, du. \tag{18}$$

Posons $\omega(u) = \|e^{iu\xi}\|$; si $\omega(u) = o(u^n)$, $|u| \to +\infty$, il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$

$$\varepsilon^n \omega\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \leqslant C(1 + |u|^n).$$

Le second membre de (18) peut être récrit

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) |\beta_n(t)|\, dt;$$

grâce à la décroissance rapide de β_n, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique et montre que $I(\varepsilon) \to 0$ avec ε. La proposition 2 est prouvée, quitte à changer la définition de ε.

5. Preuve de l'implication (4) $\Longrightarrow$ (6) dans le théorème 1.

Grâce à la proposition 1, nous pouvons supprimer un ensemble fini de λ_k. On peut d'abord se restreindre au cas où $|r_k| \leqslant 1/4$ pour tout k. Appelons B l'espace vectoriel S_Λ normé par

$$\|f\| = \left(\int_0^T |f|^p\, dt\right)^{1/p}. \tag{19}$$

Si M est une suite $(m_k)_{-\infty}^{+\infty}$ de nombres complexes et si

$f(t) = \Sigma\, a_k e^{i\lambda_k t} \in S_\Lambda$, on définira $Mf \in S_\Lambda$ par

$$(20) \qquad (Mf)(t) = \Sigma m_k a_k e^{i\lambda_k t}.$$

On écrira $M \in X$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

(21) $\|Mf\| \leqslant C\|f\|$ pour tout $f \in S_\Lambda$ normé par (19).

La norme, notée $\|M\|_X$ de M dans X est la borne inférieure de ces constantes $C > 0$.

Lemme 3. — *Si* (4) *a lieu, pour tout x réel,* $(e^{ikx})_{-\infty}^{+\infty} \in X$ *et sa norme est bornée lorsque* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Soient en effet $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction paire, dans la classe $\mathscr{D}$ de Schwartz égale à 1 sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ et nulle hors de $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ et $2\pi\beta$ la transformée de Fourier de α. Pour tout a réel, appelons δ_a la masse unité en a et formons la mesure $d\mu_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta(k + x)\delta_{k+x}$. La transformée de Fourier de $d\mu_x$ est donnée par la formule de Poisson et vaut

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-ijx}\alpha(j - t).$$

Puisque $|\lambda_k - k| \leqslant 1/4$ si $|k| > K$ (et l'on peut se restreindre à ces valeurs de k), pour tout $f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k t} \in S_\Lambda$, $f * \mu_x = \Sigma a_k e^{-ikx} e^{i\lambda_k t}$. L'inégalité (4) et la décroissance rapide des masses de μ_x entraînent le lemme 3.

Lemme 4. — *Supposons toujours* (4) *satisfaite. Soit* P : $S_\Lambda \to L^p[0, 2\pi]$ *l'opérateur défini par* $P(\Sigma a_k e^{i\lambda_k t}) = \Sigma a_k e^{ikt}$. *Alors* P *est continu.*

En effet si (4) est satisfaite avec une valeur T_0 de T, (4) reste vraie pour tout $T > T_0$ (quitte à changer les constantes). On peut donc supposer $T \geqslant 2\pi$. Soit $R : S_\Lambda \to S_\Lambda$ l'opérateur linéaire défini par $R(e^{i\lambda_k t}) = r_k e^{i\lambda_k t}$. Alors

$$e^{ikt} = e^{i\lambda_k t} e^{-ir_k t} = e^{i\lambda_k t}\left(\sum_{m \geqslant 0} \frac{(-ir_k t)^m}{m!}\right)$$

entraîne

$$(22) \qquad (Pf)(t) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{(-it)^m}{m!}(R^m f)(t).$$

Montrons que $R : S_\Lambda \to S_\Lambda$ est continu quand S_Λ est normé par (19). En effet, grâce à (4), la norme de $(e^{i\lambda_k x})_{-\infty}^{+\infty}$ dans X ne dépasse pas $C_1\omega(x)$. Puisque $e^{ir_k x} = e^{i\lambda_k x}e^{-ikx}$ et compte tenu du lemme 3, la norme de $(e^{ir_k x})_{-\infty}^{+\infty}$ dans X ne dépasse pas $C_1'\omega(x)$. Le raisonnement fait § 4 entraîne que $(r_k)_{-\infty}^{+\infty}$ appartient à X.

L'identité (22) entraîne

$$\|Pf\| \leqslant \sum_{m\geqslant 0} \frac{T^m}{m!} \|R\|_X^m \|f\| = C\|f\| \quad \text{où} \quad C < +\infty.$$

Lemme 5. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe une constante $\gamma_n > 0$ telle que pour tout choix de n fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ dans $L^p[0, 2\pi]$, prolongées à* **R** *de façon 2π-périodique, on ait*

$$(23) \quad \left(\int_0^{2n\pi} |f_0(t) + tf_1(t) + \cdots + t^{n-1}f_{n-1}(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \geqslant \gamma_n(\|f_0\|_p + \cdots + \|f_{n-1}\|_p).$$

La preuve élémentaire est laissée au lecteur.

