ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

EMMANUEL P. SMYRNELIS

Axiomatique des fonctions biharmoniques. I

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 1 (1975), p. 35-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_35_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 35-97.

AXIOMATIQUE DES FONCTIONS BIHARMONIQUES

1ère SECTION-PARTIES I à VI

par Emmanuel P. SMYRNÉLIS

TABLE DES MATIERES

Introduction.

Les résultats les plus importants de la théorie classique du potentiel ont été systématiquement axiomatisés donnant ainsi naissance à diverses théories (locales). Pour éclairer sous un autre angle certains aspects, des liaisons approfondies ont été faites avec la théorie des probabilités, les équations aux dérivées partielles, etc.

De toutes ces axiomatiques, les plus connues sont :

l'axiomatique de M. Brelot [6]
l'axiomatique de H. Bauer [2]
et l'axiomatique de C. Constantinescu et A. Cornea [8].

Comme dans ce travail nous utiliserons souvent des résultats de [2], nous donnons ci-après un aperçu de ses axiomes : Soient Ω un espace localement compact, à base dénombrable et $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}_c$) l'ensemble des ouverts non vides (resp. des ouverts non vides relativement compacts) de Ω. A chaque ouvert $U \in \mathcal{U}$ est associé un espace vectoriel $\mathcal{H}_U$ de fonctions réelles finies continues dans U, dites harmoniques dans U.

I (de faisceau). – Toute fonction harmonique dans U est harmonique dans tout ouvert partiel et toute fonction dans U qui est harmonique dans un voisinage ouvert de chaque point de U est harmonique dans U.

II. – Les ouverts réguliers forment une base pour la topologie de Ω. (Un ouvert $\omega \in \mathcal{U}_c$ avec $\partial\omega \neq \phi$ est dit régulier si : i) pour tout $f \in C(\partial\omega)$ il existe une seule fonction de $C(\bar{\omega})$ telle que sa restriction à ω, notée H_f^ω, appartient à $\mathcal{H}_\omega$ et ii) $f \geqslant 0 \Rightarrow H_f^\omega \geqslant 0$).

III (de convergence). – Pour toute suite croissante (h_n) de fonctions harmoniques dans $U \in \mathcal{U}$, on a : $\sup\limits_n h_n(x) < \infty$ sur un ensemble dense de $U \Rightarrow \sup\limits_n h_n \in \mathcal{H}_U$.

IV (de séparation). – Les fonctions hyperharmoniques séparent fortement Ω [pour $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, il existe u, v hyperharmoniques dans Ω telles que $u(x)\, v(y) \neq u(y)\, v(x)$]. De plus, pour tout $U \in \mathcal{U}_c$, il existe $h \in \mathcal{H}_U$ strictement positive.

Remarquons que l'axiome de convergence dans [6] est plus fort permettant ainsi à cette théorie une plus grande richesse de résultats applicables aux équations elliptiques linéaires du second ordre, tandis que les deux autres théories s'appliquent également à des équations paraboliques linéaires du second ordre.

Ces axiomatiques, ayant été inspirées par les équations linéaires du second ordre, ne s'appliquent pas à des équations simples d'ordre plus élevé comme l'équation (classique) biharmonique $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$.

Considérons maintenant le problème de Riquier du cas classique pour $\Delta^2 u = 0$: Soit ω un ouvert borné de R^n avec frontière assez bonne et $f_1 , f_2 \in C(\partial\omega)$. Trouver u dans ω tel que $\Delta^2 u = 0$ et u, Δu admettent sur $\partial\omega$ des limites égales respectivement aux fonctions données f_1 , f_2.

S'il existe un couple (u_1 , u_2) dans ω tel que

$$\Delta u_1 = - u_2 \quad , \quad \Delta u_2 = 0 \quad (\text{dans } \omega) \tag{1}$$

$$\text{et} \quad \lim_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} u_j(x) = f_j(y) \quad \text{sur} \quad \partial\omega \ (j = 1 , 2) ,$$

on a alors trouvé la solution $u = u_1$ du problème de Riquier([1]).

On est donc amené à considérer les couples (u_1 , u_2) satisfaisant (1). Remarquons que (u_1 , u_2) sont compatibles dans le sens que si u_1 est nul dans un ouvert alors u_2 l'est aussi.

Dans ce travail nous allons développer une approche axiomatique – au moyen de couples compatibles([2]) – applicable à des équations du type $L_2(L_1 h) = 0$ où L_j $(j = 1 , 2)$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre elliptique ou parabolique (comme dans [10]).

Essayons maintenant de donner une esquisse de notre axiomatique : On se place dans un espace Ω localement compact, à base dénombrable. Soit $\mathcal{H}$ une application $U \to \mathcal{H}(U)$ qui à chaque $U \in \mathfrak{U}$ associe un ensemble $\mathcal{H}(U)$ de couples compatibles dans U formant un sous-espace vectoriel de $C(U) \times C(U)$.

([1]) Signalons que dans "Sur les fonctions polyharmoniques et le problème de Riquier", Nagoya Math. J., 37, 1970, p. 81-90, M. Ito étudie le problème généralisé (cas polyharmonique) pour ω ouvert borné de R^n $(n \geqslant 2)$ et f_1 , f_2 boréliennes bornées sur $\partial\omega$ en utilisant un balayage (avec des noyaux) itéré assez difficile.

([2]) Cette approche est motivée par des considérations ayant trait à un "certain" principe du minimum ainsi que par le souci de traiter aussi un problème aux limites analogue au problème de Riquier du cas classique pour $\Delta^2 u = 0$.

Un $\omega \in \mathcal{U}_c$ avec $\partial\omega \neq \phi$ est dit $\mathcal{H}$-régulier si

i) à tout $(f_1, f_2) \in C(\partial\omega) \times C(\partial\omega)$ on peut associer un seul $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ tel que :

$$\lim_{\omega \ni x \to z} h_j(x) = f_j(z) \ , \ \forall z \in \partial\omega \ , \ j = 1, 2$$

ii)(3) $\quad (f_1, f_2) \geqslant (0, 0) \Rightarrow h_1 \geqslant 0$ dans ω

$\qquad f_2 \geqslant 0 \Rightarrow h_2 \geqslant 0$ dans ω .

On aura donc, pour tout $x \in \omega$, une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $C(\partial\omega) \times C(\partial\omega)$ et une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $C(\partial\omega)$; la première s'écrit comme somme de deux formes linéaires $\geqslant 0$ sur $C(\partial\omega)$ car $(f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$. D'où un unique système $(\lambda_x^\omega, \mu_x^\omega, \nu_x^\omega)$ de mesures $\geqslant 0$ de Radon sur $\partial\omega$ tel que :

$$h_1(x) = \int f_1 \, d\mu_x^\omega + \int f_2 \, d\nu_x^\omega \ , \quad h_2(x) = \int f_2 \, d\lambda_x^\omega \ .$$

Axiome I. – *$\mathcal{H}$ est un faisceau sur Ω.*

[*Un couple* $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(U)$ *est dit biharmonique dans* U].

Axiome II. – *Les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers forment une base pour la topologie de Ω.*

On dit que le couple (v_1, v_2) est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U si :

i) v_1, v_2 sont s.c.i. et $> -\infty$ dans U.

ii) $v_1(x) \geqslant \int v_1 \, d\mu_x^\omega + \int v_2 \, d\nu_x^\omega \ , \quad v_2(x) \geqslant \int v_2 \, d\lambda_x^\omega$

pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset U$ et tout $x \in \omega$.

Notons par :

$\mathcal{H}^*(U)$ = l'ensemble des couples $\mathcal{H}$-hyperharmoniques dans U,

$\mathcal{H}_1^*(U) = \{v_1 : (v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(U)\}$,

$\mathcal{H}_2^*(U) = \{v_2 : \exists v_1 \ ; (v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)\}$,

$\mathcal{H}_j(U) = \mathcal{H}_j^*(U) \cap [-\mathcal{H}_j^*(U)] \quad (j = 1, 2)$.

---

(3) On utilisera pour les couples toujours l'ordre produit, c'est-à-dire pour chaque $j = 1, 2$.

AXIOME III. – a) *Les fonctions de* $\mathcal{H}_1^*(\Omega)$ *séparent fortement* Ω *et de même les fonctions de* $\mathcal{H}_2^*(\Omega)$.

b) *De plus, pour chaque* $U \in \mathcal{U}_c$, *il existe* $h_1 \in \mathcal{H}_1(U)$ *et* $u_2 \in \mathcal{H}_2(U)$ *strictement positives dans* U.

AXIOME IV. – (de convergence). a) *Pour toute suite croissante* $h_1^n \in \mathcal{H}_1(U)$, $U \in \mathcal{U}$, (*n indice* $\in N$), *on a :* $\sup\limits_n h_1^n(x) < \infty$ *sur un ensemble dense de* U $\Rightarrow \sup\limits_n h_1^n \in \mathcal{H}_1(U)$.

b) *Pour toute suite croissante* $h_2^n \in \mathcal{H}_2(U)$, $U \in \mathcal{U}$, *on a :* $\sup\limits_n h_2^n(x) < \infty$ *sur un ensemble dense de* U $\Rightarrow \sup\limits_n h_2^n \in \mathcal{H}_2(U)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique.

Notons que le choix de nos axiomes a été dicté par un certain souci de simplicité et de facilité de vérification dans les applications même si ainsi nous écartons quelques cas – éventuels – intéressants (dans l'optique de [8] pour le cas harmonique) que l'affaiblissement de certains de nos axiomes aurait permis d'inclure.

Remarquons enfin que, dans une toute autre direction, N. Boboc et P. Mustaţă([4]) donnent une axiomatique (polysurharmonique) de caractère global (avec utilisation de cônes et d'opérateurs itérés).

Nous allons maintenant parcourir notre travail (qu'on a divisé en douze parties).

Dans la première partie, outre les axiomes, on établit un principe du minimum dans les espaces biharmoniques ; ensuite, on montre que $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont des faisceaux sur Ω (d'espaces vectoriels de fonctions finies continues) et que le cône des fonctions $\mathcal{H}_j$-hyperharmoniques([5]) dans $U \in \mathcal{U}$ est identique à $\mathcal{H}_j^*(U)$ $(j = 1, 2)$.

De plus, on démontre que $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont deux espaces harmoniques (associés à l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$).

([4]) Considérations axiomatiques sur les fonctions poly-surharmoniques, Rev. Roumaine Math. pur. appl., t. XVI (8), 1971, p. 1167-1184.

([5]) Pour $j = 1, 2$, on définit de façon habituelle les ouverts $\mathcal{H}_j$-réguliers et les fonctions v $\mathcal{H}_j$-hyperharmoniques comme étant s.c.i. $> -\infty$ dans U et telles que pour tout ω $\mathcal{H}_j$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset U$ et toute $f \in C(\partial\omega)$ avec $f \leqslant v$ sur $\partial\omega$, on a dans ω, $v \geqslant H_f^\omega$ (respectivement pour $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$).

– Ce sont les particularités du cas elliptique (biharmonique) ainsi que des inégalités de Harnack que nous examinons dans la deuxième partie.

– En s'inspirant du cas harmonique, on consacre la troisième partie aux couples à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmoniques et l'on établit des propriétés analogues.

– Dans la quatrième partie, on définit la $\mathcal{H}$-réduite et la $\mathcal{H}$-balayée d'un couple de fonctions.

– Dans la cinquième partie, on définit les couples $\mathcal{H}$-surharmoniques (s_1, s_2) dans un $U \in \mathcal{U}$ comme étant $\mathcal{H}$-hyperharmoniques tels que s_1 est finie sur un ensemble dense de U et l'on montre que leur ensemble $\mathcal{S}(U)$ est un cône convexe ; de plus, on définit, le $\mathcal{H}$-potentiel (p_1, p_2) dans Ω comme un élément de ${}_+\mathcal{S}(\Omega)$ (c'est-à-dire, $p_1, p_2 \geqslant 0$) tel que $(p_1, p_2) + (u_1, u_2) \geqslant (0, 0) \Rightarrow (u_1, u_2) \geqslant (0, 0)$ pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$.

Ensuite, on donne une décomposition de Riesz pour les (v_1, v_2) $\mathcal{H}$-surharmoniques $\geqslant (0, 0)$. Enfin, on introduit l'axiome III' a) – plus fort que III a) – à savoir : "Pour chaque $x \in \Omega$, il existe un $\mathcal{H}$-potentiel $(p_1, p_2) \in C(\Omega) \times C(\Omega)$ et tel que $p_j(x) > 0$, $j = 1, 2$" et l'on démontre un théorème d'approximation par les différences de $\mathcal{H}$-potentiels.

– A la sixième partie, on traite le problème généralisé de Riquier pour un $\omega \in \mathcal{U}_c$ en étendant dans notre cadre la méthode Perron-Wiener-Brelot et l'on démontre l'existence d'un $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec $u_j > 0$, $j = 1, 2$. Ensuite, on montre que la $\mathcal{H}$-régularité d'un $z \in \partial\omega$, définie par la convergence vague respective de $(\lambda_x^\omega, \mu_x^\omega, \nu_x^\omega) \to (\epsilon_z, \epsilon_z, 0)$, équivaut (à la fois) à la $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$-régularité (par exemple, Δ-régularité $\Leftrightarrow$ Δ^2-régularité) ; même chose pour la négligeabilité.

– Dans la septième partie, on introduit un balayage sur un $E \subset \Omega$ pour les couples $(\theta_1, \theta_2) = \Theta$ de mesures $\geqslant 0$ à support compact ; si l'on note par : $\Theta^E = (\Theta_1^E, \Theta_2^E)$ le couple balayé ; $(\theta_1, 0) = M$; $(0, \theta_2) = N$; on a : $\Theta_1^E = M_1^E$, $\Theta_2^E = M_2^E + N_2^E$, où M_1^E est égale à la balayée de θ_1 dans $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et N_2^E égale à la balayée de θ_2 dans $(\Omega, \mathcal{H}_2)$.

Signalons un cas particulier intéressant : ω est un ouvert $\mathcal{H}$-régulier, $x \in \omega$, $(\theta_1, \theta_2) = (\epsilon_x, \epsilon_x)$ et $E = C\omega$;

alors $(\epsilon_x, 0)^{C\omega} = (\mu_x^\omega, \nu_x^\omega)$ et $(0, \epsilon_x)^{C\omega} = (0, \lambda_x^\omega)$.

La huitième partie examine plus en détail les mesures ν_x^ω et établit des équivalences intéressantes à la condition "$\nu_x^\omega \neq 0$, $\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$" (ne découlant pas de nos axiomes ; voir 1.25 et contrexemple dans la partie VIII) faisant intervenir les ensembles $\mathcal{H}_1$-absorbants et le principe connu du maximum pour les opérateurs différentiels du second ordre (voir, par exemple, [5], p. 279).

Dans la neuvième partie, on définit les ensembles $\mathcal{H}$-absorbants et l'on montre que : si $\omega \in \mathcal{U}_c$, $E \subset \partial\omega$, A est $\mathcal{H}_1$-absorbant et $\lambda_x^\omega(E) = 0$ sur A, alors $\nu_x^\omega(E) = 0$ sur A ; d'où l'équivalence, $\mathcal{H}$-absorbant $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$-absorbant. On donne aussi quelques caractérisations des ensembles $\mathcal{H}$-absorbants et des inégalités du type Harnack, d'où découlent certaines propriétés d'absolue continuité de nos mesures λ^ω, μ^ω, ν^ω par rapport à x, y convenables dans un ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier.

La dixième partie associe à deux espaces harmoniques donnés $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ des espaces biharmoniques $(\Omega, \mathcal{H})$ pour lesquels les faisceaux $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ coïncident respectivement avec $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

Dans la onzième partie, on donne une caractérisation de couples $\mathcal{H}$-hyperharmoniques au moyen d'opérateurs, dits $\mathcal{H}$-opérateurs (jouant le rôle du laplacien du cas classique ; voir aussi p. 47-48). Puis, s'intéressant aux fonctions v_1 qui dans le cas classique satisfont $\Delta v_1 = -v_2$ avec v_2 hyperharmonique, on introduit et l'on caractérise (sous certaines conditions) les fonctions hyperharmoniques pures d'ordre 2.

Finalement, dans la douzième partie, on donne des applications aux solutions (classiques) de $L_1 h_1 = -h_2$, $L_2 h_2 = 0$ dans $\Omega = \mathbf{R}^m (m \geqslant 2)$ où L_j $(j = 1, 2)$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre elliptique ou parabolique avec des conditions de régularité convenables sur les coefficients et les h_1, h_2. On remarque que pour le faisceau $\mathcal{H}$ de ces (h_1, h_2) on a : (v_1, v_2) $\mathcal{H}$-surharmonique $\Leftrightarrow$ $L_1 v_1 \leqslant -v_2$, $L_2 v_2 \leqslant 0$. La validité de l'axiome III' a) est aussi examiné ; en particulier, nous l'examinons pour les cas simples où L_j $(j = 1, 2)$ est soit le laplacien soit l'opérateur de la chaleur.

Signalons, en terminant, que le choix du cas biharmonique a été dicté seulement par le souci de ne pas alourdir cet exposé (le cas polyharmonique d'ordre > 2 pouvant être traité de façon analogue).

Ces recherches sont loin d'épuiser le sujet. (Des questions relatives à la polarité, l'effilement, etc., ainsi que l'approfondissement du cas elliptique feront l'objet de nos prochaines préoccupations).

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur M. Brelot à qui je dois essentiellement ma formation en théorie du potentiel et dont les encouragements et le soutien constants m'ont été si précieux pour affronter les difficultés que tout jeune chercheur rencontre.

Je remercie beaucoup Madame R.M. Hervé d'avoir bien voulu lire le manuscrit et de m'avoir fourni des remarques très utiles.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur J.M. Bony pour tant de discussions très fructueuses et ses suggestions pendant la préparation de ce travail.

PARTIE I

AXIOMES, COUPLES BIHARMONIQUES ET $\mathcal{H}$-HYPERHARMONIQUES

On se place dans un espace Ω localement compact à base dénombrable et on désigne par $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{U}_c$) l'ensemble des ouverts non vides (resp. des ouverts non vides relativement compacts) de Ω. Soit $\mathcal{E}(E)$ [resp. $\mathcal{E}_c(E)$; $\mathcal{E}_i(E)$] l'espace produit formé des couples (u_1, u_2) de fonctions numériques sur $E \subset \Omega$ [resp. finies continues ; s.c.i. et $> -\infty$] muni de l'ordre produit (c'est-à-dire pour chaque $j = 1, 2$) et des opérations usuelles, addition et multiplication par un réel.

DEFINITION 1.1. – *Soit une application* $\mathcal{G}$ *qui à tout* $U \in \mathfrak{U}$ *fait correspondre* $\mathcal{G}(U)$ *un ensemble de couples* (u_1, u_2) *de fonctions numériques définies dans* U.

On dit que $\mathcal{G}$ est un *préfaisceau* sur Ω si :

$U_1 \subset U_2 \Rightarrow \mathrm{Rest}_{U_1}\, \mathcal{G}(U_2) \subset \mathcal{G}(U_1)$ [propriété de restriction].

On dit que $\mathcal{G}$ est un *faisceau* sur Ω si :

a) $\mathcal{G}$ est un préfaisceau sur Ω,

b) pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$, $U_i \in \mathfrak{U}$, et pour tout couple

$$(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(U) \quad \text{avec} \quad U = \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{on a :}$$

$$\mathrm{Rest}_{U_i}(u_1, u_2) \in \mathcal{G}(U_i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I \Rightarrow (u_1, u_2) \in \mathcal{G}(U)$$

(propriété de recollement).

DEFINITION 1.2. – *Un couple* $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{U}$, *est dit compatible dans* U, *si, pour tout* $U' \in \mathfrak{U}$, $U' \subset U$, $u_1 = 0$ *dans* U' *implique* $u_2 = 0$ *dans* U'.

Remarque 1.3. – Les solutions classiques (h_1, h_2) de $\Delta h_1 = -h_2$, $\Delta h_2 = 0$ dans un ouvert de R^m (Δ = laplacien) nous donnent un exemple de couples compatibles (faisceau de couples compatibles).

De même, pour : $L_1 h_1 = -h_2$, $L_2 h_2 = 0$ où $L_j (j = 1, 2)$ est un opérateur linéaire du second ordre elliptique ou parabolique (sous certaines conditions de régularité des h_1, h_2 et des coefficients de L_j).

Soit une application $\mathcal{H} : U \to \mathcal{H}(U)$ qui à chaque $U \in \mathcal{U}$ associe un ensemble $\mathcal{H}(U)$ de couples (ordonnés) compatibles dans U formant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_c(U)$.

