ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Faisceaux d'espaces de Sobolev et principes du minimum

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 1 (1975), p. 127-149

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_127_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 127-149

FAISCEAUX D'ESPACES DE SOBOLEV ET PRINCIPES DU MINIMUM

par D. FEYEL et A. de la PRADELLE

On sait que la théorie du potentiel est née de l'étude de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. Dans les années 1945 et suivantes M. Brelot a étudié cette équation en ayant surtout en vue les propriétés de continuité et de semi-continuité des fonctions associées à cette équation. Ces idées lui ont permis de développer en 1955 une théorie axiomatique locale du potentiel, théorie de type topologique fondée sur une résolution d'un problème de Dirichlet abstrait. Nous avons récemment montré (cf. [3], [4] et [5]) comment l'étude d'une théorie locale du potentiel pouvait être abordée par l'utilisation systématique du principe du minimum local.

Tout ceci s'écarte évidemment beaucoup de l'équation de Laplace. C'est pourquoi il nous a paru intéressant d'essayer d'étudier une équation différentielle elliptique d'ordre 2 (i.e. du type $\Delta f = 0$) avec la même idée de principe du minimum local adapté cette fois-ci non pas aux fonctions continues ou s.c.i. mais aux classes de fonctions mesurables qui interviennent naturellement dans ce genre de problème.

Nous y arrivons grâce à l'emploi des faisceaux d'espaces de Sobolev et d'autre part la notion de trace qui permet de définir une forme simple de principe du minimum local. En fait, on raisonne exactement comme dans notre article [5] mais sur des classes de fonctions mesurables, ce qui simplifie souvent les démonstrations puisque l'on a pas, tout au moins dans le premier chapitre à s'occuper de la semi-continuité. Par exemple, grâce à l'existence locale de réduites dans les espaces de Sobolev, on peut balayer directement les formes linéaires positives sur ces espaces de Sobolev de la même manière que l'on balaie les mesures en théorie classique ou dans [5].

Dans le deuxième chapitre, les mêmes considérations sur les traces nous permettent de démontrer d'une manière simple à l'aide du résultat de continuité des solutions de Stampacchia, l'existence d'un représentant canonique s.c.i. Un tel résultat a déjà été obtenu par R.M. et M. Hervé dans [8] à l'aide de la théorie axiomatique du potentiel, mais nos motivations et notre point de vue sont entièrement différents.

On peut se poser le problème de la détermination des faisceaux de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$, à principe de minimum et contenant le faisceau des représentants canoniques des sursolutions : ce sera l'objet d'un prochain travail (cf. [7]) : d'ailleurs les analogies de raisonnement dont nous avons parlé plus haut s'y concrétiserons encore davantage.

PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

1.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^m (m \geqslant 1)$, on désigne par $W^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des f de carré intégrable sur Ω et telles que f' (gradient de f au sens des distributions) soit aussi de carré intégrable. $W^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|f\|^2_{W^2(\Omega)} = \int_\Omega [f^2 + |f'|^2]\, d\tau = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

où τ est la mesure de Lebesgue sur R^m

$|f'|$ est la norme euclidienne du vecteur f'.

On note $W_0^2(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ (fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω) dans $W^2(\Omega)$. On sait que si Ω est borné, la norme $\|f\|_{W^2(\Omega)}$ dans $W_0^2(\Omega)$ est équivalente à $\|f'\|_{L^2(\Omega)}$.

On note $W^2_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace vectoriel des $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ et telles que f' soit aussi dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Enfin W^2_{loc} désignera le faisceau défini par la donnée des $W^2_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout ouvert Ω de R^m.

2. Traces.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^m$ dont la frontière $\partial\Omega$ est une sous-variété lipschitzienne de dimensions $(m-1)$. Notons $\widetilde{W}^2_{loc}(\Omega)$ le sous-espace des $f \in W^2_{loc}(\Omega)$ telles que $f \in W^2(\omega \cap \Omega)$ pour tout ouvert ω borné dans $\mathbf{R}^m$. Alors (cf. appendice 1), tout $f \in \widetilde{W}^2_{loc}(\Omega)$ possède une trace $(\mathrm{T}rf)_{\partial\Omega}$ ou $\mathrm{T}rf$ sur $\partial\Omega$ qui appartient à $\mathbf{L}^2_{loc}(\partial\Omega, \sigma)$(1), et qui vaut la restriction de f à $\partial\Omega$ si f est localement lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$.

Si Ω est borné et si $f \in W^2(\Omega)$, alors $\mathrm{T}rf \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ et dans ce cas $W^2_0(\Omega)$ est exactement l'ensemble des $f \in W^2(\Omega)$ dont la trace est nulle.

3.

On considère un opérateur différentiel L défini sur $\mathbf{R}^m$ sous la forme :

$$Lf = \operatorname{div}(Af' + fX) - (Y, f') - cf$$

A est une matrice carrée à coefficients $\mathbf{L}^\infty_{loc}(\mathbf{R}^m)$,

X et Y sont des champs de vecteurs à coordonnées $\mathbf{L}^\infty_{loc}(\mathbf{R}^m)$,

c appartient à $\mathbf{L}^\infty_{loc}(\mathbf{R}^m)$(2).

L'opérateur L est supposé localement uniformément elliptique, c'est-à-dire que pour tout compact K, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'on ait :

$$(A\xi, \xi) \geqslant \epsilon\, |\xi|^2$$

pour tout champ ξ sur K.

Une sursolution locale faible de L dans un ouvert U est une

----

(1) σ est la mesure riemannienne $(m-1)$ dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

(2) On pourrait raffiner les hypothèses sur X, Y et c en tenant compte de ce que W^2_{loc} est inclus dans un $\mathbf{L}^p_{loc}$ pour $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}$ (cf. [11]), il faudrait alors modifier légèrement certains énoncés.

$f \in W^2_{loc}(U)$ vérifiant :

$$B_U(f, \varphi) = \int_U [(Af', \varphi') + f(X, \varphi') + \varphi(Y, f') + c\varphi f]\, d\tau \geqslant 0$$

pour toute

$$\varphi \geqslant 0\ ,\ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Il est clair que les sursolutions locales faibles de L forment un faisceau de cônes convexes inclus dans le faisceau W^2_{loc}. On notera $\mathfrak{F}$ ce faisceau.

Si ω est un ouvert borné, la forme bilinéaire B_ω est continue sur $W^2(\omega) \times W^2(\omega)$, et d'après [11], tout point possède un voisinage $\mathcal{V}$ tel que pour tout ouvert ω borné, $\bar{\omega} \subset \mathcal{V}, B_\omega$ soit coercitive sur $W^2_0(\omega) \times W^2_0(\omega)$. Plus précisément il existe une constante $\alpha > 0$ ne dépendant que de $\mathcal{V}$ et telle que l'on ait :

$$B_\omega(f, f) \geqslant \alpha\ \|f\|^2_{W^2(\omega)}$$

pour toute $f \in W^2_0(\omega)$.

