ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LAMOUREUX

Feuilles non captées et feuilles denses

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 285-293

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_285_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 285-293

FEUILLES NON CAPTÉES ET FEUILLES DENSES

par Claude LAMOUREUX

Nous avons obtenu ailleurs des résultats de captage pour certaines feuilles de feuilletages de codimension un de différentiabilité transverse variant de 0 à 2 selon les cas.

Par exemple, les feuilles étudiées en [5] admettent dans leur adhérence un ensemble compact saturé non vide ; en [7] elles admettent une transversale fermée constituant une famille bordante ou une famille simplement bordante, cf. Théorèmes A ou B, avec des lacets contenus dans des feuilles du feuilletage ; les feuilles de [4] ont un sécant d'homotopie relativement petit et des résultats analogues sont également obtenus pour des feuilles de petit sécant d'homologie en [7].

Ces résultats nous ont permis de démontrer de nombreuses propriétés concernant les feuilles exceptionnelles, la structure de l'enveloppe de certaines réunions d'ensembles fermés saturés, et la différence symétrique des saturés de transversales fermées librement homotopes ou homologues.

Nous en avons alors déduit plusieurs théorèmes concernant le type et la structure de l'adhérence d'une feuille non captée [3 , 4, 5 , 7] ; puisqu'un feuilletage sans holonomie est sans feuilles captées, ces théorèmes permettent à leur tour de déterminer la structure de certains feuilletages sans holonomie, cf. [6] et [7] par exemple.

Le but de ce travail est de démontrer les théorèmes 1 et 2 ci-dessous, ainsi que le Corollaire 1 ; ils concernent cette fois les feuilles qui ont un sécant d'homotopie "suffisamment gros", c'est-à-dire des feuilles qui sont coupées par deux transversales fermées dont les classes d'homotopie commutent et sont suffisamment "différentes" en un sens que nous allons préciser : une feuille ayant un gros sécant d'homotopie ne peut être fermée ; elle peut être dense par exemple ; mais elle est nécessairement captée si elle est nulle part dense et si le feuilletage est transversalement de classe C^2.

1. Enoncé des résultats.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté d'une variété X compacte ou non, avec ou sans bord. Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ et soit $i : (F, x_0) \to (X, x_0)$ l'injection canonique pointée de la feuille F dans la variété feuilletée.

Toute transversale fermée τ à $\mathcal{F}$ coupant la feuille F en x_0 sera considérée, d'au moins une façon, comme un lacet τ^+ de X, d'extrémités x_0 et orienté par l'orientation transverse du feuilletage $\mathcal{F}$. La classe de ce lacet τ^+ dans $\pi_1(X, x_0)$ est alors notée $[\tau^+]$.

La condition D intervenant dans l'énoncé des théorèmes peut alors s'énoncer ainsi :

Une feuille F du feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$ vérifie la condition D si et seulement s'il existe deux transversales fermées τ_1 et τ_2 à $\mathcal{F}$ se coupant au point x_0 de F vérifiant les deux propriétés suivantes :

D i) les classes $[\tau_1^+]$ et $[\tau_2^+]$ de $\pi_1(X, x_0)$ commutent ;

D ii) pour tout couple (m, n) d'entiers relatifs non tous deux nuls, $[\tau_1^+]^m . [\tau_2^+]^n$ n'est pas dans le sous-groupe $i_\# \pi_1(F, x_0)$.

On peut vérifier aisément que les divers choix que nous avons dû faire n'interviennent pas réellement dans l'énoncé de la condition D ; nous dirons alors que *la feuille* F *du feuilletage transversalement orientable* $\mathcal{F}$, introduite dans l'alinea précédent, *vérifie la condition D,* sans qu'il y ait eu lieu de préciser une orientation transverse, un point-base de la feuille F et un paramétrage pour chaque transversale fermée à $\mathcal{F}$ contenant le point-base.

La lettre D choisie se veut rappeler les *deux* transversales fermées "suffisamment différentes" τ_1 et τ_2, ainsi que le mot *dense* apparaissant dans l'énoncé du Corollaire 1.