DEFINITION 1.4. – *Un $\omega \in \mathcal{U}_c$ avec $\partial\omega \neq \phi$ est dit $\mathcal{H}$-régulier si :*

i) *à tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ on associe un seul*(6) *$(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ tel que :*

$$\lim_{x \to z,\, x \in \omega} h_1(x) = f_1(z) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to z,\, x \in \omega} h_2(x) = f_2(z) \ , \ \forall z \in \partial\omega$$

et

$$\begin{aligned} &\text{ii) } (f_1, f_2) \geqslant (0, 0) \quad \textit{sur} \quad \partial\omega \Rightarrow h_1 \geqslant 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \,, \\ &\qquad f_2 \geqslant 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\omega \Rightarrow h_2 \geqslant 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \,. \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité, pour chaque $x \in \omega$, $(f_1, f_2) \to h_j(x)$, $j = 1, 2$, est une forme linéaire positive (voir ii)) sur $\mathcal{E}_c(\partial\omega)$.

Comme $(f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$, on aura quatre mesures de Radon positives sur $\partial\omega$, dont l'une est nulle car pour tout $(f_1, 0) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ on a $h_2(x) = 0$, $\forall x \in \omega$, grâce à ii).

D'où, finalement, un unique système $(\lambda_x^\omega, \mu_x^\omega, \nu_x^\omega)$ de mesures $\geqslant 0$ de Radon sur $\partial\omega$ et tel que, pour chaque $x \in \omega$,

$$h_1(x) = \int f_1\, d\mu_x^\omega + \int f_2\, d\nu_x^\omega \ , \ h_2(x) = \int f_2\, d\lambda_x^\omega \,.$$

[En désignant $(f_1, f_2) = f$, on pourrait dans la définition 1.4 utiliser la notation $(H_1^{\omega,f}, H_2^{\omega,f})$ à la place de (h_1, h_2) ce qu'on fera d'ailleurs quand on étudiera le problème de Riquier. Notons que ω désignera désormais un ouvert $\in \mathcal{U}_c$].

---

(6) Notons que, si on ne supposait pas l'unicité, on pourrait la déduire de la double positivité ii). En effet,

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) = (0, 0) &\Rightarrow h_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad h_1 \leqslant 0 \Rightarrow h_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \omega \,, \quad \text{et} \\ f_2 = 0 &\Rightarrow h_2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad h_2 \leqslant 0 \Rightarrow h_2 = 0 \quad \text{dans} \quad \omega \,. \end{aligned}$$

En fait, ici, on peut se passer de la condition "$f_2 \geqslant 0$ sur $\partial\omega \Rightarrow h_2 \geqslant 0$ dans ω" car grâce à la compatibilité des couples, $h_1 = 0$ dans $\omega \Rightarrow h_2 = 0$ dans ω.

PROPOSITION 1.5. – *Soit* ω $\mathcal{H}$*-régulier et* $z \in \partial\omega$. *Alors :*

1) $\lambda_x^\omega \to \epsilon_z$ *vaguement quand* $x \to z,\ x \in \omega$.

2) $\mu_x^\omega \to \epsilon_z$ *vaguement quand* $x \to z,\ x \in \omega$.

3) $\| \nu_x^\omega \| \to 0$ *quand* $x \to z,\ x \in \omega$ *(la convergence vague en découle).*

4) il existe une constante M telle que pour tout $x \in \omega$,

$$\| \lambda_x^\omega \| \leqslant M \quad , \quad \| \mu_x^\omega \| \leqslant M \quad , \quad \| \nu_x^\omega \| \leqslant M \ .$$

Démonstration. – Grâce à la condition i) de la définition 1.4, la partie 1) [resp. 2)] se démontre facilement en considérant tous les couples $(0 , \varphi) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$
[resp. tous les couples $(f , 0) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$].

3) D'après la définition 1.4, à $(0 , 1) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ correspond $(h_1 , h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec $\lim\limits_{x \to z ,\, x \in \omega} h_1(x) = 0$; mais

$$h_1(x) = \int 1 \, d\nu_x^\omega = \| \nu_x^\omega \| \ ,$$

d'où le résultat.

4) Considérons le couple $(1 , 1) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ et soit $(h_1 , h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ $(h_j \geqslant 0,\ j = 1 , 2)$ le couple lui correspondant. On aura donc

$$h_1(x) = \int d\mu_x^\omega + \int d\nu_x^\omega \quad , \quad h_2(x) = \int d\lambda_x^\omega \ .$$

Mais, par définition, h_1 , h_2 sont des restrictions dans ω de deux fonctions $\in C(\bar{\omega})$, donc elles sont bornées.

AXIOME I. – $\mathcal{H}$ *est un faisceau sur* Ω.

Un couple $(h_1 , h_2) \in \mathcal{H}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, *est dit biharmonique dans* U.

AXIOME II. – *Les ensembles* $\mathcal{H}$*-réguliers forment une base pour la topologie de* Ω.

THEOREME 1.6. – *Soit* $U \in \mathcal{U}$ *et* $(h_1 , h_2) \in C(U) \times C(U)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) (h_1 , h_2) *est biharmonique dans* U.

ii) $h_1(x) = \int h_1 \, d\mu_x^\omega + \int h_2 \, d\nu_x^\omega$, $\quad h_2(x) = \int h_2 \, d\lambda_x^\omega$,

pour tout ω *$\mathcal{H}$-régulier* $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ *et tout* $x \in \omega$.

Démonstration. – Si $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$, d'où $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$, il est clair (unicité) que ii) sera satisfait. Inversement, la restriction de (h_1, h_2) à tout ω $\mathcal{H}$-régulier appartient à $\mathcal{H}(\omega)$ et, grâce à l'axiome II, $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ car $\mathcal{H}$ est un faisceau (propriété de recollement).

DEFINITION 1.7. – *On dit que le couple* (v_1, v_2) *est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ si :

1) $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}_i(\mathrm{U})$

et 2) $v_1(x) \geqslant \int v_1 \, d\mu_x^\omega + \int v_2 \, d\nu_x^\omega$, $\quad v_2(x) \geqslant \int v_2 \, d\lambda_x^\omega$

pour tout ω *$\mathcal{H}$-régulier* $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ *et tout* $x \in \omega$.

(v_1, v_2) *est dit $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans* U *si* $(-v_1, -v_2)$ *est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans* U.

Soit $\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ [resp. $-\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$] l'ensemble des couples $\mathcal{H}$-hyperharmoniques [resp. $\mathcal{H}$-hypoharmoniques] dans U.

Pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, $\mathrm{U} \to \mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ définit un préfaisceau sur Ω.

COROLLAIRE 1.8. – *Pour tout* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *on a :*

$$\mathcal{H}(\mathrm{U}) = \mathcal{H}^*(\mathrm{U}) \cap [-\mathcal{H}^*(\mathrm{U})] .$$

THEOREME 1.9. – *Les conditions suivantes sont équivalentes (pour* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$) :

i) $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U})$.

ii) $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}_i(\mathrm{U})$ *et, pour tout* ω *$\mathcal{H}$-régulier,* $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ *et tout* $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$, *on a*

$$(f_1, f_2) \leqslant (v_1, v_2) \textit{ sur } \partial\omega \Rightarrow \begin{cases} \int f_1 \, d\mu_x^\omega + \int f_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant v_1(x) \\ \int f_2 \, d\lambda_x^\omega \leqslant v_2(x) \end{cases} \quad (\forall x \in \omega) .$$

Démonstration. – i) $\Rightarrow$ ii). Evident car, sur $\partial\omega$, $(v_1, v_2) \geqslant (f_1, f_2)$.
ii) $\Rightarrow$ i). – D'après des propriétés bien connues sur les intégrales supérieures, on a :

$$\int v_1 d\mu_x^\omega + \int v_2 d\nu_x^\omega = \sup_{(f_1, f_2) \leqslant (v_1, v_2)} \left[\int f_1 d\mu_x^\omega + \int f_2 d\nu_x^\omega\right] \leqslant v_1(x),$$

$$\int v_2 d\lambda_x^\omega = \sup_{f_2 \leqslant v_2} \int f_2 d\lambda_x^\omega \leqslant v_1(x) \quad .$$

PROPOSITION 1.10. –

1) $\mathcal{H}^*(U)$ est un cône convexe inf-stable (pour l'ordre produit).

2) Si $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(U)$ [c'est-à-dire $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)$ et $v_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$], il en est de même pour $(\alpha v_1, \beta v_2)$ où $\infty \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. De même, $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U) \Rightarrow (\infty, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)$. [Evidemment le couple $(\infty, \infty) \in \mathcal{H}^*(U)$].

3) Si $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)$ et $v_2 \geqslant 0$ dans U, alors $(v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(U)$.

4) Si $(v_1^n, v_2^n)_n$ est une suite croissante de couples de $\mathcal{H}^*(U)$, alors son enveloppe supérieure $(v_1, v_2) = \left(\sup\limits_n v_1^n, \sup\limits_n v_2^n\right) \in \mathcal{H}^*(U)$.

Démonstration. – Toutes ces propriétés se démontrent facilement.

Soient $U \in \mathcal{U}$ et les ensembles :

$$\mathcal{F}_1(U) = \{h_1 : \exists\, h_2 \ ; (h_1, h_2) \in \mathcal{H}(U)\} \ ,$$

$$\mathcal{K}_1(U) = \{h_1 : (h_1, 0) \in \mathcal{H}(U)\} \ ,$$

$$\mathcal{K}_2(U) = \{h_2 : \exists\, h_1 \ ; (h_1, h_2) \in \mathcal{H}(U)\} \ ,$$

$$\mathcal{H}_1^*(U) = \{v_1 : (v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(U)\} \ ,$$

$$\mathcal{H}_2^*(U) = \{v_2 : \exists\, v_1 \ ; (v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)\} \ .$$

Il n'est pas difficile de voir que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U \to \mathcal{F}_1(U)$, $U \to \mathcal{K}_1(U)$ définissent des faisceaux sur Ω, tandis que $U \to \mathcal{K}_2(U)$, $U \to \mathcal{H}_1^*(U)$, $U \to \mathcal{H}_2^*(U)$, définissent des préfaisceaux sur Ω ; de plus, si à chaque premier élément d'un couple biharmonique dans U on fait correspondre son deuxième élément (un seul, grâce à la compatibilité), on a un opérateur linéaire et local $\mathcal{N}_U : \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{K}_2(U)$.

En effet, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$ étant des préfaisceaux sur Ω, la propriété de restriction est vérifiée pour toutes ces applications. La propriété de recollement est évidente pour $\mathcal{K}_1$ car $\mathcal{H}$ est un faisceau. Pour $\mathcal{F}_1$: soit h_1 définie sur $U = U_1 \cup U_2$ et $h_{1|U_1} \in \mathcal{F}_1(U_1)$, donc il existe h_2 tel que $(h_{1|U_1}, h_2) \in \mathcal{H}(U_1)$, et aussi $h_{1|U_2} \in \mathcal{F}_1(U_2)$, c'est-à-dire il existe h'_2 tel que $(h_{1|U_2}, h'_2) \in \mathcal{H}(U_2)$. Mais $(0, h_2 - h'_2) \in \mathcal{H}(U_1 \cap U_2)$ et, grâce à la compatibilité, $h_2 = h'_2$ dans $U_1 \cap U_2$ $(\neq \phi)$.

L'opérateur $\mathcal{N}_U$ est linéaire [grâce à la déf. de $\mathcal{H}(U)$, p. 44] et local car, si $U' \subset U$, $U' \in \mathcal{U}$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{F}_1(U) & \xrightarrow{\text{rest } 1} & \mathcal{F}_1(U') & \\ \mathcal{N}_U & \downarrow & & \downarrow & \mathcal{N}_{U'} \\ & \mathcal{K}_2(U) & \xrightarrow{\text{rest } 2} & \mathcal{K}_2(U') & \end{array} \quad \text{est commutatif.}$$

On remarque enfin que $\mathcal{K}_1(U) \subset \mathcal{F}_1(U)$ et que, si l'on considère l'exemple de 1.3, les $h_1 \in \mathcal{F}_1(U)$ sont dans le cas classique les solutions de $\Delta^2 h_1 = 0$.

PROPOSITION 1.11. – *Soient* $U \in \mathcal{U}$ *et les ensembles :*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1(U) = \{v_1 : \text{s.c.i.}, > -\infty \quad \textit{dans} \quad U \quad \text{et} \quad v_1(x) \geq \int v_1 \, d\mu_x^\omega ,$$
$$\forall\, \omega \ \mathcal{H}\textit{-régulier},\ \bar{\omega} \subset U,\ \forall\, x \in \omega\} ,$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_2(U) = \{v_2 : \text{s.c.i.}, > -\infty \quad \textit{dans} \quad U \quad \text{et} \quad v_2(x) \geq \int v_2 \, d\lambda_x^\omega ,$$
$$\forall\, \omega \ \mathcal{H}\textit{-régulier},\ \bar{\omega} \subset U,\ \forall\, x \in \omega\} .$$

Alors $\mathcal{H}_1^*(U) = \widetilde{\mathcal{H}}_1(U)$ *et* $\mathcal{H}_2^*(U) = \widetilde{\mathcal{H}}_2(U)$.

Démonstration. – Si $v_1 \in \mathcal{H}_1^*(U)$, on voit que $v_1 \in \widetilde{\mathcal{H}}_1(U)$; inversement, si $v_1 \in \widetilde{\mathcal{H}}_1(U)$ alors $(v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(U)$ et, par définition, $v_1 \in \mathcal{H}_1^*(U)$. Si $v_2 \in \mathcal{H}_2^*(U)$, il est clair que $v_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}_2(U)$; inversement, si $v_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}_2(U)$ alors $(\infty, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)$ et, par définition, $v_2 \in \mathcal{H}_2^*(U)$.

COROLLAIRE 1.12. – *Soit* $\mathcal{H}_1(U) = \mathcal{H}_1^*(U) \cap [-\mathcal{H}_1^*(U)]$

et $\mathcal{H}_2(U) = \mathcal{H}_2^*(U) \cap [-\mathcal{H}_2^*(U)]$. *Alors :*

1) $\mathcal{H}_1(U) = \mathcal{K}_1(U)$, *donc* $U \to \mathcal{H}_1(U)$ *définit un faisceau sur* Ω.

2) $\mathcal{H}_2(U) \supset \mathcal{K}_2(U)$.

Démonstration. –

1) $h_1 \in \mathcal{H}_1(\mathrm{U})$ implique que h_1 est finie continue et

$$h_1(x) = \int h_1 \, d\mu_x^\omega ,$$

$\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, $\forall x \in \omega$; d'où $(h_1, 0) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ (théorème 1.6) et, par définition, $h_1 \in \mathcal{K}_1(\mathrm{U})$. Inversement, si $h_1 \in \mathcal{K}_1(\mathrm{U})$ on a $(h_1, 0) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ c'est-à-dire h_1 est finie continue dans U et

$$h_1(x) = \int h_1 \, d\mu_x^\omega ,$$

pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ et tout $x \in \omega$, d'où $h_1 \in \mathcal{H}_1(\mathrm{U})$. Le reste s'ensuit du fait que $\mathcal{K}_1$ est un faisceau.

2) Soit $h_2 \in \mathcal{K}_2(\mathrm{U})$; alors h_2 est finie continue dans U et $h_2(x) = \int h_2 \, d\lambda_x^\omega$, $\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, $\forall x \in \omega$; donc $h_2 \in \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$.

AXIOME III. – a) *Pour $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, il existe $s_1, t_1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$ et $v_2, w_2 \in \mathcal{H}_2^*(\Omega)$ telles que :*

$$s_1(x) \quad t_1(y) \neq s_1(y) \quad t_1(x) ,$$

$$v_2(x) \quad w_2(y) \neq v_2(y) \quad w_2(x) .$$

b) *Pour tout* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$, *il existe* $h_1 \in \mathcal{H}_1(\mathrm{U})$ *et* $u_2 \in \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$ *strictement positives dans* U.

Considérons maintenant une application $\mathcal{B}$ qui à tout $x \in \Omega$ fait correspondre un système fondamental $\mathcal{B}(x)$ de voisinages $\mathcal{H}$-réguliers de x.

DEFINITION 1.13. – *On dit que (v_1, v_2) est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-hyperharmonique dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *si :*

1) $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}_i(\mathrm{U})$

et 2) *pour chaque* $x \in \mathrm{U}$ *et tout* $\omega \in \mathcal{B}(x)$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, *on a :*

$$v_1(x) \geqslant \int v_1 \, d\mu_x^\omega + \int v_2 \, d\nu_x^\omega , \quad v_2(x) \geqslant \int v_2 \, d\lambda_x^\omega .$$

On note par ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ l'ensemble des couples $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-hyperharmoniques dans $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ et on voit que $\mathcal{H}^*(\mathrm{U}) \subset {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$.

Comme précédemment et de façon analogue, on définit :

$$^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_1^*(\mathrm{U}) = \{v_1 \ : \ (v_1 \, , 0) \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})\} \, ,$$

$$^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_2^*(\mathrm{U}) = \{v_2 \ : \ \exists \, v_1 \ ; (v_1 \, , v_2) \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})\} \, .$$

On montre facilement que : $\mathcal{H}_j^*(\mathrm{U}) \subset {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_j^*(\mathrm{U})$, $j = 1 \, , 2$.

De même, on peut établir une proposition analogue à 1.11, à savoir :

$$^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_1^*(\mathrm{U}) = \Big\{ v_1 \ : \text{s.c.i.}, > -\infty \text{ dans U}, \quad v_1(x) \geqslant \int v_1 \, d\mu_x^{\omega} \ , \ \forall \, \omega \in \mathcal{B}(x) \ , \ \bar{\omega} \subset \mathrm{U} \Big\} \, ,$$

$$^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_2^*(\mathrm{U}) = \Big\{ v_2 \ : \text{s.c.i.}, > -\infty \text{ dans U}, \quad v_2(x) \geqslant \int v_2 \, d\lambda_x^{\omega} \ , \ \forall \, \omega \in \mathcal{B}(x) \ , \ \bar{\omega} \subset \mathrm{U} \Big\} \, .$$

S'il existe $h_j \in \mathcal{H}_j(\Omega)$, $h_j > 0$ dans Ω ($j = 1 \, , 2$), alors à chaque $x \in \omega$, ω $\mathcal{H}$-régulier, on fait correspondre les mesures (uniques)

$$\mu_x'^{\omega} = \frac{1}{h_1(x)} \, (h_1 \, \mu_x^{\omega}) \ , \qquad \lambda_x'^{\omega} = \frac{1}{h_2(x)} \, (h_2 \, \lambda_x^{\omega}) \ ;$$

pour un $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, on note :

$$\mathcal{H}_{1/h_1}^*(\mathrm{U}) = \Big\{ \frac{v_1}{h_1} \ : \text{s.c.i.}, > -\infty \text{ dans U}, \frac{v_1}{h_1}(x) \geqslant \int \frac{v_1}{h_1} \, d\mu_x'^{\omega} \ , \quad \forall \, \omega \ \mathcal{H}\text{-régulier} \subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U} \ , \ \forall \, x \in \omega \Big\} \, ,$$

$$\mathcal{H}_{2/h_2}^*(\mathrm{U}) = \Big\{ \frac{v_2}{h_2} \ : \text{s.c.i.}, > -\infty \text{ dans U}, \frac{v_2}{h_2}(x) \geqslant \int \frac{v_2}{h_2} \, d\lambda_x'^{\omega} \ , \quad \forall \, \omega \ \mathcal{H}\text{-régulier} \subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U} \ , \ \forall \, x \in \omega \Big\} \, .$$

D'après ce qui précède, on définit de façon évidente les ensembles $^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{1/h_1}^*(\mathrm{U})$, $^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{2/h_2}^*(\mathrm{U})$.

Remarque 1.14. –

$$1)\ v_1(x) \geqslant \int v_1\, d\mu_x^\omega \Leftrightarrow \frac{v_1}{h_1}(x) \geqslant \int \frac{v_1}{h_1}\, d\mu_x'^\omega$$

et
$$v_2(x) \geqslant \int v_2\, d\lambda_x^\omega \Leftrightarrow \frac{v_2}{h_2}(x) \geqslant \int \frac{v_2}{h_2}\, d\lambda_x'^\omega\ ;$$

d'où $\int d\mu_x'^\omega = 1$ et $\int d\lambda_x'^\omega = 1$ pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier,

$$\forall x \in \omega \left(\text{car } h_1(x) = \int h_1\, d\mu_x^\omega \quad \text{et} \quad h_2(x) = \int h_2\, d\lambda_x^\omega\right).$$

$$2)\ \mathcal{H}^*_{1/h_1}(\mathrm{U}) \subset {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_{1/h_1}(\mathrm{U}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^*_{2/h_2}(\mathrm{U}) \subset {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_{2/h_2}(\mathrm{U}).$$

Nous voulons maintenant démontrer le principe du minimum pour les fonctions $v_1 \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_1(\mathrm{U})$, $v_2 \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_2(\mathrm{U})$ avec $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$.

A cet effet, on remarque que les propositions 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6 et 1.3.7 de [2c] appliquées aux fonctions considérées se démontrent de façon analogue ; d'où le principe du minimum désiré ; (le fait que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers ne change pas les raisonnements).