Tout ouvert borné ω tel que $\bar{\omega}$ inclus dans un tel $\mathcal{V}$ sera appelé ouvert coercitif. D'après [10], pour tout ω coercitif et pour tout K convexe fermé inclus dans $W^2(\omega)$ tel que $u, v \in K$ entraîne $u - v \in W^2_0(\omega)$ il existe $u_0 \in K$, u_0 unique vérifiant :

$$B_\omega(u_0, v - u_0) \geqslant 0$$

pour tout $v \in K$.

u_0 sera appelé pseudo-projection de 0 sur K.

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPE DU MINIMUM, MAXIMALITE

PROPOSITION 1. – *Soit $\mathcal{B}_0$ une base d'ouverts ω coercitifs à frontières $\partial\omega$ lipschitziennes de dimensions $(m-1)$. Si $\mathcal{U}$ est ouvert, si $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ et si $\omega \in \mathcal{B}_0$, $\bar{\omega} \subset \mathcal{U}$, on a*
$\mathrm{Tr} f \geqslant 0$ *sur* $\partial\omega$ *entraîne* $f \geqslant 0$ *sur* ω.

Démonstration. –

$$B_\omega(f^-, f^-) = B_\omega(f^+ - f, f^-) = B_\omega(f^+, f^-) - B_\omega(f, f^-)$$
$$= 0 - B_\omega(f, f^-) \leqslant 0$$

car $\quad f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ et $f^- \in W_0^2(\omega)$ (cf. appendice 2)

On en déduit $f^- = 0$ d'après la coercitivité de B_ω.

Remarque. – La démonstration qui précède est valable si l'on suppose seulement $f \in W^2(\omega) \cap \mathfrak{F}(\omega)$.

Ce résultat conduit à la notion suivante :

DEFINITION 2. – *Soit* $f \in W^2_{loc}(\mathcal{U})$. *Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts coercitifs bornés à frontière lipschitzienne de dimension $(m-1)$. On dira que f est $\mathcal{B}$-surmédiane dans $\mathcal{U}$ si l'on a :*

pour tout $g \in \mathfrak{F}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}$ ouvert $\subset \mathcal{U}$ et pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathcal{V}$, on a :

$$\mathrm{Tr}(f+g) \geqslant 0 \quad dans \quad L^2(\partial\omega) \Rightarrow f+g \geqslant 0 \quad dans \quad W^2(\omega)$$

DEFINITION 3. – *Soit* $f \in W^2_{loc}(U)$, U *ouvert. On dira que f est* L *presque surharmonique si pour tout ouvert ω coercitif, $\bar{\omega} \subset U$, on a $f \geqslant H_f^{\partial\omega}$ (presque partout) dans ω. $H_f^{\partial\omega}$ désigne la pseudo-projection de 0 sur l'ensemble des éléments $\varphi \in W^2(\omega)$ tels que $\varphi - f \in W_0^2(\omega)$.*

Il est clair que toute f presque surharmonique dans un ouvert U est aussi $\mathcal{B}$-surmédiane dans U, quelle que soit la base $\mathcal{B}$ considérée dans la définition 2.

Ceci admet la réciproque.

THEOREME 4. — *Soit f une fonction $\mathcal{B}$-surmédiane dans un ouvert* U. *Alors f est presque surharmonique dans* U. (*On verra plus loin que c'est même une sursolution faible de* L *dans* U).

COROLLAIRE 5. — *Le préfaisceau $\mathcal{S}$ des fonctions presque surharmoniques est un préfaisceau maximal de cônes convexes vérifiant les conditions*

— $\mathcal{F} \subset \mathcal{S} \subset W^2_{loc}$

— *tout élément de $\mathcal{S}$ vérifie le principe du minimum relativement à la base $\mathcal{B}$.*

La démonstration du théorème s'appuiera sur le lemme suivant :

LEMME FONDAMENTAL 6. — *Soit $\varphi \in W^2(\omega)$, ω borné coercitif* ($\partial\omega$ *lipschitzien ou non*).

Notons R^ω_φ la pseudo-projection par rapport à B_ω de 0 sur l'ensemble des $f \in W^2(\omega)$, $f \geqslant \varphi$ et telles que $f - \varphi \in W^2_0(\omega)$. R^ω_φ a les propriétés suivantes :

a) $R^\omega_\varphi \in \mathcal{F}(\omega) \cap W^2(\omega)$

b) $R^\omega_\varphi \geqslant \varphi$

c) $\forall s \in \mathcal{F}(\omega) \cap W^2(\omega)$, $s \geqslant \varphi \Rightarrow s \geqslant R^\omega_\varphi$

d) δ ouvert, $\bar{\delta} \subset \omega$ et $\varphi \in -\mathcal{F}(\delta) \Rightarrow R^\omega_\varphi \in \mathcal{F}(\delta) \cap -\mathcal{F}(\delta)$

Démonstration. — le b) est évident

a) si $\psi \in W^2_0(\omega)$, $\psi \geqslant 0$, on a

$$B_\omega(R^\omega_\varphi , \psi) = B_\omega(R^\omega_\varphi , R^\omega_\varphi + \psi - R^\omega_\varphi) \geqslant 0$$

d'après l'inégalité caractérisant la pseudo-projection, car $\psi + R^\omega_\varphi$ majore φ pour $\psi \geqslant 0$.

On en déduit $R_\varphi^\omega \in \mathscr{F}(\omega)$

c) On sait (cf. [11]) que $s \wedge R_\varphi^\omega \in \mathscr{F}(\omega) \cap W^2(\omega)$ ([3]) on a alors :

$$B_\omega(R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega , R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega) = B_\omega(R_\varphi^\omega , R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega)$$
$$- B_\omega(s \wedge R_\varphi^\omega , R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega)$$

le premier terme du second membre est nul car il est $\leqslant 0$ puisque R_φ^ω est une pseudo-projection, et $\geqslant 0$ car $R_\varphi^\omega \in \mathscr{F}(\omega)$. Le second terme est $\leqslant 0$ car $s \wedge R_\varphi^\omega \in \mathscr{F}(\omega)$. Ainsi on a :

$$B_\omega(R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega , R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega) \leqslant 0$$

et $$R_\varphi^\omega - s \wedge R_\varphi^\omega = 0 \quad \text{d'où} \quad s \geqslant R_\varphi^\omega$$

d) On peut supposer que δ est une boule (caractère local de l'appartenance à $\mathscr{F}$). Considérons alors la speudo-projection f_0 de 0 sur l'ensemble des f vérifiant :

$$f = R_\varphi^\omega \quad \text{sur} \quad \omega \backslash \delta .$$

Soit $\psi \in W_0^2(\delta) \subset W_0^2(\omega)$. On a :

$$B_\delta(f_0 , \psi) = B_\omega(f_0 , \psi) = B_\omega(f_0 , f_0 + \psi - f_0) \geqslant 0$$

donc : $B_\delta(f_0 , \psi) = 0$ en changeant ψ en $-\psi$ ceci prouve que f_0 appartient à $\mathscr{F}(\delta) \cap - \mathscr{F}(\delta)$.