Les résultats principaux de ce travail s'énoncent alors ainsi :

THEOREME 1. – *Soit* F *une feuille d'un feuilletage (transversalement de classe* C^2*) transversalement orientable* $\mathfrak{F}$ *de codimension 1 d'une variété* X *compacte ou non, avec ou sans bord. Si* F *vérifie la condition* D, *alors* F *n'est pas fermée.*

THEOREME 2. – *Lorsque le feuilletage* $\mathfrak{F}$ *est transversalement de classe* C^2 *et si la feuille* F *vérifiant la condition* D *est propre ou exceptionnelle, alors* F *est une feuille captée.*

Les remarques qui suivent ont pour but de montrer le caractère optimal des Théorèmes 1 et 2 ; elles concernent respectivement 1) un exemple de situation où les théorèmes 1 et 2 s'appliquent, voir aussi le Corollaire 1 ; 2) l'hypothèse de différentiabilité transverse dans le théorème 2 ; 3) l'hypothèse sur le type de la feuille F dans le théorème 2 ; 4) le rôle de la condition D ii) ; 5) le rôle de la condition D i).

Remarque 1. – Soit $\mathfrak{A}$ un feuilletage (analytique) orientable du tore T^2 admettant exactement un cycle-limite. Alors la feuille compacte F_0 de $\mathfrak{A}$ ne vérifie pas la condition D ; les autres feuilles de $\mathfrak{A}$ vérifient toutes la condition D : elles ne sont pas fermées, d'après le théorème 1, elles sont même captées parce qu'elles sont propres, d'après le théorème 2.

Remarque 2. – Soit $\mathfrak{D}$ le feuilletage orientable de classe C^1 défini sur le tore T^2 par Denjoy [1]. Les feuilles de $\mathfrak{D}$ sont soit propres, soit exceptionnelles ; elles vérifient toutes la condition D ; elles ne sont pas fermées, cf. Théorème 1, et pourtant aucune d'elles n'est captée, cf. Théorème 2. Le Théorème 1 reste toutefois valable sous des hypothèses de différentiabilité nettement plus faibles.

Remarque 3. – Soit $\mathfrak{F}_\mu$ un feuilletage linéaire de T^2 de pente μ irrationnelle. Toute feuille de $\mathfrak{F}_\mu$ est dense et vérifie la condition D ; pourtant, aucune d'elles n'est captée.

Remarque 4. – Une feuille d'un feuilletage orientable de classe C^ω admettant un couple de transversales fermées vérifiant D i), mais ne vérifiant pas D ii), peut fort bien être fermée, et a fortiori non captée, cf. la feuille F_0 de la remarque 1.

Remarque 5. – Une feuille d'un feuilletage orientable de classe C^r admettant un couple de transversales fermées vérifiant D ii), mais ne vérifiant pas D i), peut fort bien être fermée, et a fortiori non captée, cf. selon la valeur de r, la feuille fermée introduite dans l'un des feuilletages $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}_\mu$ par la soustraction de deux points distincts de T^2 contenus dans une même feuille non compacte de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}_\mu$ respectivement.

La relation entre le Théorème 2 et les feuilles denses mentionnées dans le titre est fournie par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. – *Pour qu'une feuille* F *non captée d'un feuilletage transversalement orientable et transversalement de classe* C^2 *soit une feuille dense, il suffit qu'elle vérifie la condition* D.

Le Corollaire 1 admet la conséquence directe suivante : *une feuille simplement connexe non captée dont le sécant d'homotopie contient un semi-groupe abélien de rang deux est une feuille dense.*

En revanche, la remarque 5 fournit des feuilles simplement connexes non captées et non denses, dont pourtant le *sécant d'homologie* contient un semi-groupe abélien libre de rang deux.

La condition D a été formulée d'une façon *algébrique* qui la rend d'emploi particulièrement commode. La démonstration des Théorèmes 1 et 2 montrera mieux pourquoi ce cadre algébrique reflète de façon assez précise la géométrie du feuilletage $\mathcal{F}$ au voisinage de l'adhérence de la feuille F dans X.

Contrairement à ce que son énoncé pourrait laisser croire, cette condition D n'a aucun caractère technique ; elle nous a été dictée par l'étude de certains exemples.