Dans le lemme ci-dessous, si $f \in S_\Lambda$, $\|f\|$ désignera

$$\left(\int_0^T |f|^p \, dt\right)^{1/p}$$

tandis que si $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est 2π-périodique, $\|g\|$ désignera $\left(\int_0^{2\pi} |g|^p \, dt\right)^{1/p}$.

Lemme 6. — *Il existe un entier $K \geqslant 1$ tel que les normes $\|f\|$ et $\|Pf\| + \|RPf\| + \cdots + \|R^{n-1}Pf\|$ soient équivalentes sur le sous-espace de S_Λ formé des f tels que $a_k = 0$ pour $|k| \leqslant K$.*

Rappelons que $R(e^{ikt}) = r_k e^{ikt}$ et $R(e^{i\lambda_k t}) = r_k e^{i\lambda_k t}$ de sorte que R et P commutent.

Puisque $e^{i\lambda_k t} = e^{ikt}e^{ir_k t} = e^{ikt}\left(\sum_{m\geqslant 0} \frac{(it)^m}{m!} r_k^m\right)$, on a

$$f(t) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{(it)^m}{m!} R^m Pf = \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} + \sum_{m\geqslant n} = f_1(t) + f_2(t).$$

Or

$$\|f_2\| \leqslant \|P\| \left\|\sum_{m\geqslant n} R^m f\right\|.$$

Jusqu'alors K n'a pas été choisi. Appliquons la proposition 2 à l'élément $(r_k)_{-\infty}^{+\infty}$ de l'algèbre de Banach X. Pour tout entier $K \geqslant 1$ appelons S_Λ^K le sous-espace de S_Λ^K formé par les $f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k t}$ tels que $a_k = 0$ pour $|k| \leqslant K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $K \geqslant 1$ tel que la norme de $R^n : S_\Lambda^K \to S_\Lambda^{K1}$ ne dépasse pas ε.

Si $f \in S_\Lambda^K$, on a donc

$$\|f_2\| \leqslant (1 + \|R\| + \cdots + \|R^{n-1}\|) \frac{\varepsilon\|P\|}{1-\varepsilon} \|f\|.$$

Les normes des opérateurs R ou P restreints à S_Λ^K sont au plus égales aux normes d'opérateurs de S_Λ notées $\|P\|$ et $\|R\|$. Choisissons K assez grand pour que

$$(1 + \|R\| + \cdots + \|R^{n-1}\|) \frac{\varepsilon\|P\|}{1-\varepsilon} = \delta < 1.$$

Alors $f = f_1 + f_2$ et $\|f_2\| \leqslant \delta\|f\|$ entraînent que les normes de f et de f_1 sont équivalentes. Ceci joint au lemme 5 donne le lemme 6.

La preuve de (6) est maintenant évidente. Appelons, pour tout x réel, $T_x : S_\Lambda \to S_\Lambda$ l'opérateur défini par

$$T_x(\Sigma a_k e^{i\lambda_k t}) = \Sigma a_k e^{ir_k x} e^{i\lambda_k t}.$$

Nous définissons de même $T_x : L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ par $T_x(e^{ikt}) = e^{ir_k x} e^{ikt}$. Posons enfin $f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k t}$ et $g(t) = \Sigma a_k e^{ikt}$. On a par applications successives du lemme 6,

$$\|T_x g\| \leqslant C_4\|T_x f\| \leqslant C_5\omega(x)\|f\| \leqslant C_6\omega(x)(\|g\| + \|Rg\| + \cdots + \|R^{n-1}g\|).$$

6. Preuve de l'implication (6) $\Longrightarrow$ (5).

Les notations seront celles du § 5 à la seule différence que $T = 2n\pi$.

Soit $(y_k)_{-\infty}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes. Nous écrirons $(y_k)_{-\infty}^{+\infty} \in Y$ pour exprimer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on ait

$$(24) \quad \|\Sigma y_k a_k e^{ikt}\|_p \leqslant C[\|\Sigma a_k e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma a_k r_k^{n-1} e^{ikt}\|_p].$$

La norme de $(y_k)_{-\infty}^{+\infty}$ dans Y est la borne inférieure de ces constantes $C > 0$.

La condition (6) du théorème 1 exprime que $(e^{ir_k x})_{-\infty}^{+\infty}$ appartient à Y pour tout x réel et que sa norme est $0(\omega(x))$.

LEMME 7. — *La suite* $(r_k^n)_{-\infty}^{+\infty}$ *appartient à* Y.

Pour le voir, il suffit d'utiliser la représentation intégrale de $(r_k^n)_{-\infty}^{+\infty}$ donnée par la formule (17) du § 4.

LEMME 8. — *Pour toute somme finie* $s(t) = \Sigma\, a_k e^{ikt}$, *posons* $|||s|||_p = \|\Sigma\, a_k e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma\, a_k r_k^{n-1} e^{ikt}\|_p$. *Alors* $(y_k)_{-\infty}^{+\infty} \in$ Y *équivaut à l'existence d'une constante* $\gamma > 0$ *telle que*

$$|||\Sigma\, y_k a_k e^{ikt}|||_p \leqslant \gamma |||\Sigma\, a_k e^{ikt}|||_p \quad \textit{pour tout } s(t). \tag{25}$$

Le lemme 8 est un corollaire évident du lemme 7 et il montre que Y est une algèbre de Banach. Bien que les normes C définies par (24) et γ définies par (25) soient équivalentes sur Y, nous normerons Y par γ de sorte que la norme d'un produit ne dépasse pas le produit des normes (ce n'est pas nécessairement le cas si la norme est définie par (24)).