D'autre part, on a :

$$(\mathrm{Tr} f_0)_{\partial\delta} = (\mathrm{Tr}\, R_\varphi^\omega)_{\partial\delta} \geqslant (\mathrm{Tr}\varphi)_{\partial\delta}$$

Soit $$(\mathrm{Tr}(f_0 - \varphi))_{\partial\delta} \geqslant 0.$$

Si $\varphi \in -\mathscr{F}(\delta)$, on en déduit $f_0 - \varphi \geqslant 0$ dans δ et par suite $f_0 \geqslant R_\varphi^\omega$ dans ω.

Enfin on a :

$$(\mathrm{Tr}(R_\varphi^\omega - f_0))_{\partial\delta} = 0 \quad \text{d'où} \quad R_\varphi^\omega \geqslant f_0 \text{ dans } \omega .$$

([3]) On note $f \wedge g$ la fonction Inf (f, g)

Démonstration du théorème. – Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau de cônes convexes constitué de fonctions $\mathcal{B}$-surmédianes.

Soit ω un ouvert borné coercitif ($\partial\omega$ lipschitzien ou non).

Nous allons d'abord montrer le résultat suivant :

Pour toute forme linéaire λ positive (donc continue) sur $W^2(\omega)$, il existe une forme linéaire μ positive sur $W^2(\omega)$, "μ portée par $\partial\omega$" en ce sens que μ s'annule sur $W_0^2(\omega)$ et telle que :

$$\mu(f) \leqslant \lambda(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega)$$

En effet, notons K_λ l'ensemble des μ linéaires positives sur $W^2(\omega)$ vérifiant :

$$\mu(f) \leqslant \lambda(f) \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega).$$

K_λ est évidemment convexe fermé dans le dual de $W^2(\omega)$. Nous allons montrer qu'il est borné.

Soit $\varphi \in W^2(\omega)$. On a pour $\mu \in K_\lambda$

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \mu(|\varphi|) \leqslant \mu(R^\omega_{|\varphi|}) \leqslant \lambda(R^\omega_{|\varphi|})$$

d'après le lemme 4.

Ainsi K_λ est faiblement compact.

On considère alors la relation de préordre $\nu \prec \mu$ si $\nu(f) \leqslant \mu(f)$ pour toute $f \in \mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega)$ qui se lit "ν est une balayée de μ" par rapport à $\mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega)$.

Nous allons montrer que λ est minorée par un élément minimal : soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée maximale dans K_λ ($i \leqslant j \Rightarrow \mu_i \succ \mu_j$) et soit μ une valeur d'adhérence faible des μ_i suivant le filtre des sections de I. μ existe car K_λ est compact.

Si ν est telle que $\nu \prec \mu$, on a aussi $\nu \succ \mu$ sinon la chaîne des μ_i ne serait pas maximale. Ainsi μ est minimale et minore λ.

On va montrer maintenant que "μ est portée par $\partial\omega$". Soit $\delta \in \mathcal{B}_0$ tel que $\overline{\delta} \subset \omega$. Posons :

$$\hat{\mu}(\varphi) = \operatorname{Inf}\{\mu(f) \mid f \in \mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega),\ f \geqslant \varphi \text{ sur } \omega\backslash\delta\}$$

On a d'abord $\hat{\mu}(0) = 0$ à cause du principe du minimum vérifié par $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{B}_0$.

Ensuite, on a :

$$\hat{\mu}(-\varphi) \geqslant -\hat{\mu}(-\varphi) > -\infty$$

on a en effet

$$\hat{\mu}(-\varphi) \leqslant \mu(R^{\omega}_{-\varphi}) < +\infty$$

$\hat{\mu}$ est donc une forme sous-linéaire sur $W^2(\omega)$: soit ν une forme linéaire majorée par $\hat{\mu}$ sur $W^2(\omega)$.

ν est positive car :

$$\varphi \leqslant 0 \Rightarrow \nu(\varphi) \leqslant \hat{\mu}(\varphi) \leqslant 0$$

Si $$f \in \mathcal{G}(\omega) \cap W^2(\omega),$$

on a :

$$\nu(f) \leqslant \hat{\mu}(f) = \mu(f)$$

et par suite $\nu = \mu$ sur $\mathcal{G}(\omega) \wedge W^2(\omega)$. Il va en résulter $\nu = \mu$ sur $W_0^2(\omega)$:

Notons U^μ l'élément de $W_0^2(\omega)$ défini par :

$$B_\omega(U^\mu, \varphi) = \mu(\varphi) \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in W_0^2(\omega)$$

U^μ est le potentiel de μ. Il est clair que $U^\mu \in \mathcal{S}(\omega)$. On définit de même $U^\nu \in \mathcal{S}(\omega) \cap W_0^2(\omega)$. On a alors :

$$B_\omega(U^\mu, U^\nu) = \mu(U^\nu) = \nu(U^\nu) = B_\omega(U^\nu, U^\nu)$$

$$B_\omega(U^\nu, U^\mu) = \nu(U^\mu) = \mu(U^\mu) = B_\omega(U^\mu, U^\mu)$$

puis :

$$B_\omega(U^\mu - U^\nu, U^\mu - U^\nu) = B_\omega(U^\mu, U^\mu) - B_\omega(U^\mu, U^\nu) - B_\omega(U^\nu, U^\nu) + B_\omega(U^\nu, U^\mu) = 0$$

Ainsi $U^\mu = U^\nu$ et par suite $\mu = \nu$ sur $W_0^2(\omega)$.

D'autre part ν s'annule sur $\mathcal{D}(\delta)$ car $\hat{\mu}$ s'annule sur $\mathcal{D}(\delta)$. Donc $\mu = \nu$ sur $W_0^2(\omega)$, s'annule aussi sur $\mathcal{D}(\delta)$. Par partition de 1, on en déduit que μ s'annule sur $\mathcal{D}(\omega)$, donc sur $W_0^2(\omega)$ par densité.

On vient de montrer aussi que toute μ minimale majorée par λ est portée par $\partial\omega$.