En effet, la condition D est également très souvent nécessaire à ce qu'une feuille F non captée d'un feuilletage transversalement C^2 soit dense, cf. les feuilletages produits sur $S^1 \times R^2$ et $S^1 \times S^2$ et les remarques 4 et 5 par exemple.

Cet aspect *à la fois nécessaire et suffisant* de la condition D apparait clairement dans les feuilletages avec ou sans holonomie des tores, et dans les feuilletages sans holonomie des variétés compactes et de certaines variétés non compactes (cf. le rôle déterminant du rang $p(\mathcal{F})$ du quotient abélien libre de $\pi_1(X, x_0)$ par $i_{\#}\pi_1(F, x_0))$. Il sera utilisé dans des travaux ultérieurs [8] en relation avec le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ et la valeur de $d(F, \mathcal{F})$ de [4].

Le Théorème 2 et le plan de sa démonstration ont été donnés en [3].

2. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

La feuille F introduite dans les énoncés des Théorèmes 1 et 2 vérifie la condition D : il existe donc deux lacets τ_1^+ et τ_2^+ de X représentant deux transversales fermées τ_1 et τ_2 à $\mathcal{F}$. En posant, pour simplifier, $\alpha = [\tau_1^+]$ et $\beta = [\tau_2^+]$, les conditions D i) et D ii) s'écrivent $\alpha\beta = \beta\alpha$, et $\alpha^m . \beta^n \neq i_{\#}(\lambda)$ pour tout couple d'entiers (m, n) non tous deux nuls et pour tout élément λ de $\pi_1(F, x_0)$, où le point-base x_0 de X est bien entendu choisi dans F.

Si l'une des classes α ou β est un élément de torsion de $\pi_1(X, x_0)$, alors la feuille F est coupée par une transversale fermée homotope à zéro. La feuille F n'est pas fermée et elle est captée, d'après le Théorème 1 de [3] ; cela démontre les Théorèmes 1 et 2 dans ce cas.

Nous pouvons donc supposer sans restreindre la généralité que le sous-groupe G engendré par α et β dans $\pi_1(X, x_0)$ est sans torsion. Si le groupe abélien libre G était de rang strictement inférieur à 2, il existerait une relation du type $\alpha^p = \beta^q$, avec p et q non tous deux nuls. Nous aurions donc $\alpha^p . \beta^{-q} = 1_X = i_{\#}(1_F)$, avec p et q non tous deux nuls, où 1_X et 1_F désignent respectivement les éléments unités des groupes fondamentaux de X et de F pointés par x_0. Mais ceci est impossible d'après le choix des transversales fermées τ_1 et τ_2.

Remarquons en passant qu'une relation $\alpha^p = \beta^q$, ou même $\alpha^p . \beta^{-q} = i_{\#}(\lambda)$, avec p et q non tous deux nuls et de signes opposés, entraîne également, et ce, indépendamment de la condition D, que la feuille F est captée (donc non fermée), car elle est coupée par une transversale fermée homotope à zéro ; cette dernière peut être en effet obtenue par le lissage et la mise en position transverse bien connus du lacet obtenu par la composition de τ_2^+ itéré $-q$ fois, de τ_1^+ itéré p fois et du lacet l de la feuille F représentant la classe λ^{-1} de $\pi_1(\mathrm{F}, x_0)$.

Dans toute la suite nous aurons donc seulement à considérer le cas où G est abélien libre de rang deux.

Soit $\hat{p} : \hat{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ le revêtement universel de X. Fixons un point z de $\hat{p}^{-1}(x_0)$. Notons l_1 et l_2 les relèvements de τ_1^+ et τ_2^+ dans $\hat{\mathrm{X}}$ qui contiennent le point z. Considérons les images dans $\hat{\mathrm{X}}$ de l_1 et l_2 par les "deck-transformations", au sens de Seifert-Threlfall par exemple, qui sont associées au point z et aux éléments de G. Puisque G est abélien libre de rang 2, ces images déterminent dans $\hat{\mathrm{X}}$ un "grillage" de dimension 2 : les points d'intersection constituent un réseau de dimension 2 et chaque maille est homotope à zéro dans $\hat{\mathrm{X}}$. La considération d'une telle maille fournit une application φ' de $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$ dans $\hat{\mathrm{X}}$. A un homéomorphisme prés de $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$, nous pouvons supposer que les restrictions de $\hat{p} \circ \varphi'$ à $\mathrm{I} \times 0$ et à $1 \times \mathrm{I}$ définissent toutes deux le lacet τ_1^+, et que les restrictions de $\hat{p} \circ \varphi'$ à $0 \times \mathrm{I}$ et à $1 \times \mathrm{I}$ définissent toutes deux le lacet τ_2^+.