Notons enfin qu'on montre aussi (1.3.3 [2c]) que $\partial\mathrm{U} \neq \phi$ pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$.

THEOREME 1.15 (principe biharmonique du minimum). – *Pour tout* (v_1, v_2) *$\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-hyperharmonique dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$,

$$\liminf_{x \to z,\ x \in \mathrm{U}} v_j(x) \geqslant 0\ ,\ \forall z \in \partial\mathrm{U},\ j = 1, 2 \Rightarrow (v_1, v_2) \quad \textit{dans } \mathrm{U}.$$

Démonstration. – Remarquons d'abord que $v_2 \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_2(\mathrm{U})$; alors, d'après ce qui précède, $\liminf_{x \to z,\ x \in \mathrm{U}} v_2(x) \geqslant 0$, $\forall z \in \partial\mathrm{U} \Rightarrow v_2 \geqslant 0$ dans U. Mais, grâce à la proposition 1.10. 3), $v_1 \in {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*_1(\mathrm{U})$; et

$$\liminf_{x \to z,\ x \in \mathrm{U}} v_1(x) \geqslant 0,\ \forall z \in \partial\mathrm{U} \Rightarrow v_1 \geqslant 0.$$

D'où le résultat.

Remarque 1.16. – En fait, pour démontrer que $v_1 \geqslant 0$ dans U, on a besoin de : $\liminf_{x \to z, x \in \mathrm{U}} v_1(x) \geqslant 0$ et $\liminf_{x \to z, x \in \mathrm{U}} v_2(x) \geqslant 0$, $\forall z \in \partial\mathrm{U}$; (voir aussi définition 1.4 ii)).

PROPOSITION 1.17. – *Les définitions* 1.7 *et* 1.13 *sont équivalentes.*

Démonstration. – On a déjà vu que $\mathcal{H}^*(\mathrm{U}) \subset {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$.

Réciproquement, soit ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ avec $f_j \leqslant v_j$ sur $\partial\omega$, $j = 1, 2$; on note

$$h_1(x) = \int f_1\, d\mu_x^\omega + \int f_2\, d\nu_x^\omega \ , \ h_2(x) = \int f_2\, d\lambda_x^\omega \ , \ (x \in \omega) \ .$$

Le couple $(v_1 - h_1, v_2 - h_2)$ est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-hyperharmonique dans ω et, pour tout $z \in \partial\omega$, on a :

$$\liminf_{x \to z,\, x \in \mathrm{U}} (v_j - h_j)(x) = \liminf_{x \to z,\, x \in \mathrm{U}} v_j(x) - f_j(z) \geqslant v_j(z) - f_j(z) \geqslant 0$$

$(j = 1, 2)$.

D'après 1.15, $(v_1, v_2) \geqslant (h_1\, h_2)$ dans ω et, grâce à 1.9, (v_1, v_2) est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U. Par conséquent, pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{H}^*(\mathrm{U}) = {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$.

THEOREME 1.18. – 1) $\mathcal{H}^*$ *est un faisceau sur* Ω.

2) $\mathcal{H}_1^*$, $\mathcal{H}_2^*$ *sont des faisceaux sur* Ω.

Démonstration. – 1) Selon 1.17 la $\mathcal{H}$-hyperharmonicité est de caractère local ; par conséquent, la propriété de recollement est vérifiée. (On a vu que $\mathcal{H}^*$ est un préfaisceau sur Ω).

2) On a déjà remarqué que $\mathcal{H}_1^*$ et $\mathcal{H}_2^*$ sont des préfaisceaux sur Ω. Soit maintenant $(v_1, 0)$ dans $\mathrm{U} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ et $(v_1, 0)_{|\mathrm{U}_i} \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U}_i)$; alors $(v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ (car $\mathcal{H}^*$ est un faisceau) d'où $v_1 \in \mathcal{H}_1^*(\mathrm{U})$. Ensuite, soit v_2 dans $\mathrm{U} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ et $v_{2|\mathrm{U}_i} \in \mathcal{H}_2^*(\mathrm{U}_i)$, $\forall i \in \mathrm{I}$; donc $(\infty, v_2) \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U}_i)$ et, comme $\mathcal{H}^*$ est un faisceau, alors $(\infty, v_2) \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ d'où $v_2 \in \mathcal{H}_2^*(\mathrm{U})$.

COROLLAIRE 1.19. – 1) *L'application* $\mathrm{U} \to \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$ (*voir* 1.12) *définit un faisceau sur* Ω.

2) *On définit le faisceau* $\overline{\mathcal{K}}_2$ *associé au préfaisceau* $\mathcal{K}_2$ *comme suit :* $h_2 \in \overline{\mathcal{K}}_2(\mathrm{U})$ *si* h_2 *est définie dans* U *et si, pour tout* $x \in \mathrm{U}$, *il existe un voisinage* $\mathrm{U}'_x \subset \mathrm{U}$ *et* $u_2 \in \mathcal{K}_2(\mathrm{U}'_x)$ *tels que* $h_2 = u_2$ *dans*

$U'_x(\in \mathcal{U})$. *Alors pour tout* $U \in \mathcal{U}, \mathcal{H}_2(U) = \overline{\mathcal{K}}_2(U)$ *(c'est-à-dire, les deux faisceaux* $\mathcal{H}_2$ *et* $\overline{\mathcal{K}}_2$ *sont identiques).*

Démonstration. — 1) Comme $\mathcal{H}_2^*$ est un faisceau (1.18), $\mathcal{H}_2$ est aussi un faisceau sur Ω.

2) Soit d'abord $h_2 \in \overline{\mathcal{K}}_2(U)$; alors, par définition, h_2 est finie continue dans U, $h_{2|U'_x} \in \mathcal{H}_2(U'_x)$ et, comme $\mathcal{H}_2$ est un faisceau, alors $h_2 \in \mathcal{H}_2(U)$. Réciproquement, prenons une $h_2 \in \mathcal{H}_2(U)$; soit $x \in U$ et ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier (de x), $\overline{\omega} \subset U$; alors pour tout $y \in \omega$, $h_2(y) = \int h_2 \, d\lambda_y^\omega$. A $(0, h_2)$ sur $\partial\omega$, on associe $u_1(y) = \int h_2 \, d\nu_y^\omega$, $u_2(y) = \int h_2 \, d\lambda_y^\omega$, où $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega)$; donc $u_2 \in \mathcal{K}_2(\omega)$. Mais, par construction, $h_2 = u_2$ dans ω. Par conséquent, $h_2 \in \overline{\mathcal{K}}_2(U)$.

Remarque 1.20. — 1) D'après leur définition, on aura

$$\mathcal{H}_j^*(U) = {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_j^*(U) \quad , \quad j = 1, 2 .$$

2) Par construction, $\overline{\mathcal{K}}_2$ est un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions finies continues et $\mathcal{K}_2(U) \subset \overline{\mathcal{K}}_2(U)$, $\forall U \in \mathcal{U}$.

PROPOSITION 1.21. — *Soient* $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$, $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(U)$, $U \in \mathcal{U}$ *et* $\liminf_{x \to y,\, x \in U} u_j(x) \geqslant v_j(y)$, $\forall y \in \partial U$, $j = 1, 2$.

$$\textit{On pose } w_j(x) = \begin{cases} \inf(u_j(x), v_j(x)) & , x \in U \\ v_j(x) & , x \in \complement U \end{cases} \qquad (j = 1, 2).$$

Alors $\qquad (w_1, w_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$.

Démonstration. — (raisonnement analogue à celui de [2c], 1.3.10). Pour tout $x \in \Omega$, $w_j(x) > -\infty$; de plus, w_1, w_2 sont s.c.i. dans Ω. D'autre part, à cause de 1.17, il suffit de vérifier les inégalités

$$w_1(x) \geqslant \int w_1 \, d\mu_x^\omega + \int w_2 \, d\nu_x^\omega \quad , \quad w_2(x) \geqslant \int w_2 \, d\lambda_x^\omega \ ,$$

pour un système de voisinages $\omega \in \mathcal{B}(x)$.

C'est immédiat pour $x \in U$ et pour $x \in \complement U$ on le voit facilement grâce à $w_j \leqslant v_j$.

Maintenant, nous définissons de façon habituelle les ouverts réguliers par rapport aux faisceaux $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ ainsi que les fonctions $\mathcal{H}_1$-hyperharmoniques et $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques.

Signalons aussi que nous continuerons à utiliser les notations μ_x^ω et λ_x^ω respectivement pour les mesures (harmoniques) par rapport à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

LEMME 1.22. — *Si ω est $\mathcal{H}$-régulier, il est aussi $\mathcal{H}_1$-régulier et $\mathcal{H}_2$-régulier.*

Démonstration. — i) Soit $f \in C(\partial\omega)$; à $(f, 0)$ correspond un seul $(h_1, 0)$ avec $\lim_{x \to z, x \in \omega} h_1(x) = f(z)$, $\forall z \in \partial\omega$, et $f \geqslant 0$ implique $h_1 \geqslant 0$ dans ω (définition 1.4). Il existe donc un seul $h_1 \in \mathcal{H}_1(\omega)$, avec les propriétés requises, et par conséquent ω est $\mathcal{H}_1$-régulier.

ii) Considérons le couple $(0, f)$; on lui associe un seul $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec $\lim_{x \to z, x \in \omega} h_1(x) = 0$, $\lim_{x \to z, x \in \omega} h_2(x) = f(z)$, $\forall z \in \partial\omega$, et de plus $f \geqslant 0 \Rightarrow h_2 \geqslant 0$ dans ω (définition 1.4 ii)). Mais, par définition, $h_2 \in \mathcal{K}_2(\omega)$; on voit donc qu'à $f \in C(\partial\omega)$ correspond un seul $h_2 \in \mathcal{K}_2(\omega)$ [on peut dire que ω est $\mathcal{K}_2$-régulier, c'est-à-dire par rapport au préfaisceau $\mathcal{K}_2$]. Ensuite, grâce à 1.12.2), $h_2 \in \mathcal{H}_2(\omega)$; soit qu'à $f \in C(\partial\omega)$ correspond aussi un autre $h'_2 \in \mathcal{H}_2(\omega)$ avec $\lim_{x \to z, x \in \omega} h'_2(x) = f(z)$, $\forall z \in \partial\omega$; d'après le principe du minimum pour les fonctions de $\mathcal{H}_2^*(U)$, $U \in \mathfrak{U}_c$, on aura $h_2 = h'_2$ dans ω [et aussi $f \geqslant 0 \Rightarrow h_2 \geqslant 0$ dans ω] ; donc ω est aussi $\mathcal{H}_2$-régulier.

THEOREME 1.23. — *Pour tout* $U \in \mathfrak{U}$, *il y a identité entre le cône des fonctions $\mathcal{H}_1$-hyperharmoniques [resp. $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques] dans* U *et* $\mathcal{H}_1^*(U)$ [*resp.* $\mathcal{H}_2^*(U)$].

(Alors, puisque $\mathcal{H}_1^*$, $\mathcal{H}_2^*$ sont des faisceaux, les $\mathcal{H}_1$- et $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques forment des faisceaux et on peut parler des faisceaux identiques).

Démonstration. — On désigne par $\mathcal{L}_1^*(U)$ [resp. $\mathcal{L}_2^*(U)$] le cône des fonctions $\mathcal{H}_1$-hyperharmoniques [resp. $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques] dans U. On montrera que $\mathcal{L}_j^*(U) = \mathcal{H}_j^*(U)$, $j = 1, 2$.

Grâce au lemme 1.22 et à la proposition 1.11, il est facile de voir que

$$\mathcal{L}_j^*(\mathrm{U}) \subset \mathcal{H}_j^*(\mathrm{U}) \quad (j = 1\,, 2)\,.$$

Il nous reste à démontrer les inclusions dans l'autre sens.

Soit une application $\mathcal{B}$ qui à chaque $x \in \Omega$ fait correspondre un système fondamental $\mathcal{B}(x)$ de voisinages $\mathcal{H}$-réguliers de x ; d'où (lemme 1.22) $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamental de voisinages $\mathcal{H}_1$- et $\mathcal{H}_2$-réguliers.

Considérons maintenant $v_1 \in \mathcal{H}_1^*(\mathrm{U}) = {}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_1^*(\mathrm{U})$ (remarque 1.20), ω un $\mathcal{H}_1$-régulier et $f_1 \leqslant v_1$ sur $\partial\omega$ avec $f_1 \in \mathrm{C}(\partial\omega)$; alors $v_1 - h_1$, où h_1 est la solution du problème de Dirichlet (par rapport à $\mathcal{H}_1$), appartient à ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_1^*(\omega)$; donc, grâce au principe du minimum pour les fonctions de ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_1^*(\mathrm{U})$, $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$, on aura : $v_1 \geqslant h_1$ dans ω et par conséquent $v_1 \in \mathcal{L}_1^*(\mathrm{U})$. D'où le résultat. [Même raisonnement dans le cas d'un $v_2 \in \mathcal{H}_2^*(\mathrm{U})$].

COROLLAIRE 1.24. – *On pose* $\mathcal{L}_j(\mathrm{U}) = \mathcal{L}_j^*(\mathrm{U}) \cap [-\mathcal{L}_j^*(\mathrm{U})]$. *Alors* $\mathcal{L}_j(\mathrm{U}) = \mathcal{H}_j(\mathrm{U})$, $\forall\, \mathrm{U} \in \mathcal{U}$, *et on appelle* $\mathcal{H}_j$*-harmoniques dans* U *les éléments de* $\mathcal{H}_j(\mathrm{U})$, $j = 1\,, 2$.

PROPOSITION 1.25. – 1) *Si* ω *est* $\mathcal{H}_1$*-régulier* [*resp.* $\mathcal{H}_2$*-régulier*], *alors, pour tout* $x \in \omega$, $\mathrm{T}\mu_x^\omega \neq \phi$ [*resp.* $\mathrm{T}\lambda_x^\omega \neq \phi$] (T *désignant le support*).

2) *Si* ω *est* $\mathcal{H}$*-régulier, alors, pour tout* x *d'un ouvert dense de* ω, $\mathrm{T}\nu_x^\omega \neq \phi$.

Démonstration. – 1) Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_c$ tel que $\omega \subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$; grâce à l'axiome III b) et 1.24, on a le résultat.

2) Considérons un couple $(0\,, f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ avec $f > 0$; on lui associe un seul $(h_1\,, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec

$$h_1(x) = \int f d\nu_x^\omega \geqslant 0 \quad , \quad h_2(x) = \int f d\lambda_x^\omega > 0\,.$$

Il n'y a aucun ouvert de ω où $h_1(x) = 0$; sinon, la compatibilité va entraîner aussi $h_2(x) = 0$ dans le même ouvert, ce qui contredira le fait que $h_2(x) > 0$, $\forall\, x \in \omega$. De plus, l'ensemble

$$\{x \in \omega : h_1(x) > 0\} \in \mathcal{U}_c\,.$$

PROPOSITION 1.26. – *Considérons les ω ouverts $\mathcal{H}$-réguliers contenant un point $x \in \Omega$ (ordonnés par inclusion) et soit $\mathfrak{F}_x$ le filtre des sections. Alors*

1) $\int d\mu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 1$, $\mu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} \epsilon_x$ *vaguement.*

2) $\int d\lambda_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 1$, $\lambda_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} \epsilon_x$ *vaguement.*

3) $\int d\nu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 0$, $\nu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 0$ *vaguement.*

Démonstration. – Grâce à l'axiome III b), 1) et 2) se démontrent facilement (voir [2c], p. 47 ou [6c], p. 64). Remarquons que 1) [resp. 2)] reste vraie si l'on remplace les ω $\mathcal{H}$-réguliers par des $\mathcal{H}_1$-réguliers [resp. $\mathcal{H}_2$-réguliers] (voir 1.22 et 1.24).

3) Soit $U \in \mathcal{U}_c$ tel que $x \in U$; grâce à l'axiome III b), il existe $h_2 \in \mathcal{H}_2(U)$, $h_2 > 0$ dans U ; ensuite, selon 1.19. 2), il existe un voisinage $(\in \mathcal{U})$ $U'_x \subset U$ et $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(U'_x)$ avec $u_2 = h_2$ dans U'_x, donc $u_2 > 0$ dans U'_x. Soit $0 < \epsilon < u_2(x)$; alors pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \{y \in U'_x : |u_2(y) - u_2(x)| < \epsilon\}$ on aura :

$$0 \leqslant (u_2(x) - \epsilon) \int d\nu_x^\omega \leqslant \int u_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant (u_2(x) + \epsilon) \int d\nu_x^\omega .$$

D'autre part,

$$\int u_2 \, d\nu_x^\omega = u_1(x) - \int u_1 \, d\mu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 0 \text{ à cause de 1) ;}$$

par conséquent, $\int d\nu_x^\omega \xrightarrow[\mathfrak{F}_x]{} 0$ (la convergence vague en découle).

PROPOSITION 1.27. – *Si* $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)$, $U \in \mathcal{U}$, *et* $v_1 = 0$ *dans* $U' \subset U$, *alors* $v_2 \leqslant 0$ *dans* $U'(\in \mathcal{U})$.

En particulier, si, de plus, $v_2 \geqslant 0$ dans U', alors $v_2 = 0$ dans U' [c'est-à-dire, c'est un couple compatible].

Démonstration. – Sinon, soit $x_0 \in U'$ où $v_2(x_0) > 0$. Alors, grâce à la semi-continuité inférieure, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0} \subset U'$ où $v_2 > 0$ et pour tout voisinage (de x_0) $\mathcal{H}$-régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset \mathcal{V}_{x_0}$ on aura :

$v_1(x) \geqslant \int v_1\, d\mu_x^\omega + \int v_2\, d\nu_x^\omega$ d'où $\int v_2\, d\nu_x^\omega \leqslant 0$, $\forall\, x \in \omega$. Mais, grâce à 1.25. 2), il existe $y \in \omega$ tel que $\mathrm{T}\nu_y^\omega \neq \phi$; par conséquent,

$$\int v_2\, d\nu_y^\omega > 0 \quad \text{car} \quad v_2 > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega .$$

Contradiction !

Le cas particulier découle immédiatement.

AXIOME IV. – a) *Pour toute suite croissante* (h_1^n) *de fonctions* $\mathcal{H}_1$*-harmoniques dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *on a :* $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}} h_1^n(x) < +\infty$ *sur un ensemble dense de* $\mathrm{U} \Rightarrow \sup\limits_n h_1^n \in \mathcal{H}_1(\mathrm{U})$.

b) *Pour toute suite croissante* (h_2^n) *de fonctions* $\mathcal{H}_2$*-harmoniques dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *on a :* $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}} h_2^n(x) < +\infty$ *sur un ensemble dense de* $\mathrm{U} \Rightarrow \sup\limits_n h_2^n \in \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$.

DEFINITION 1.28. – *On dit que* $(\Omega, \mathcal{H})$ *est un espace biharmonique si les axiomes* I, II, III, IV *ci-dessus sont satisfaits.*

THEOREME 1.29. – *Les* $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ *définissent deux espaces harmoniques (de H. Bauer).*

Démonstration. – D'abord $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont des faisceaux (sur Ω) de sous-espaces vectoriels de fonctions finies continues (voir corollaires 1.12.1) et 1.19.1)). Ensuite, grâce à l'axiome II et au lemme 1.22, on a une base d'ouverts $\mathcal{H}_1$-réguliers [et $\mathcal{H}_2$-réguliers]. Enfin, de nos axiomes III et IV découlent immédiatement les axiomes III et IV correspondants.

THEOREME 1.30. – *Soit une suite croissante de couples biharmoniques* (h_1^n, h_2^n) *dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *(n indice* $\in \mathrm{N}$) *et* (h_1, h_2) *son enveloppe supérieure. Si* $h_1(x) < +\infty$ *sur un ensemble dense de* U *(d'où* $h_2(x) < +\infty$ *sur un ensemble dense de* U*)*(7), *alors* (h_1, h_2) *est biharmonique dans* U.

---

(7) Sinon, grâce à l'égalité 1) de la démonstration et à 1.25.2), on aboutit à une contradiction.

Démonstration. – $h_2^n \in \mathcal{K}_2(\mathrm{U}) \subset \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$ (corollaire 1.12.2)) ; on aura alors, grâce à l'axiome IV b), que $h_2 \in \mathcal{H}_2(\mathrm{U})$. Soit ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$. Comme $(h_1^n, h_2^n) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ on a, grâce à 1.6, pour tout $x \in \omega$:

$$h_1^n(x) = \int h_1^n \, d\mu_x^\omega + \int h_2^n \, d\nu_x^\omega \,,$$

$$h_2^n(x) = \int h_2^n \, d\lambda_x^\omega \;;$$

d'où :

$$1) \qquad h_1(x) = \int h_1 \, d\mu_x^\omega + \int h_2 \, d\nu_x^\omega \,,$$

$$2) \qquad h_2(x) = \int h_2 \, d\lambda_x^\omega \,.$$

h_2 étant finie continue dans U, $\int h_2 \, d\nu_x^\omega$ est finie continue et bornée dans ω. En effet, au couple $(0, h_2)$ sur $\partial\omega$, correspond $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ où $u_1(x) = \int h_2 d\nu_x^\omega$, $u_2(x) = \int h_2 d\lambda_x^\omega$; par ailleurs, h_2 est bornée sur $\bar{\omega}$ et $\|\nu_x^\omega\| \leqslant \mathrm{M}$, $\forall x \in \omega$, où M est une constante (1.5.4)).