Pour une μ minimale majorée par λ, on a alors : ($f \in W^2(\omega)$) :

$$\mu(f) = \mu(H_f^{\partial\omega}) \quad \text{car} \quad f - H_f^{\partial\omega} \in W_0^2(\omega)$$

et

$$\mu(H_f^{\partial\omega}) = \lambda(H_f^{\partial\omega}) \quad \text{car} \quad H_f^{\partial\omega} \in \mathfrak{F}(\omega) \cap -\mathfrak{F}(\omega)$$

D'où finalement :

$$\mu(f) = \lambda(H_f^{\partial\omega}).$$

Ceci prouve qu'il existe une seule μ minimale majorée par λ et qu'elle est portée par $\partial\omega$.

En particulier, si $f \in \mathfrak{G}(\omega) \cap W^2(\omega)$. On a :

$$\lambda(f) \geqslant \mu(f) = \lambda(H_f^{\partial\omega})$$

donc : $\lambda(f - H_f^{\partial\omega}) \geqslant 0$ pour toute $\lambda \geqslant 0$. On en déduit ainsi : $f \geqslant H_f^{\partial\omega}$ pour toute $f \in \mathfrak{G}(\omega) \cap W^2(\omega)$ et on a : $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$.

THEOREME 7. – *Toute fonction f presque surharmonique (donc toute fonction $\mathcal{B}$-surmédiane) est une sursolution locale faible.*

Autrement dit le faisceau $\mathfrak{F}$ des sursolutions locales est maximal dans l'ensemble des préfaisceaux de cônes convexes inclus dans W_{loc}^2 et vérifiant le principe de minimum sur une base $\mathcal{B}$ quelconque constituée d'ouverts ω bornés coercitifs à frontière $\partial\omega$ lipschitzienne de dimension $(m - 1)$.

COROLLAIRE 8. – *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est sursolution locale faible de* L *dans l'ouvert* U

b) $f \in W_{loc}^2(U)$ et $f \geqslant H_f^{\partial\omega}$, $\forall \omega$ *borné coercitif,* $\bar{\omega} \subset U$ *(i.e. f est presque surharmonique dans* U).

c) *Il existe une base $\mathcal{B}$ formée d'ouverts bornés coercitifs à frontière lipschitzienne de dimension $(m - 1)$ telle que l'on ait : pour toute $g \in \mathfrak{F}(\mathcal{V})$,* V *ouvert* $\subset$ V, *et pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset$ V, $\mathrm{Tr}(f + g) \geqslant 0$ *dans* $L^2(\partial\omega) \Rightarrow f + g \geqslant 0$ *dans* $W^2(\omega)$.

La démonstration s'appuiera sur les lemmes suivants :

LEMME 9. – *Soit ω une boule ou une couronne sphérique bornée coercitive. Soit* S *une sphère concentrique à ω partageant ω en deux composantes ω_1 et ω_2.*

Si $f \in \mathcal{S}(\omega) \cap W^2(\omega)$, la fonction $H^{\partial(\omega_1 \cup \omega_2)} = g$ est une sursolution faible de L *dans ω, et minore f.*

Démonstration. – Il est clair que g minore f $(f \in \mathcal{S}(\omega) \cap W^2(\omega))$. Soit $\widetilde{S}$ une autre sphère concentrique à S, de rayon légèrement supérieur, partageant ω en deux composantes $\widetilde{\omega}_1 \supset \omega_1$ et $\widetilde{\omega}_2 \subset \omega_2$. Soit la fonction $\widetilde{g} = H_f^{\partial(\widetilde{\omega}_1 \cup \widetilde{\omega}_2)}$. Considérons la réduite w de $g \wedge \widetilde{g}$ dans $\widetilde{\omega}_1$, soit $w = R_{g \wedge \widetilde{g}}^{\widetilde{\omega}_1}$.

Comme $\widetilde{g}$ est solution faible de L dans $\widetilde{\omega}_1$, on a :

$$\widetilde{g} \geqslant R_{g \wedge \widetilde{g}}^{\widetilde{\omega}_1} = w$$

dans $\widetilde{\omega}_1$. On en déduit $w \leqslant \widetilde{g} \leqslant g$ dans $\psi_1 \subset \widetilde{\omega}_1$. En effet, on a sur $\partial\omega_1$:

$$\mathrm{Tr}\, g = \mathrm{Tr}\, f \geqslant \mathrm{Tr}\, \widetilde{g},$$

donc $g \geqslant \widetilde{g}$ dans ω_1. On va maintenant montrer : $g \geqslant w$ dans $\widetilde{\omega}_1$. Posons :

$$\delta = B_{\widetilde{\omega}_1}(w - w \wedge g, w - w \wedge g) = B_{\widetilde{\omega}_1}(w, w - w \wedge g) - B_{\widetilde{\omega}_1}(w \wedge g, w - w \wedge g)$$

le premier terme du second membre est $\leqslant 0$ car w est une pseudo-projection ; il reste :

$$\delta \leqslant - B_{\widetilde{\omega}_1}(w \wedge g, w - w \wedge g) = - B_{\omega_1}(w \wedge g, w - w \wedge g) - B_{\omega_2 \cap \widetilde{\omega}_1}(w \wedge g, w - w \wedge g)$$

le premier terme est nul car $w = w \wedge g$ dans ω_1 puisque l'on a $w \leqslant g$ dans ω_1. Le second terme $B_{\omega_2 \cap \widetilde{\omega}_1}(w \wedge g, w - w \wedge g)$ est $\geqslant 0$ car dans la couronne $\omega_2 \cap \widetilde{\omega}_1$, $w \wedge g$ est une sursolution de L. On a finalement $\delta \leqslant 0$, et $w = w \wedge g$ dans $\widetilde{\omega}_1$, soit $w \leqslant g$.

Ainsi w vaut $g \wedge \widetilde{g}$ dans $\widetilde{\omega}_1$: $g \wedge \widetilde{g}$ est donc sursolution de L dans $\widetilde{\omega}_1$. De la même manière, on voit que $g \wedge \widetilde{g}$ est une sursolution de L dans ω_2, d'où finalement dans ω toute entière.

Considérons maintenant une suite $\widetilde{S}^{(n)}$ de sphères concentriques à S, de rayon tendant vers S, et les fonctions $g \wedge \widetilde{g}_n$ correspondantes.

La suite $v_n = g \wedge \widetilde{g}_n$ est bornée dans $W^2(\omega)$. En effet :

$$B_\omega(v_n, f - v_n) \geqslant 0 \quad \text{car} \quad f - v_n \in W_0^2(\omega),\ f \geqslant v_n$$

d'où

$$B_\omega(f, f - v_n) \geqslant B_\omega(f - v_n, f - v_n) \geqslant \alpha \ \|f - v_n\|^2$$

(α = constante de coercitivité de ω)

et
$$\alpha \ \|f - v_n\|^2 \leqslant M \ \|f\| \, . \, \|f - v_n\|$$

grâce à la continuité de B_ω sur $W^2(\omega) \times W_0^2(\omega)$. On en déduit

$$\|f - v_n\| \leqslant \frac{M}{\alpha} \ \|f\|$$

et la suite v_n est bornée en norme.