En identifiant $\mathrm{I} \times 0$ et $0 \times \mathrm{I}$ avec $\mathrm{I} \times 1$ et $1 \times \mathrm{I}$ respectivement, il vient une application continue pointée φ de

$$(\mathrm{T}^2, y_0) = (\mathrm{S}_1^1, 0) \times (\mathrm{S}_1^2, 0) = (\mathrm{S}_1^1 \times \mathrm{S}_2^1, 0 \times 0)$$

dans (X, x_0). Si M et P désignent respectivement méridien et parallèle de T^2 se coupant en y_0, l'application φ vérifie les trois propriétés suivantes :

i) $\varphi_{|\mathrm{M}} = \tau_1^+$;

ii) $\varphi_{|\mathrm{P}} = \tau_2^+$;

iii) $\varphi_\#$ induit un isomorphisme de $\pi_1(\mathrm{T}^2, y_0)$ sur le sous-groupe G de $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$.

3. Fin de la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Nous démontrerons le théorème 1 par l'absurde, en supposant la feuille F fermée. De plus la feuille F du théorème 2 est supposée nulle part dense.

Pour démontrer les théorèmes 1 et 2, nous considérons simplement une feuille nulle part dense F. De plus les réductions faites au paragraphe précédent nous permettent de considérer seulement le cas où le groupe G est abélien libre de rang exactement égal à deux.

Nous pouvons supposer de plus que l'application pointée φ construite à la fin du paragraphe précédent est en position générale par rapport au feuilletage $\mathfrak{F}$, cf. [2 , 7]. L'application φ induit alors sur T^2 un feuilletage avec singularités $\mathfrak{G}$, de codimension un, transversalement orienté dès que $\mathfrak{F}$ est transversalement orienté, et transversalement de classe C^r, si $\mathfrak{F}$ est transversalement de classe C^r. Chaque singularité de $\mathfrak{G}$ est Topologiquement Non Dégénérée au sens de Morse, c'est-à-dire ici C^0-conjuguée à un col ou à un centre.

Puisque la feuille F est nulle part dense, nous pouvons même supposer sans restreindre la généralité, que l'image réciproque de l'adhérence de F dans X ne contient aucune des singularités du feuilletage $\mathfrak{G}$ de T^2, cf. [7] ou notre thèse : cette propriété est obtenue par une déformation arbitrairement petite convenable de φ.

Soit f la feuille de $\mathfrak{G}$ qui contient le point-base y_0 de T^2. L'image de f par φ est contenue dans la feuille F, par construction de l'application pointée φ. De plus l'adhérence de f dans T^2 possède un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ ne contenant aucune des singularités de $\mathfrak{G}$.

Démontrons tout d'abord que la feuille f n'est pas une feuille compacte de $\mathfrak{G}$. Supposons f compacte : soit f_0 un lacet de T^2 d'extrémités y_0 et d'image f. Alors la classe $[f_0]$ du lacet f_0 dans $\pi_1(T^2, y_0)$ est non nulle comme on le constate par exemple en passant au revêtement universel de T^2, en utilisant le lemme de Jordan et le fait que le méridien M et le parallèle P du tore sont deux transversales fermées à $\mathfrak{G}$ rencontrant f en y_0. Donc $[f_0] = [M]^a . [P]^b$ avec a et b non tous deux nuls. Or le lacet $\varphi \circ f_0$ de X est en fait un lacet l de la feuille F ; on a donc $[\varphi \circ f_0] = [i \circ l] = i_\#(\lambda)$, où λ est une certaine classe de $\pi_1(F, x_0)$. D'autre part, la définition de φ entraîne $[\varphi \circ M] = \alpha$ et $[\varphi \circ P] = \beta$. Il en résulte que l'image par $\varphi_\#$ de la relation obtenue plus haut entre les classes dans $\pi_1(T^2, y_0)$ des lacets f_0, M et P s'écrit dans $\pi_1(X, x_0)$: $\alpha^a . \beta^b = i_\#(\lambda)$, avec a et b non tous deux nuls. Cela contredit le choix des classes α et β et démontre que la feuille f n'est pas compacte.