Quelques petites difficultés vont maintenant apparaître dans la modification de Λ. La raison en est que la norme $|||\cdot|||_p$ dépend explicitement du choix de $(r_k)_{-\infty}^{+\infty}$.

Soit $l \geqslant 1$ un entier qui sera fixé ultérieurement et posons $\nu_l(k) = 0$ si $|k| \leqslant l$, $\nu_l(k) = \dfrac{|k| - l}{l}$ si $l \leqslant |k| \leqslant 2l$, $\nu_l(k) = 1$ si $|k| \geqslant 2l$. La suite $\nu_l(k)$, $-\infty < k < +\infty$, est celle des coefficients de Fourier d'une mesure de Radon dont la norme ne dépasse pas 4.

Soit r_k^* la suite $\nu_l(k) r_k$, $-\infty < k < +\infty$.

LEMME 9. — *Quand* $l \to +\infty$, *la norme dans* Y *de la suite* $\nu_l(k) r_k^n$, $-\infty < k < +\infty$, *tend vers* 0.

La proposition 2 montre l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'une suite $(s_k)_{-\infty}^{+\infty} \in$ Y telle que la norme de s_k^n ne dépasse pas ε et que $r_k = s_k$ si $|k|$ est assez grand. Il en résulte que $\nu_l(k) r_k^n = \nu_l(k) s_k^n$ pour tout k si l est assez grand et l'on a donc

$$\|(\nu_l(k) r_k^n)_{-\infty}^{+\infty}\|_{\mathrm{Y}} \leqslant 4 \|(s_k^n)_{-\infty}^{+\infty}\|_{\mathrm{Y}} \leqslant 4\varepsilon$$

dès que l est assez grand.

LEMME 10. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* l *tel que si* $r_k^* = \nu_l(k)r_k$, $-\infty < k < +\infty$, *l'inégalité*

$$(26) \quad \|\Sigma a_k(r_k^*)^m e^{ikt}\|_p \leqslant \varepsilon[\|\Sigma a_k e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma a_k(r_k^*)^{n-1}e^{ikt}\|_p]$$

soit satisfaite pour tout $m \geqslant n$ *et toute suite complexe* a_k *nulle à partir d'un certain rang.*

Pour prouver (26) appelons $S(t)$ notre somme finie $\Sigma a_k e^{ikt}$ et $|||S|||_p^*$ la quantité entre crochets figurant dans le second membre de (26).

Posons enfin $S_1(t) = \Sigma a_k(r_k^*)^n e^{ikt}$. Si nous prouvons (26) lorsque $n \leqslant m \leqslant 2n-1$, en additionnant nous saurons que $|||S_1|||_p^* \leqslant n\varepsilon|||S|||_p^*$. Posons, pour tout $j \geqslant 1$,

$$S_j(t) = \Sigma a_k(r_k^*)^{nj}e^{ikt};$$

par applications répétées de l'inégalité précédente, il vient $|||S_j|||_p^* \leqslant (n\varepsilon)^j|||S|||_p^*$ et (26) est prouvée quand

$$nj \leqslant m < n(j+1),$$

avec éventuellement une autre valeur de ε.

Pour montrer que (26) est satisfaite pour $n \leqslant m \leqslant 2n-1$, revenons au lemme 9. Compte tenu de la définition (25) de la norme dans Y, on a, dès que $l \geqslant l(\varepsilon)$ et si $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$(27) \quad \|\Sigma \nu_l(k)r_k^{n+j}c_k e^{ikt}\|_p \leqslant \varepsilon(\|\Sigma c_k e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma c_k r_k^{n-1}e^{ikt}\|_p).$$

Mais $\Sigma a_k(r_k^*)^m e^{ikt} = \Sigma a_k \nu_l^{m-1}(k)\nu_l(k)r_k^{n+j}e^{ikt}$ dont la norme L^p est majorée, grâce à (27), par

$$s_n = \varepsilon(\|\Sigma a_k \nu_l^{m-1}(k)e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma a_k \nu_l^{m-1}(k)r_k^{n-1}e^{ikt}\|_p).$$

Puisque $r_k^* = \nu_l(k)r_k$ et que $\nu_l(k)$, $-\infty < k < +\infty$ est la suite des coefficients de Fourier Stieltjes d'une mesure de norme ne dépassant pas 4, on peut majorer s_n par

$$4^{m-1}\varepsilon(\|\Sigma a_k e^{ikt}\|_p + \cdots + \|\Sigma a_k(r_k^*)^{n-1}e^{ikt}\|_p).$$

Ainsi, quitte à changer la signification de ε, (26) est prouvée.

LEMME 11. — *Quitte à modifier les positions d'un nombre fini de points de* Λ,

$$\left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k e^{i\lambda_k t}|^p \, dt\right)^{1/p}$$

et

$$\left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k e^{ikt}|^p\, dt\right)^{1/p} + \cdots + \left(\int_0^{2\pi} |\Sigma a_k r_k^{n-1} e^{ikt}|^p\right)^{1/p}$$

deviennent des normes équivalentes sur S_Λ.