Soit v une valeur d'adhérence faible de v_n dans $W^2(\omega)$. Il est clair que v_n est stationnaire sur toute couronne compacte extérieure à ω_1. Donc v vaut g sur ω_2, et

$$\mathrm{T}rv = \mathrm{T}rg \quad \text{un} \quad \partial\omega_2$$

et aussi

$$\mathrm{T}rv = \mathrm{T}rg \quad \text{sur} \quad \partial\omega_1 .$$

Comme v et g sont deux L-solutions dans ω_1, elles sont égales dans ω_1, et finalement $v = g$ dans ω.

Ceci prouve que g est sursolution faible dans ω.

Démonstration du théorème 7. – Soit $f \in \mathfrak{S}(\mathrm{U})$, U ouvert, on doit montrer que f est une sursolution locale de L dans U. Il suffit de montrer que l'on a $f \in \mathfrak{F}(\Omega)$ pour toute boule Ω d'adhérence $\overline{\Omega} \subset \mathrm{U}$, Ω coercitive. Soit I un ensemble fini de sphères intérieures et concentriques à Ω.

Posons $$f_{\mathrm{I}} = \mathrm{H}_f^{\partial(\Omega \setminus \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i)}$$

D'après le lemme précédent, $f_{\mathrm{I}} \in \mathfrak{F}(\Omega)$ et on a encore la majoration :

$$\|f - f_{\mathrm{I}}\| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\alpha} \|f\|$$

(Démonstration identique à celle du lemme précédent).

Quand I parcourt toutes les parties finies de l'ensemble des sphères concentriques et intérieures à Ω, les f_{I} forment une famille filtrante croissante et bornée en norme dans $\mathrm{W}^2(\Omega)$.

Soit g une valeur d'adhérence faible des f_{I} : on a $\mathrm{T}rg = \mathrm{T}rf$ sur toute sphère concentrique à Ω.

Pour voir que $f = g$, il reste à prouver que toute $h \in \mathrm{W}^2(\Omega)$, telle que $\mathrm{T}rh = 0$ sur toute sphère intérieure et concentrique à Ω est nulle. Or, pour φ lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$, on a évidemment :

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_0^{\mathrm{R}} \|\mathrm{T}r\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega r)}\, \mathrm{d}r$$

En posant $\begin{cases} \mathrm{R} = \text{rayon de } \Omega \\ \Omega_r = \text{boule de concentrique à } \Omega, \text{ de rayon } r \end{cases}$

On en déduit la même formule pour toute $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{W}^2(\Omega)$ par convergence forte et dominée dans $\mathrm{W}^2(\Omega)$.

La même formule vaut pour $\varphi \in \mathrm{W}^2(\Omega)$ par convergence forte et monotone dans $\mathrm{W}^2(\Omega)$.

Ainsi, si l'on a $\mathrm{T}rh = 0$ sur $\partial\Omega_r$, $\forall r < \mathrm{R}$, on en déduit

$$\|h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0 \quad \text{d'où} \quad h = 0$$

Finalement $f = g$ dans Ω, et f est une sursolution locale faible de L dans Ω.

CHAPITRE II

REPRESENTANTS s.c.i.

On utilisera le résultat suivant de Stampacchia [11] (th. 7.1 p. 232) : toute solution locale faible de l'opérateur L a un représentant continu.

LEMME 10. – *Soit ω une boule coercitive suffisamment petite. $H_1^{\partial\omega}$ est strictement positive dans ω.*

Démonstration. – On sait déjà que $H_1^{\partial\omega}$ est continue dans ω. Considérons l'opérateur $\widetilde{L}$ défini par :

$$\widetilde{L}w = \operatorname{div} Aw' + (X - Y, w')$$

Soit $w \in W_0^2(\omega)$, ω étant une boule suffisamment petite, la solution de l'équation.

$$\widetilde{L}w = - L1 = c - \operatorname{div} X$$

D'après le théorème 4.2 p. 213 de [11], w est essentiellement bornée. Il s'ensuit que e^w appartient à $W^2(\omega) \cap L^\infty(\omega)$. Nous allons montrer que e^w est une L-sous-solution dans ω. On a pour

$$\varphi \geqslant 0 \,,\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$$

$$B_\omega(e^w, \varphi) = \int_\omega [(Aw', e^w\varphi') + (X, e^w\varphi') + e^w\varphi(Y, w') + ce^w\varphi]\, d\tau$$

Soit, en posant $\quad \psi = e^w\varphi \in W_0^2(\omega) \cap L^\infty(\omega)$

$$\begin{aligned} B_\omega(e^w, \varphi) = \int_\omega (Aw', \psi')\, d\tau - \int_\omega (Aw', w')\, \psi\, d\tau \\ + \int_\omega (X, \psi')\, d\tau - \int_\omega (X, \psi w')\, d\tau \\ + \int_\omega \psi (Y, w')\, d\tau + \int_\omega c\, \psi\, d\tau \end{aligned}$$

En désignant par $\widetilde{B}_\omega$ la forme bilinéaire associée à $\widetilde{L}$:

$$B_\omega(e^w, \varphi) = \widetilde{B}_\omega(w, \psi) + \int_\omega [(X, \psi') + c\psi]\, d\tau - \int_\omega (Aw', w')\psi d\tau$$

$$B_\omega(e^w, \varphi) = - \int_\omega (Aw', w')\psi d\tau \leqslant 0 \quad \text{car} \quad \psi \geqslant 0$$

D'autre part, on a $Tre^w = 1$ sur $\partial\omega$ car $w \in W_0^2(w)$, et par suite $e^w \leqslant H_1^{\partial\omega}$ dans ω. Or, il existe $M > -\infty$, telle que $w \geqslant -M$ dans ω. On a ainsi $H_1^{\partial\omega} \geqslant e^w \geqslant e^{-M} > 0$ dans ω.

c.q.f.d.

LEMME FONDAMENTAL 11. – *Soit ω un ouvert borné coercitif, et φ une fonction lipschitzienne sur $\overline{\omega}$.*

Alors R_φ^ω possède un représentant continu dans ω.

Démonstration. – Notons $\hat{R}_\varphi^\omega$ la fonction

$$\hat{R}_\varphi^\omega(x) = \lim_{y \to x \in \omega} \text{ess inf } R_\varphi^\omega(y)$$

On sait que $\hat{R}_\varphi^\omega$ est sci dans ω et la borne supérieure des fonctions continues minorant R_φ^ω presque partout. On a en particulier $\hat{R}_\varphi^\omega \geqslant \varphi$ dans ω.