Ensuite, h_1 est s.c.i. et $> -\infty$ dans U.

On aura alors, grâce à 1) et l'hypothèse, que $\int h_1 \, d\mu_x^\omega$ est finie sur un ensemble dense de ω.

Comme $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ est un espace harmonique, $\int h_1 \, d\mu_x^\omega$ est $\mathcal{H}_1$-harmonique dans ω, donc finie continue dans ω ([2c], 1.1.8) ; alors, à cause de 1), h_1 est finie continue dans ω [et ceci est vrai dans tout ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$] ce qui implique $h_1 \in \mathrm{C}(\mathrm{U})$ (axiome II).

Alors le couple $(h_1, h_2) \in \mathrm{C}(\mathrm{U}) \times \mathrm{C}(\mathrm{U})$ et vérifie 1) et 2) pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$. Par conséquent, d'après 1.6,

$$(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U}) \,.$$

[Notons que, en prenant le théorème 1.30 comme axiome de convergence (plus faible), une grande partie de nos résultats – ceux qui lui font appel pour leur démonstration – restent encore vrais].

LEMME 1.31. – *Soit* S *un ensemble* ($\neq \phi$) *filtrant croissant de couples biharmoniques dans un* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *et* $(h_1, h_2) = \sup \mathrm{S}$.

Si $h_1(x) < +\infty$ *sur un ensemble dense de* U, *alors* (h_1, h_2) *est biharmonique dans* U.

Démonstration. – D'après un lemme de Choquet ([6c], p. 3), il existe un ensemble dénombrable $S_0 \subset S$ tel que pour tout couple (φ, ψ) de fonctions s.c.s. dans U, $(\varphi, \psi) \geqslant \sup S_0 \Rightarrow (\varphi, \psi) \geqslant \sup S$.

Par ailleurs, comme S est filtrant croissant, on peut prendre comme S_0 une suite croissante (ordre produit toujours).

En effet, considérons $F = \{f : (f, g) \in S\}$,

$$G = \{g : (f, g) \in S\}.$$

D'après le lemme de Choquet, il existe $F_0 \subset F$ et $G_0 \subset G$:

$$F_0 = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, : (f_i, g_i) \in S\},$$

$$G_0 = \{g'_1, g'_2, g'_3, \ldots, : (f'_i, g'_i) \in S\},$$

tels que si φ est s.c.s. avec $\varphi \geqslant \sup F_0$ on a $\varphi \geqslant \sup F$ et si ψ est s.c.s. avec $\psi \geqslant \sup G_0$ alors $\psi \geqslant \sup G$.

Prenons la suite : $D_0 = ((f_1, g_1), (f'_1, g'_1), (f_2, g_2), (f'_2, g'_2), \ldots)$ et écrivons pour simplifier, $D_0 = (d_i)_{i \in N}$.

Soit maintenant un couple (φ, ψ) de fonctions s.c.s. tel que

$$(\varphi, \psi) \geqslant \sup D_0 \ ; \text{alors} \begin{cases} \varphi \geqslant \sup F_0 \\ \psi \geqslant \sup G_0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} \varphi \geqslant \sup F \\ \psi \geqslant \sup G \end{cases} \text{donc } (\varphi, \psi) \geqslant \sup S.$$

On construira maintenant une suite croissante S_0 telle que si $(\varphi, \psi) \geqslant \sup S_0$, on a $(\varphi, \psi) \geqslant \sup S$.

Soit alors $a_1 = d_1$; comme S est filtrant croissant il existe un élément de S, noté a_2, tel que $a_2 \geqslant \sup (a_1, d_2)$; pour la même raison il existe $a_3 \in S$ tel que $a_3 \geqslant \sup (a_2, d_3)$ et ainsi de suite.

La suite $S_0 = (a_i)_{i \in N}$ est la suite désirée, car, par construction, elle est croissante et $a_i \geqslant d_i$ pour tout $i \in N$; on aura donc $\sup S_0 \geqslant \sup D_0$ et ensuite si $(\varphi, \psi) \geqslant \sup S_0$ alors $(\varphi, \psi) \geqslant \sup D_0$ et, grâce à ce qui précède, $(\varphi, \psi) \geqslant \sup S$.

Grâce au théorème 1.30, $\sup S_0 = (u_1, u_2)$ est biharmonique dans U. Maintenant, prenons $(\varphi, \psi) = (u_1, u_2)$. On aura alors

$(u_1, u_2) \geqslant \sup S = (h_1, h_2)$; d'autre part, $S_0 \subset S \Rightarrow \sup S_0 \leqslant \sup S$. Par conséquent,

$$(h_1, h_2) = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}(U) .$$

LEMME 1.32. — *Soit ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier et (f_1, f_2) un couple de fonctions s.c.i. bornées sur $\partial\omega$. Alors, le couple*

$$(h_1(x), h_2(x)) = \left(\int f_1 \, d\mu_x^\omega + \int f_2 dv_x^\omega , \int f_2 d\lambda_x^\omega\right)$$

est biharmonique dans ω et borné [c'est-à-dire, h_1, h_2 sont bornées dans ω].

Démonstration. — Par hypothèse f_j $(j = 1, 2)$ sont bornées sur $\partial\omega$; alors, grâce à la proposition 1.5.(4), (h_1, h_2) est borné dans ω. Pour $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_i(\partial\omega)$, il existe une suite croissante

$$(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega) \quad \text{avec} \quad f_j = \sup_n \varphi_j^n \quad (j = 1, 2) .$$

Par conséquent,

$$\sup_n \left[\int \varphi_1^n \, d\mu_x^\omega + \int \varphi_2^n \, dv_x^\omega\right] = \sup_n \int \varphi_1^n \, d\mu_x^\omega + \sup_n \int \varphi_2^n \, dv_x^\omega =$$

$$= \int f_1 \, d\mu_x^\omega + \int f_2 \, dv_x^\omega = h_1(x) .$$

$$\sup_n \int \varphi_2^n \, d\lambda_x^\omega = \int f_2 \, d\lambda_x^\omega = h_2(x) .$$

Alors, comme (h_1, h_2) est borné dans ω, il s'ensuit, grâce à 1.30, que (h_1, h_2) est biharmonique dans ω.

THEOREME 1.33 (Formes équivalentes de 1.30). — *Soit $\mathcal{A}$ une base d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers de Ω. Alors, avec les axiomes* I *et* II, *on peut montrer que* 1.30 *est équivalent à :*

1) *Pour tout $\omega \in \mathcal{A}$ et tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, si*

$$h_1(x) = \int^* f_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* f_2 \, dv_x^\omega$$

est définie pour tout $x \in \omega$ et finie sur un ensemble dense de ω, alors (h_1, h_2), où $h_2(x) = \int^* f_2 \, d\lambda_x^\omega$, est biharmonique dans ω.

2) *Pour tout* $\omega \in \mathcal{O}\!\!\mathcal{L}$ *et tout* $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$ *tel que, pour tout* $x \in \omega$, $\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega$, $\int_* f_1 d\mu_x^\omega + \int_* f_2 d\nu_x^\omega$ *sont définies, si* f_1 *est* μ_x^ω*-intégrable et* f_2 *est* ν_x^ω*-intégrable pour tout* x *d'un ensemble dense de* ω, *alors* f_1 *est* μ_x^ω*-intégrable et* f_2 *est* ν_x^ω *et* λ_x^ω*-intégrable pour tout* $x \in \omega$ *et le couple* $\left(\int f_1 d\mu_x^\omega + \int f_2 d\nu_x^\omega, \int f_2 d\lambda_x^\omega\right)$ *est biharmonique dans* ω.

Démonstration. – Des raisonnements analogues à ceux de ([2c], p. 14-16) appliqués au couple (f_1, f_2) nous donnent ces équivalences en utilisant les lemmes 1.32 et 1.31.

COROLLAIRE 1.34. – *Soit* ω $\mathcal{H}$*-régulier et* (f_1, f_2) *un couple de fonctions numériques bornées inférieurement sur* $\partial\omega$. *Alors :*

$(v_1(x), v_2(x)) = \left(\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega, \int^* f_2 d\lambda_x^\omega\right)$ *est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de couples biharmoniques, bornés dans* ω *donc* $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\omega)$.

Démonstration. – On pose $f_j^n = \inf(n, f_j)$, $j = 1, 2$, et $n \in \mathrm{N}$; on a ainsi une suite croissante de couples (f_1^n, f_2^n) bornés et on passe à l'enveloppe supérieure dans les intégrales. D'autre part, selon 1.33, $\left(\int^* f_1^n d\mu_x^\omega + \int^* f_2^n d\nu_x^\omega, \int^* f_2^n d\lambda_x^\omega\right) = (h_1^n(x), h_2^n(x))$ sont biharmoniques bornés dans ω.

D'après 1.10.4), $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\omega)$ car $(h_1^n, h_2^n) \uparrow (v_1, v_2)$.

PARTIE II

ESPACES BIHARMONIQUES ELLIPTIQUES

DEFINITION 2.1. – *Un espace biharmonique* $(\Omega, \mathcal{H})$ *est dit elliptique en* $x \in \Omega$ *si, pour un système fondamental* $\mathfrak{A}(x)$ *de voisinages* $\mathcal{H}$*-réguliers de* x*, on a :*

$$T\mu_x^\omega = \partial\omega \ , \ T\lambda_x^\omega = \partial\omega \ , \ T\nu_x^\omega = \partial\omega \ (\forall\, \omega \in \mathfrak{A}(x)) \ .$$

Si cette propriété est vraie pour tout $x \in \Omega$, l'espace $(\Omega, \mathcal{H})$ est dit *elliptique*. (T désigne le support).

Pour la définition de l'ellipticité d'un espace harmonique voir [2c] p. 37. Remarquons que, comme les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers sont $\mathcal{H}_1$- et $\mathcal{H}_2$-réguliers (1.22), les espaces $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont harmoniques elliptiques lorsque $(\Omega, \mathcal{H})$ est elliptique.

PROPOSITION 2.2. – *Soient* $(\Omega, \mathcal{H})$ *un espace biharmonique elliptique,* Ω *connexe et* $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$.

Alors, on aura l'une des trois situations ci-après :

1) $u_1 > 0 \quad , \quad u_2 > 0$;

2) $u_1 > 0 \quad , \quad u_2 = 0$;

3) $u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 0$.

Démonstration. – A cause de l'hypothèse, $(u_1, 0) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$ c'est-à-dire $u_1 \in {}_+\mathcal{H}_1^*(\Omega)$. Mais, grâce à 1.5.4 [2c]([8]), on a : $u_1 > 0$ ou $u_1 = 0$ et $u_2 > 0$ ou $u_2 = 0$ dans Ω. Des quatre possibilités qu'on peut avoir, $u_1 = 0$ et $u_2 > 0$ est à rejeter, car, (u_1, u_2) étant compatible, $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0$ dans Ω.

Maintenant, rappelons que, $(\Omega, \mathcal{H}_j)$ $(j = 1, 2)$ étant des espaces harmoniques (1.29), on aura que Ω est localement connexe (1.1.10 [2c]) et que les composantes connexes d'un ensemble $\mathcal{H}_j$-régulier sont des ensembles $\mathcal{H}_j$-réguliers, $j = 1, 2$, (1.3.4 [2c]).

([8]) Soit u une fonction hyperharmonique $\geqslant 0$ sur un espace harmonique elliptique et connexe Ω. Si u s'annule en un point, alors $u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

De même, avec un raisonnement analogue adapté à notre cadre (voir aussi la définition 1.4), on aura dans un espace biharmonique le :

LEMME 2.3. – *Les composantes connexes d'un ensemble $\mathcal{H}$-régulier sont des ensembles $\mathcal{H}$-réguliers.*

Remarquons que, grâce à l'axiome II et au lemme précédent, on aura une base de Ω composée de domaines $\mathcal{H}$-réguliers.

LEMME 2.4. – *Si $(\Omega , \mathcal{H})$ est un espace biharmonique elliptique et ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier, alors, pour tout $x \in \omega$, $T\nu_x^\omega \neq \phi$.*

Démonstration. – Soient $(0 , f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ avec $f > 0$ et

$$(u_1(x) \ , \ u_2(x)) = \left(\int f d\nu_x^\omega \ , \ \int f d\lambda_x^\omega\right)$$

le couple biharmonique correspondant. Considérons un point $x_0 \in \omega$ et δ la composante connexe de ω contenant x_0 ; comme $u_2 > 0$ dans δ (1.25), alors, grâce à la proposition 2.2, on aura aussi $u_1 > 0$ dans δ ; d'où $T\nu_{x_0}^\omega \neq \phi$.

PROPOSITION 2.5. – *Si $(\Omega , \mathcal{H}_j)$ sont elliptiques $(j = 1 , 2)$, alors, pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier connexe et tout $x \in \omega$, on aura $T\nu_x^\omega = \partial\omega$.*

Démonstration. – Sinon, soit $x_0 \in \omega$ tel que $T\nu_{x_0}^\omega \neq \partial\omega$; comme $T\nu_{x_0}^\omega \subset \partial\omega$, on considère un ouvert (non vide) $\beta \subset \overline{\beta} \subset \alpha = \partial\omega \setminus T\nu_{x_0}^\omega$ et $f \in C(\partial\omega)$ égale à 1 sur $\overline{\beta}$ et à 0 sur $T\nu_{x_0}^\omega$. Alors au couple $(0 , f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ correspond le couple biharmonique

$$(u_1(x) \ , \ u_2(x)) = \left(\int f d\nu_x^\omega \ , \ \int f d\lambda_x^\omega\right) \geqslant (0 , 0) \ , \ (x \in \omega) \ .$$

Mais $T\lambda_x^\omega = \partial\omega$ (1.5.3 [2c])([9]) ; donc $u_2 > 0$ car $u_2 \in \mathcal{H}_2(\omega)$. D'autre part, $u_1(x_0) = 0$ et, comme $u_1 \in {}_+\mathcal{H}_1^*(\omega)$, alors $u_1 = 0$ dans ω (1.5.4 [2c]) ce qui entraînera, à cause de la compatibilité des couples biharmoniques, $u_2 = 0$ dans ω. D'où contradiction et le résultat.

([9]) Si X est un espace harmonique elliptique, alors, pour tout domaine régulier V et tout $x \in V$, on a $T\mu_x^V = \partial V$.

THEOREME 2.6. – *Si les espaces harmoniques* $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ *et* $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ *sont elliptiques, il en sera de même pour l'espace biharmonique* $(\Omega, \mathcal{H})$ *et réciproquement.*

Démonstration. – Soit $x \in \Omega$ et $\mathcal{A}(x)$ un système fondamental de voisinages (de x) $\mathcal{H}$-réguliers connexes, donc aussi $\mathcal{H}_1$- et $\mathcal{H}_2$-réguliers (1.22). Mais, grâce à 1.5.3 [2c](9), $T\mu_x^\omega = \partial\omega$, $T\lambda_x^\omega = \partial\omega$ pour tout $\omega \in \mathcal{A}(x)$; par ailleurs (2.5), $T\nu_x^\omega = \partial\omega$.

Réciproquement : par hypothèse, pour un système fondamental de voisinages ω $\mathcal{H}$-réguliers (de x) [donc $\mathcal{H}_1$-réguliers et $\mathcal{H}_2$-réguliers] on aura, $T\mu_x^\omega = \partial\omega$, $T\lambda_x^\omega = \partial\omega$, $T\nu_x^\omega = \partial\omega$; d'où le résultat.

Remarque 2.7. – On pourra donc formuler la proposition 2.5 comme suit : Si $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique elliptique, alors, pour tout domaine ω $\mathcal{H}$-régulier et tout $x \in \omega$, on a $T\nu_x^\omega = \partial\omega$.

On sait ([2c], p. 40) que, si un espace harmonique est elliptique, l'axiome de convergence de M. Brelot est vérifié.

La réciproque est aussi vraie – si Ω est localement connexe, localement compact, à base dénombrable – en remplaçant l'axiome de convergence de Bauer par l'axiome de convergence de Brelot.

En remplaçant les a) et b) de notre axiome (de convergence) IV par les axiomes de convergence de M. Brelot respectifs $a)_B$, $b)_B$, on aura :

THEOREME 2.8. – *Si* $(\Omega, \mathcal{H})$ *est un espace biharmonique elliptique, alors l'axiome IV* $a)_B$, $b)_B$ *est vérifié.*

Inversement : l'espace $(\Omega, \mathcal{H})$ *– où* Ω *est localement connexe, localement compact, à base dénombrable – muni des axiomes I, II, III et IV* $a)_B$, $b)_B$ *est biharmonique elliptique.*

Démonstration. – Les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ étant elliptiques (2.6), on a le résultat d'après ce qui précède.

Inversement : d'abord, notre axiome IV a), b) est vérifié. En effet, on peut supposer l'ouvert considéré U connexe (Ω est, par hypothèse, localement connexe) et on achève grâce à IV $a)_B$, $b)_B$. Par conséquent, $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique. De plus, il est elliptique car IV $a)_B$, $b)_B$ implique l'ellipticité des $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$; d'où l'ellipticité de $(\Omega, \mathcal{H})$ (théorème 2.6).

THEOREME 2.9. – *Soient* $(\Omega, \mathcal{H})$ *un espace biharmonique elliptique et une suite croissante de couples biharmoniques* (h_1^n, h_2^n) *dans un domaine* $\delta \subset \Omega$ *avec enveloppe supérieure* (h_1, h_2). *Alors, on aura l'une des trois possibilités :*

1) $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\delta)$

2) $(h_1, h_2) \equiv (+\infty, +\infty)$

3) $h_1 \equiv +\infty$, $h_2 \in \mathcal{H}_2(\delta)$.

Démonstration. – D'abord, on se ramène au cas où $(h_1^n, h_2^n) \geqslant (0,0)$. Supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in \delta$ tels que $h_1(x_1) < +\infty$, $h_2(x_2) < +\infty$. D'après le théorème 2.6, les espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ sont elliptiques. On fait le même raisonnement que dans le théorème 1.30 en tenant compte du fait que $h_2 \in \mathcal{H}_2(\delta)$, h_1 est $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans δ et que $\int h_1 d\mu_x^\omega \in \mathcal{H}_1(\omega)$ pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \delta$ ([6c] p. 70-71 et th. 1) ; d'où 1).

S'il existe $x_1, x_2 \in \delta$ avec $h_1(x_1) = +\infty$, $h_2(x_2) = +\infty$, alors $(h_1, h_2) \equiv (+\infty, +\infty)$. En effet, comme $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ est un espace harmonique elliptique, on a $h_2 \equiv +\infty$ dans δ et, grâce à

$$h_1(x) = \int h_1 d\mu_x^\omega + \int h_2 d\nu_x^\omega$$

($\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \delta$, $x \in \omega$), on a $h_1 \equiv +\infty$ dans δ (2.7). D'où 2).

S'il existe $x_1, x_2 \in \delta$ avec $h_1(x_1) = +\infty$, $h_2(x_2) < +\infty$, alors $h_1 \equiv +\infty$ dans δ et $h_2 \in \mathcal{H}_2(\delta)$. En effet, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ étant harmonique elliptique, $h_2 \in \mathcal{H}_2(\delta)$; d'autre part, pour un domaine ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \delta$, $\omega \ni x_1$, on a :

$$h_1(x) = \int h_1 d\mu_x^\omega + \int h_2 d\nu_x^\omega, (x \in \omega) ;$$

grâce à ([6c], th. 1), $\int h_1 d\mu_x^\omega = +\infty$, $\forall x \in \omega$, et,

comme $h_1 \in {}_+\mathcal{H}_1^*(\delta)$, on a $h_1 \equiv +\infty$ dans δ ([6c], th. 2).

Il nous reste une dernière éventualité : il existe $x_1, x_2 \in \delta$ avec $h_1(x_1) < +\infty$, $h_2(x_2) = +\infty$.

D'abord, comme $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ est un espace harmonique elliptique,

$h_2 \equiv +\infty$ dans δ ; alors pour ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \delta$, $\omega \ni x_1$, on aura, grâce à

$$h_1(x) = \int h_1 d\mu_x^\omega + \int h_2 d\nu_x^\omega ,$$

$h_1(x_1) = +\infty$. Donc cette situation n'est pas à retenir.

Remarque 2.10. – Dans le théorème précédent, il suffit d'avoir, pour un $x \in \delta$, $h_1(x) < +\infty$ [resp. $h_2(x) = +\infty$] pour conclure que $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\delta)$ [resp. $(h_1, h_2) \equiv (\infty, \infty)$].