La démonstration du théorème 1 est alors la suivante : si la feuille F était une feuille fermée, le sous-ensemble $\varphi^{-1}(F)$ de T^2 serait un compact saturé pour $\mathfrak{G}$ admettant dans T^2 un voisinage ouvert $\mathfrak{U}'$, ne contenant aucune singularité de $\mathfrak{G}$, d'après un alinéa antérieur. La restriction de φ à $\mathfrak{U}'$ serait transverse au feuilletage $\mathfrak{F}$. Tout arc t contenu dans $\mathfrak{U}'$ et transverse à $\mathfrak{G}$ rencontrerait $\varphi^{-1}(F)$ en un nombre fini de points, car, la feuille F étant supposée fermée, l'image de t par φ rencontrerait F en un nombre fini de points. Chaque feuille de $\varphi^{-1}(F)$, donc en particulier la feuille f de $\mathfrak{G}$ passant par y_0, devrait être une feuille compacte, ce qui est impossible d'après l'alinéa précédent.

La feuille F n'est donc pas fermée, et le Théorème 1 est démontré.

La fin de la démonstration du Théorème 2 va utiliser la non-compacité de la feuille f de $\mathfrak{G}$ étudiée plus haut et le fait que les feuilletages $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont maintenant transversalement de classe C^2.

Reprenons le voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de l'adhérence de f dans T^2 défini plus haut. La restriction de φ à $\mathfrak{U}$ est transverse à $\mathfrak{F}$. Tout arc t contenu dans $\mathfrak{U}$ et transverse à $\mathfrak{G}$ rencontre f selon un ensemble nulle part dense dans t, car la feuille F est nulle part dense dans X, et l'image $\varphi(t)$ de t par φ rencontre F selon un ensemble nulle part dense dans $\varphi(t)$.

La feuille f est donc nulle part dense dans le tore T^2 et son adhérence ne contient aucune singularité de $\mathfrak{G}$.

Nous sommes alors dans les conditions d'application d'un Lemme de [7], cf. également [9] lorsque $\mathfrak{F}$, donc $\mathfrak{G}$, sont de classe C^2 : il en résulte que la feuille f est une feuille captée de $\mathfrak{G}$.

Il en résulte, par exemple d'après un second lemme de [7], que la feuille F de $\mathfrak{F}$ est une feuille captée. Le Théorème 2 est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DENJOY, *Journal de Mathématiques,* IX, 11 (1932), 333.

[2] A. HAEFLIGER, *Commentarii Mathematici Helvetici,* 32 (1958), 248.

[3] C. LAMOUREUX, Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces. Differentialtopologie : speziell Blätterungen, Oberwolfach, mai 1971.

[4] C. LAMOUREUX, *Annales de l'Institut Fourier,* 23, 4 (1973), 229.

[5] C. LAMOUREUX, *Annales de l'Institut Fourier,* 24, 4 (1974), 229.

[6] C. LAMOUREUX, The structure of foliations without holonomy of non-compact manifolds with fundamental group Z, *Topology,* 13 (1974), 219.

[7] C. LAMOUREUX, Feuilletages des variétés compactes et non compactes. *Annales de l'Institut Fourier,* 26, 2 (1976), (à paraître).

[8] C. LAMOUREUX, Sur des feuilles simplement connexes d'adhérence éventuellement sans composante connexe compacte (à paraître).

[9] A.J. SCHWARTZ, *American Journal of Mathematics,* 85 (1963), 453.

Manuscrit reçu le 5 juillet 1974
Accepté par G. Reeb.

Claude LAMOUREUX,
64, Bd. Arago
75013 – Paris.