Soit $a \in \omega$. Il existe une fonction h solution locale continue au voisinage de a et vérifiant $h(a) = 1$, d'après le lemme 10. Soit $\epsilon > 0$, on prend k tel que :

$$\varphi(a) < kh(a) < \hat{R}_\varphi^\omega(a) + \epsilon h(a)$$

Les inégalités subsistent sur une boule fermée $\overline{\alpha}$ de centre a, et l'on a alors :

$$\psi \leqslant kh \leqslant \hat{R}_\varphi^\omega + \epsilon h$$

sur $\overline{\alpha}$ d'où $kh \leqslant R_\varphi^\omega + \epsilon h$ presque partout sur α.

D'après le principe du minimum sur α, on a :

$$kh \leqslant H^{\partial\alpha}_{R_\varphi^\omega + \epsilon h} \leqslant R_\varphi^\omega + \epsilon h$$

presque partout sur α.

Considérons alors

$$w = \begin{cases} \operatorname{Inf}(\mathrm{R}_\varphi^\omega, \mathrm{H}^{\partial\alpha}_{\mathrm{R}_\varphi^\omega + \epsilon h}) & \text{dans } \alpha \\ \mathrm{R}_\varphi^\omega & \text{dans } \omega\backslash\overline{\alpha} \end{cases}$$

On sait (cf. appendice 4) que $w \in \mathrm{W}^2(\omega)$, et que w est une L-sursolution locale dans ω.

Or, w majore φ presque partout dans α, donc w, puis $\mathrm{H}^{\partial\alpha}_{\mathrm{R}_\varphi^\omega + \epsilon h}$ majore $\mathrm{R}_\varphi^\omega$ presque partout dans α.

Posons alors

$$\check{\mathrm{R}}_\varphi^\omega(a) = \operatorname*{Lim\,ess\,sup}_{y \to a} \mathrm{R}_\varphi^\omega(y) \leqslant \mathrm{H}^{\partial\alpha}_{\mathrm{R}_\varphi^\omega}(a) + \epsilon h(a)$$

Or $\mathrm{H}^{\partial\alpha}_{\mathrm{R}_\varphi^\omega}$ minore $\mathrm{R}_\varphi^\omega$ presque partout dans α. Comme elle est continue, elle minore $\hat{\mathrm{R}}_\varphi^\omega$ dans α.

Ainsi :

$$\check{\mathrm{R}}_\varphi^\omega(a) \leqslant \hat{\mathrm{R}}_\varphi^\omega(a) + \epsilon h(a)$$

ϵ étant arbitraire :

$$\check{\mathrm{R}}_\varphi^\omega(a) = \hat{\mathrm{R}}_\varphi^\omega(a)$$

les deux fonctions $\hat{\mathrm{R}}_\varphi^\omega$ et $\check{\mathrm{R}}_\varphi^\omega$ sont donc égales dans ω : elles y sont continues et sont un représentant de $\mathrm{R}_\varphi^\omega$ car elles encadrent $\mathrm{R}_\varphi^\omega$ presque partout.

THEOREME 12. – *Soit pour tout ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbf{R}^m$, *l'application* $i_{\mathcal{U}}$ *qui à toute* $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ *associe la fonction* $\hat{f}$ *définie par :*

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Lim\,ess\,inf}_{y \to x} f(y) \text{ pour tout } x \in \mathcal{U}$$

a) *Alors,* $\hat{f}$ *est* sci $> -\infty$ *dans* $\mathcal{U}$

b) $\hat{f}$ *est un représentant de* f *dans* $\mathcal{U}$

c) *les applications* $i_{\mathcal{U}}$ *sont linéaires et définissent un isomorphisme du faisceau* $\mathfrak{F}$ *sur un faisceau* $\hat{\mathfrak{F}}$ *de cônes convexes de fonctions* sci $> -\infty$

d) *de plus* $\hat{\mathfrak{F}}$ *vérifie le principe du minimum sur la base* $\mathcal{B}$ *de tous les ouverts coercitifs à frontière lipschitzienne de dimension* $(m-1)$.

Démonstration

a) Soit ω une boule coercitive d'adhérence $\bar{\omega} \subset \mathcal{U}$, on a $f \geqslant H_f^{\partial\omega}$ presque partout dans ω d'où $\hat{f} \geqslant H_f^{\partial\omega} > -\infty$ dans ω. Ceci prouve déjà que $\hat{f}$ est sci $> -\infty$ dans $\mathcal{U}$.

b) D'autre part, toujours dans ω, il existe une suite croissante de fonctions $\varphi_n \geqslant 0$ à support compact dans ω et telles que

$$\hat{f} - H_f^{\partial\omega} = \sup_n \varphi_n$$

dans ω.

Considérons la suite des réduites $R_{\varphi_n}^{\omega}$ qui ont des représentants continus dans ω. D'après le lemme 6, on a :

$$\hat{f} - H_f^{\partial\omega} \geqslant R_{\varphi_n}^{\omega}$$

presque partout, donc partout dans ω.

On sait (cf. appendice) que la suite $R_{\varphi_n}^{\omega}$ converge fortement dans $W_0^2(\omega)$ vers un $p \in W_0^2(\omega)$.

Evidemment, on a presque partout :

$$p = \operatorname*{Sup}_n R_{\varphi_n}^{\omega} = \hat{f} - H_f^{\partial\omega}$$

Ceci prouve que l'on a $\hat{f} \in W_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{U})$.

D'autre part, pour toute boule ω coercitive, $\bar{\omega} \subset \mathcal{U}$, on a :

$$\mathrm{Tr}\hat{f} = \mathrm{Tr}\, H_f^{\partial\omega} = \mathrm{Tr} f \quad \text{sur } \partial\omega$$

f et $\hat{f}$ sont deux éléments de $W_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{U})$ ayant mêmes traces sur toutes les frontières de boules fermées incluses dans $\mathcal{U}$ et par suite $f = \hat{f}$ presque partout.

c) Soit $a \in \mathcal{U}$, on a d'abord :

$\hat{f}(a) = \operatorname{Sup}\{H_f^{\partial\omega}(a) \mid \omega = \text{boule coercitive de centre } a,\ \bar{\omega} \subset \mathcal{U}\} = \lambda$
Il est clair que l'on a l'inégalité $\hat{f}(a) \geqslant \lambda$.

Soit h une L-solution au voisinage de a, continue en a, et vérifiant $h(a) = 1$. Soit $m < \hat{f}(a)$ et par suite $f > mh$ presque partout au voisinage de a.