PROPOSITION 2.11. – *Soient* $(\Omega, \mathcal{H})$ *un espace biharmonique elliptique,* ω *un domaine* $\mathcal{H}$*-régulier et* $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$ *tel que, pour tout* $x \in \omega$, $\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega$ et $\int_* f_1 d\mu_x^\omega + \int_* f_2 d\nu_x^\omega$ *sont définies.*

Si f_1 *est* $\mu_{x_0}^\omega$*-intégrable et* f_2 *est* $\nu_{x_0}^\omega$*-intégrable, alors* f_1 *est* μ_x^ω*-intégrable et* f_2 *est* ν_x^ω*- et* λ_x^ω*-intégrable pour tout* $x \in \omega$ *; de plus, dans ce cas, le couple* $\left(\int f_1 d\mu_x^\omega + \int f_2 d\nu_x^\omega, \int f_2 d\lambda_x^\omega \right)$ *est biharmonique dans* ω. En particulier :

COROLLAIRE 2.12. – *Si* f_2 *est* $\nu_{x_0}^\omega$*-intégrable, alors elle est aussi* $\lambda_{x_0}^\omega$*-intégrable* $(x_0 \in \omega)$.

Démonstration. – C'est le même raisonnement que dans 1.33 en tenant compte du théorème et remarque précédents ainsi que de la proposition 2.2.

En ce qui concerne le corollaire, on applique la proposition 2.11 au couple $(0, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$.

THEOREME 2.13 (Inégalités de Harnack). – *Soient* $(\Omega, \mathcal{H})$ *un espace biharmonique elliptique, un domaine* $\omega \subset \Omega$, K *compact* $\subset \omega$, $x_0 \in \omega$. *Alors, pour tout* $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$, *on a :*

1) $\sup\limits_{x \in K} u_1(x) \leqslant \alpha[u_1(x_0) + u_2(x_0)]$,

2) $\sup\limits_{x \in K} u_2(x) \leqslant \beta\, u_2(x_0)$,

où $\alpha = \alpha(K, x_0)$, $\beta = \beta(K, x_0)$ *sont des constantes.*

Démonstration. – Si 1) n'était pas vraie, on formerait une suite $(u_1^n , u_2^n) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$ telle que $\sup\limits_{K} \; u_1^n > n^3 (u_1^n(x_0) + u_2^n(x_0))$ où $u_1^n(x_0) > 0$ grâce à la proposition 2.2. Alors le couple

$$(h_1(x) , h_2(x)) = \left(\sum_n \frac{u_1^n(x)}{n^2 (u_1^n(x_0) + u_2^n(x_0))} , \sum_n \frac{u_2^n(x)}{n^2 (u_1^n(x_0) + u_2^n(x_0))}\right)$$

serait biharmonique dans ω car $h_1(x_0)$, $h_2(x_0)$ sont finies (th. 2.9) ; donc $\dfrac{u_1^n(x)}{n^2 (u_1^n(x_0) + u_2^n(x_0))}$ serait bornée sur K indépendamment de n, ce qui contredit

$$\sup_{x \in K} \frac{u_1^n(x)}{n^2 (u_1^n(x_0) + u_2^n(x_0))} > n \ .$$

L'inégalité 2) est vérifiée car $u_2 \in {}_+\mathcal{H}_2(\omega)$ et $(\Omega , \mathcal{H}_2)$ est un espace harmonique elliptique ([2c], p. 40).

[Notre raisonnement est inspiré du cas analogue dans un espace harmonique ; voir, par exemple, p. 15 de [7]].

PARTIE III

COUPLES A PEU PRES $\mathcal{H}$-HYPERHARMONIQUES

DEFINITION 3.1. – *Soient* $\mathfrak{A}$ *une base d'ouverts* $\mathcal{H}$*-réguliers de* Ω, $U \in \mathfrak{U}$ *et* $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}(U)$.

On dit que le couple (v_1, v_2) *est* $\mathfrak{A}$*-à peu près* $\mathcal{H}$*-hyperharmonique dans* U *si :*

1) v_1, v_2 *sont localement bornées inférieurement dans* U.

2) $v_1(x) \geqslant \int^* v_1 d\mu_x^\omega + \int^* v_2 d\nu_x^\omega, \; v_2(x) \geqslant \int^* v_2 d\lambda_x^\omega$

pour tout $\omega \in \mathfrak{A}$, $\bar{\omega} \subset U$ *et tout* $x \in \omega$.

Si $\mathfrak{A}$ est le système de tous les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers, (v_1, v_2) est dit *à peu près* $\mathcal{H}$*-hyperharmonique* dans U.

Il est évident que tout couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique est à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmonique. Réciproquement :

PROPOSITION 3.2. – *La régularisée inférieure* $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$[10] *d'un couple* (v_1, v_2) $\mathfrak{A}$*-à peu près* $\mathcal{H}$*-hyperharmonique dans* $U \in \mathfrak{U}$ *est un couple* $\mathcal{H}$*-hyperharmonique dans* U *et pour tout* $x \in U$:

$$\hat{v}_1(x) = \sup_{\substack{\omega \in \mathfrak{A} \\ x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U}} \left[\int^* v_1 d\mu_x^\omega + \int^* v_2 d\nu_x^\omega\right] = \lim_{\mathcal{F}_x} \left[\int^* v_1 d\mu_x^\omega + \int^* v_2 d\nu_x^\omega\right],$$

$$\hat{v}_2(x) = \sup_{\substack{\omega \in \mathfrak{A} \\ x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U}} \left[\int^* v_2 d\lambda_x^\omega\right] = \lim_{\mathcal{F}_x} \left[\int^* v_2 d\lambda_x^\omega\right],$$

$\mathcal{F}_x$ *étant le filtre des sections de la base de filtre des* $\omega \in \mathfrak{A}$, *contenant* x $(\bar{\omega} \subset U)$.

---

(10) $\hat{v}_j(x) = \liminf_{y \to x} v_j(y)$, $j = 1, 2$.

Démonstration. – Comme v_1, v_2 sont localement bornées inférieurement, alors $\hat{v}_1(x) > -\infty$, $\hat{v}_2(x) > -\infty$, $\forall x \in \mathrm{U}$.

A cause de $\hat{v}_1 \leqslant v_1$, $\hat{v}_2 \leqslant v_2$, 3.1 et 1.34, on voit que $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U et que

$$\hat{v}_1(x) \geqslant \sup_{\substack{\omega \in \mathfrak{A} \\ x \in \omega}} \left[\int^* v_1 d\mu_x^\omega + \int^* v_2 d\nu_x^\omega \right],$$

$$\hat{v}_2(x) \geqslant \sup_{\substack{\omega \in \mathfrak{A} \\ x \in \omega}} \int^* v_2 d\lambda_x^\omega \quad , \quad (\bar{\omega} \subset \mathrm{U}) .$$

Remarquons maintenant que si $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ et $x \in \alpha \subset \bar{\alpha} \subset \beta \subset \bar{\beta} \subset \mathrm{U}$ alors, en utilisant 1.34, on montre (de façon analogue au cas harmonique) que :

$$\int^* v_1 d\mu_x^\beta + \int^* v_2 d\nu_x^\beta \leqslant \int^* v_1 d\mu_x^\alpha + \int^* v_2 d\nu_x^\alpha$$

$$\int^* v_2 d\lambda_x^\beta \leqslant \int^* v_2 d\lambda_x^\alpha \ ;$$

d'où la vérité de notre affirmation.

On aura alors, grâce au théorème de la limite monotone, que la borne supérieure est égale à la limite suivant $\mathcal{F}_x$. Ensuite, comme $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ sont s.c.i., pour $\gamma_j (j = 1, 2)$ réels tels que $\hat{v}_j(x) > \gamma_j$ il existe un voisinage δ (de x) où $v_1 > \gamma_1$ et $v_2 > \gamma_2$. Alors, pour $\omega \in \mathfrak{A}$, $\bar{\omega} \subset \delta$, $\omega \ni x$,

$$\int^* v_1 d\mu_x^\omega + \int^* v_2 d\nu_x^\omega \geqslant \gamma_1 \int d\mu_x^\omega + \gamma_2 \int d\nu_x^\omega \ ,$$

$$\int^* v_2 d\lambda_x^\omega \geqslant \gamma_2 \int d\lambda_x^\omega \ .$$

Mais, (1.26), $\int d\mu_x^\omega \xrightarrow[\mathcal{F}_x]{} 1$, $\int d\lambda_x^\omega \xrightarrow[\mathcal{F}_x]{} 1$, $\int d\nu_x^\omega \xrightarrow[\mathcal{F}_x]{} 0$;

d'où le résultat.

Les propriétés suivantes sont aisément vérifiées (d'après les propriétés des intégrales supérieures) :

1) Si (v_1, v_2) est $\mathfrak{A}$-à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmonique, il en est de même pour $(\lambda v_1, \lambda v_2)$ où $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

2) Si (u_1, u_2), (v_1, v_2) sont deux couples $\mathcal{A}$-à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmoniques, il en est de même pour $(u_1, u_2) + (v_1, v_2)$.

3) Si $(v_1^n, v_2^n)_n$ est une suite croissante de couples $\mathcal{A}$-à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmoniques, alors $\left(\sup_n v_1^n , \sup_n v_2^n\right)$ l'est aussi ; (n indice $\in$ N).

4) Si $(v_1^i, v_2^i)_{i\in I}$ est une famille de couples $\mathcal{A}$-à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmoniques localement uniformément bornées inférieurement, alors

$$\left(\inf_i v_1^i \ , \ \inf_i v_2^i\right)$$

l'est aussi.

Pour les cas ci-dessus, on a des *propriétés* correspondantes concernant les régularisées inférieures (qu'on montre facilement en utilisant la proposition 3.2) :

1') $(\widehat{\lambda v_1}, \widehat{\lambda v_2}) = (\lambda \hat{v}_1, \lambda \hat{v}_2)$.

2') $\widehat{(u_1, u_2) + (v_1, v_2)} = \widehat{(u_1, u_2)} + \widehat{(v_1, v_2)}$

où $\widehat{(u_1, u_2)}$ désigne le couple $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$.

3') $\widehat{\left(\sup_n v_1^n \ , \ \sup_n v_2^n\right)} = \left(\sup_n \widehat{v_1^n} \ , \ \sup_n \widehat{v_2^n}\right)$.

4') $\widehat{\left(\inf_i v_1^i \ , \inf_i v_2^i\right)}$ est la plus grande minorante $\mathcal{H}$-hyperharmonique de la famille $(v_1^i, v_2^i)_{i\in I}$.

DEFINITION 3.3. – *Un ensemble* $E \subset \Omega$ *est dit* $\mathcal{H}_1$-, $\mathcal{H}_2$-, $\mathcal{H}$-*négligeable si pour tout* ω *ensemble* $\mathcal{H}_1$-, $\mathcal{H}_2$-, $\mathcal{H}$-*régulier et tout* $x \in \omega$, *on a respectivement :*

$$\mu_x^\omega(E) = 0 \ , \ \lambda_x^\omega(E) = 0 \ , \ \mu_x^\omega(E) = \lambda_x^\omega(E) = \nu_x^\omega(E) = 0 \ .$$

LEMME 3.4. – *Si* E *est* $\mathcal{H}_2$-*négligeable, alors* $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall\, \omega$ $\mathcal{H}$-*régulier,* $\forall\, x \in \omega$; *de plus, si* $E \subset \partial\omega$ (ω $\mathcal{H}$-*régulier*) *est tel que* $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall\, x \in \omega$, *alors* $\lambda_x^\omega(E) = 0$, $\forall\, x \in \omega$.

Démonstration. – On se ramène toujours à $E \subset \partial\omega$. Par hypothèse, $\lambda_x^\omega(E) = 0$ pour tout ω $\mathcal{H}_2$-régulier (donc pour tout ω $\mathcal{H}$-

régulier (1.22)) et tout $x \in \omega$. Soit le couple $(0, \chi_E)$(11) sur la frontière d'un ω $\mathcal{H}$-régulier. Considérons

$$u_1(x) = \int^* \chi_E d\nu_x^\omega \ , \ u_2(x) = \int^* \chi_E d\lambda_x^\omega = 0 \ ;$$

grâce à 1.33, $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega)$. D'autre part, comme $(0, \chi_E) \leqslant (0, 1)$ sur $\partial\omega$, on a : $0 \leqslant u_j \leqslant v_j$ dans ω $(j = 1, 2)$ avec

$$v_1(x) = \int d\nu_x^\omega \ , \ v_2(x) = \int d\lambda_x^\omega$$

[(v_1, v_2) est le couple biharmonique associé à $(0, 1)$]. Mais, selon 1.5.3), $\lim_{\omega \ni x \to z \in \partial\omega} v_1(x) = 0$ d'où $\lim_{\omega \ni x \to z \in \partial\omega} u_1(x) = 0$. Donc

$$\lim_{\omega \ni x \to z \in \partial\omega} u_j(x) = 0 \ ,$$

$j = 1, 2$, et, à cause de l'unicité, $u_1(x) = 0$, $\forall x \in \omega$. Réciproquement : $u_1(x) = 0$, $\forall x \in \omega$, implique, grâce à la compatibilité, $u_2(x) = 0$, $\forall x \in \omega$.

Une conséquence immédiate est le :

THEOREME 3.5. – *Soit* ω *$\mathcal{H}$-régulier et* $E \subset \partial\omega$. *Alors :*

$$\lambda_x^\omega(E) = 0, \quad \forall x \in \omega \Leftrightarrow \nu_x^\omega(E) = 0, \quad \forall x \in \omega.$$

Remarque 3.6. – Si $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique elliptique et ω un domaine $\mathcal{H}$-régulier, alors, on a :

$$\lambda_{x_0}^\omega(E) = 0 \Leftrightarrow \nu_{x_0}^\omega(E) = 0 \quad (x_0 \in \omega) \ .$$

En effet, dans $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ l'axiome de convergence de M. Brelot est vérifié (2.8). Donc $\lambda_{x_0}^\omega(E) = 0$ implique $\lambda_x^\omega(E) = 0$, $\forall x \in \omega$; ensuite, grâce à 3.5, on a aussi $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall x \in \omega$. Inversement, au couple $(0, \chi_E) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, on associe le couple biharmonique $(u_1(x), u_2(x)) = \left(\int^* \chi_E d\nu_x^\omega, \int^* \chi_E d\lambda_x^\omega\right)$ avec $u_1(x_0) = 0$. D'où, grâce à 2.2, $u_2(x) = 0$, $\forall x \in \omega$.

COROLLAIRE 3.7. – *Si* E *est à la fois* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$*-négligeable, alors il est aussi* $\mathcal{H}$*-négligeable.*

---

(11) χ_E désigne la fonction caractéristique de E.

Démonstration. – Par hypothèse, $\mu_x^\omega(\mathrm{E}) = 0$ pour tout ω ouvert $\mathcal{H}_1$-régulier, $\forall x \in \omega$ et $\lambda_x^\omega(\mathrm{E}) = 0$ pour tout ω ouvert $\mathcal{H}_2$-régulier, $\forall x \in \omega$; donc, pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier et tout $x \in \omega$ (1.22). On conclut grâce au lemme 3.4.

Remarquons que dans 3.7 on a l'équivalence si l'on considère la négligeabilité de E par rapport à une base d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers.

PROPOSITION 3.8. – *Si (v_1, v_2) et (u_1, u_2) sont des couples $\mathcal{A}$-à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmoniques, on a :*

$$v_j(x) \leqslant u_j(x) \quad \mathcal{H}_j\text{-p.p.} \quad (j = 1, 2) \Rightarrow \widehat{(v_1, v_2)} \leqslant \widehat{(u_1, u_2)} .$$

Démonstration. – En effet, $\mathrm{A} = \{x \in \Omega : v_1(x) > u_1(x)\}$ est $\mathcal{H}_1$-négligeable c'est-à-dire $\mu_x^\omega(\mathrm{A}) = 0$, $\forall \omega$ $\mathcal{H}_1$-régulier (donc $\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier (1.22)), $\forall x \in \omega$; de même, $\mathrm{B} = \{x \in \Omega : v_2(x) > u_2(x)\}$ est $\mathcal{H}_2$-négligeable, d'où (1.22) $\lambda_x^\omega(\mathrm{B}) = 0$, $\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$. Mais, d'après le lemme 3.4, $\nu_x^\omega(\mathrm{B}) = 0$, $\forall \omega$ $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$. D'où finalement, pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier et tout $x \in \omega$,

$$\int^* v_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* v_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant \int^* u_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* u_2 \, d\nu_x^\omega$$

$$\int^* v_2 \, d\lambda_x^\omega \leqslant \int^* u_2 \, d\lambda_x^\omega .$$

On achève la démonstration en appliquant la proposition 3.2.

Remarquons qu'il nous suffisait de supposer

$v_1(x) \leqslant u_1(x)$ μ_x^ω-p.p. pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$ et

$v_2(x) \leqslant u_2(x)$ λ_x^ω-p.p. pour tout ω $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$.

PROPOSITION 3.9. – *Si* $\mathrm{E} \subset \Omega$ *est $\mathcal{H}$-négligeable, alors* $\complement\mathrm{E}$ *est dense dans Ω.*

Démonstration. – Comme tout ω $\mathcal{H}$-régulier est $\mathcal{H}_j$-régulier (1.22), alors E est $\mathcal{H}_j$-négligeable pour tout ω $\mathcal{H}_j$-régulier d'une base (pour la topologie) de Ω $(j = 1, 2)$. On se ramène donc au cas harmonique et on sait ([2c], p. 49 ou [6c], p. 79-80) que notre affirmation est vraie.

PARTIE IV

$\mathcal{H}$-REDUITE ET $\mathcal{H}$-BALAYEE

DEFINITION 4.1. – *Soit* $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \in {}_+\mathcal{E}(\Omega)$ *et* $E \subset \Omega$. *On définit la* $\mathcal{H}$*-réduite de* Φ *comme suit :*

$$(\varphi_1, \varphi_2)^E = (\Phi_1^E, \Phi_2^E) = (\inf u_1, \inf u_2)$$

où $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$: $(u_1, u_2) \geqslant (\varphi_1, \varphi_2)$ *sur* E.

Comme on a déjà vu (propriété 4, p. 70), la $\mathcal{H}$-réduite est à peu près $\mathcal{H}$-hyperharmonique et sa régularisée inférieure

$$\widehat{(\varphi_1, \varphi_2)}^E = (\hat{\Phi}_1^E, \hat{\Phi}_2^E),$$

dite $\mathcal{H}$*-balayée*, est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω (3.2).

Si l'on remplace (φ_1, φ_2) par $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$, on aura :

$$(0, 0) \leqslant \widehat{(v_1, v_2)}^E \leqslant (v_1, v_2)^E \leqslant (v_1, v_2) \quad \text{dans } \Omega$$

$$\text{et} \quad (v_1, v_2)^E = (v_1, v_2) \quad \text{sur E} ;$$

de plus, si E est ouvert, on démontre, comme dans le cas d'un espace harmonique ([2c], p. 50-51), que

$$\widehat{(v_1, v_2)}^E = (v_1, v_2)^E .$$

PROPOSITION 4.2. – *Soient* $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ *et* ω $\mathcal{H}$*-régulier. Alors le couple* (w_1, w_2), *défini comme suit,*

$$w_1(x) = \begin{cases} \int v_1 d\mu_x^\omega + \int v_2 d\nu_x^\omega, & x \in \omega \\ v_1(x), & x \in \complement\omega \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \int v_2 d\lambda_x^\omega, & x \in \omega \\ v_2(x), & x \in \complement\omega \end{cases}$$

est $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω.

Si, de plus, $(v_1, v_2) \geqslant (0, 0)$, alors on aura :

$$(w_1 , w_2) = (v_1 , v_2)^{C\omega} = \widehat{(v_1 , v_2)}^{C\omega} .$$

Démonstration. – D'abord, $(w_1 , w_2) \leqslant (v_1 , v_2)$. D'après 1.34, $(w_1 , w_2)_{|\omega} \in \mathcal{H}^*(\omega)$. On peut maintenant appliquer la proposition 1.21 car $\liminf_{x \to z, x \in \omega} w_j(x) \geqslant v_j(z)$, $\forall z \in \partial\omega$, $j = 1 , 2$.

Soit maintenant $(v_1 , v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$. Comme $(w_1 , w_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$ et $(w_1 , w_2) = (v_1 , v_2)$ sur $C\,\omega$, on a : $(v_1 , v_2)^{C\omega} \leqslant (w_1 , w_2)$. Pour tout $(u_1 , u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$ avec $(u_1 , u_2) \geqslant (v_1 , v_2)$ sur $C\,\omega$,

$$(u_1 , u_2) \geqslant (w_1 , w_2) ,$$

d'où $(v_1 , v_2)^{C\omega} \geqslant (w_1 , w_2)$; par conséquent,

$$\widehat{(v_1 , v_2)}^{C\omega} \geqslant \widehat{(w_1 , w_2)} = (\hat{w}_1 , \hat{w}_2) = (w_1 , w_2) .$$

D'où finalement l'égalité cherchée.