Pour un $l \geqslant 1$ assez grand (ceci sera précisé dans un moment), nous remplaçons r_k par r_k^* et appelons Λ^* la suite des $k + r_k^*$, $-\infty < k < +\infty$. Alors

$$f(t) = \Sigma a_k e^{i\lambda_k^* t} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{(it)^m}{m!} \sum_k a_k (r_k^*)^m e^{ikt}.$$

Posons $F(t) = \sum_0^{n-1} \sum_k a_k (r_k^*)^m e^{ikt}$ et $g(t) = \Sigma a_k e^{ikt}$. Avec les notations de la preuve du lemme 10, l'inégalité (23) s'écrit $\left(\int_0^{2n\pi} |F|^p\, dt\right)^{1/p} \geqslant \gamma_n |||g|||_p^*$. D'autre part pour tout $m \geqslant n$, (26) s'applique et permet de majorer

$$\left(\int_0^{2n\pi} \left|\frac{t^m}{m!} \sum_k a_k (r_k^*)^m e^{ikt}\right|^p dt\right)^{1/p}$$

par $\dfrac{(2\pi n)^m}{m!} \varepsilon |||g|||_p^* n^{1/p}$. Finalement l'inégalité triangulaire donne

$$\left(\int_0^{2n\pi} |f|^p\, dt\right)^{1/p} \geqslant \gamma_n |||g|||_p^* - n^{1/p} e^{2\pi n} \varepsilon |||g|||_p^*.$$

Choisissons l assez grand pour que $\gamma_n > n^{1/p} e^{2n\pi} \varepsilon$ et la partie non triviale du lemme 11 sera prouvée. En sens inverse on majore sans difficulté $\left(\int_0^{2n\pi} |f|^p\, dt\right)^{1/p}$ par $C|||g|||_p^*$.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve de (4).

On a

$$\left(\int_x^{x+2n\pi} |\Sigma a_k e^{i\lambda_k^* t}|^p\, dt\right)^{1/p} = I(x) = \left(\int_0^{2n\pi} |\Sigma a_k e^{i\lambda_k^* x} e^{i\lambda_k^* t}|^p\, dt\right)^{1/p}$$

que l'on estime, grâce au lemme 11 par

$$C_4 |||\Sigma a_k e^{i\lambda_k^* x} e^{ikt}|||_p^*.$$

Puisque $\lambda_k^* = \lambda_k$ et $r_k^* = r_k$ pour $|k| \geqslant K$, cette dernière expression peut être majorée par $C_5 |||\Sigma a_k e^{i\lambda_k x} e^{ikt}|||_p$ (on a supprimé les astérisques et raisonné comme à la fin du § 3). On applique alors (6) pour obtenir une majoration de $I(x)$ par $C_6 \omega(x) |||\Sigma a_k e^{ikt}|||_p$. Une nouvelle application du lemme 11 donne $I(x) \leqslant \omega(x) C_7 I(0)$ et (4) est prouvée; changer les positions d'un nombre fini de points de Λ est rendu licite par le § 3.

7. Application aux sphères vibrantes.

Soient $SO(n, \mathbf{R})$ le groupe orthogonal spécial et

$$V = S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$$

la sphère unité. Soit $\Delta : \mathscr{C}^\infty(V) \to \mathscr{C}^\infty(V)$ l'opérateur de Laplace-Beltrami invariant sous l'action de $SO(n, \mathbf{R})$ et normalisé de façon que ses valeurs propres soient

$$- k(k + n - 2), \quad k \geqslant 0.$$

Soit enfin E l'espace vectoriel des solutions $u : V \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u. \tag{28}$$

Pour étudier le comportement asymptotique $(t \to +\infty)$ des solutions de (28), on appelle p un nombre réel de l'intervalle $[1, +\infty]$ et l'on pose, pour tout $u \in E$

$$\begin{aligned} M_p(u, t) &= \left(\int_V d\sigma \int_t^{t+2\pi} |u(\sigma, s)|^p \, ds\right)^{1/p} \\ M_\infty(u, t) &= \sup_{V \times [t, t+2\pi]} |u(\sigma, s)| \end{aligned} \tag{29}$$

où $t \leqslant s \leqslant t + 2\pi$, où σ parcourt V et où $d\sigma$ est la mesure invariante sur V normalisée par $\int_V d\sigma = 1$.

Toute solution u, de classe $\mathscr{C}^\infty$, de (28) s'écrit, de façon unique, $u = bt + u_1$ où b est une constante complexe et $u_1 : V \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est une solution bornée de (28). La discussion portera sur le comportement asymptotique de u_1 quand $t \to +\infty$.