Si ω est assez petite, on a :

$$H_f^{\partial\omega} \geqslant mh \quad \text{sur} \quad \omega$$

donc $\lambda \geqslant mh(a) = m$ pour tout $m < \hat{f}(a)$ c'est-à-dire : $\hat{f}(a) = \lambda$.

On en déduit que l'application i_u est linéaire. D'autre part, si l'on à $\hat{f} = \hat{g}$ dans $\mathfrak{U}$, on a aussi $f = g$ presque partout : i_u est donc une bijection $\mathfrak{F}(\mathfrak{U})$ sur un cône $\hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{U})$.

$\mathfrak{F}$ est un faisceau : on le voit en remarquant que R^m est à base dénombrable.

d) Soit $f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{U})$, et soit ω coercitif, $\bar{\omega} \subset \mathfrak{U}$, $\partial\omega$ lipschitzienne de dimension $(m-1)$, tels que l'on ait $\hat{f} \geqslant 0$ sur $\partial\omega$ (restriction de $\hat{f}$ à $\partial\omega$).

Pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\hat{f} + \epsilon > 0$ au voisinage de $\partial\omega$ ($\hat{f}$ est sci) donc $f + \epsilon \geqslant 0$ presque partout au voisinage de $\partial\omega$ puis $\mathrm{Tr}f + \epsilon \geqslant 0$ dans $\mathbf{L}^2(\partial\omega)$, pour tout $\epsilon > 0$. On en déduit $\mathrm{Tr}f \geqslant 0$ dans $\mathbf{L}^2(\partial\omega)$ et $f \geqslant 0$ dans $W^2(\omega)$, finalement : $\hat{f} \geqslant 0$ partout dans ω.

PROPOSITION 13. — *Pour toute $f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{U})$, $\hat{f}$ est un représentant quasi-continu de f et pour toute boule coercitive ω, $\bar{\omega} \subset \mathfrak{U}$, il existe une suite croissante $g_n \in \mathfrak{F}(\omega)$, g_n continue, telle que $\hat{f} = \operatorname{Sup}_n g_n$.*

Démonstration. — Rappelons d'abord que g est dite quasi-continue dans un ouvert $\mathfrak{U}$ si [cf. [2]] pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert α de capacité newtonienne $< \epsilon$, tel que la restriction de g à $\mathfrak{U}\backslash\alpha$ soit finie continue.

Soit ω une boule coercitive, $\bar{\omega} \subset \mathfrak{U}$ on a vu au cours de la démonstration b) du théorème 12, que $\hat{f} - H_f^{\partial\omega}$ était la borne supérieure d'une suite croissante ou fonctions continues $R_{\varphi_n}^{\omega}$ telles que :

— $R_{\varphi_n}^{\omega} \in W_0^2(\omega)$

— la suite $R_{\varphi_n}^{\omega}$ converge dans l'espace $W_0^2(\omega)$ vers $f - H_f^{\partial\omega}$.

D'après un argument classique de Deny [cf. [2]], on sait alors que $R_{\varphi_n}^{\omega}$ converge quasi-partout vers un élément quasi-continu g dans ω qui vaut donc quasi-partout $\hat{f} - H_f^{\partial\omega}$. Comme $\mathfrak{U}$ est à base dénombrable, le résultat s'ensuit.

APPENDICE

Nous indiquons ici brièvement quelques propriétés élémentaires que nous avons utilisées. On pourra se reporter à [9] pour des résultats complémentaires.

1. Traces.

Cas d'un hyperplan. – Soit E un demi espace limité par un hyperplan $H = \partial E$. Il existe une et une seule application linéaire continue $f \rightsquigarrow \mathrm{Tr} f$ de $W^2_{loc}(E)$ dans $L^2_{loc}(H)$ telle que $\mathrm{Tr} f =$ restriction de f à H pour f localement lipschitzienne sur $\overline{E}$.

L'unicité résulte de la densité des fonctions localement lipschitziennes.

Pour l'existence on peut supposer que E s'écrit sous la forme $\{y > 0\}$; à l'aide d'une partition de classe C^1 fixée de 1, on est ramené au cas des éléments à support compact. Si φ est de classe C^1 à support compact dans $\overline{E}$, on a :

$$\varphi(x\,,0) = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x\,,t)\,dt$$

d'où

$$\int_H \varphi(x\,,0)^2\, d\sigma(x) \leqslant K \int_E \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x\,,y)\right|^2 d\tau(x\,,y)$$

σ étant la mesure de Lebesgue de dimension $(m-1)$ sur H, et K étant une constante qui ne dépend que du support de φ. On en déduit le résultat par densité (la partition de 1 ayant été fixée une fois pour toutes).

Il reste à voir que la trace de f localement lipschitzienne coïncide avec la restriction de f : on prolonge f par symétrie en $\tilde{f}$ sur l'autre demi-espace. Par régularisation, on obtient une suite $\tilde{f}_n$ de fonctions de classes C^∞ qui converge vers f uniformément sur tout compact, et aussi dans l'espace $W^2_{loc}(\mathbf{R}^m)$. Le résultat s'ensuit.

On voit d'ailleurs du même coup que les fonctions de $C^\infty(\overline{E})$ sont denses dans $\widetilde{W}^2_{loc}(E)$ et que toute $f \in \widetilde{W}^2_{loc}(E)$ admet un prolongement par symétrie en une $\tilde{f} \in W^2_{loc}(\mathbf{R}^m)$.

Cas général. – Si la frontière $\partial\Omega$ de Ω est lipschitzienne : c'est à-dire pour tout $a \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans $\mathbf{R}^m$, un voisinage W_a de 0 dans $\mathbf{R}^m$, et un homéomorphisme Φ_a lipschitzien ainsi que Φ_a^{-1} de V_a sur W_a tel que l'image de $\partial\Omega \cap V_a$ soit la trace de W_a sur un hyperplan. On en déduit le résultat (existence et unicité) à l'aide d'une partition de 1 et transport de structure.

Il est clair que si Ω est borné et $f \in W^2(\Omega)$, alors $\mathrm{T}rf \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$. Remarquons enfin, que $f \in \widetilde{W}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $f \geqslant 0$ dans Ω entraîne $\mathrm{T}rf \geqslant 0$ sur $\partial\omega$.

2.

Si $f \in W^2(\Omega)$, *alors* $f' = \mathrm{Sup}\,(f, 0) \in W^2(\Omega)$. On approche la fonction $x \rightsquigarrow x^+$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par une suite γ_n croissante de classe C^1, telle que $|\gamma_n'| \leqslant 1$. Si f est de classe C^1 dans Ω, on a

$$(\gamma_n \circ f)' = (\gamma_n' \circ f) \times f'$$

On obtient la même formule pour chaque valeur de n, pour toute $f \in W^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ par densité. Si $f \in W^2(\Omega)$, on en déduit que $\gamma_n \circ f$ appartient aussi à $W^2(\Omega)$. Quand n tend vers ∞, $\gamma_n \circ f$ tend vers f^+ dans $L^2(\Omega)$. D'autre part la suite $(\gamma_n \circ f)'$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Ainsi $\gamma_n \circ f$ est bornée dans $W^2(\Omega)$, à des valeurs d'adhérence faible qui ne peuvent être que f^+. Donc $f^+ \in W^2(\Omega)$. Le gradient est donc la limite faible de la suite $(\gamma_n' \circ f) \times f'$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Finalement on a :

$$(f^+)' = f' \cdot \chi_A$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A où f est > 0.

Si Ω est borné, et si B_Ω est la forme bilinéaire associée à l'opérateur L (cf. ch. I), on a

$$B_\Omega(f^+, f^-) = \int_\Omega [(A(f^+)', (f^-)') + f^+(X, (f^{-1})) + f^-(Y, (f^+)^-) + cf^+ f^-]\, d\tau = 0$$

3.

Soit ω un ouvert L-coercitif, et soit p_n une suite croissante de potentiels (i.e. $p_n \in W_0^2(\omega)$ et $Lp_n \leqslant 0$) majorés par un L-potentiel fixe f. Alors p_n converge fortement dans $W_0^2(\omega)$.

En effet, on a d'abord :

$$\alpha \| f - p_n \|^2 \leqslant B_\omega(f - p_n , f - p_n) \leqslant B_\omega(f, f - p_n) \leqslant M \| f \| \, \| f - p_n \|$$

où α est la constante de coercitivité de ω, car :

$$B_\omega(p_n , f - p_n) \geqslant 0$$

puisque p_n est un L-potentiel et que $f - p_n \geqslant 0$

Il vient alors

$$\alpha \| f - p_n \| \leqslant \frac{M}{\alpha} \| f \|$$

et la suite p_n est bornée en norme.

Soit p une valeur d'adhérence faible de la suite p_n : c'est la limite faible de p_n car la suite p_n est croissante. On a :

$$\alpha \| p - p_n \|^2 \leqslant B_\omega(p - p_n , p - p_n) \leqslant B_\omega(p , p - p_n)$$

d'où il résulte que p est en fait limite forte de la suite p_n.

4. Propriété de tronquage.

Soit f une sursolution locale faible de L dans un ouvert $\mathfrak{U}$. Soit ω_0 un ouvert L-coercitif, $\bar{\omega}_0 \subset \mathfrak{U}$. Pour tout ω ouvert, $\bar{\omega} \subset \omega_0$, $\partial\omega$ lipschitzienne de dimension $(m-1)$, et toute $g \in W^2(\omega)$, g sursolution faible de L dans ω vérifiant

$$\operatorname{Tr} g \geqslant \operatorname{Tr} f \quad sur \quad \partial\omega ,$$

la fonction :

$$w = \begin{cases} f \wedge g & dans \quad \omega \\ f & dans \quad \mathfrak{U} \setminus \omega \end{cases}$$

est une sursolution locale faible de L dans $\mathfrak{U}$.

Démonstration. – Soit K l'ensemble convexe fermé des $v \in W^2(\omega_0)$ et telles que :

$$v \geqslant w \quad \text{sur} \quad \omega_0$$
$$v - w \in W_0^2(\omega_0)$$

Soit u la pseudo-projection de 0 sur K, u n'est autre que $R_w^{\omega_0}$.

On va montrer que u vaut w dans ω_0 : le résultat en découlera

Posons :

$$\delta = B_{\omega_0}(u - u \wedge f, u - u \wedge f) = - B_{\omega_0}(u \wedge f, u - u \wedge f)$$

car u est pseudo-projection de 0 sur K et $u \wedge f \in K$.

D'où :

$$\delta \leqslant B_{\omega_0}(f - u \wedge f, u - u \wedge f)$$

car f est une sursolution et $u - u \wedge f \geqslant 0$. Ce dernier terme est nul car $u - u \wedge f$ et $f - u \wedge f$ sont nuls presque partout ainsi que leurs dérivées sur deux ensembles complémentaires (cf. appendice 2°).

On en déduit $u - u \wedge f = 0$ dans ω_0 et $u \leqslant f$ dans ω_0, et

$$u = w \quad \text{sur} \quad \omega_0 \backslash \omega .$$

D'autre part, on a :

$B_{\omega_0}(u, w - u) \geqslant 0$ car u est la pseudo-projection de 0 sur K et $w \in K$.
et $B_{\omega_0}(u, w - u) \leqslant 0$ car u est une L-sursolution et $w - u \leqslant 0$.

Il en résulte $B_{\omega_0}(u, w - u) = 0$ d'où $B_\omega(u, w - u) = 0$

car $$w - u \in W_0^2(\omega).$$

On a alors :

$$B_\omega(u - w, u - w) = B_\omega(u, u - w) - B_\omega(w, u - w) =$$
$$= - B_\omega(f \wedge g, u - w)$$

donc $B_\omega(u - w, v - w) = 0$ parce que $u - w \geqslant 0$, et que $f \wedge g = w$ est sursolution dans ω. Finalement $u = w$ dans ω_0.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Eléments de la théorie classique du potentiel, *C.D.U.* 4ème édition, 1969.

[2] J. DENY, Les Potentiels d'énergie finie, *Acta. Math.*, 82 (1950) 103-183.

[3] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Principe du minimum et maximalité dans les préfaisceaux. Esquisse d'une théorie locale, *C.R. Ac. Sc.*, 272. p. 19.

[4] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Quelques propriétés de la réduite dans les préfaisceaux maximaux, *C.R. Acad. Sc.*, 274. p. 1285.

[5] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Principe du minimum et préfaisceaux maximaux, *Ann. Inst. Fourier*, 1974 (à paraître).

[6] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Application du principe du minimum et de la maximalité à l'étude d'un opérateur elliptique du second ordre, *C.R. Ac. Sc.*, 278, p. 245.

[7] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Application du principe du minimum et de la maximalité à l'étude d'un opérateur elliptique du second ordre (II), *C.R. Ac. Sc.*, 278, p. 487.

[8] R.M. et M. HERVE, Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, 19. Fasc. 1 (1969), 305-359.

[9] Jr. MORREY, Multiple integrals in the calculus of variations, Springer.

[10] G. STAMPACCHIA, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C.R. Ac. Sc.*, 268 (1964), 4413.

[11] G. STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, XV. Fasc. 1 (1965), 189-258.

Manuscrit reçu le 22 avril 1974
accepté par M. Brelot.

D. FEYEL et A. de La PRADELLE,
Université de Paris VI
Mathématiques – Tour 46
4 place Jussieu
75230 – Paris Cedex 05.