Remarque 4.3. – On voit facilement que : $\Phi_2^E = {}^{\mathcal{H}_2}R^E_{\varphi_2}$, et, pour les couples $(\varphi_1 , 0) = \Phi$, $\Phi_1^E = {}^{\mathcal{H}_1}R^E_{\varphi_1}$ (Voir 1.23) ; [R désigne la réduite dans un espace harmonique].

PARTIE V

COUPLES $\mathcal{H}$-SURHARMONIQUES ET $\mathcal{H}$-POTENTIELS

DEFINITION 5.1. – *Un couple* $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}^*(\mathrm{U})$, *où* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, *est dit $\mathcal{H}$-surharmonique (dans* U*) si s_1 est finie sur un ensemble dense de* U. (D'où $s_2 < \infty$ sur un ensemble dense de U ; voir note (7)).

On note par $\mathcal{S}(\mathrm{U})$ l'ensemble des couples $\mathcal{H}$-surharmoniques dans U. Soit $\mathcal{B}$ la base de Ω formée de tous les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers (axiome II). D'après 1.22, $\mathcal{B}$ est formée d'ouverts $\mathcal{H}_j$-réguliers $(j = 1, 2)$.

PROPOSITION 5.2. – *Pour tout* $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) (s_1, s_2) *est $\mathcal{H}$-surharmonique.*

ii) s_1 *est μ_x^ω-intégrable,* s_2 *est λ_x^ω-intégrable pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$ *et tout* $x \in \omega$.

iii) s_j *est* $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}_j$-p.p. *finie (c.à.d.* $\mathcal{H}_j$-p.p. *finie par rapport à* $\mathcal{B}$*),* $j = 1, 2$.

Démonstration. – i) $\Rightarrow$ ii). Comme

$$\int s_1 \, d\mu_x^\omega + \int s_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant s_1(x) \quad , \quad \int s_2 \, d\lambda_x^\omega \leqslant s_2(x) \ \text{et}$$

s_j est finie sur γ_j^ω ensemble dense de ω $(j = 1, 2)$, alors s_1 est μ_x^ω-intégrable et s_2 est ν_x^ω-intégrable sur γ_1^ω et aussi s_2 est λ_x^ω-intégrable sur γ_2^ω.

D'après 1.33, leur intégrabilité respective s'étend à tout $x \in \omega$

$$\left[\text{et } \left(\int s_1 \, d\mu_x^\omega + \int s_2 \, d\nu_x^\omega \ , \ \int s_2 \, d\lambda_x^\omega\right) \in \mathcal{H}(\omega)\right] .$$

ii) $\Rightarrow$ iii). – Puisque s_1 est μ_x^ω-intégrable et s_2 est λ_x^ω-intégrable, alors s_1 est μ_x^ω-p.p. finie et s_2 est λ_x^ω-p.p. finie. Pour $\mathrm{A}_j = s_j^{-1}(+\infty)$, $j = 1, 2$, on a :

$$\mu_x^\omega(\mathrm{A}_1) = 0 \quad , \quad \lambda_x^\omega(\mathrm{A}_2) = 0 \quad , \quad \forall \omega \in \mathcal{B} \quad , \quad \forall x \in \omega .$$

Donc s_j est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}_j$-p.p. finie, $j = 1, 2$.

iii) $\Rightarrow$ i). – A_j est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}_j$-négligeable et, par conséquent ([2c], p. 49), $\complement A_j$ est dense dans Ω ($j = 1, 2$).

COROLLAIRE 5.3. – *$\mathcal{S}(\Omega)$ est un cône convexe.*

Démonstration. – Soient $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in \mathcal{S}(\Omega)$ et $A_j = s_j^{-1}(+\infty)$, $B_j = t_j^{-1}(+\infty)$ ($j = 1, 2$). Alors, grâce à la proposition 5.2, A_j, B_j sont $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}_j$-négligeables ; d'où $D_j = A_j \cup B_j$ est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}_j$-négligeable, donc $\complement D_j$ est dense dans Ω. Par conséquent, $(s_1 + t_1, s_2 + t_2) \in \mathcal{S}(\Omega)$. On voit aussi facilement que $(\alpha s_1, \alpha s_2) \in \mathcal{S}(\Omega)$, $\alpha \in R_+$.

PROPOSITION 5.4. – *Si $(v_1, v_2) \in \mathcal{S}(\Omega)$, alors le couple (w_1, w_2) de 4.2 [relatif à (v_1, v_2)] est $\mathcal{H}$-surharmonique dans Ω et biharmonique dans ω.*

Démonstration. – On a d'abord,

$$(w_1, w_2) \leqslant (v_1, v_2) \quad \text{et} \quad (w_1, w_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$$

(prop. 4.2) ; d'où $(w_1, w_2) \in \mathcal{S}(\Omega)$.

On conclut grâce à la partie i) $\Rightarrow$ ii) de la démonstration de la proposition 5.2.

DEFINITION 5.5. – *Un ensemble $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(\Omega)$ s'appelle $\mathcal{H}$-saturé si :*

i) *$\mathcal{G}$ est filtrant décroissant.*

ii) *il existe une base $\mathcal{a}$ d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers telle que si*

$$s = (s_1, s_2) \in \mathcal{G},$$

alors $(w_1, w_2) \in \mathcal{G}$, $\forall \omega \in \mathcal{a}$ (voir 4.2, 5.4). On notera par la suite ce (w_1, w_2) par $(W_1^\omega s, W_2^\omega s)$.

THEOREME 5.6. – *Soit (g_1, g_2) l'enveloppe inférieure d'un ensemble, $\neq \phi$, $\mathcal{H}$-saturé $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(\Omega)$. Si $g_1(x) > -\infty$ sur un ensemble dense de Ω, alors $(g_1, g_2) \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Démonstration (raisonnement inspiré de celui de [2c], p. 54). – En effet, $(g_1, g_2) = \inf (W_1^\omega s, W_2^\omega s)$; $(s_1, s_2) \in \mathcal{G}$, $\forall \omega \in \mathcal{a}$, et on voit que $\{(W_1^\omega s, W_2^\omega s) : (s_1, s_2) \in \mathcal{G}\}$ est filtrant décroissant. Par ailleurs, comme pour chaque $\omega \in \mathfrak{A}$, $(W_1^\omega s, W_2^\omega s)_{|\omega} \in \mathcal{H}(\omega)$, alors, grâce à 1.31, $(g_1, g_2)_{|\omega} \in \mathcal{H}(\omega)$, d'où $(g_1, g_2) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

En adaptant les raisonnements de ([2c], p. 54-55) à notre cadre, on démontre les corollaires suivants, 5.7 et 5.8.

COROLLAIRE 5.7. – *Pour tout* $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ *et tout* $E \subset \Omega$, *sa* $\mathcal{H}$*-balayée sur* E *est* $\mathcal{H}$*-surharmonique dans* Ω *et biharmonique dans* $\complement \overline{E}$. *De plus,* $\widehat{(v_1, v_2)}^E = (v_1, v_2)^E$ *sur* $\complement \overline{E}$.

COROLLAIRE 5.8. – *Soit* $\mathcal{C}$ *un ensemble non vide de* $-\mathcal{H}^*(\Omega)$ *contenant au moins un couple* $\mathcal{H}$*-sousharmonique et ayant un majorant* $\mathcal{H}$*-surharmonique.*

Alors, de tous les majorants $\mathcal{H}$*-hyperharmoniques de* $\mathcal{C}$, *il existe un plus petit, biharmonique dans* Ω.

DEFINITION 5.9. – *On appelle* $\mathcal{H}$*-potentiel dans* Ω *un*

$$(p_1, p_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$$

si, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$, *on a :*

$$(p_1, p_2) + (u_1, u_2) \geqslant (0, 0) \Rightarrow (u_1, u_2) \geqslant (0, 0) .$$

PROPOSITION 5.10. – 1) *La somme de deux* $\mathcal{H}$*-potentiels est un* $\mathcal{H}$*-potentiel.*

2) *Tout* $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$ *minorant un* $\mathcal{H}$*-potentiel est un* $\mathcal{H}$*-potentiel.*

Démonstration. – 1) Soient les $\mathcal{H}$-potentiels, dans Ω, (p_1, p_2), (q_1, q_2), et $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$. Alors $p_j + q_j + u_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$, ou $p_j + (q_j + u_j) \geqslant 0 \Rightarrow q_j + u_j \geqslant 0$ car (p_1, p_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel et, finalement, $u_j \geqslant 0$ car (q_1, q_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel.

2) Soit $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ et $(v_1, v_2) + (u_1, u_2) \geqslant (0, 0)$; par conséquent, $p_j + u_j \geqslant 0$ car $p_j \geqslant v_j$ $(j = 1, 2)$ et enfin $u_j \geqslant 0$ car (p_1, p_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel.

PROPOSITION 5.11 *(Un principe du minimum).* – *Soit*

$$(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(U) , \quad U \in \mathfrak{U} ,$$

satisfaisant aux conditions :

1) $\liminf_{x \to z,\, x \in U} u_j(x) \geqslant 0, \qquad \forall z \in \partial U$,

2) *Il existe un* $\mathcal{H}$*-potentiel,dans* Ω, (p_1 , p_2) *avec*

$$(u_1 , u_2) + (p_1 , p_2) \geqslant (0 , 0)$$

dans U, $j = 1 , 2$.

Alors $(u_1 , u_2) \geqslant (0 , 0)$.

Démonstration. – On raisonne de façon analogue au cas harmonique (en utilisant 1.21).

Considérons maintenant les cônes convexes :

$\mathcal{P}^{\mathcal{H}} = \mathcal{P}^{\mathcal{H}}(\Omega)$ des $\mathcal{H}$-potentiels dans Ω,

$\mathcal{P}^{\mathcal{H}_1} = \mathcal{P}^{\mathcal{H}_1}(\Omega)$ des $\mathcal{H}_1$-potentiels dans Ω,

$\mathcal{P}^{\mathcal{H}_2} = \mathcal{P}^{\mathcal{H}_2}(\Omega)$ des $\mathcal{H}_2$-potentiels dans Ω.

Proposition 5.12. –

1) $\mathcal{P}^{\mathcal{H}_1} = \{p_1 : (p_1 , 0) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}\}$.

2) $\mathcal{P}^{\mathcal{H}_2} \supset \{p_2 : \exists\, p_1 ; (p_1 , p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}\}$ noté $\mathcal{P}_2$.

Démonstration. – 1) Si $p_1 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_1}$ alors $(p_1 , 0) \in {}_{+}\mathcal{S}(\Omega)$ grâce à 1.22. Soit $(u_1 , u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ et $(p_1 , 0) + (u_1 , u_2) \geqslant (0 , 0)$; mais, comme $u_2 \geqslant 0$, $(u_1 , 0) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ [ou $u_1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$] et (1.23) u_1 est $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique $\geqslant 0$ car p_1 est un $\mathcal{H}_1$-potentiel. Par conséquent, $(p_1 , 0) \in \mathcal{P}$.

Inversement, si $(p_1 , 0) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$, $p_1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$ donc (1.23) p_1 est $\mathcal{H}_1$-surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. Soit u_1 une fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique dans Ω avec $p_1 + u_1 \geqslant 0$. Mais, (1.23), $(u_1 , 0) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ et, par définition,

$$(p_1 , 0) + (u_1 , 0) \geqslant (0 , 0) \Rightarrow (u_1 , 0) \geqslant (0 , 0) .$$

D'où, $p_1 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_1}$.

2) Soit $p_2 \in \mathcal{P}_2$. Alors $p_2 \in \mathcal{H}_2^*(\Omega)$ et (1.23) p_2 est $\mathcal{H}_2$-surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. Soit u_2 une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans Ω et $p_2 + u_2 \geqslant 0$. Mais, (1.23),

$$u_2 \in \mathcal{H}_2^*(\Omega) \quad \text{et} \quad (+\infty, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega) \ ;$$

par définition,

$$(p_1, p_2) + (+\infty, u_2) \geqslant (0,0) \Rightarrow (+\infty, u_2) \geqslant (0,0) .$$

D'où, $p_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_2}$.

COROLLAIRE 5.13. – *Si $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$, alors $p_1 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_1}$ et $p_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_2}$.*

Démonstration. – On va démontrer que $(p_1, 0) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$. En effet, soit $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ avec $(p_1, 0) + (u_1, u_2) \geqslant (0,0)$; mais $(p_1, p_2) + (u_1, u_2) \geqslant (0,0)$ [car $(p_1, p_2) \geqslant (p_1, 0)$] d'où,

$$(u_1, u_2) \geqslant (0,0)$$

car (p_1, p_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel dans Ω. On a le résultat, grâce à 1) de la proposition précédente. La seconde affirmation découle immédiatement de 2), prop. 5.12.

Remarque 5.14. – Des relations analogues à 1) et 2) de la proposition 5.12 peuvent évidemment être établies si l'on remplace les cônes des potentiels par les cônes des surharmoniques ($\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$).

THEOREME 5.15. – *Tout $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ a une décomposition unique (de F. Riesz),*

$$(v_1, v_2) = (p_1, p_2) + (u_1, u_2)$$

avec (p_1, p_2) un $\mathcal{H}$-potentiel dans Ω et (u_1, u_2) la plus grande minorante biharmonique de (v_1, v_2) dans Ω.

Démonstration (raisonnement inspiré de celui de [4], p. 58-9). –

i) *Unicité.* – Soit la décomposition $(v_1, v_2) = (p_1, p_2) + (u_1, u_2)$ avec (p_1, p_2) un $\mathcal{H}$-potentiel dans Ω et (u_1, u_2) un couple biharmonique dans Ω. Si $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(h_1, h_2) \leqslant (v_1, v_2)$, on aura :

$$v_j - h_j = p_j + (u_j - h_j) \geqslant 0 \Rightarrow u_j \geqslant h_j \ (j = 1, 2) .$$

D'où, (u_1, u_2) est la plus grande minorante biharmonique (et l'unicité).

ii) *Existence.* – On désigne par $\mathcal{C}$ le plus petit ensemble $\mathcal{H}$-saturé contenant (v_1, v_2) et $(u_1, u_2) = \inf \mathcal{C}$.

Alors, $(u_1, u_2) = \inf (t_1, t_2)^{\mathrm{C}\omega}$ où $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ et $\omega \in \mathfrak{A}$ (base d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers associée à notre ensemble $\mathcal{H}$-saturé) ; grâce au théorème 5.6, (u_1, u_2) est biharmonique dans Ω. Soit maintenant $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ tel que $(v_1, v_2) + (s_1, s_2) \geqslant (0, 0)$.

On note par $\mathcal{C}' = \{(t'_1, t'_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega) : (t'_1, t'_2) + (s_1, s_2) \geqslant (0, 0)\}$. On voit que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ensuite, on remarque que,

$$(\circ) : (u_1, u_2) + (s_1, s_2) = \inf \mathcal{C} + (s_1, s_2) \geqslant (\inf t'_1, \inf t'_2) + (s_1, s_2)$$

$$= (\inf (t'_1 + s_1), \inf (t'_2 + s_2)) \geqslant (0, 0)$$

$$\text{avec} \quad (t'_1, t'_2) \in \mathcal{C}'.$$

On désigne par $(p_1, p_2) = (v_1, v_2) - (u_1, u_2)$; on montrera que c'est un $\mathcal{H}$-potentiel dans Ω. D'abord, $(p_1, p_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$; prenons ensuite $(t_1, t_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ tel que $(p_1, p_2) + (t_1, t_2) \geqslant (0, 0)$ ou $(v_1, v_2) - (u_1, u_2) + (t_1, t_2) \geqslant (0, 0)$. On pose

$$(w_1, w_2) = (t_1 - u_1, t_2 - u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega) .$$

Mais si l'on remplace (s_1, s_2) par (w_1, w_2), on a, grâce à $(\circ)$: $(u_1, u_2) + (w_1, w_2) \geqslant (0, 0)$; d'où,

$$(u_1, u_2) + (t_1, t_2) - (u_1, u_2) \geqslant (0, 0)$$

ou $(t_1, t_2) \geqslant (0, 0)$. Par conséquent (définition 5.9), $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$.

COROLLAIRE 5.16. – *Soit un couple $(p_1, p_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$. Alors, on a les équivalences :*

1) $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}} \Leftrightarrow$ *sa plus grande minorante biharmonique est égale à* $(0, 0)$.

2) $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}} \Leftrightarrow p_j \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_j}$ $(j = 1, 2)$.

Démonstration. – 1) Si $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ alors

$$(p_1, p_2) - (u_1, u_2) \geqslant (0, 0) ,$$

où (u_1, u_2) est sa partie biharmonique (proposition précédente), d'où $(-u_1, -u_2) \geqslant (0, 0)$ et par conséquent $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

Inversement : de $(u_1, u_2) + (p_1, p_2) \geqslant (0, 0)$, où $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$, on a, $-(u_1, u_2) \leqslant (p_1, p_2)$ d'où $-(u_1, u_2) \leqslant (0, 0)$ car sa plus grande minorante $\mathcal{H}$-hypoharmonique est égale à $(0, 0)$.

2) Si $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ alors, selon 5.13, $p_j \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_j}$ $(j = 1, 2)$.

Inversement : Soit $(h_1, h_2) \in {}_+\mathcal{H}(\Omega)$ et $h_j \leqslant p_j$ $(j = 1, 2)$. De $h_2 \leqslant p_2$, on a $h_2 = 0$ car p_2 est un $\mathcal{H}_2$-potentiel ; donc $h_1 \in {}_+\mathcal{H}_1(\Omega)$. De même, $h_1 \leqslant p_1$ implique $h_1 = 0$. D'où le résultat.

Introduisons maintenant un nouvel axiome :

AXIOME III'. — a). *Pour chaque* $x \in \Omega$, *il existe un* $\mathcal{H}$*-potentiel* $(p_1, p_2) \in \mathcal{E}_c(\Omega)$ *(fini continu dans* Ω*) et tel que* $p_j(x) > 0, j = 1, 2$.

b) *Comme dans l'axiome III* b).

THEOREME 5.17. — *Dans un espace biharmonique* $(\Omega, \mathcal{H})$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Axiome III'* a).

ii) *Pour tout* $x \in \Omega$ *et tout voisinage* $\mathcal{H}$*-régulier* ω *de* x, *il existe un* $\mathcal{H}$*-potentiel* (p_1, p_2) *fini continu dans* Ω *tel que :*

$$p_1(x) > \int p_1 d\mu_x^\omega + \int p_2 d\nu_x^\omega \quad , \quad p_2(x) > \int p_2 d\lambda_x^\omega .$$

iii) *Pour* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, *il existe deux* $\mathcal{H}$*-potentiels* (p_1, p_2), (q_1, q_2) *finis continus dans* Ω *tels que :*

$$p_j(x) \quad q_j(y) \neq p_j(y) \quad q_j(x), \quad j = 1, 2 .$$

iv) *Pour* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, *il existe* (s_1, s_2) *et* $(t_1, t_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ *finis continus tels que :*

$$s_j(x) \quad t_j(y) \neq s_j(y) \quad t_j(x), \quad j = 1, 2 .$$

v) *Pour tout* $x \in \Omega$ *et tout voisinage* $\mathcal{H}$*-régulier* ω *de* x, *il existe* $(s_1, s_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ *fini continu tel que :*

$$s_1(x) > \int s_1 d\mu_x^\omega + \int s_2 d\nu_x^\omega \quad , \quad s_2(x) > \int s_2 d\lambda_x^\omega .$$

Démonstration. — i) $\Rightarrow$ ii). Soient un $x \in \Omega$, ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x et $y \in T\mu_x^\omega$ ($T\mu_x^\omega \neq \phi$, 1.25 et 1.22). On construit facilement un $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p_1, p_2)$ fini continu dans Ω et $p_j > 0$ sur $\{x\} \cup \partial\omega$ $(j = 1, 2)$.

Considérons le système $\mathfrak{A}$ des ensembles ω_i $\mathcal{H}$-réguliers tels que l'un au moins des points x, y n'appartient pas à ω_i (donc $\mathfrak{A}$ est une base de Ω). L'ensemble

$$\mathcal{G} = \{(p_1, p_2)^{C\omega_1, \dots, C\omega_n} ; n \in \mathrm{N}, \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathfrak{A}\}$$

est $\mathcal{H}$-saturé ; d'où inf $\mathcal{G}$ est biharmonique (5.6) et égale à $(0, 0)$ car $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ (5.16).