Théorème 2. — *Si $n \geqslant 3$ il existe une constante C_n telle que pour tout p de l'intervalle $[2, +\infty]$ et toute solution* bornée *u de (28) on ait, pour tout nombre réel t tel que $|t| \geqslant 1$,*

$$M_p(u, t) \leqslant C_n |t|^{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}\right)} M_p(u, 0). \tag{30}$$

Si $1 \leqslant p \leqslant 2$, *l'exposant* $\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}$ *doit être remplacé par* $\frac{1}{2p} - \frac{1}{4}$. *Enfin ces inégalités sont les meilleures possibles: si* $n \geqslant 3$ *il existe une constante* $C'_n > 0$ *telle que, pour tout* p *de l'intervalle* $[2, +\infty]$ *la borne supérieure de* $M_p(u, t)$ *pour les solutions bornées* u *de* (28) *normalisées par* $M_p(u, 0) = 1$ *dépasse* $C'_n|t|^{(1/4-1/2p)}$. *Si* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *il suffit de remplacer* $\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}$ *par* $\frac{1}{2p} - \frac{1}{4}$.

En associant les points antipodiques de V, on peut montrer (voir [1], p. 16) que si n est pair (c'est-à-dire si la dimension de V est impaire), 2π peut être remplacé dans (29) par π et que les normes obtenues sur E sont équivalentes aux précédentes. Si $1 < p < +\infty$ et si n est impair, on peut encore remplacer 2π par π mais non par $l < \pi$ (sauf si $p = 2$ auquel cas on peut remplacer 2π par tout $l > 0$ dans (29)). Mais si $p = 1$ ou $p = +\infty$ et si n est impair on ne peut remplacer 2π par $l < 2\pi$ dans (29) et conserver le théorème 2.

Soit $W = T^n = \mathbf{R}^n/Z^n$ le tore n-dimensionnel et $\Delta : \mathscr{C}^\infty(W) \to \mathscr{C}^\infty(W)$ l'opérateur différentiel induit localement sur W par le Laplacien ordinaire de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Considérons l'équation des ondes (28) où cette fois

$$u \in \mathscr{C}^\infty(W \times \mathbf{R}).$$

Nous montrerons dans un prochain travail que, pour tout $p > 2$, aussi grand que soit $T > 0$ et aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, les normes

$$\left(\int_W d\sigma \int_0^T |u(\sigma, t)|^p \, dt\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \left(\int_W d\sigma \int_\varepsilon^{\varepsilon+T} |u(\sigma, t)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

ne sont pas équivalentes sur l'espace des solutions de classes $\mathscr{C}^\infty$ de (28). La géométrie de la sphère joue donc un rôle dans le théorème 2. Nous ne savons pas caractériser les variétés Riemaniennes compactes pour lesquelles un analogue du théorème 2 soit vrai (la fonction de poids $|t|^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)}$ étant éventuellement remplacée par une autre fonction $\omega(p, t)$).

Dans le cas où $n = 2$, les solutions bornées u de (28) sont périodiques de période 2π en t ce qui dispense de l'étude du comportement asymptotique; si $n \geqslant 3$, la périodicité est perdue mais on garde un contrôle de ce qui se passe à l'infini en fonction de ce qui se passe sur $V \times [0, 2\pi]$.

Dans les preuves ci-dessous, nous désignerons par C ou C′ plusieurs constantes > 0 ne dépendant que de la dimension n.

La preuve du théorème 2 repose sur quatre propositions que nous admettrons pour l'instant. Leurs démonstrations suivront celle du théorème 2.

Nous poserons

$$\lambda_k = \sqrt{k(k+n-2)}$$

si $k \geqslant 0$,

$$\lambda_k = -\sqrt{k(k+n-2)}$$

si $k \leqslant -n+1$ tandis que si $-n+2 \leqslant k \leqslant -1$, les λ_k sont arbitraires. Soient $H_k \subset \mathscr{C}^\infty(V)$, $k \geqslant 0$, les espaces usuels d'harmoniques sphériques; les H_k sont les espaces propres de Δ et les valeurs propres correspondantes sont $-k(k+n-2)$. Toute solution bornée $u \in \mathscr{C}^\infty(V \times R)$ de (28) peut être écrite sous la forme

$$(31) \quad u(\sigma, t) = a + \sum_{k\geqslant 1} a_k(\sigma) \cos\sqrt{k(k+n-2)}t + \sum_{k\geqslant 1} b_k(\sigma) \sin\sqrt{k(k+n-2)}t$$

où a_0 est une constante, $a_k(\sigma)$ et $b_k(\sigma)$ appartiennent à H_k et où la série (31) ainsi que toutes celles obtenues en appliquant les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et Δ convergent uniformément sur $V \times \mathbf{R}$.

Soit enfin $B(\mathbf{Z})$ l'algèbre de Banach des coefficients de Fourier-Stieltjes des mesures de Radon complexes μ sur $T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. La norme d'un élément $(c_k)_{-\infty}^{+\infty}$ de $B(\mathbf{Z})$ est la variation totale de la mesure μ dont les c_k sont les coefficients de Fourier.

Proposition 1. — *Soit* $(\lambda_k)_{-\infty}^{+\infty}$ *une suite de nombres réels telle que* $\lambda_k = k + a + \dfrac{b}{k} + 0\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, $|k| \to +\infty$. *Alors la norme dans* $B(\mathbf{Z})$ *de* $(\exp(it\lambda_k))_{-\infty}^{+\infty}$ *est* $0(|t|^{1/4})$ *quand* $|t| \to +\infty$.

PROPOSITION 2. — *Les notations étant celles de la proposition* 1, *la norme de* $(\exp(it\lambda_k))_{-\infty}^{+\infty}$ *dans l'algèbre* M_p *des multiplicateurs des coefficients de Fourier de* $L^p(T)$ *est*

$$0\left(|t|^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}}\right)$$

si $2 \leqslant p \leqslant +\infty$ *et cette norme est* $0\left(|t|^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}}\right)$ *si* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $|t| \to +\infty$.

Pour énoncer la troisième proposition, quelques nouvelles notations sont nécessaires.

Soit u une solution $\mathscr{C}^\infty$ de (28) donnée par la série (31). Écrivons

$$u(\sigma, t) = a_0 + \sum_{k \geqslant 1} c_k(\sigma) e^{i\sqrt{k(k+n-2)}t} + d_k(\sigma) e^{-i\sqrt{k(k+n-2)}t}$$

où a_0 est une constante et $c_k(\sigma)$, $d_k(\sigma)$ appartiennent à H^k, $k \geqslant 1$. Posons alors

$$v(\sigma, t) = a_0 + \sum_{k \geqslant 1} c_k(\sigma) e^{ikt} + \sum_{k \geqslant 1} d_k(\sigma) e^{-i(k+n-2t)t}$$

de sorte que $v(\sigma, t)$ est périodique en t; dans le développement en série de Fourier de $v(\sigma, t)$ manquent les fréquences entières $-n+2, -n+3, \ldots, -1$. Grosso modo chaque fréquence positive ou négative apparaissant dans $u(\sigma, t)$ a été remplacée par l'entier le plus proche ainsi que nous convie à le faire la théorie du § 2.

PROPOSITION 3. — *Sur l'espace vectoriel* E *des solutions* $\mathscr{C}^\infty$ *et bornées de* (28), *les deux normes* $\left(\int_V d\sigma \int_0^{2\pi} |u(\sigma, t)^p\, dt\right)^{1/p}$ *et* $\left(\int_V d\sigma \int_0^{2\pi} |v(\sigma, t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ *sont équivalentes.*

Dans notre dernier énoncé $(x_1, \ldots, x_n)$ désignera un point de $\mathbf{R}^n$ et nous supposerons que $2 \leqslant p \leqslant +\infty$.

PROPOSITION 4. — *Soient* T *un nombre réel tel que* $|T| \geqslant 1$, m *la partie entière de* $|T|^{1/2}$ *et* $u(\sigma, t) = \sum_m^{2m} (x_1 + ix_2)^k e^{i\lambda_k t}$. *Alors* $M_p(u, 0) \geqslant C|T|^\alpha$ *tandis que* $M_p(u, T) \leqslant C|T|^\beta$ *où* $\alpha = -\frac{n}{4p} + \frac{1}{2}$ *et* $\beta = -\frac{n}{4p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}$.

La constante $C > 0$ ne dépend que de n et les normes M_p sont définies par (29).

La preuve du théorème 2 est maintenant très simple. Montrons d'abord que pour toute solution bornée u de (28), de classe $\mathscr{C}^\infty$, pour tout T réel tel que $|T| \geqslant 1$ et tout $\sigma \in V$, on a

$$(32) \quad \left(\int_T^{T+2\pi} |u(\sigma, t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leqslant C_n |T|^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)} \left(\int_0^{2\pi} |u(\sigma, t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

L'inégalité (32) découle du théorème 1 (§ 2) et de la proposition 2 ci-dessus. On élève alors (32) à la puissance p et l'on intègre sur V.

Pour montrer que l'inégalité (30) est la meilleure possible, on part de la solution $u(\sigma, t)$ de la proposition 4 pour former $w(\sigma, t) = u(\sigma, t - T)$; alors $M_p(w, 0) = M_p(u, -T) \leqslant C|T|^\beta$ (en remplaçant T par $-T$ dans la proposition 4) tandis que $M_p(w, T) = M_p(u, 0) \geqslant C|T|^\alpha$. Le décalage des normes est bien celui qui apparaît dans (30).

Les modifications à apporter à cet argument si $1 \leqslant p \leqslant 2$ seront indiquées après la démonstration de la proposition 4.

Il reste enfin à prouver les quatre propositions.

En ce qui concerne la proposition 1, nous poserons

$$r_k = \lambda_k - k - a$$

et

$$(33) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (e^{itr_k} - 1)e^{ikx}.$$

La norme de $(e^{it\lambda_k})_{-\infty}^{+\infty}$ dans $B(\mathbf{Z})$ est exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \, dx.$$

Pour majorer cette intégrale nous découperons la série (33) en blocs de plus en plus grands, en conservant cependant une partie centrale substantielle; un découpage trop brutal sera évité en utilisant une partition de l'unité que nous allons maintenant préciser. Soit $\alpha : \mathbf{R} \to [0, 1]$ une fonction de la classe $\mathscr{D}$ de Schwartz, nulle hors de $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ et telle que pour tout $u > 0$

$$(34) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha(2^k u) = 1$$

et soit $K \geqslant 0$ un entier qui sera précisé ultérieurement (en fonction de t); K permettra d'isoler dans la série (33) une partie centrale qui n'est pas découpée. L'identité (34) nous permet d'écrire, si $u \geqslant 42^K$, $1 = \sum_K^\infty \alpha(2^{-k}u)$; le reste de la série étant alors nul. Posons $\beta(u) = 1 - \sum_K^\infty \alpha(2^{-k}u)$; β est dans la classe $\mathcal{D}$ de Schwartz, bornée par une constante ne dépendant pas de K et est nulle si $u \geqslant 42^K$. Finalement, posons