Soit n le plus petit entier tel que pour $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathfrak{A}$,

$$q_1(x) = \mathrm{P}_1^{C\omega_1, \dots, C\omega_n}(x) < p_1(x)$$

[et $q_2 = \mathrm{P}_2^{C\omega_1, \dots, C\omega_n}$]

$$\left(\left(\mathrm{P}_1^{C\omega_1, \dots, C\omega_n}, \mathrm{P}_2^{C\omega_1, \dots, C\omega_n}\right) = (p_1, p_2)^{C\omega_1, \dots, C\omega_n}\right).$$

On aura donc $x \in \omega_n$; d'où, ou

$$(1) \qquad q_1(x) < p_1(x) \quad \text{et} \quad q_1(y) = p_1(y) ;$$

$$\text{et alors} \qquad r_1(x) = p_1(x) \quad \text{et} \quad r_1(y) < p_1(y) \qquad (2)$$

$$\text{avec} \qquad r_1 = \mathrm{P}_1^{C\omega_1, \dots, C\omega_{n-1}} \quad \left[r_2 = \mathrm{P}_2^{C\omega_1, \dots, C\omega_{n-1}}\right].$$

Remarquons que (q_1, q_2), (r_1, r_2) sont des $\mathcal{H}$-potentiels finis continus dans Ω.

Examinons le cas (1) : on a $q_1(x) > 0$. Sinon, comme

$$q_1(x) \geqslant \int q_1 d\mu_x^\omega + \int q_2 d\nu_x^\omega ,$$

on aura $q_1(y) = 0$; impossible car $q_1(y) = p_1(y) > 0$.

On pourra donc (en multipliant (q_1, q_2) par un $\alpha > 1$) trouver un $\mathcal{H}$-potentiel (q_1', q_2') dans Ω tel que

$$p_1(x) = q_1'(x) \quad \text{et} \quad p_1(y) < q_1'(y) .$$

Soit $(q_1'', q_2'') = (\inf(p_1, q_1'), \inf(p_2, q_2'))$; c'est un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans Ω. Evidemment :

$$q_1''(y) < q_1'(y) \quad \text{et} \quad q_1''(x) = q_1'(x) .$$

Grâce alors à la continuité des q_1'', q_1', il existe un voisinage de y tel que $q_1'' < q_1'$ là-dedans.

Mais $q_1''(x) = q_1'(x) \geqslant \int q_1' d\mu_x^\omega + \int q_2' d\nu_x^\omega > \int q_1'' d\mu_x^\omega + \int q_2'' d\nu_x^\omega$

et
$$q_2''(x) \geqslant \int q_2'' d\lambda_x^\omega .$$

Dans le cas (2), on trouve immédiatement un $\mathcal{H}$-potentiel [à savoir (r_1, r_2)] satisfaisant à la première inégalité strictement. Considérons maintenant un point $z \in \mathrm{T}\lambda_x^\omega$ ($\neq 0$, 1.25, 1.22) et effectuons, pour les points x (le même) et z, la même chose sur l'indice 2. On prend le plus petit entier m tel que :

$$w_2(x) = \mathrm{P}_2^{\mathrm{C}\omega_1, \ldots, \mathrm{C}\omega_m}(x) < p_2(x) \qquad \left[w_1 = \mathrm{P}_1^{\mathrm{C}\omega_1, \ldots, \mathrm{C}\omega_m}\right] .$$

Alors, on aura, ou :

$$(3) \qquad w_2(x) < p_2(x) \quad \text{et} \quad w_2(z) = p_2(z) \,;\text{ou } w_2(z) < p_2(z) ,$$

d'où
$$u_2(x) = p_2(x) \quad \text{et} \quad u_2(z) < p_2(z) \qquad (4)$$

avec $u_2 = \mathrm{P}_2^{\mathrm{C}\omega_1, \ldots, \mathrm{C}\omega_{m-1}}$ $\left[u_1 = \mathrm{P}_1^{\mathrm{C}\omega_1, \ldots, \mathrm{C}\omega_{m-1}}\right]$.

Si l'on a le cas (3), en raisonnant comme dans le cas (1), on trouve un $\mathcal{H}$-potentiel (s_1'', s_2'') dans Ω tel que :

$$s_1''(x) \geqslant \int s_1'' d\mu_x^\omega + \int s_2'' d\nu_x^\omega , \qquad s_2''(x) > \int s_2'' d\lambda_x^\omega .$$

Si l'on a l'éventualité (4), grâce à la continuité de u_2 et p_2, il existe voisinage de z sur lequel $u_2 < p_2$; d'où,

$$u_1(x) \geqslant \int u_1 d\mu_x^\omega + \int u_2 d\nu_x^\omega ,$$

$$u_2(x) = p_2(x) \geqslant \int p_2 d\lambda_x^\omega > \int u_2 d\lambda_x^\omega .$$

On peut donc trouver un $(t_1, t_2) \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}}$ satisfaisant strictement aux deux inégalités et fini continu.

ii) $\Rightarrow$ iii). – Soit ω $\mathcal{H}$-régulier tel que $x \in \omega$, $y \in \mathrm{C}\,\omega$. Il suffit alors de prendre $(q_1, q_2) = (p_1, p_2)^{\mathrm{C}\omega}$, où (p_1, p_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans Ω satisfaisant aux inégalités de ii) et $p_j(y) > 0$ ($j = 1 \;\; 2$).

iii) $\Rightarrow$ iv). – Evident.

iv) $\Rightarrow$ v). – Soit ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x et $y \in T\mu_x^\omega$. Grâce à : $s_1(x)\, t_1(y) \neq s_1(y)\, t_1(x)$, on a $s_1(x) > 0$ (et aussi $t_1(x) > 0$). Sinon, $s_1(y) = 0$ ce qui est impossible à cause de la séparation.

Alors, on peut trouver deux couples $(s_1\,, s_2)$, $(t_1\,, t_2)$ $\mathcal{H}$-surharmoniques positifs finis continus et tels que (en multipliant au besoin par un $\alpha > 0$ convenable) :

$$s_1(x) = t_1(x) \quad \text{et} \quad s_1(y) < t_1(y)\ .$$

Comme dans le cas (2), on trouve $(s_1'\,, s_2') \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$, et fini continu, avec :

$$s_1'(x) > \int s_1'\, d\mu_x^\omega + \int s_2'\, d\nu_x^\omega\,, \quad s_2'(x) \geqslant \int s_2'\, d\lambda_x^\omega\ .$$

A cause de : $s_2(x)\, t_2(y) \neq s_2(y)\, t_2(x)$, on trouve de la même façon un couple $(s_1''\,, s_2'') \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ tel que :

$$s_1''(x) \geqslant \int s_1''\, d\mu_x^\omega + \int s_2''\, d\nu_x^\omega\,, \quad s_2''(x) > \int s_2''\, d\lambda_x^\omega\ .$$

Alors $(s_1' + s_1''\,, s_2' + s_2'') \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$ est fini continu et satisfait aux deux inégalités strictes.

v) $\Rightarrow$ ii). – Grâce à la décomposition d'un couple $(s_1\,, s_2) \in {}_+\mathcal{S}(\Omega)$, (5.15), on aura :

$$p_1(x) = s_1(x) - u_1(x) > \int (s_1 - u_1)\, d\mu_x^\omega + \int (s_2 - u_2)\, d\nu_x^\omega =$$

$$= \int p_1\, d\mu_x^\omega + \int p_2\, d\nu_x^\omega\ ,$$

$$p_2(x) = s_2(x) - u_2(x) > \int (s_2 - u_2)\, d\lambda_x^\omega = \int p_2\, d\lambda_x^\omega\ .$$

ii) $\Rightarrow$ i). – C'est évident.

On voit donc (théorème 5.17) que l'axiome III$'$ entraîne l'axiome III. D'où la définition suivante :

DEFINITION 5.18. – *On dit que $(\Omega\,, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique fort si les axiomes I, II, III$'$ et IV sont satisfaits.*

Dorénavant, on se placera dans un tel espace.

Remarque 5.19. – Grâce à III' a) et 5.13, les espaces $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ et $(\Omega, \mathcal{H}_2)$, (1.29), sont des espaces harmoniques forts.

Soit $\mathcal{P}_c$ le cône des $\mathcal{H}$-potentiels finis continus dans Ω, $\mathcal{D} = \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c$ (l'espace vectoriel qu'il engendre) et $\mathcal{C}^k(\Omega) = \mathcal{C}^k$ l'ensemble des couples de fonctions finies continues dans Ω et à support compact.

THEOREME 5.20 (théorème d'approximation). – *Soit* $(f_1, f_2) \in {}_+\mathcal{C}^k$ [*c.à.d.* $(f_1, f_2) \geqslant (0, 0)$] *avec supports compacts respectifs* K_1, K_2 *et* U *un voisinage de* $K = K_1 \cup K_2$. *Alors* (f_1, f_2) *peut être approché uniformément par des éléments de* $\mathcal{D} \cap {}_+\mathcal{C}^k$ *dont les supports se trouvent dans* U.

Démonstration. – Nous voulons utiliser le théorème de Stone sur les compacts. Remarquons d'abord que si

$$(p_1, p_2) - (q_1, q_2) = (d_1, d_2) \in \mathcal{D} ,$$

alors on a aussi $(d_1', d_2') \in \mathcal{D}$ où

$$d_j' = \max(p_j - q_j, 0) = p_j - \min(p_j, q_j) ,$$

$j = 1, 2$.

Soit $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x, $y \notin \omega$ et un $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ comme dans le ii) du théorème 5.17. Prenons le $\mathcal{H}$-potentiel $(q_1, q_2) \in \mathcal{P}_c$ défini comme suit :

$$q_1(z) = \begin{cases} \int p_1 \, d\mu_z^\omega + \int p_2 \, d\nu_z^\omega & , \ z \in \omega \\ p_1(z) & , \ z \notin \omega \end{cases} ,$$

$$q_2(z) = \begin{cases} \int p_2 \, d\lambda_z^\omega & , \ z \in \omega \\ p_2(z) & , \ z \notin \omega \end{cases} .$$

Le couple $(p_1, p_2) - (q_1, q_2) = (r_1, r_2) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^k$ et $r_j(x) > 0$, $r_j(y) = 0$ pour $j = 1, 2$. De même, on peut construire un autre couple $(s_1, s_2) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^k$ tel que $s_j(x) = 0$, $s_j(y) > 0$ pour $j = 1, 2$. Par conséquent, pour α, β réels quelconques et η, θ, réels convenables, le couple $(d_1, d_2) = (\eta r_1 + \theta s_1, \eta r_2 + \theta s_2) \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{E}^k$ peut satisfaire une des situations ci-après :

$$\begin{aligned} d_1(x) = \alpha \quad &, \quad d_1(y) = \beta \\ d_2(x) = \alpha \quad &, \quad d_2(y) = \beta \\ d_1(x) = \alpha \quad &, \quad d_2(y) = \beta \\ d_1(y) = \alpha \quad &, \quad d_2(x) = \beta \ . \end{aligned}$$

Soit $x = y \in \omega$, ω $\mathcal{H}$-régulier, et (q_1, q_2) comme ci-dessus. En écrivant : $(r_1, r_2) = (p_1 - q_1, p_2 - q_2) = (p_1 - q_1, 0) + (0, p_2 - q_2)$ et $(p_1 - q_1, 0) = (t_1, t_2)$, $(0, p_2 - q_2) = (v_1, v_2)$, on a : (t_1, t_2), $(v_1, v_2) \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{E}^k$, $t_1(x) \neq 0$, $t_2(x) = 0$ et $v_1(x) = 0$, $v_2(x) \neq 0$ (voir 5.13).

Donc, pour α, β réels quelconques et η, θ réels convenables, on aura : $d_1(x) = \alpha$, $d_2(x) = \beta$ avec

$$(d_1, d_2) = (\eta t_1 + \theta v_1, \eta t_2 + \theta v_2) \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{E}^k \ .$$

Considérons maintenant un compact A de Ω et $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{E}_c(\mathrm{A})$; on se ramène à une $\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{A} \times \mathrm{I})$ où I est l'espace discret $\{1, 2\}$ avec $\varphi_j(x) = \varphi((x, j))$, $j = 1, 2$. Par conséquent, d'après les considérations précédentes, le théorème de Stone peut être appliqué.

Soit $\mathrm{U}' \in \mathfrak{U}_c$, $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}' \subset \overline{\mathrm{U}}' \subset \mathrm{U}$. Selon le théorème de Stone, il existe $(f_1', f_2') \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{E}^k$ tel que $|f_j' - f_j| < \epsilon$ sur U' pour $\epsilon > 0$ donné $(j = 1, 2)$. Soit de plus $(g_1, g_2) \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ avec

$$g_j > \sup_{\mathrm{K}} f_j'(y) + \epsilon \quad \text{sur} \quad \mathrm{K}, \quad (j = 1, 2) \ ,$$

$g_j \leqslant 0$ dans $\complement\mathrm{U}'$ et $g_j \leqslant -\epsilon$ sur $\complement\mathrm{U}' \cap \mathrm{S}$ où $\mathrm{S} = \operatorname{supp} f_1' \cup \operatorname{supp} f_2'$. Grâce de nouveau au théorème de Stone, il existe $(g_1', g_2') \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{E}^k$ tel que

$$|g_j' - g_j| < \epsilon \quad \text{sur} \quad \overline{\mathrm{U}}' \cup \mathrm{S} \ .$$

Soit $\psi_j = \max(0, \min(f_j', g_j'))$, $j = 1, 2$. Alors $\psi_j \geqslant 0$, avec supports $\subset \overline{\mathrm{U}}'$ et $(\psi_1, \psi_2) \in \mathfrak{D} \cap {}_+\mathcal{E}^k$; de plus, $|\psi_j - f_j| < \epsilon$ dans Ω $(j = 1, 2)$.

PARTIE VI

PROBLEME DE RIQUIER

Soit $\omega \in \mathcal{U}_c$ et $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$. On note

$$\Phi_{\mathcal{H}}^{\omega,f} = \{(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\omega) : \liminf_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} v_j(x) \geq f_j(y), > -\infty, \quad \forall y \in \partial\omega, j = 1, 2\}.$$

$$\overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} = (\overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,f}, \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,f}) = (\inf v_1, \inf v_2) \quad \text{où} \quad (v_1, v_2) \in \Phi_{\mathcal{H}}^{\omega,f}.$$

On définit $\Psi_{\mathcal{H}}^{\omega,f}$ en passant à $(-f_1, -f_2) = -f$ et à $(-v_1, -v_2)$ dans $\Phi_{\mathcal{H}}^{\omega,f}$ et $\underline{\mathrm{H}}^{\omega,f} = \sup \Psi^{\omega,f} = -\overline{\mathrm{H}}^{\omega,-f}$.

On a les propriétés suivantes :

1) $\underline{\mathrm{H}}^{\omega,f} \leq \overline{\mathrm{H}}^{\omega,f}$.

2) Pour tout $\lambda \in \mathrm{R}_+$, $\overline{\mathrm{H}}^{\omega,\lambda f} = \lambda \; \overline{\mathrm{H}}^{\omega,f}$.

3) Si $f \leq g \Rightarrow \overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} \leq \overline{\mathrm{H}}^{\omega,g}$ et $\underline{\mathrm{H}}^{\omega,f} \leq \underline{\mathrm{H}}^{\omega,g}$.

4) $\overline{\mathrm{H}}^{\omega,f+g} \leq \overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} + \overline{\mathrm{H}}^{\omega,g}$.

[lorsque $(f_1 + g_1, f_2 + g_2)$ est défini sur $\partial\omega$ et $\overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} + \overline{\mathrm{H}}^{\omega,g}$ défini dans ω].

Proposition 6.1. – *Si $f = (f_1, f_2)$ est la restriction sur $\partial\omega$ de $\mathrm{V} = (v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$, alors $(\overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,f}, \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,f}) = (\mathrm{V}_1^{\mathrm{C}\omega}, \mathrm{V}_2^{\mathrm{C}\omega})$ dans ω.*

Démonstration. – Un raisonnement analogue au cas harmonique adapté à notre cadre (on utilisera 1.21 et la définition 4.1) nous donne le résultat.

Definition 6.2. – *Le couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$ est dit $\mathcal{H}$-résolutif si $\overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} = \underline{\mathrm{H}}^{\omega,f}$ fini dans ω. On pose alors $\mathrm{H}^{\omega,f} = \overline{\mathrm{H}}^{\omega,f} = \underline{\mathrm{H}}^{\omega,f}$.*

Theoreme 6.3. – *Tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ est $\mathcal{H}$-résolutif et $(\mathrm{H}_1^{\omega,f}, \mathrm{H}_2^{\omega,f})$ est biharmonique dans $\omega \in \mathcal{U}_c$.*

Démonstration. – On procède par étapes en montrant d'abord que tout $p = (p_1 , p_2) \in \mathcal{P}_c$ est $\mathcal{H}$-résolutif et que $(\mathrm{H}_1^{\omega,p} , \mathrm{H}_2^{\omega,p}) \in \mathcal{H}(\omega)$; ensuite, grâce au théorème d'approximation (5.20), on conclut.

1) A cause des propositions 6.1 et 5.7, $(\overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,p} , \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,p}) \in \mathcal{H}(\omega)$; de plus $(p_1 , p_2) \in \Phi_{\mathcal{H}}^{\omega,p}$ d'où $p_j \geqslant \overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,p}$ $(j = 1 , 2)$ dans ω. Alors $\limsup_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} \overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,p}(x) \leqslant \limsup_{x \to y} p_j(x) = p_j(y)$, $\forall y \in \partial\omega, j = 1 , 2$, et

$$\overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,p} \leqslant \underline{\mathrm{H}}_j^{\omega,p} \qquad (j = 1 , 2) \ ;$$

par conséquent, (p_1 , p_2) est $\mathcal{H}$-résolutif.

Aussi pour $f = (f_1 , f_2)$, $g = (g_1 , g_2)$ $\mathcal{H}$-résolutifs $\in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$

on a :
$$\mathrm{H}^{\omega,f+g} = \mathrm{H}^{\omega,f} + \mathrm{H}^{\omega,g} \ ,$$
$$\mathrm{H}^{\omega,\lambda f} = \lambda \mathrm{H}^{\omega,f} \qquad (\lambda \in \mathrm{R}) \ ;$$

donc tout couple $d = (d_1 , d_2) \in \mathcal{D} = \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c$ est $\mathcal{H}$-résolutif et $(\mathrm{H}_1^{\omega,d} , \mathrm{H}_2^{\omega,d}) \in \mathcal{H}(\omega)$.

2) Maintenant, grâce à 5.20, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $(d_1 , d_2) \in \mathcal{D}$ tel que

$$d_j - \epsilon \leqslant f_j \leqslant d_j + \epsilon$$

d'où
$$\mathrm{H}_j^{\omega,d} - \epsilon \overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,1} \leqslant \underline{\mathrm{H}}_j^{\omega,f} \leqslant \overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,f} \leqslant \mathrm{H}_j^{\omega,d} + \epsilon \overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,1}$$

où
$$1 = (1 , 1) \quad \text{et} \quad j = 1 , 2 \ .$$

Comme $\overline{\mathrm{H}}_j^{\omega,1}$ sont bornés, (f_1 , f_2) est $\mathcal{H}$-résolutif ; d'autre part, $(\mathrm{H}_1^{\omega,f}, \mathrm{H}_2^{\omega,f})$ peut être approché uniformément dans ω par des $(\mathrm{H}_1^{\omega,d} , \mathrm{H}_2^{\omega,d}) \in \mathcal{H}(\omega)$, d'où $(\mathrm{H}_1^{\omega,f} , \mathrm{H}_2^{\omega,f}) \in \mathcal{H}(\omega)$.

3) Remarquons enfin que,

$$\varphi = (\varphi_1 , \varphi_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega) \ , (\varphi_1 , \varphi_2) \geqslant (0 , 0) \quad \text{sur } \partial\omega$$

$$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,\varphi} \geqslant 0 \text{ dans } \omega, \text{ et } \varphi_2 \geqslant 0 \text{ sur } \partial\omega \ \Rightarrow \ \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,\varphi} \geqslant 0 \text{ dans } \omega.$$

Donc, pour chaque $x \in \omega$, $\mathrm{H}_j^{\omega,f}(x)$ sont des formes linéaires positives sur $\mathcal{E}_c(\partial\omega)$ et l'on aura trois mesures de Radon $\geqslant 0$ sur $\partial\omega (\lambda_x^\omega , \mu_x^\omega , \nu_x^\omega)$ telles que :

$$\mathrm{H}_1^{\omega,f}(x) = \int f_1 \, d\mu_x^\omega + \int f_2 \, d\nu_x^\omega \quad , \quad \mathrm{H}_2^{\omega,f}(x) = \int f_2 \, d\lambda_x^\omega \ .$$

En raisonnant de façon analogue, on étend dans notre cadre le résultat correspondant du cas harmonique, à savoir :

PROPOSITION 6.4. – *Soit $f^n = (f_1^n, f_2^n)$ une suite croissante de couples $\in \mathcal{E}(\partial\omega)$ [n indice $\in$ N] tels que*

$$(\overline{H}_1^{\omega, f^n}, \overline{H}_2^{\omega, f^n}) \in \mathcal{H}(\omega) \quad , \quad \forall n \; .$$

Alors
$$\overline{H}_j^{\omega, \sup_n f_n} = \sup_n \overline{H}_j^{\omega, f^n} \quad , \quad j = 1, 2 \; .$$

THEOREME 6.5. – *Pour tout $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, on a :*

$$\overline{H}_1^{\omega, f}(x) = \int^* f_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* f_2 \, d\nu_x^\omega \quad , \quad \overline{H}_2^{\omega, f}(x) = \int^* f_2 \, d\lambda_x^\omega \; ,$$

lorsque
$$\overline{H}_1^{\omega, f}(x) < +\infty \quad , \quad \forall x \in \omega \; .$$

Démonstration. – Si $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_i(\partial\omega)$, il existe une suite croissante $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) = \varphi^n \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ telle que $(f_1, f_2) = \left(\sup_n \varphi_1^n, \sup_n \varphi_2^n\right)$.

Grâce au théorème 6.3, on a, pour tout $x \in \omega$:

$$H_1^{\omega, \varphi^n}(x) = \int \varphi_1^n \, d\mu_x^\omega + \int \varphi_2^n \, d\nu_x^\omega \quad , \quad H_2^{\omega, \varphi^n}(x) = \int \varphi_2^n \, d\lambda_x^\omega \; ;$$

d'autre part, (6.4),

$$\overline{H}_j^{\omega, f}(x) = \sup_n H_j^{\omega, \varphi^n}(x) \quad , \quad \forall x \in \omega \quad , \quad j = 1, 2 \; .$$

Par conséquent, pour tout $x \in \omega$,

$$\overline{H}_1^{\omega, f}(x) = \sup_n \int \varphi_1^n \, d\mu_x^\omega + \sup_n \int \varphi_2^n \, d\nu_x^\omega = \int^* f_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* f_2 \, d\nu_x^\omega \; ;$$

de même,
$$\overline{H}_2^{\omega, f}(x) = \int^* f_2 \, d\lambda_x^\omega \; .$$

Soient maintenant $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$,

$\Psi = \{\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{E}_i(\partial\omega) : (\psi_1, \psi_2) \geqslant (f_1, f_2)$ sur $\partial\omega\}$,

et $x \in \omega$.

Comme, par hypothèse, $\overline{H}_1^{\omega, f} < +\infty$ dans ω, il existe

$$(u_1, u_2) \in \Phi_{\mathcal{H}}^{\omega, f} \quad \text{tel que} \quad u_1(x) < +\infty \; .$$

Considérons les fonctions $\psi_j(z) = \liminf_{\omega \ni x \to z \in \partial\omega} u_j(x)$, $\forall z \in \partial\omega$,

$j = 1, 2$. Alors, $(\psi_1, \psi_2) \in \Psi$ et $(u_1, u_2) \in \Phi_{\mathscr{K}}^{\omega,\psi}$.

On aura donc :

$$\int^* \psi_1 d\mu_x^\omega + \int^* \psi_2 d\nu_x^\omega \leqslant u_1(x) < +\infty \ ;$$

d'où $$\int^* \psi_1 d\mu_x^\omega \ , \int^* \psi_2 d\nu_x^\omega \quad \text{sont finies.}$$

Comme :

$$\int^* f_1 d\mu_x^\omega \leqslant \int^* \psi_1 d\mu_x^\omega \quad , \quad \int^* f_2 d\nu_x^\omega \leqslant \int^* \psi_2 d\nu_x^\omega \ ,$$

alors $\int^* f_1 \, d\mu_x^\omega + \int^* f_2 \, d\nu_x^\omega$ a toujours un sens (finie ou $-\infty$) et cela pour tout $x \in \omega$.

On pourra alors écrire, pour tout $x \in \omega$,

$$\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega = \inf_{\Psi} \left[\int \psi_1 d\mu_x^\omega + \int \psi_2 d\nu_x^\omega \right] =$$

$$= \inf_{\Psi} \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,\psi}(x) \geqslant \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,f}(x)$$

et $$\int^* f_2 d\lambda_x^\omega = \inf_{\Psi} \int \psi_2 d\lambda_x^\omega = \inf_{\Psi} \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,\psi}(x) \geqslant \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,f}(x) \ .$$

On va démontrer maintenant les inégalités dans l'autre sens. En procédant comme ci-dessus pour (u_1, u_2) quelconque $\in \Phi_{\mathscr{K}}^{\omega,f}$, on aura un $(\psi_1, \psi_2) \in \Psi$ et $(u_1, u_2) \in \Phi_{\mathscr{K}}^{\omega,\psi}$; d'où

$$\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega \leqslant \int \psi_1 d\mu_x^\omega + \int \psi_2 d\nu_x^\omega = \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,\psi}(x) \leqslant u_1(x)$$

et $$\int^* f_2 d\lambda_x^\omega \leqslant \int \psi_2 d\lambda_x^\omega = \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,\psi}(x) \leqslant u_2(x)$$

pour tout $x \in \omega$.

Ces inégalités étant vraies pour tout $(u_1, u_2) \in \Phi_{\mathscr{K}}^{\omega,f}$, on a :

$$\int^* f_1 d\mu_x^\omega + \int^* f_2 d\nu_x^\omega \leqslant \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,f}(x) \quad , \quad \int^* f_2 d\lambda_x^\omega \leqslant \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,f}(x), (\forall x \in \omega).$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE 6.6 (théorème de résolutivité). — *Un couple*

$f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$ est $\mathcal{H}$-résolutif si et seulement si, pour tout $x \in \omega$, f_1 est μ_x^ω-intégrable et f_2 est ν_x^ω-intégrable.

Démonstration. – On applique le théorème 6.5 aux couples (f_1, f_2) et $(-f_1, -f_2)$.

Remarque 6.7. –

1) On peut montrer, pour $\omega \in \mathcal{U}_c$ et $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, les parties 1) et 2) de 1.33 (en raisonnant exactement de la même façon).

2) On voit donc que, si $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$ est $\mathcal{H}$-résolutif, $(H_1^{\omega,f}, H_2^{\omega,f}) \in \mathcal{H}(\omega)$.

3) Comme on peut trouver $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ (donc bornés sur $\bar{\omega}$) tel que $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ sur $\partial\omega$, alors il existe une constante M telle que pour tout $x \in \mathcal{U}_c$:

$$\|\mu_x^\omega\| \leqslant M \quad , \quad \|\nu_x^\omega\| \leqslant M \quad , \quad \|\lambda_x^\omega\| \leqslant M \quad .$$

$[(1, 1) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$; voir alors le théorème 6.3].

4) On peut montrer le théorème 6.5 avec une hypothèse plus faible, à savoir :

$$\int^* f_1\, d\mu_x^\omega + \int^* f_2\, d\nu_x^\omega \quad \text{est définie pour tout } x \in \omega \ .$$

COROLLAIRE 6.8. – *Si $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$, alors, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_c$ et tout $x \in \omega$, on a :*

$$v_1(x) \geqslant \int v_1\, d\mu_x^\omega + \int v_2\, d\nu_x^\omega \ ,$$

$$v_2(x) \geqslant \int v_2\, d\lambda_x^\omega \ .$$

En effet, $(\mathrm{rest}_\omega\, v_1, \mathrm{rest}_\omega\, v_2) \in \Phi_{\mathcal{H}}^{\omega, \mathrm{rest}_{\partial\omega} v}$; ensuite, on applique le théorème 6.5 vu la remarque 6.7. 4).

THEOREME 6.9. – *Dans tout $\omega \in \mathcal{U}_c$ il existe $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec $u_j > 0$ dans ω, $j = 1, 2$.*

Démonstration. – Soit $\omega_0 \in \mathcal{U}_c$, $\omega_0 \supset \bar{\omega}$.

D'après l'axiome III b), il existe $h_1 \in \mathcal{H}_1(\omega_0)$, $w_2 \in \mathcal{H}_2(\omega_0)$ strictement positives. Considérons le couple $f = (0\ , w_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$; alors, (voir 6.3), $(\mathrm{H}_1^{\omega,f}\ , \mathrm{H}_2^{\omega,f}) \in \mathcal{H}(\omega)$ et $\mathrm{H}_1^{\omega,f}(x) \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}_2^{\omega,f}(x) = \int w_2 d\lambda_x^\omega > 0\ , \quad \forall x \in \omega\,.$$

Mais $(h_1\ , 0) \in \mathcal{H}(\omega)$. Par conséquent, le couple

$$(u_1\ , u_2) = (h_1\ , 0) + (\mathrm{H}_1^{\omega,f}\ , \mathrm{H}_2^{\omega,f}) \in \mathcal{H}(\omega)$$

et $u_j > 0$ dans ω, $j = 1\ , 2$.

DEFINITION 6.10. — *Un point $z \in \partial\omega$ $(\omega \in \mathfrak{U}_c)$ est dit $\mathcal{H}_1\ , \mathcal{H}_2\ ,$ $\mathcal{H}$-régulier si pour $x \to z$, $x \in \omega$, on a respectivement la convergence vague des mesures :*

$$\mu_x^\omega \to \epsilon_z\ ;\ \lambda_x^\omega \to \epsilon_z\ ;\ (\lambda_x^\omega\ , \mu_x^\omega\ , \nu_x^\omega) \to (\epsilon_z\ , \epsilon_z\ , 0)(^{12}).$$

LEMME 6.11. — *Si $\mu_x^\omega \to \epsilon_z$ vaguement pour $x \to z$, $x \in \omega$, alors $\nu_x^\omega \to 0$ vaguement.*

Démonstration. — On remarque d'abord que, pour tout $x \in \omega$, $\|\lambda_x^\omega\|$, $\|\mu_x^\omega\|$, $\|\nu_x^\omega\|$ sont bornées uniformément (6.7.3)). Pour tout $p = (p_1\ , p_2) \in \mathcal{P}_c$, on a, grâce à 6.3, $(\forall x \in \omega)$,

$$p_1(x) \geqslant \overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,p}(x) = \mathrm{H}_1^{\omega,p}(x) = \int p_1 d\mu_x^\omega + \int p_2 d\nu_x^\omega\ ,$$

$$p_2(x) \geqslant \overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,p}(x) = \mathrm{H}_2^{\omega,p}(x) = \int p_2 d\lambda_x^\omega\ .$$

Par conséquent, $p_1(x) - \int p_1\, d\mu_x^\omega \geqslant \int p_2\, d\nu_x^\omega (\geqslant 0)$ et comme, par hypothèse, le premier membre tend vers zéro, alors

$$\int p_2 d\nu_x^\omega \to 0$$

quand $x \to z$, $x \in \omega$; le théorème d'approximation (5.20) nous permet maintenant d'achever la démonstration.

$(^{12})$ De façon équivalente, on a, respectivement, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}(\partial\omega)$ et tout $f = (f_1\ , f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$: $\lim\limits_{\omega \ni x \to z} {}^{\mathcal{H}_1}\mathrm{H}_\varphi^\omega(x) = \varphi(z)$; $\lim\limits_{\omega \ni x \to z} {}^{\mathcal{H}_2}\mathrm{H}_\varphi^\omega(x) = \varphi(z)$; $\lim\limits_{\omega \ni x \to z} \mathrm{H}_j^{\omega,f}(x) = f_j(z)\ , j = 1\ , 2\ .$

THEOREME 6.12. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *z est $\mathcal{H}$-régulier.*

ii) *z est $\mathcal{H}_1$-régulier et $\mathcal{H}_2$-régulier.*

Démonstration. – i) $\Rightarrow$ ii). Evident.

ii) $\Rightarrow$ i). On conclut immédiatement grâce au lemme précédent.

Remarque 6.13. – La justification de définir la $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$-régularité moyennant les mesures μ_x^ω et λ_x^ω repose sur le fait que μ_x^ω est la mesure harmonique dans l'espace harmonique $(\Omega , \mathcal{H}_1)$ et λ_x^ω la mesure harmonique dans $(\Omega , \mathcal{H}_2)$.

En effet, pour tous les $f = (f_1 , 0) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, $\overline{\mathrm{H}}_1^{\omega,f} = {}^{\mathcal{H}_1}\overline{\mathrm{H}}_{f_1}^\omega$ et, pour $f = (f_1 , f_2) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$, on a toujours, $\overline{\mathrm{H}}_2^{\omega,f} = {}^{\mathcal{H}_2}\overline{\mathrm{H}}_{f_2}^\omega$ (voir 1.23).

DEFINITION 6.14. – *Soit* $\mathrm{E} \subset \partial\omega (\omega \in \mathfrak{U}_c)$. E *est dit* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, *$\mathcal{H}$-négligeable (pour ω) si, pour tout $x \in \omega$, on a respectivement :*

$$^{\mathcal{H}_1}\overline{\mathrm{H}}^{\omega,\chi_\mathrm{E}}(x) = 0 \ ; \ ^{\mathcal{H}_2}\overline{\mathrm{H}}^{\omega,\chi_\mathrm{E}}(x) = 0 \ ; \ ^{\mathcal{H}}\overline{\mathrm{H}}^{\omega;\chi_\mathrm{E},\chi_\mathrm{E}}(x) = \mathbf{0} \ [= (0 , 0)] \ .$$

(Les indices $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}$ se rapportent aux faisceaux correspondants).

LEMME 6.15. – *Soit $\omega \in \mathfrak{U}_c$ et $f \geqslant 0$ et bornée sur $\partial\omega$. Alors la fonction $x \to \int^* f d\nu_x^\omega$ est un $\mathcal{H}_1$-potentiel dans ω.*

Démonstration. – Considérons le couple $(0 , f) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$; d'après 6.7.1) et 6.7.3), le couple $\left(\int^* f d\nu_x^\omega , \int^* f d\lambda_x^\omega\right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$, d'où $\int^* f d\nu_x^\omega$ est une fonction $\mathcal{H}_1$-surharmonique $\geqslant 0$ dans ω.

Soit maintenant $\omega_0 \in \mathfrak{U}_c$, $\omega_0 \supset \overline{\omega}$. Grâce à 6.9, on peut trouver $(u_1 , u_2) \in \mathcal{H}(\omega_0)$, $u_j > 0$ $(j = 1 , 2)$, et $u_2 \geqslant f$ sur $\partial\omega$ (en multipliant au besoin (u_1 , u_2) par un $\lambda > 0$ convenable).

On aura donc, (6.8),

$$u_1(x) - \int u_1 d\mu_x^\omega = \int u_2 d\nu_x^\omega \geqslant \int^* f d\nu_x^\omega \geqslant 0$$

Mais $u_1(x) - \int u_1 d\mu_x^\omega = p_1^\omega(x)$ est un $\mathcal{H}_1$-potentiel dans ω.

D'où le résultat.

PROPOSITION 6.16. – *Soit $\omega \in \mathcal{U}_c$ et $f \geqslant 0$ et bornée sur $\partial\omega$. Si $\int^* f d\lambda_x^\omega = 0$, $\forall x \in \omega$, alors $\int^* f d\nu_x^\omega = 0$ dans ω ; et inversement.*

Démonstration. – Considérons le couple $F = (0, f) \in {}_+\mathcal{E}(\partial\omega)$. Le couple $(\overline{H}_1^{\omega,F}, \overline{H}_2^{\omega,F}) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$ et comme $\overline{H}_2^{\omega,F}(x) = \int^* f d\lambda_x^\omega = 0$ dans ω, alors $\overline{H}_1^{\omega,F} \in {}_+\mathcal{H}_1(\omega)$. En prenant, maintenant, comme dans la démonstration de 6.15 un $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(\omega_0)$, $\overline{\omega} \subset \omega_0 \in \mathcal{U}_c$ avec $u_i > 0$, et $u_2 \geqslant f$ sur $\partial\omega$, on a :

$$p_1(x) = \int u_2 d\nu_x^\omega \geqslant \int^* f d\nu_x^\omega \geqslant 0 \ ;$$

par conséquent, $\int^* f d\nu_x^\omega = 0$ dans ω, car $p_1(x)$ est un $\mathcal{H}_1$-potentiel dans ω et $\int^* f d\nu_x^\omega$ est $\mathcal{H}_1$-harmonique $\geqslant 0$.

La réciproque est vraie à cause de la compatibilité des couples biharmoniques.

COROLLAIRE 6.17. – *Soit* $E \subset \partial\omega$, $\omega \in \mathcal{U}_c$. *Si* $\lambda_x^\omega(E) = 0$ *pour tout* $x \in \omega$, *alors* $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall x \in \omega$ *; et inversement.*

Démonstration. – On applique la proposition 6.16, en prenant $f = \chi_E$.

Remarque 6.18. – Au cas où $(\Omega, \mathcal{H}_2)$ est un espace harmonique elliptique si $\lambda_{x_0}^\omega(E) = 0$ pour un $x_0 \in \omega$ connexe, alors $\nu_{x_0}^\omega(E) = 0$; et inversement (voir 2.2).

COROLLAIRE 6.19. – *Soit* $\mathcal{V}$ *un voisinage de* E. *Si* $\lambda_x^\omega(E) = 0$ *sur* $\overline{\mathcal{V}} \cap \omega$ *alors* $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall x \in \omega$.

Démonstration. – On considère $\varphi = (0, \chi_E) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$. Alors le couple

$$(v_1(x), v_2(x)) = (\overline{H}_1^{\omega,\varphi}(x), \overline{H}_2^{\omega,\varphi}(x)) = \left(\int^* \chi_E d\nu_x^\omega \ , \int^* \chi_E d\lambda_x^\omega\right)$$

appartient à ${}_+\mathcal{H}(\omega)$ et, ([2c], 4.2.4),

$$\overline{H}_2^{\omega,\varphi}(x) = {}^{\mathcal{H}_2}\overline{H}_{\chi_E}^\omega(x) = {}^{\mathcal{H}_2}\overline{H}_F^{\omega'}(x) \quad \text{dans} \quad \omega'$$

$$\text{où} \quad \omega' = \omega \backslash \overline{\mathcal{V}} \quad , \quad F = \begin{cases} \chi_E & \text{sur} \quad \partial\omega \\ \overline{H}_2^{\omega,\varphi} & \text{sur} \quad \partial\omega' \cap \omega \end{cases} ;$$

d'où $F = 0$ sur $\partial\omega'$ et, par conséquent,

$$\overline{H}_2^{\omega,\varphi}(x) = v_2(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \omega' .$$

On a alors $v_2(x) = 0$, $\forall x \in \omega$ et, (6.17), $\nu_x^\omega(E) = 0$, $\forall x \in \omega$.

THEOREME 6.20. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) E *est* $\mathcal{H}$*-négligeable.*

ii) E *est* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$*-négligeable.*
(voir 6.14).

Démonstration. – La partie i) $\Rightarrow$ ii) est immédiate grâce à 6.5.

ii) $\Rightarrow$ i). – Le théorème 6.5 et le corollaire 6.17 nous donnent le résultat.

Remarque 6.21. – La $\mathcal{H}$-régularité ainsi que l'étude des ensembles $\mathcal{H}$-négligeables se ramènent donc à l'étude correspondante dans les espaces harmoniques associés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ANANDAM, Espaces harmoniques sans potentiel positif, *Ann. Inst. Fourier,* 22, 4 (1972), 97-160.

[2] H. BAUER, a) Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen,* 146 (1962), 1-59.

b) Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie,* 1 (1963), 197-229.

c) Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, *Lecture notes n° 22,* Springer-Verlag, (1966).

[3] H. BAUER, Harmonic spaces and associated Markov processes, dans "*Potential theory*", p. 23-67, C.I.M.E., Ediz. Cremonese, Roma, (1970).

[4] N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, Axiomatic theory of harmonic functions. Balayage, *Ann. Inst. Fourier,* 15, 2 (1965), 37-70.

[5] J.M. BONY, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier,* 19, 1 (1969), 277-304.

[6] M. BRELOT, a) Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts. *Séminaire de théorie du potentiel,* 1, (1957), n° 6. Paris. Institut Henri Poincaré.

b) Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact. *Séminaire de théorie du potentiel,* 2, (1958), n° 1. Paris, Institut Henri Poincaré.

c) *Lectures on potential theory,* Tata Institute, Bombay, (1960).

[7] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Les Presses de l'Université de Montréal, (1966).

[8] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, Potential theory on harmonic spaces, Springer-Verlag, (1972).

[9] A. FRIEDMAN, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Inc., (1964).

[10] S. GUBER, On the potential theory of linear homogeneous parabolic partial differential equations of second order, Symposium on probability methods in analysis, *Lecture notes n° 31,* Springer-Verlag, (1967).

[11] L.L. HELMS, Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, (1969).

[12] R.M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier,* 12 (1962), 415-571.

[13] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes de fonctions et théorie du potentiel, I. Les noyaux associés à un cône de fonctions. *Séminaire de théorie du potentiel,* 11, 1966-67, n° 8. Paris, Institut Henri Poincaré.

[14] M. NICOLESCO, Les fonctions polyharmoniques, Paris, Hermann, (1936).

[15] E.P. SMYRNELIS, Mesures normales et fonctions harmoniques, *Bull. Sci. math.*, 2$^{\text{ème}}$ série, 95 (1971), 197-207.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1974
accepté par M. Brelot.

Emmanuel P. SMYRNELIS,
Université Paris VI – Tour 46
4, Place Jussieu
75005 – Paris.