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta(|j|)(e^{itr_j} - 1)e^{ijx} \tag{35}$$

et, pour tout $k \geqslant K$,

$$h_k(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha(2^{-k}|j|)(e^{itr_j} - 1)e^{ijx}. \tag{36}$$

Les sommes (35) et (36) sont finies, $f(x) = g(x) + \sum_{k \geqslant K} h_k(x)$ de sorte que $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx + \sum_{k \geqslant K} \int_0^{2\pi} |h_k(x)|\, dx$. On majore $\int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx$ par $\sqrt{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |g|^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant C2^{K/2}$ (car $|e^{itr_j} - 1| \leqslant 2$). Pour majorer $\int_0^{2\pi} |h_k(x)|\, dx$, on appelle $\gamma : \mathbf{R} \to [0, 1]$ une fonction de la classe de Schwartz, nulle hors de $[-1, 1]$ et telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x - j) = 1$ pour tout x. On passe du cas discret au cas continu en posant $r(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r_j \gamma(x - j)$; de sorte que $r(j) = r_j$ et si

$$m \leqslant x \leqslant m + 1,$$

$$r(x) = r_m \gamma(x - m) + r_{m+1}\gamma(x - m - 1) \quad \text{et}$$

$$r'(x) = r_m \gamma'(x - m) + r_{m+1}\gamma'(x - m - 1) = (r_m - r_{m+1})\gamma'(x - m).$$

Finalement $|r'(x)| \leqslant C(1 + |x|^2)^{-1}$ grâce aux hypothèses sur les r_j. On utilise alors le lemme de Carlson suivant.

LEMME 12. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et toute fonction* $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *de la classe* $\mathcal{D}$ de

Schwartz, nulle hors de $[-4, 4]$ *on ait*

$$\int_0^{2\pi} |\Sigma\theta(\varepsilon j)e^{ijx}|\, dx \leqslant C\sqrt{\|\theta\|_\infty \|\theta'\|_\infty}.$$

En posant $\varepsilon = 2^{-k}$ et $\theta(x) = \alpha(|x|)\,[\exp \mathrm{it}\, r(2^k x) - 1]$, le lemme de Carlson s'applique à la somme (36) et donne

$$\int_0^{2\pi} |h_k(x)|\, dx \leqslant C\sqrt{|t| 2^{-k}}.$$

En additionnant toutes ces inégalités, il vient

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant C\left(2^{K/2} + \frac{\sqrt{|t|}}{2^{K/2}}\right).$$

On choisit alors K de façon à minimiser cette somme et l'on obtient bien un $0(1 + |t|^{1/4})$.

La proposition 2 est alors une conséquence immédiate du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin ([3], Chap. XII, p. 95).

La proposition 3 n'est qu'une simple application du théorème 1 (§ 2).

Nous arrivons enfin à la preuve de la proposition 4. Elle repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1. — *Si* $a > -1$ *est fixé et* $b \to +\infty$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^a (\cos x)^b\, dx \leqslant C(a) b^{-\left(\frac{a+1}{2}\right)}. \tag{37}$$

On peut, par exemple lorsque $a \geqslant 0$, majorer $\sin x$ par x et $\cos x$ par $e^{-\varepsilon x^2}$ en choisissant ε suffisamment petit. Le changement de variable $x\sqrt{\varepsilon b} = t$ donne aussitôt le résultat. Si $a < 0$, on utilise $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

Lemme 2. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, si* $0 \leqslant \varphi \leqslant 1/\sqrt{m}$ *et si* $1 < p < +\infty$,

$$\int_0^{2\pi} \left|\sum_0^m \cos^j\varphi\, e^{ijx}\right|^p dx \geqslant C m^{p-1}.$$

En effet, grâce aux propriétés du noyau de Poisson, on a pour tout r de l'intervalle $[0, 1]$

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_0^m r^j e^{ijx} \right|^p dx \geqslant r^m \int_0^{2\pi} \left| \sum_0^m e^{ijx} \right|^p dx$$

et, pour tout p de l'intervalle $]1, +\infty[$, cette dernière intégrale dépasse $Cr^m m^{p-1}$. Si $r = \cos\varphi$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 1/\sqrt{m}$, $r^m \geqslant C > 0$ où C ne dépend pas de m.

Revenons à la proposition 4. On pose

$$f = (x_1 + ix_2)^m$$
$$g = \sum_m^{2m} (x_1 + ix_2)^{k-m} e^{ikt} e^{i\lambda_k T}.$$

Grâce à la proposition 3,

$$M_p(u, T) \leqslant C\left(\int_V \int_0^{2\pi} |fg|^p \, dt\, d\sigma\right)^{1/p} \leqslant C\|g\|_\infty \left(\int_V |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}.$$

Posons $h = \sum_m^{2m} e^{ikt} e^{i\lambda_k T}$. Puisque $|x_1 + ix_2| \leqslant 1$ sur V, on passe de h à g par une convolution avec un noyau de Poisson suivie d'une translation (on posera $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$). On a donc $\|g\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$. Les inégalités de Van der Corput ([2], chap. V, p. 198) fournissent $\|h\|_\infty \leqslant A\left(1 + \frac{T}{m^2}\right)\left(1 + T^{-\frac{1}{2}} m^{3/2}\right)$ où A ne dépend ni de m ni de T; si m est la partie entière de $|T|^{1/2}$ et si $|T| \geqslant 1$, on obtient $\|h\|_\infty \leqslant C|T|^{1/4}$.

D'autre part,

$$\|f\|^p_{L^p(V)} = \int_V (x_1^2 + x_2^2)^{mp/2} \, d\sigma$$
$$= \gamma_m \iint_{x_1^2+x_2^2 \leqslant 1} (x_1^2 + x_2^2)^{mp/2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n}{2}-2} \, dx_1\, dx_2$$

($\gamma_n > 0$ ne dépend que de n). Le changement de variables $x_1 = \cos u \cos v$, $x_2 = \cos u \sin v$ donne

$$\|f\|^p_{L^p(V)} = 2\pi\gamma_n \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{mp+1} (\sin u)^{n-3} \, du$$

que le lemme 1 permet de majorer par $Cm^{-\frac{n}{2}+1}$.

Finalement $M_p(u, T) \leqslant C|T|^{-\frac{n}{4p}+\frac{1}{2p}+\frac{1}{4}}$.

En sens inverse $M_p(u, 0) \geqslant C \int_V \int_0^{2\pi} \left| \sum_m^{2m} (x_1 + ix_2)^k e^{ikt} \right|^p dt\, d\sigma$ grâce à la proposition 3. Posons $x_1 + ix_2 = \cos u e^{iv}$. Cela nous amène à évaluer

$$I^p = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{n-3} \cos u\, du \int_0^{2\pi} \left| \sum_m^{2m} \cos^k u e^{ikt} \right|^p dt$$

(la norme L^p est invariante par translation par v; l'intégration en v est donc immédiate et fait apparaître le facteur 2π). On a

$$I^p \geqslant 2\pi \int_0^{1/\sqrt{m}} (\sin u)^{n-3} \cos u\, du \int_0^{2\pi} \left| \sum_m^{2m} \cos^k u e^{ikt} \right|^p dt$$

$$\geqslant C m^{p-1} \int_0^{1/\sqrt{m}} (\sin u)^{n-3} \cos u\, du \geqslant C' m^{p-\frac{n}{2}}$$

en appliquant le lemme 2 et des minorations évidentes.

Si $p = +\infty$, les calculs sont beaucoup plus simples: on majore directement $M_\infty(u, T)$, en appliquant l'inégalité de Van der Corput, par $C|T|^{1/4}$ et

$$M_\infty(u, 0) \geqslant u(\mathbf{1}, 0) \quad \text{où} \quad \mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0) \in V.$$

Or $u(\mathbf{1}, 0) = m + 1 \sim |T|^{1/2}$. On a bien le décalage souhaité si $2 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Si $1 < p < 2$ les rôles de $M_p(u, 0)$ et de $M_p(u, T)$ sont renversés. On commence par remarquer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1, 2]$ et tout $m \geqslant 1$, si $m \sim |T|^{1/2}$,

$$\left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_m^{2m} e^{ikt} e^{i\lambda_k T} \right|^p dt \right)^{1/p} \geqslant C\sqrt{m}. \tag{38}$$

En effet la norme L^∞ de cette somme trigonométrique est majorée par $C\sqrt{m}$ (en vertu des inégalités de Van der Corput). La norme L^2 dépasse $\sqrt{m}$ comme le montre un calcul immédiat. Il en résulte que la norme L^1 (et donc la norme L^p, $p \geqslant 1$) dépassent $C^{-1}\sqrt{m}$.

A l'aide de (38) on minore $M_p(u, T)$ comme $M_q(u, 0)$ lorsque $q \geqslant 2$ et l'on majore $M_p(u, 0)$ comme $M_q(u, T)$ lorsque $q \geqslant 2$. Le rapport $M_p(u, T)/M_p(u, 0)$ dépasse bien $C|T|^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}}$.

Si $p = 1$, il faut modifier légèrement la définition de u:

on remplace u par $\sum_{m}^{3m} (x_1 + ix_2)^k \left(1 - \frac{|k - 2m|}{m}\right) e^{i\lambda_k t}$ et l'on majore $M_1(u, 0)$ par $CT^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}}$ tandis que $M_1(u, T)$ dépasse $T^{\frac{3}{4}-\frac{n}{4}}$ (sans les facteurs $1 - \frac{|k - 2m|}{m}$, on aurait

$$M_1(u, 0) \leqslant CT^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \log T$$

ce qui ne fournirait pas le décalage de normes souhaité).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Meyer, Trois problèmes sur les sommes trigonométriques, *Astérisque* 1, SMF 1973.
[2] A. Zygmund, Trigonometric series. 2nd ed. I, Camb. U. P. 1968.
[3] A. Zygmund, Trigonometric series. 2nd ed. II, Camb. U. P. 1968.

Manuscrit reçu le 19 octobre 1973,
accepté par J. P. Kahane.

Yves Meyer,
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay.