Annales de l'institut Fourier

Octave Galvani

Réalisations euclidiennes des plans de Finsler

Annales de l'institut Fourier, tome 5 (1954), p. 421-454
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__421_0>

RÉALISATIONS EUCLIDIENNES DES PLANS DE FINSLER

par **O. GALVANI** (Grenoble).

---

1. Dans un précédent article [1], j'ai montré que tout espace de Finsler analytique est localement réalisable dans un espace euclidien à nombre suffisant de dimensions. Le présent travail est consacré à des réalisations particulières des *plans de Finsler* F au moyen de variétés W plongées dans *des espaces euclidien ou riemanniens à trois dimensions* : existence de telles réalisations pour un F donné, nature de ces W, correspondance géométriques entre W et F. Une brève allusion sera faite aux réalisations de F dans l'espace euclidien $\mathbf{E}^4$ (à 4 dimensions).

Les principaux résultats seront les suivants : si F est doué du parallélisme absolu des éléments linéaires, il est réalisable dans E^3 ; sinon il existe des espaces de Riemann $\mathcal{R}$ à 3 dimensions dans lesquels on peut réaliser F. Les *images* des points de F sont les trajectoires orthogonales d'une famille à un paramètre de développables réglées de $\mathcal{R}$ (ou de développables de $\mathbf{E}^3$) ; les géodésiques de F ont pour images les génératrices de ces développables.

La démonstration des théorèmes d'existence s'appuie sur la théorie des systèmes différentiels en involution et par suite ces théorèmes supposeront les F donnés analytiques.

D'autre part, il ne sera question que de problèmes *locaux*. Mais dans un espace de Finsler, cette notion revêt deux aspects bien différents, suivant qu'on considère les voisinages d'un élément linéaire ou ceux d'un point. Si une réalisation est

(1) La réalisation des connexions euclidiennes d'éléments linéaires et des espaces de Finsler (Annales de l'Institut Fourier. Tome II, Année 1950, p. 123-146).

valable au voisinage d'un point, elle a un caractère *global vis-à-vis des éléments linéaires centrés en ce point.* L'existence de telles réalisations sera établie pour les plans de Finsler réalisables dans $\mathbf{E}^3$.

2. Notations générales. — Nous aurons souvent à nous reporter aux ouvrages suivants d'ÉLIE CARTAN, qui seront désignés par **SDE, EF, EMG** :

SDE. — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, 1945).

EF. — *Les espaces de Finsler* (*Exposés de Géométrie*, Paris, 1934).

EMG. — *Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés* (*Mathématica*, Cluj, t. IV, 1930, p. 114-136).

D'autre part **REF** représentera mon précédent article de ces Annales sur la réalisation des espaces de Finsler (cf. n° 1).

Les notations seront en général celles de **REF**, à part la suppression du Σ de sommation qui ne serait guère utile ici.

Formes différentielles. — $d\omega$ et $[\omega\varphi]$ représenteront une différentielle et un produit *extérieurs.*

Soit $u = (u_1, u_2 ..., u_n)$ un point d'une variété, ω une forme différentielle définie sur cette variété. Il sera souvent commode d'écrire en abrégé $\omega(u)$ au lieu de $\omega(u_1, u_2 ... u_n, du_1, du_2 ..., du_n)$.

$\mathbf{C}^q$ désignera une *classe de différentiabilité*; ainsi la relation $f(x, y) \epsilon \mathbf{C}^q$ signifiera que f est continue et admet des dérivées partielles des q premiers ordres continues [par rapport à (x, y)].

Espaces. — $\mathbf{R} =$ droite numérique. — $\mathbf{E}^n =$ espace euclidien à n dimensions. — $\mathfrak{R}$ = un espace de Riemann à 3 dimensions. — F = un plan de Finsler (cf n° 6).

Eléments linéaires. — Un élément linéaire est l'ensemble d'un point M et d'une direction D attachée à M. On représentera un tel élément par $\mathrm{L} = (\mathrm{M}, \mathrm{D})$ ou $\mathrm{L} = (\mathrm{M}, \vec{u})$, $\vec{u}$ étant un vecteur de D, ou $\mathrm{L} = (x_1, x_2 ..., dx_1, dx_2 ...)$, les x_i étant les coordonnées de M.

Repère mobile (dans les espaces à connexion euclidienne). — Les repères utilisés seront toujours *unitaires rectangulaires* et on désignera par $\mathrm{R} = (\mathrm{M}\vec{e}_i)$, $i \leqslant n$, un tel repère, les $\vec{e}_i$ étant n

vecteurs unitaires deux à deux rectangulaires. Les *composantes relatives* d'un R différentiable sont les ω_i, ω_{ij} définies par :

$$(2,\ 1) \qquad dM = \sum_i \omega_i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \sum_j \omega_{ij} \vec{e}_j.$$

Elles vérifient

$$(2,\ 2) \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

On désignera par $\{\omega\}$ un système de formes ω_i, ω_{ij} vérifiant (2, 2) et à tout $\{\omega\}$ différentiable, on associera $\{\Omega\}$ défini par :

$$(2,\ 3) \qquad \Omega_i = d\omega_i - \sum_j [\omega_{ij}\omega_j]; \qquad \Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_h [\omega_{ih}\omega_{hj}].$$

Les *relations de structure* de E^n sont

$$(2,\ 4) \qquad \Omega_i = \Omega_{ij} = 0$$

et les espaces de Riemann $\mathfrak{R}^n$ à n dimensions vérifient $\Omega_i = 0$.

3. D'après REF tout plan de Finsler F est réalisable localement dans E^n avec $n = 6$. Les réalisations que nous allons étudier correspondent à $n < 6$; les théorèmes d'existence feront intervenir certaines propriétés de F, en particulier diverses notions de *parallélisme absolu.* Nous allons rappeler brièvement ces propriétés; cela nous donnera en même temps l'occasion de préciser des hypothèses et de fixer des notations utilisées par la suite.

I. — LA CONNEXION DE CARTAN DU PLAN DE FINSLER F.

4. — Soient (x, y) les coordonnées d'un point de F et

$$(4,\ 1) \qquad ds = f(x, y, dx, dy)$$

la distance élémentaire. Il sera commode de représenter la *direction* (dx, dy) en (x, y) par le paramètre θ défini mod. π par

$$(4,\ 2) \qquad \sin\theta\, dx = \cos\theta\, dy,$$

et de considérer la fonction

$$(4,\ 3) \qquad H(x, y, \theta) = f(x, y, \cos\theta, \sin\theta).$$

L'homogénéité (positive) de f entraîne alors :

$$(4,\ 4) \qquad ds = f(x, y, dx, dy) = H(x, y, \theta).|\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy|.$$

Inversement la donnée de $H(x, y, \theta)$, sous certaines conditions, définit la métrique par (4,4).

5. Hypothèses relatives à H. — Nous supposerons que le support de F est un domaine simplement connexe de $\mathbf{R}^2$, et nous ferons sur H les hypothèses $\mathcal{H}$ suivantes :

$$(\mathcal{H}_1) \qquad H(x, y, \theta) > 0$$
$$(\mathcal{H}_2) \qquad H(x, y, \theta + \pi) = H(x, y, \theta)$$
$$(\mathcal{H}_3) \qquad H(x, y, \theta) \in \mathbf{C}^q, \quad q \geqslant 3$$
$$(\mathcal{H}_4) \qquad H + \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} > 0$$ (convexité de l'indicatrice, problème régulier du calcul des variations).

On voit aisément que ces propriétés se conservent dans un changement de coordonnées de classe $\mathbf{C}^{q+1}$.

De façon générale on supposera q suffisant pour l'existence des invariants utilisés. Les hypothèses $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ correspondent à l'existence de la *connexion de Cartan*, c'est-à-dire d'une connexion euclidienne intrinsèquement attachée à F ; $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vérifiées dans tout F ($ds > 0$ et ne dépend que de x, y, dy/dx).

Tout théorème local valable pour les F ainsi définis est un théorème local pour le plan de Finsler plus général conçu comme espace de Finsler à 2 dimensions, c'est-à-dire dont le support est une variété à deux dimensions; on la supposera alors de classe $\mathbf{C}^{q+1}$.

6. Zones de Finsler. — Soit **D** un domaine simplement annexe de $\mathbf{R}^2$ et $H(x, y, \theta)$ une fonction définie sur $\mathbf{D} \times \mathbf{R}$ (c'est-à-dire pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$, $\theta \in \mathbf{R}$) et vérifiant les $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{D} \times \mathbf{R}$; **D** muni de la distance élémentaire (4, 4) est alors un F.

Si les $\mathcal{H}$ sont vérifiées seulement dans un voisinage d'un *élément linéaire* (x_0, y_0, θ_0) de **D**, nous dirons que ce voisinage muni de H est une *zone de Finsler*. Nous la représenterons aussi par F.

7. Composantes de F. — Les hypothèses $\mathcal{H}$ permettent de considérer F (plan ou zone) comme un *espace d'éléments linéaires à connexion euclidienne*. Soit alors $C(l)$ la carte en $l = (x, y, \theta)$ de F sur $\mathbf{E}^2$, et $L(dx, dy, d\theta)$ l'élément linéaire de $\mathbf{E}^2$ qui est l'image de $dl = (dx, dy, d\theta)$ dans cette carte. Nous appellerons **composantes** de F le système $\{\omega\}$ des formes de Pfaff de l, dl défini par

$$(7,\ 1)\qquad \begin{cases} L(dx,\ dy,\ d\theta) = \left(M + \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2,\quad \vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2\right) \\ M\vec{e}_1\vec{e}_2 = \text{repère unitaire rectangulaire.} \end{cases}$$

Ces formes $\{\omega\}$ sont déterminées par $C(l)$ (car $L(0,\ 0,\ 0)$ définit $(M, \vec{e}_1)$ au sens près, et ensuite (7, 1) définit $\{\omega\}$ au signe près). Réciproquement la donnée de $\{\omega\}$ définit $C(l)$ par (7, 1) à un déplacement près dans $\mathbf{E}^2$.

La biunivocité de la carte $C(l)$ s'exprime par

$$[\omega_1\omega_2\omega_{12}] \neq 0.$$

8. **Expression des composantes de F.** — Les résultats d'Élie Cartan conduisent au tableau suivant, pour F défini par $H(x,\ y,\ \theta)$:

$$(F)\qquad \begin{cases} (1)\quad \omega_1 = H\varphi_1 + H'\varphi_2 \\ (2)\quad \omega_2 = V\varphi_2 \\ (3)\quad \omega_{12} = A\varphi_1 + B\varphi_2 + Z\,d\theta \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(8,\ 4)\qquad \varphi_1 = \cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy$$

$$(8,\ 5)\qquad \varphi_2 = -\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy$$

et où H', V, Z vérifient :

$$(8,\ 6)\qquad H' = \frac{\partial H}{\partial\theta}\qquad V = \sqrt{H^2 + H\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}}\qquad Z = \frac{V}{H}.$$

Signalons pour mémoire que si G_{1*} et G_{2*} sont définis par

$$(8,\ 7)\qquad dG = G_{1*}\varphi_1 + G_{2*}\varphi_2 + \frac{\partial G}{\partial\theta}d\theta,$$

on a

$$(8,\ 8)\qquad A = \frac{H'_{1*} - H_{2*}}{V},\qquad B = \frac{V_{1*}}{H} - \frac{A}{V}\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Ces formes ont été données par Élie Cartan dans **EMG**, comme formes invariantes dans les changements de coordonnées de F, et s'y déduisent de la recherche de conditions d'équivalence.

Elles sont exprimées (dans **EMG**) en fonction de $u = x$, $v = y$, $w = tg\,\theta$, et ω_{12} y est désigné par ω_3.

On peut aussi obtenir (F) par application de la théorie développée dans EF; la définition de la carte (EF, nº 3) conduit à

$$(8, 9) \qquad [\omega_1\varphi_1\varphi_2] = [\omega_2\varphi_2] = 0;$$

ensuite les conventions de CARTAN (EF nº 7) fournissent les (F) (cf REF nº 38 et ci-dessous nº 10).

Remarquons que $V \neq 0$ (d'après $\mathcal{H}_4$, nº 5), donc $Z \neq 0$ et aussi $[\omega_1\omega_2\omega_{12}] \neq 0$ puisque

$$(8, 10) \qquad [\omega_1\omega_2\omega_{12}] = V^2[\varphi_1\varphi_2\, d\theta] = V^2[dx\, dy\, d\theta].$$

9. — **Relations de structure de F. — Courbure et torsion.** — Les composantes de F vérifient les relations :

$$(9, 1) \qquad d\omega_1 = [\omega_{12}\omega_2],$$
$$(9, 2) \qquad d\omega_2 = [\omega_1\omega_{12}] + I[\omega_{12}\omega_2],$$
$$(9, 3) \qquad d\omega_{12} = J[\omega_{12}\omega_2] + K[\omega_1\omega_2],$$

qui font intervenir les *invariants fondamentaux* de F : *torsion* I et *courbure* (J, K). L'expression de I est la suivante :

$$(9, 4) \qquad I = \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial\theta} HV;$$

et si l'on définit G_i par

$$dG = G_1\omega_1 + G_2\omega_2 + G_3\omega_{12},$$

on trouve entre I, J, K les relations :

$$(9, 5) \qquad J = I_1$$
$$(9, 6) \qquad I_{11} = KI + K_3.$$

Ces formules figurent dans EMG (nºs 5 et 6) sauf (9, 4) qui se déduit aisément de la formule correspondante de EMG. On peut aussi les obtenir à partir de EF ou les retrouver à partir des (F) du nº 8. Voici par exemple le calcul de I à partir de (F) et de (9, 1 à 3) : d'après (9, 2), $[\omega_1\, d\omega_2] = I[\omega_1\omega_{12}\omega_2]$; on tire $d\omega_2$ de (8, 2) soit

$$d\omega_2 = [dV\varphi_2] + V[\varphi_1\, d\theta], \quad \text{et} \quad [\omega_1\, d\omega_2] = \left(H\frac{\partial V}{\partial\theta} + V\frac{\partial H}{\partial\theta}\right)[\varphi_2\varphi_1\, d\theta];$$

on termine en utilisant (8, 10).

Structure des F — Les composantes des F sont caractérisées par les relations :

$$(9,\ 7)\qquad \begin{cases} [\omega_1\omega_{12}\omega_2] \neq 0 \\ d\omega_1 = [\omega_{12}\omega_2], \qquad [\omega_1 d\omega_1] = [\omega_2 d\omega_2], \qquad [\omega_{12}d\omega_2] = 0. \end{cases}$$

Elles sont visiblement vérifiées pour tout F d'après (9, 1 à 3) — ou même directement d'après **EF**. D'autre part on peut montrer que si des formes $\{\omega\}$ vérifient (9, 7) elles sont les composantes de la connexion de Cartan d'un plan ou d'une zone de Finsler — moyennant toutefois certaines hypothèses de différentiabilité.

10. Le transport parallèle dans F. — Nous appellerons *chemin* de F toute famille continue à un paramètre d'*éléments linéaires* $(x,\ y,\ \theta) = l(t)$; un chemin χ est formé d'une *courbe* $\gamma = \gamma(\chi)$ lieu des centres $(x,\ y) = m(t)$, mais $\theta(t)$ n'est *pas forcément la direction de la tangente* en $m(t)$ à γ. D'autre part, γ peut éventuellement se réduire à un point.

Soit $\vec{\xi} = (x,\ y,\ \theta,\ \delta x,\ \delta y)$ un vecteur doué de l'élément d'appui $(x,\ y,\ \theta)$. (cf. **EF** n° 2). Nous dirons que $X_1 = \omega_1(\vec{\xi})$, $X_2 = \omega_2(\vec{\xi})$ sont les *composantes rectangulaires* de $\vec{\xi}$; elles se désuisent des composantes « naturelles » δx, δy par une transformation linéaire *régulière* (puisque $[\omega_1\omega_2] \neq 0$) qu'il est aisé d'expliciter.

La connexion euclidienne définit le transport parallèle de $\vec{\xi}$ le long d'un *chemin* χ différentiable ; les équations de ce transport (cf **EMG** n° 12) sont :

$$(1)\qquad dX_1 - X_2\omega_{12}(l) = dX_2 + X_1\omega_{12}(l) = 0,$$

qui expriment que $d(X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2) = 0$ le long de χ (si l décrit χ). On passe aisément aux équations en coordonnées naturelles et inversement.

Soit u_1 une direction en m_1, u_2 la direction en m_2 déduite de u_1 par transport parallèle le long d'un *chemin* χ_{12} dont la courbe $\gamma(\chi_{12})$ a pour extrémités m_1 et m_2 :

$$(2)\qquad u_2 = T(u_1,\ m_1,\ m_2,\ \chi_{12})$$

et en général T dépend de χ_{12}. Nous dirons que u_1 et u_2 sont *parallèles par rapport* à χ_{12}.

11. Les deux sortes de parallélisme absolu. — Il existe deux sortes de plans de Finsler doués d'un parallélisme absolu, caractérisées l'une par $K = 0$, l'autre par $J = K = 0$.

La condition $K = 0$ exprime la complète intégrabilité de l'équation $\omega_{12} = 0$; il y a *parallélisme absolu des éléments* linéaires (et aussi des vecteurs doués d'un élément d'appui, cf. **EF** nos 42, 43). Nous désignerons par F_E les F où $K = 0$.

La condition $J = K = 0$ exprime la complète intégralité du système.

$$dX_1 - X_2\omega_{12} = dX_2 + X_1\omega_{12} = 0, \tag{1}$$

et il y a parallélisme absolu des vecteurs (indépendamment de leur élément d'appui). Cf **EMG** no 22. Ces F seront désignés par F_A.

Dans les F_A, deux directions parallèles par rapport à un chemin sont parallèles par rapport à tous les autres; dans les F_E, il n'en est plus ainsi pour des chemins quelconques, mais seulement pour des chemins vérifiant $\omega_{12} = 0$ et que nous appellerons *chemins d'éléments parallèles*: deux directions parallèles par rapport à un chemin d'éléments parallèles le sont par rapport à n'importe quel autre chemin d'éléments parallèles.

12. Plans de Minkowski. — Ce sont ceux qui admettent un système de coordonnées où H ne dépend que de θ; alors V et $Z = \frac{V}{H}$ aussi ne dépendent que de θ et les équations (8, 1) (8, 2) donnent:

$$[d\omega_1\, d\theta] = [d\omega_2\, d\theta] = 0, \quad \text{d'où} \quad [\omega_{12}\omega_2\, d\theta] = [\omega_1\omega_{12}\, d\theta] = 0$$

et par suite

$$[\omega_{12}\, d\theta] = 0, \qquad d\omega_{12} = [dZ\, d\theta] = 0.$$

Les plans de Minkowski sont donc des F_A (parallélisme absolu). Mais ce sont des F_A particuliers car $I = \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(HV)$ ne dépend que de θ, et $I_2 = I_1 = 0$. En résumé:

$$I_1 = I_2 = K = 0 \tag{12, 1}$$

Réciproquement si $I_1 = I_2 = K = 0$, on peut par une transformation ponctuelle supposer que H ne dépend que de θ (**EMG** no 28*b* ou **EF** no 44).

II. — LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DES RÉALISATIONS

13. Variétés réalisantes W. Connexion induite sur W. — L'élément générateur S d'une W (cf **REF** n^{os} 13 à 17) est formé d'un élément linéaire L $=$ (M, Δ) et d'un plan P passant par L.

Un tel élément sera représenté par S $=$ (L, P) $=$ (M, Δ, P) ou encore $S = (M\vec{e}_1\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1$ porté par L, $\vec{e}_2$ dans P et perpendiculaire à $\vec{e}_1$, ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ unitaires). Inversement M(S), Δ(S) etc... ont une signification évidente.

Soit W une variété à 3 dimensions d'éléments S plongée dans E^n. Les coordonnées de M et les composantes de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ par rapport à un repère fixe de E^n sont des fonctions d'un système de 3 variables u_1, u_2, u_3; ces fonctions seront supposées différentiables.

A tout S(u) on associera un repère rectangulaire

$$R_n(u) = (M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_\alpha)$$

de E_n $(3 \leqslant \alpha \leqslant n)$ tel que $S = (M\vec{e}_1\vec{e}_2)$ et que les $\vec{e}_\alpha$ soient différentiables.

Soit $\{\bar{\omega}\}$ les composantes relatives de R_n. On supposera que :

$$(13, 1) \qquad [\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_{12}] \neq 0.$$

La connexion (euclidienne d'éléments linéaires) $\mathfrak{L}$ induite sur W a pour composantes :

$$(13, 2) \qquad \omega_1 = \bar{\omega}_1 \qquad \omega_2 = \bar{\omega}_2 \qquad \omega_{12} = \bar{\omega}_{12}.$$

Cela correspond à la carte C(S) suivante : à l'élément (S $+$ dS) est associée la projection orthogonale sur P de l'élément $(M + dM,\ \vec{e}_1 + d\vec{e}_1)$. On a ainsi une connexion euclidienne d'élément linéaire, compte tenu de (13, 1), et cette connexion est indépendante de la famille des R_n choisis. (Les rotations des $\vec{e}_\alpha$, $\alpha \geqslant 3$ n'affectent pas $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_{12}$).

14. Réalisations semi-globales. — Si les ω sont les composantes d'un F donné, et si W vérifie (13,2) quels que soient x, y, θ, W réalise F.

Si W vérifie (13, 2) au voisinage d'un élément linéaire de F, la réalisation sera dite *locale*; elle sera dite *semi-globale*, si elle est valable au voisinage d'un *point* de F.

Étant donnée une W, nous dirons qu'elle ***réalise localement*** un plan de Finsler si ω_1, ω_2, ω_{12} vérifient (9, 7). On verrait aisément que W réalise alors des zones de Finsler, et on peut trouver un plan de Finsler contenant certaines de ces zones.

15. Système différentiel des réalisations d'un F donné. — Les repères R de $\mathbf{E}^n$ dépendent de $N = \frac{n(n+1)}{2}$ paramètres z_λ, qu'on suppose choisis de façon que les composantes relatives $\{\bar{\omega}\}$ de R soient analytiques. Soient ω_1, ω_2, ω_{12} les composantes d'un F analytique (H (x, y, θ) analytique). Le problème de la réalisation de F dans $\mathbf{E}^n$ (par une W) se ramène à la résolution du système

$$(\Sigma_n) \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \qquad \bar{\omega}_{12} = \omega_{12},$$

aux N fonctions inconnues z_λ des 3 variables indépendantes x, y, θ.

Les relations de structure de F (n° 9) et de $\mathbf{E}^n$ (n° 2) donnent pour la fermeture de (Σ_n) :

$$(\overline{\Sigma}_n)\begin{cases} (1)\ \bar{\omega}_1 = \omega_1, & (\overline{1})\ \sum\limits_{\alpha \geqslant 3} [\bar{\omega}_\alpha \bar{\omega}_{\alpha 1}] = 0, \\ (2)\ \bar{\omega}_2 = \omega_2, & (\overline{2})\ \sum\limits_{\alpha \geqslant 3} [\bar{\omega}_\alpha \bar{\omega}_{\alpha 2}] = \mathrm{I}[\omega_{12}\omega_2], \\ (3)\ \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, & (\overline{3})\ \sum\limits_{\alpha \geqslant 3} [\bar{\omega}_{1\alpha} \bar{\omega}_{\alpha 2}] = \mathrm{J}[\omega_{12}\omega_2] + \mathrm{K}[\omega_1\omega_2]. \end{cases}$$

16. Nous aurons à démontrer que certains système Σ sont en involution et nous utiliserons les notations suivantes. Les Σ qui interviendront contiennent un $\overline{\Sigma}_n$ et éventuellement des équations (de prolongement) soit (4), $(\overline{4})$ etc... On considèrera $(x, y, \theta, z_\lambda)$ comme les coordonnées d'un point Q de $\mathbf{R}^{N+3}$ et on représentera un élément linéaire intégral de Σ, soit

$$(a) = (\mathrm{Q},\ d\mathrm{Q}),$$

par

$$a_\nu = \bar{\omega}_\nu(a) = \bar{\omega}_\nu(\mathrm{Q}, d\mathrm{Q}) \quad (\nu = i, ij;\ i, j \leqslant n).$$

On appellera S_p le système polaire d'un élément intégral Q_p à p dimensions, et dans un tel système, on désignera par (ξ) l'élément linéaire inconnu; par (h, ξ), $(\bar{h}\ a\ \xi)$ etc... les équations de S_p qui proviennent de (h), $(\bar{h})$. Les équations $(1, \xi)$, $(2, \xi)$, $(3\,\xi)$ seront dans tous les cas :

$$\xi_1 = \omega_1(\xi), \qquad \xi_2 = \omega_2(\xi), \qquad \xi_{12} = \omega_{12}(\xi).$$

Les systèmes polaires réduits S'_p (**SDE** n° 81) contiennent toujours les équations $\xi_1 = \xi_2 = \xi_{12} = 0$. D'autre part, toute relation entre dx, dy, $d\theta$ entraîne une relation entre ξ_1, ξ_2, ξ_{12} et réciproquement.

III. — LES RÉALISATIONS DANS E^3.

17. Le système $\overline{\Sigma}_3$ $(n=3,\ \varkappa=3)$ conduit au résultat suivant.

THÉORÈMES. I. — *Pour qu'un plan de Finsler soit réalisable dans* E^3, *il faut qu'il possède un parallélisme absolu des éléments linéaires, à moins qu'il ne soit riemannien.*

II. — *Tout* F *analytique doué du parallélisme absolu des éléments linéaires est réalisable dans* E^3, *au voisinage de chacun de ses éléments linéaires qui ne vérifient pas* $I = J = 0$.

III. — *Un tel* F *est aussi réalisable dans* E^3 *au voisinage de tout* point *où la torsion* I *ne s'annule pas.*

Démonstration de I. — Les équations quadratiques de $\overline{\Sigma}_3$ sont :

$$(\overline{\Sigma}_3)\left\{\begin{array}{ll}(\bar{1}) & [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{31}] = 0,\\ (\bar{2}) & [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{32}] = I[\omega_{12}\omega_2]\\ (\bar{3}) & [\bar{\omega}_{32}\bar{\omega}_{31}] = J[\omega_{12}\omega_2] + K[\omega_1\omega_2].\end{array}\right.$$

Si $I \neq 0$, $(\bar{2})$ entraîne $\bar{\omega}_3 \neq 0$, et $(\bar{1})$ donne alors

$$(4) \qquad \bar{\omega}_{31} = \lambda\bar{\omega}_3.$$

D'où, d'après $(\bar{2})$ et $(\bar{4})$:

$$[\bar{\omega}_{32}\bar{\omega}_{31}] = -\lambda I(\omega_{12}\omega_2] \quad \text{donc} \quad K = 0 \quad \big(\text{d'après } (\bar{3})\big).$$

Par suite $IK \equiv 0$. On a donc, *localement*, soit $I \equiv 0$ (d'où $I_1 = J \equiv 0$, le plan F se réduit à uu plan Riemannien), soit $K \equiv 0$ et on a un F_E.

Nous allons maintenant établir II et III (n^{os} 18 à 30), en établissant l'existence de solutions (locales) pour $\overline{\Sigma}_3$; on sera amené à prolonger $\overline{\Sigma}_3$.

18. En effet le système $\overline{\Sigma}_3$ *n'est pas en involution*: l'élément intégral générique (a) à une dimension a ses composantes a_3, a_{31} arbitraires, et si $\mathrm{I}a_{31} + \mathrm{J}a_3 \neq 0$, son système polaire introduit, compte tenu de $\mathrm{K} = 0$, la relation

$$a_{12}\xi_1 - a_2\xi_{12} = 0,$$

c'est-à-dire une relation entre $(dx, dy, d\theta)$.

Mais nous allons montrer que si $\mathrm{K} = 0$, $\overline{\Sigma}_3$ entraîne :

$$\mathrm{I}\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}\bar{\omega}_3 = 0. \tag{4}$$

En effet, si $\varphi = \mathrm{I}\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}\bar{\omega}_3$ $(\bar{2})$ et $(\bar{3})$ donnent pour $\mathrm{K} = 0$:

$$[\varphi\bar{\omega}_{32}] = 0; \tag{5}$$

la définition de φ et $(\bar{1})$ donnent

$$[\varphi\bar{\omega}_3] = [\varphi\bar{\omega}_{31}] = 0 \tag{6}$$

donc si $\varphi \neq 0$, on a

$$[\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{32}] = [\bar{\omega}_{31}\bar{\omega}_{12}] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I} = \mathrm{J} = 0,$$

mais alors $\varphi = 0$ et il y a contradiction.

19. Nous prolongeons donc le système $\overline{\Sigma}_3$ par l'équation (4); nous allons montrer que le système Σ obtenu est en involution. (Σ) s'écrit $(\mathrm{K} \equiv 0)$:

$$(\Sigma)\begin{cases} (1) & \bar{\omega}_1 = \omega_1 & & \\ (2) & \bar{\omega}_2 = \omega_2 & (\bar{2}) & [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{32} = \mathrm{I}[\omega_{12}\omega_2] \\ (3) & \bar{\omega}_{12} = \omega_{12} & (\bar{3}) & [\bar{\omega}_{31}\bar{\omega}_{32}] = -\mathrm{J}[\omega_{12}\omega_2] \\ (4) & \mathrm{I}\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}\bar{\omega}_3 = 0 & (\bar{4}) & [\psi\omega_2] + [\chi\omega_{12}] = 0 \end{cases}$$

avec
$$\psi = \mathrm{I}_2\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}_2\bar{\omega}_3 - \mathrm{J}\bar{\omega}_{32}$$
$$\chi = \mathrm{I}_3\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}_3\bar{\omega}_3 + \mathrm{I}\bar{\omega}_{32}.$$

Le calcul de $(\bar{4})$ fait intervenir les relations $\mathrm{I}_1 = \mathrm{J}$, $\mathrm{I}_{11} = 0$: cette dernière résulte de $\mathrm{K} = 0$ et de (9, 6). L'équation $(\bar{1})$ est une conséquence de (4), si du moins $(\mathrm{I}, \mathrm{J}) \neq (0,0)$, et (Σ) est fermé. Rappelons que nous supposons F analytique (donc Σ l'est aussi), $K \equiv 0$, $I \not\equiv 0$ (sinon $F = \mathbf{E}^2$ puisque K nul).

20. *Eléments intégraux* Q_0, Q_1, Q_2 *de* (Σ). — Remarquons d'abord que si

$$I(x^0, y^0, \theta^0) = J(x^0, y^0, \theta^0) = 0$$

en un élément (x^0, y^0, θ^0) de F, le point $Q^* = (x^0, y^0, \theta^0, z$ arbitraires) n'est pas un point intégral régulier, car en Q^* le rang de S_0 est $s_0^* = 3$, alors que pour le point intégral générique, il est $s_0 = 4$.

On supposera donc soit $I \neq 0$, soit $I = 0$, $J \neq 0$. Si $I \neq 0$, (4) et $(\bar{2})$ entraînent $(\bar{3})$; si $J \neq 0$, (4) et $(\bar{3})$ entraînent $(\bar{2})$. *On se placera pour fixer les idées dans le cas où* $I \neq 0$ (l'hypothèse $J \neq 0$ se traiterait exactement de la même manière). Les relations quadratiques se réduisent à $(\bar{2})$ et $(\bar{4})$ et donnent pour les systèmes polaires (S_1) et (S_2) (des éléments Q_1, Q_2 à 1 et 2 dimensions) les équations $(\bar{2}\, a\xi)$, $(\bar{4} a\xi)$, $(\bar{2} b\xi)$, $(\bar{4} b\xi)$ avec :

$$(\bar{2} \ \ a\xi): \qquad a_{32}\xi_3 - a_3\xi_{32} = I(a_{12}\xi_2 - a_2\xi_{12}).$$

Le système (S_0) laisse ξ_1, ξ_2, ξ_{12}, ξ_3, ξ_{32} arbitraires et son rang est $s_0 = 4$. Si $a_3 = 0$ et $a_{32} \neq 0$, le système (S_1) de (a) laisse ξ_1, ξ_2, ξ_{12} arbitraires; ensuite ξ_3 est déterminé par $(\bar{2} a\xi)$, ξ_{31} par (4), et $(\bar{4} a\xi)$ détermine l'expression

$$\eta = (a_2 J - a_{12} I)\xi_{32}.$$

Or, pour Q_1 générique, on peut prendre $a_2 J - a_{12} J \neq 0$, $a_{33} \neq 0$ et si Q_1^* vérifie de plus $a_3 = 0$, on vient de voir que S_1^* est de rang $s_0 + s_1 = 6$, et laisse ξ_1, ξ_2, ξ_{12} arbitraires; donc $S_1'^*$ est de rang $s_0' + s_1' = 6$, et les rangs des systèmes polaires S_1 et polaire réduit S_1' *génériques* sont $s_0 + s_1 \geqslant 6$, $s_0' + s_1' \geqslant 6$. Comme S_1 n'a que 6 équations :

$$s_0 + s_1 = s_0' + s_1' = 6$$

et le système (S_1) laisse aussi ξ_1, ξ_2, ξ_{12} arbitraires : les systèmes polaires (S_0) et (S_1) génériques n'introduisent aucune relation entre dx, dy, $d\theta$.

21. Involution de Σ. — On aura donc démontré que Σ est en involution si l'on établit que le système polaire S_2 de l'élément intégral générique Q_2 à 2 dimensions n'introduit aucune relation entre ξ_1, ξ_2, ξ_{12} (**SDE** n° 80).

Il suffit de montrer que pour $Q_2 = (Q, a, b)$ générique, S_2 se réduit à (1), (2), (3), (4), $(\bar{2}a\xi)$, $(\bar{2}b\xi)$. Alors en effet on peut prendre ξ_1 ξ_2 ξ_{12} arbitraires, et $(\bar{2}a\xi)$, $(\bar{2}b\xi)$ sont résolubles en ξ_3, ξ_{32} puisque leur déterminant (par rapport à ces inconnues) est

$$(5) \qquad a_3b_{32} - a_{32}b_3 = \mathrm{I}(a_{12}b_2 - a_2b_{12})$$

d'après $(\bar{2}ab)$, et n'est pas nul pour Q_2 générique. Ensuite ξ_{31} est déterminé par (4).

On est ainsi ramené à établir que *si* $Q_2 = (Q, a, b)$ *est intégral*, (4ξ), $(\bar{2}a\xi)$, $(\bar{2}b\xi)$ entraînent $(\bar{4}a\xi)$ et $(\bar{4}b\xi)$, c'est-à-dire entraînent

$$(6) \qquad F(a, \xi) = F(b, \xi) = 0$$

si $F(a, \xi)$ désigne le premier membre de $(\bar{4}a\xi)$; on constate que $F(a, \xi)$ est une forme bilinéaire alternée par rapport à a, ξ où ne figure pas a_1 ni ξ_1.

Or, si a, b, ξ vérifient deux à deux $(\bar{2})$ et vérifient (4) ils vérifient aussi

$$(7) \qquad [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{12}\bar{\omega}_2] = [\bar{\omega}_{31}\bar{\omega}_{12}\bar{\omega}_2] = [\bar{\omega}_{32}\bar{\omega}_{12}\bar{\omega}_2];$$

et, si $a_{12}b_2 - a_2b_{12} \neq 0$ (Q_2 générique), il existe p et q tels que

$$(8) \qquad \xi_\mu = pa_\mu + qb_\mu \quad \text{avec} \quad \mu = 2, 12, 3, 31, 32 \quad (\mu \neq 1.)$$

Donc $F(a, \xi) = q\,F(a, b)$; $F(\xi, b) = p\,F(a, b)$, d'après la forme de F; et comme $F(a, b) = 0$ (Q_2 intégral), les relations (6) sont démontrées (c. q. f. d.), et Σ *est en involution.*

22. On peut aussi (au lieu du n° 21) terminer la démonstration en utilisant le critère de **SDE** n° 83. On a déjà trouvé (au n° 20) :

$$(5) \qquad s'_0 = 4 \qquad s'_0 + s'_1 = 6.$$

On en déduit immédiatement $s'_2 = 0$, si $s'_0 + s'_1 + s'_2$ désigne le rang du système polaire réduit de Q_2 générique; en effet, il n'y a que 6 inconnues dans tout système polaire réduit et $s'_0 + s'_1 + s'_2 \leqslant 6$. Donc

$$(6) \qquad 3s'_0 + 2s'_1 + s'_2 = 16.$$

Soit X le nombre d'équations vérifiées sur un Q_3 générique par les paramètres t_{si} définis par

$$\bar{\omega}_s = \sum_i t_{s.i}\omega_i \quad (i = 1, 2, 12).$$

Les équations (1, 2, 3, 4) donnent 12 équations entre les $t_{s.i}$, $(\bar{2})$ en donne 3, parmi lesquelles

$$t_{3.1} = t_{32.1} = 0,$$

et compte tenu de ces 2 dernières, $\bar{4}$ donne une seule équation (en $[\omega_{12}\omega_2]$). Au total $X = 12 + 3 + 1 = 16$.

On a donc bien $X = 3s'_0 + 2s'_1 + s'_2$, et Σ est en involution.

23. De l'involution de Σ résulte l'existence de réalisations locales de F, au voisinage de tout élément linéaire ordinaire, en réservant ce qualificatif aux éléments où $(I, J) \neq (0, 0)$.

Soit en effet (x_0, y_0, θ_0) un élément ordinaire de F, et des z_λ arbitraires.

Le point $(x_0, y_0, \theta_0, z_\lambda)$ est *régulier* et le théorème d'existence de **SDE** n° 63 s'applique; et puisque Σ est en involution, on peut prendre (x, y, θ) comme variables indépendantes. *Le théorème* II *du n°* 17 *est donc démontré.*

De façon plus précise puisque $s_0 + s_1$, est égal à la différence entre le nombre total de variables (9) et celui des variables indépendantes (3), il passe une variété intégrale analytique de Σ et une seule par toute variété intégrale analytique régulière W_1 à une dimension (cf **SDE** n° 71). Comme $s_1 = 2$, la solution générale dépend de 2 fonctions arbitraires d'un argument.

24. *Problème de Cauchy.* — On peut déterminer une solution de la façon suivante : soit (x_0, y_0, θ_0) l'élément au voisinage duquel on se propose de réaliser F ; on suppose $I(x_0, y_0, \theta_0) \neq 0$; soit Γ une *courbe arbitraire* de E^3 : il existe une réalisation et une seule telle que les S correspondant aux éléments de centre (x_0, y_0) *soient centrés sur* Γ, que $M(x_0, y_0, \theta_0)$ soit un point donné de Γ, et $\vec{e}_1(x_0, y_0, \theta_0)$ soit placé d'un côté arbitrairement choisi du plan osculateur à Γ. Les données arbitraires choisies ne devront toutefois pas vérifier certaines égalités que nous préciserons. Nous allons établir cette proposition.

25. Soit s l'arc de Γ, R et T les rayons de courbure et de torsion. Si une réalisation convient, on aura sur Γ :

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = ds, \qquad \omega_{31} = \frac{\omega_3 \cos\varphi}{R},$$
$$\omega_{12} = d\varphi + \frac{\omega_3}{T}, \qquad \omega_{32} = \frac{\omega_3 \sin\varphi}{R},$$

φ étant une fonction de s qui détermine les éléments $(M\vec{e}_1\vec{e}_2)$: φ = angle de Δ avec le plan osculateur à Γ.

Pour que $(x_0,\ y_0,\ \theta,\ M,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ décrive une W_1 intégrale de Σ, il faut et il suffit que

$$(5)\quad \frac{J}{I} = \frac{-\cos\varphi}{R}\,; \qquad (6)\quad Z(x_0,\ y_0,\ \theta)\,d\theta = d\varphi + \frac{ds}{T},$$

d'après (Σ, 4 et 3) et (8, 3).

Soit s_0 l'abscisse curviligne du centre M_0 de l'élément qu'on se propose d'attacher à θ_0; l'équation (5) définit φ en fonction de (θ, s) si du moins $\left|\frac{1}{R}\right|_0 > \left|\frac{J}{I}\right|_0$, ce qui *exclut les droites* (comme courbes Γ).

On déduit alors de (5) et (6) la relation

$$(7)\qquad P\,d\theta = Q\,ds,$$

avec :

$$(8)\quad P = \frac{Z\sin\varphi}{R} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{J}{I}\right), \qquad Q = \frac{1}{R}\left(\frac{\sin\varphi}{T} - \frac{\cos\varphi}{R}\frac{dR}{ds}\right),$$

qui établit en général (si $PQ \neq 0$) une correspondance biunivoque entre s et θ au voisinage de $(s_0,\ \theta_0)$. On obtient ainsi une W_1 intégrale de Σ, qui est régulière au voisinage de $(s_0,\ \theta_0)$ si l'élément intégral correspondant l'est, c'est-à-dire si

$$(9)\quad \left|\begin{matrix} J & I & 0 \\ J_3 & I_3 & I \\ -a_{32} & 0 & a_3 \end{matrix}\right|_{(0)} \neq 0 \qquad \text{soit} \qquad \left(\frac{\sin\varphi}{R}\right)_0 \neq \left(\frac{I_3 J - I J_3}{I^2}\right)_0 .$$

On a ainsi montré qu'on peut prendre Γ et s_0 arbitraires, aux inégalités près que nous avons rencontrées.

En appelant *image* d'un point m de F le lieu des centres des éléments S correspondant aux éléments linéaires de F centrés en m, on peut énoncer le résultat que nous venons d'établir sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Au voisinage d'un élément où* $I \neq 0$, *on peut choisir arbitrairement la courbe image du centre de cet élément, pourvu qu'elle ne vérifie pas les inégalités rencontrées ci-dessus,* qui excluent en particulier les droites.

26. En fait les droites ne sont exclues par ce qui précède que si $J(x_0, y_0, \theta) \neq 0$ $\left(\text{car } (25,5) \text{ donne alors } \frac{1}{R} \neq 0\right)$. Si $J(x_0, y_0, \theta) \equiv 0$, on pourra prendre arbitrairement $s(\theta)$ et (25, 6), qui devient $Zd\theta = d\varphi$, donne $\varphi(\theta)$; on a bien une W_1 intégrale de Σ mais cette W_1 n'est pas régulière car alors $J_3(x_0, y_0, \theta) = 0$ (puisque $Z \neq 0$) et (25, 9) n'est pas vérifiée. Le théorème d'existence ne s'applique pas. En général d'ailleurs, il n'y a pas de telle solution car, si $I \neq 0$, à un point de F ne peut correspondre une droite comme image (voir n° **47**).

27. Existence des réalisations semi-globales. — Nous abordons maintenant la démonstration du théorème III du n° **17**.

Soit (x_0, y_0) un point du plan F, tel que $I\,(x_0, y_0, \theta) \neq 0$ pour tout θ. Nous voulons établir l'existence d'un voisinage P de (x_0, y_0) et d'un repère $R\,(x, y, \theta)$ de E^3 qui vérifie Σ sur $P \times \mathbf{R}$.

Nous allons d'abord ramener le problème à la détermination d'un repère $R^0(\theta)$ — fonction de la seule variable θ — assujetti aux conditions (suffisantes) suivantes :

(27, 1) $R^0(\theta)$ est analytique sur $\mathbf{R}$.

(27, 2) La variété $x = x_0$, $y = y_0$, $R = R^0(\theta)$ est (sur $\mathbf{R}$) une variété W^0 intégrale régulière (à une dimension) de Σ.

(27, 3) Les composantes relatives de $R^0(\theta)$ sont périodiques, de période 2π.

28. Supposons déterminé un tel $R^0(\theta)$, et soit Σ^* le système

$$\Sigma^* \begin{cases} (\Sigma) \\ R\,(x_0, y_0, \theta) = R^0(\theta). \end{cases}$$

Puisque W^0 est une variété intégrale analytique régulière à une dimension de Σ, on peut appliquer le résultat local du n° **23** et énoncer :

A tout $\theta_0 \in \mathbf{R}$ correspondent un voisinage w_0 de (x_0, y_0) et un voisinage w'_0 de θ_0 tels que :

(28,1) Il existe un repère $R^*_0(x, y, \theta)$ qui, sur $w^*_0 = w_0 \times w'_0$ est analytique et vérifie Σ^*.

(28,2) Si $w' \subset w_0'$ et si, sur $w^* = w_0 \times w'$, $R^*(x\, y\, \theta)$ est analytique et vérifie Σ^*, alors $R^*(x, y, \theta) = R_0^*(x, y, \theta)$ sur w^*.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. La compacité de I permet de trouver un voisinage P de (x_0, y_0) et un repère $R(x, y, \theta)$ qui vérifie Σ^* sur $P \times I$. Choisissons en effet en tout $\theta_0 \in J$ un w_0 et un w_0' vérifiant (28,1 et 2), et soit $\mathcal{F}$ la famille des w_0 ainsi définis. Il existe un recouvrement *fini* de I par des $w_i' \in \mathcal{F}$, et soient θ_i, w_i, $R_i^*(x, y, \theta)$ les θ_0, w_0, R_0^* correspondants ($i \leqslant \nu$ fini); il suffit de prendre pour P l'intersection des w_i ($\neq \emptyset$ puisque ν fini) et pour R le repère :

$$R(x\, y\, \theta) = R_i^*(x, y, \theta) \text{ pour } \theta \in w_i'.$$

Alors $R(x, y, \theta)$ vérifie Σ sur $P \times I$. (Puisque les R_i^* vérifient Σ^*, il suffit de montrer que R est bien défini, c'est-à-dire que si $u' = w_i' \cap w_j'$, $R_i^* = R_j^*$ dans $P \times u'$; or, d'après (28,1) et les relations $P \subset w_j$ et $u' \subset w_j'$, le repère R_j^* est analytique et vérifie Σ^* sur $u^* = P \times u'$; les relations $P \subset w_i$, $u' \subset w_i'$ et (27,2) montrent alors que $R_j^* = R_i^*$ sur $P \times u$).

Remarquons que pour ce n° **28**, on peut remplacer **R** par I dans les hypothèses et supprimer (27,3).

29. Supposons encore déterminé un repère $R^0(\theta)$ vérifiant les hypothèses du n° **27**. D'après le n° **28**, en prenant $I = [0,3\,\pi]$ il existe un voisinage P de (x_0, y_0) et un repère analytique $R(x, y, \theta)$ qui vérifie Σ^* quels que soient $(x, y) \in P$ et $\theta \in [0,2\pi]$. Nous désignerons ce repère R par $\overline{R}(x, y, \theta)$.

Soit T le déplacement qui transforme $R^0\,(0)$ en $R^0(2\pi)$, nous noterons :

$$(1) \qquad R^0(2\pi) = TR^0(0).$$

Nous savons que dans ces conditions, (27, 3) entraîne :

$$(29,\ 2) \qquad R^0(\theta + 2\pi) = TR^0(\theta) \qquad \text{pour tout} \qquad \theta \in \mathbf{R},$$

et le système Σ^* est par suite conservé par la transformation

$$(3) \qquad \theta \to \theta + 2\pi, \qquad R \to TR.$$

Nous allons montrer que le repère $R(x, y, \theta)$ défini par :

$$(4) \quad \begin{cases} R(x, y, \theta) = \overline{R}(x, y, \theta) & \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ R(x, y, \theta) = T^n \overline{R}(x, y, \theta - 2n\pi) & \text{pour } 2n\pi \leqslant \theta < 2(n+1)\pi, \end{cases}$$

vérifie Σ^* sur $P \times \mathbf{R}$.

Cette définition et la conservation de Σ^* par (4) rendent évidente la propriété cherchée si $\theta \neq 0$ mod. 2π, et suffisante sa démonstration pour $\theta = 2\pi$.

Or le point 2π appartient à l'un des w'_i du n° **28**, soit w_1, auquel est associé $\underline{w}_1 \supset \mathrm{P}$ et R^*_1 vérifiant (28, 1 et 2). Sur $u' = w'_1 \cap [2\pi, 3\pi]$, $\mathrm{T}\overline{\mathrm{R}}(x, y, \theta - 2\pi)$ est analytique et vérifie Σ^*; d'après $u' \subset w'_1$, $\mathrm{P} \subset w_1$ et (28, 2), on a donc

$$\mathrm{TR}(x, y, \theta - 2\pi) = \mathrm{R}^{*\prime}(x, y, \theta) \qquad \text{sur} \qquad \mathrm{P} \times u'.$$

Mais d'après le n° 28 :

$$\overline{\mathrm{R}}(x, y, \theta) = \mathrm{R}^*_1(x, y, \theta) \qquad \text{sur} \qquad \mathrm{P} \times w'_1,$$

et par suite, R défini par (4) vérifie

$$\mathrm{R}(x, y, \theta) = \overline{\mathrm{R}}(x, y, \theta) \qquad \text{sur} \qquad \mathrm{P} \times w'_1,$$

donc *est analytique pour* $\theta = 2\pi$ *et vérifie* Σ^*.

30. *Détermination de* $\mathrm{R}^0(\theta)$. — En résumé, s'il existe un $\mathrm{R}^0(\theta)$ vérifiant les conditions du n° **27**, il existe une réalisation (semi-globale) de F *au voisinage du point* (x_0, y_0).

Écrivons que $\mathrm{R}^0(\theta)$ vérifie (27,2) : ses composantes relatives vérifient alors :

$$(5) \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_{12} = \mathrm{Z}\, d\theta, \qquad \omega_3 = \mathrm{I}h\, d\theta,$$
$$\omega_{31} = -\mathrm{J}h\, d\theta, \qquad \omega_{32} = k\, d\theta,$$

où les fonctions $h = h(\theta)$, $k = k(\theta)$ peuvent être choisies arbitrairement, et où I, J, Z sont des fonctions analytiques données de $\theta(\mathrm{I} = \mathrm{I}(x_0, y_0, \theta)$ etc.) vérifiant (d'après leurs expressions, cf n^os^ **8** et **9**) :

$$(6) \qquad \mathrm{I}(\theta + \pi) = \mathrm{I}(\theta), \quad \mathrm{J}(\theta + \pi) = -\mathrm{J}(\theta), \quad \mathrm{Z}(\theta + \pi) = \mathrm{Z}(\theta).$$

Les fonctions h et k devront vérifier la condition de régularité des éléments intégraux à une dimension (a) de la variété $\mathrm{W}^0[x = x_0, y = y_0, \mathrm{R} = \mathrm{R}^0(\theta)]$. L'hypothèse $\mathrm{I}(x_0, y_0, \theta) \neq 0$ sur **R** réduit cette conditions à l'indépendance des équations $(4\xi)'$, $(\bar{2}a\xi)'$, $(\bar{4}a\xi)'$ du système polaire réduit de (a), ce qui donne (cf n° 25) :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{J} & \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{J}_3 & \mathrm{I}_3 & \mathrm{I} \\ -a_{32} & 0 & a_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{soit} \qquad k \neq h\frac{\mathrm{I}_3\mathrm{J} - \mathrm{I}\mathrm{J}_3}{\mathrm{I}^2}.$$

On peut donc réaliser les conditions (27, 1 à 3) en prenant h et k_1 analytiques de période 2π, avec $k_1 \neq 0$ pour tout θ, et $k = h \dfrac{I_3J - IJ_3}{I^2} + k_1$ (1).

La démonstration du théorème III du n° 17 est ainsi achevée (Il y aurait eu intérêt à prendre

$$k(\theta + \pi) = -k(\theta), \qquad h(\theta + \pi) = h(\theta)$$

mais (7) ne pourrait alors être vérifiée dans $(0, \pi)$ et W^0 n'aurait pas tous ses éléments intégraux réguliers).

IV. — CAS GÉNÉRAL. RÉALISATIONS DANS $\mathfrak{R}$.

31. Notion de réalisation dans un espace de Riemann. — La définition de la connexion induite sur une variété W d'éléments $S^{\varepsilon} = (M\Delta P)$ s'étend au cas où M est un point d'un espace de Riemann $\mathfrak{R}$, Δ une direction en M, P un « élément plan » contenant Δ. Si l'on associe à W une famille de repères rectangulaires avec $\vec{e}_1$ sur Δ et $\vec{e}_2$ dans P, les composantes de la connexion induite seront encore ω_1, ω_2, ω_{12}.

Sur toute réalisation de $\mathfrak{R}$ dans un espace euclidien E^n, l'élément $(M\Delta P)$ donne un élément $M^*\Delta^*P^*$, et les composantes relatives d'une famille de repères rectangulaires attachés à W^* vérifient $\omega^*_\nu = \omega_\nu (\nu = i, ij; i, j \leqslant p$ si p est le nombre de dimensions de l'espace de Riemann) donc en particulier $\omega_1 = \omega_1$, $\omega^*_2 = \omega_2$, $\omega^*_{12} = \omega_{12}$.

Ainsi, à toute réalisation de F dans $\mathfrak{R}^p$ correspond une réalisation de F dans E^n avec $n = \dfrac{p(p+1)}{2}$. Il s'agit bien entendu ici de réalisations locales. Une réalisation W de F dans E^n peut être regardée comme une réalisation dans $\mathfrak{R}$ s'il existe dans E^n une variété ponctuelle (à moins de n dimensions) qui contient les points M de W et est tangente en M à P.

En considérant simplement la variété ponctuelle engendrée par les *points* de P, cela donne le résultat suivant :

(1) On pourrait prendre simplement $h = 0$, $k = 1$, mais cela donnerait un *point* M pour l'image de (x_0, y_0), auquel ne s'appliquent pas les considérations géométriques de la suite de l'article; la variété réalisante présente en un tel point une dégénérescence.

Tout espace de Finsler F^n (*à n dimensions*) *analytique est localement réalisable dans un espace de Riemann à* $3n - 1$ *dimensions* (*au plus*), puisque F^n est réalisable dans un espace euclidien (**REF**, n° 20), par une variété W(S) à $2n-1$ dimensions où P(S) est à n dimensions.

32. Nous allons montrer que le *plan* F le plus général ($IJK \neq 0$) est réalisable dans $\mathbf{E}^5$ par une variété W(S) telle que P(S) soit tangent en M(S) au lieu de M. On trouvera alors que ce dernier lieu a 3 dimensions, et on obtiendra ainsi le :

Théorème. — *Tout* F *analytique est réalisable dans un espace de Riemann* $\mathfrak{R}$ *à* 3 *dimensions, au voisinage de tout élément linéaire où* $I \neq 0$. *Cet espace* $\mathfrak{R}$ *dépend d'ailleurs de* F.

33. On a donc à considérer le système $\overline{\Sigma_5}$ du n° **15**; on ne restreint pas la généralité en prenant $\omega_4 = \omega_5 = 0$ [cela revient à prendre $\vec{e}_3$ tangent à W(M)]. On est ainsi conduit au système :

$$
(\Sigma)\left\{\begin{array}{llll}
(1) & \bar\omega_1 = \omega_1 & (\bar 1) & [\bar\omega_3\bar\omega_{31}] = 0 \\
(2) & \bar\omega_2 = \omega_2 & (\bar 2) & [\bar\omega_3\bar\omega_{32}] = I[\omega_{12}\omega_2] \\
(3) & \bar\omega_{12} = \omega_{12} & (\bar 3) & [\bar\omega_{32}\bar\omega_{31}] + [\bar\omega_{42}\bar\omega_{41}] + [\bar\omega_{52}\bar\omega_{51}] = J[\omega_{12}\omega_2] + K[\omega_1\omega_2] \\
(4) & \bar\omega_4 = 0 & (\bar 4) & [\bar\omega_{41}\bar\omega_1] + [\bar\omega_{42}\omega_2] + [\bar\omega_{43}\bar\omega_3] = 0 \\
(5) & \bar\omega_5 = 0 & (\bar 5) & [\bar\omega_{51}\omega_1] + [\bar\omega_{52}\omega_2] + [\bar\omega_{53}\bar\omega_3] = 0
\end{array}\right.
$$

Nous allons démontrer que ce système est en involution. Nous démontrerons pour cela que le système polaire de l'élément intégral générique à $q \leqslant 2$ dimensions n'introduit pas de relation entre ω_1, ω_2, ω_{12} (donc pas non plus entre dx, dy, $d\theta$ puisque $[\omega_1\omega_2\omega_{12}] \neq 0$); il revient au même de démontrer que les caractères s_i et les caractères réduits s'_i (cf **SDE** n^{os} 58 et 81) vérifient

$$(33,\ 1) \qquad s_0 = s'_0, \qquad s_1 = s'_1, \qquad s_2 = s'_2.$$

34. Les *points intégraux* sont réguliers et

$$s_0 = s'_0 = 5.$$

Les éléments intégraux Q_1 sont donc tous ordinaires; pour le Q_1 générique les a sont arbitraires (notations du n° 16) sauf

$$a_4 = a_5 = 0.$$

Le tableau (où les blancs sous-entendent des 0) :

	ξ_3	ξ_{31}	ξ_{32}	ξ_{41}	ξ_{42}	ξ_{43}	ξ_{51}	ξ_{52}	ξ_{53}
$(\bar{1}a\xi)$	$-a_{31}$	a_3	0						
$(\bar{2}a\xi)$	$-a_{32}$	0	a_3						
$(\bar{3}a\xi)$	0	$-a_{32}$	a_{31}	$-a_{42}$	a_{41}	0	$-a_{52}$	a_{51}	0
$(\bar{4}a\xi)$	a_{43}			$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$			
$(\bar{5}a\xi)$	a_{53}						$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$

indique en face de chaque équation et sous chaque inconnue le coefficient correspondant. Les colonnes ξ_{31}, ξ_{32}, ξ_{42}, ξ_{43}, ξ_{53} fournissent le déterminant

$$a_1 a_3^3 a_{41}$$

qui $\neq 0$ pour le Q_1 générique. Les équations (1ξ) à (5ξ) ne faisant pas intervenir les ξ du tableau ci-dessus, et étant indépendantes, les 10 équations du système polaire de Q_1 sont indépendantes et n'introduisent visiblement aucune relation entre ξ_1, ξ_2, ξ_{12}; d'où

$$s_1' = s_1 = 5.$$

35. Formons pour l'élément intégral $Q_2 = (Q, a, b)$ un tableau (T) analogue à celui que nous avons formé pour Q_1 :

(T)

	ξ_3	ξ_{31}	ξ_{32}	ξ_{41}	ξ_{42}	ξ_{43}	ξ_{51}	ξ_{52}	ξ_{53}
$(\bar{1}a\xi)$	$-a_{31}$	a_3							
$(\bar{1}b\xi)$	$-b_{31}$	b_3							
$(\bar{2}a\xi)$	$-a_{32}$	0	a_3						
$(\bar{2}b\xi)$	$-b_{32}$	0	b_3						
$(\bar{3}a\xi)$		$-a_{32}$	a_{31}	$-a_{42}$	a_{41}	0	$-a_{52}$	a_{51}	0
$(\bar{3}b\xi)$		$-b_{32}$	b_{31}	$-b_{42}$	b_{41}	0	$-b_{52}$	b_{51}	0
$(\bar{4}a\xi)$	$-a_{43}$			$+a_1$	$+a_2$	$+a_3$			
$(\bar{4}b\xi)$	$-b_{43}$			$+b_1$	$+b_2$	$+b_3$			
$(\bar{5}a\xi)$	$-a_{53}$						a_1	a_2	a_3
$(\bar{5}b\xi)$	$-b_{53}$						b_1	b_2	b_3.

Les équations (1ξ) à (5ξ) ne contiennent pas les ξ relatifs à ce tableau (T) et sont indépendantes; donc le rang de (T) est

$$s_1 + s_2.$$

L'équation $(\bar{1}ab)$ montre que les deux premières des dix lignes de (T) sont proportionnelles. Donc $s_1 + s_2 \leqslant 9$.

Or on peut trouver (a, b) tel que $Q_2^* = (Qab)$ donne un tableau de rang effectivement égal à 9. Il suffit de prendre (a, b) vérifiant

$$(6) \qquad a_1 = a_2 = b_1 = 0.$$

On trouve alors pour le déterminant obtenu en barrant la 2e ligne, et au signe près :

$$(7) \qquad \Delta = a_3^3 b_2^2 . \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_{32} & b_{32} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{42} & b_{42} \\ a_{52} & b_{52} \end{vmatrix}.$$

En se reportant au système polaire S_1 de Q_1, on voit qu'on peut prendre b_{52} arbitraire, donc nul, et $\Delta \neq 0$ en général, si du moins

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_{32} & b_{32} \end{vmatrix} \neq 0$$

C'est-à-dire si $I \neq 0$ (car, d'après (6) : $a_{12}\, b_2 \neq 0$).

On a donc pour le Q_2^* choisi

$$s_1^* + s_2^* = s_1'^* + s_2'^* = 9,$$

ce qui donne :

$$(9) \qquad s_2 = s_2' = 4$$

(Car $s_1^* + s_2^* \leqslant s_1 + s_2 \leqslant 9$ donne

$$s_1 + s_2 = 9; \qquad s_1'^* + s_2'^* \leqslant s_1' + s_2' \leqslant s_1 + s_2 = 9$$

donc $s_1' + s_2' = 9$; $s_1 = s_1' = 5$ donne finalement $s_2 = s_2' = 4$.)

Ainsi la condition (33,1) est vérifiée et Σ est en involution.

36. Nous avons rencontré la condition $I \neq 0$. Si $I = 0$, le tableau du nº 35 est visiblement de rang $\leqslant 8$ car les 2 premières lignes sont proportionnelles ainsi que les 2 suivantes [d'après $(\bar{1}ab)$ et $(\bar{2}ab)$)].

Il n'y a donc pas d'élément Q_2 régulier passant par $(x, y, \theta, z_\lambda)$ si $I(x, y, \theta) = 0$. Par contre (nº 35) par tout $(x, y, \theta, z_\lambda)$ où $I(x, y, \theta) \neq 0$ passe un élément Q_2 régulier. Il existera donc une réalisation W(S) de F au voisinage de tout élément linéaire où $I \neq 0$.

Soit W(M) le lieu des centres des S de W(S). Nous voulons encore montrer que W(M) a 3 dimensions, c'est-à-dire que

$$(6) \qquad [\bar\omega_1\bar\omega_2\bar\omega_3] \neq 0.$$

Or $[\bar\omega_1\bar\omega_2\bar\omega_{12}] = [\omega_1\omega_2\omega_{12}] \neq 0$, et d'après $(\bar 2)$, $[\bar\omega_3\bar\omega_{12}\bar\omega_2] = 0$. Donc, si, $[\bar\omega_1\bar\omega_2\bar\omega_3]$ était nul, on aurait :

$$(7) \qquad [\bar\omega_2\bar\omega_3] = 0$$

et par suite aussi [en dérivant (7)] :

$$(\bar 7) \qquad [\bar\omega_2\, d\bar\omega_3] = [\bar\omega_3\, d\bar\omega_2].$$

Mais d'après $(\bar 1)$ et $(\bar 2)$, on a la relation :

$$(8) \qquad [\bar\omega_3\, d\bar\omega_3] = 0;$$

et (7) et (8) entraînent $[\bar\omega_2\, d\bar\omega_3] = 0$, d'où, d'après $(\bar 7)$:

$$(9) \qquad [\bar\omega_1\bar\omega_{12}\bar\omega_3] = 0$$

et les relations (7) et (9) entraînent $\bar\omega_3 = 0$ (puisque $[\bar\omega_1\bar\omega_{12}\bar\omega_2] \neq 0$) donc, si $[\bar\omega_1\bar\omega_2\bar\omega_3]$ était nul, on aurait $\bar\omega_3 = 0$ et par suite, d'après $(\bar 2)$, $I = 0$.

Le lieu W(M) a donc 3 dimensions et, puisque $\bar\omega_4 = \bar\omega_5 = 0$, le plan P(S) qui contient les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, est tangent à W(M). Compte tenu du rôle joué par la condition $I = 0$, le théorème du n° 32 est démontré.

37. L'espace de Riemann $\mathfrak{R}$ réalisé par W(M) n'est évidemment pas le même pour tous les F. D'autre part, ce n'est pas un espace de Riemann quelconque. Dans un espace de Riemann arbitraire, il n'existe pas en général de variété W(S) dont la connexion induite soit celle d'un F; il n'y a pas en général de W(S) dont les composantes vérifient (9, 7) :

Théorème. — *Pour qu'un espace de Riemann analytique $\mathfrak{R}$ à trois dimensions contienne une réalisation analytique d'un* F *à torsion non nulle, il faut et il suffit qu'il existe dans $\mathfrak{R}$ une famille analytique à* 1 *paramètre de* développables réglées *analytiques non totalement géodésiques dont les génératrices ne forment pas une congruence de normales.*

On peut dans cet énoncé remplacer « analytique » par « de classe C^∞ » et même sans trop de difficultés, considérer des classes moins restrictives.

Montrons que *la condition est nécessaire.* On ne peut se contenter de considérer le système Σ du n° **33**, car $\mathfrak{R}$ pourrait n'être, *a priori*, réalisable que dans E^6. Mais un élément

$$S = (M, \Delta, P) = \left(M, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$$

de $\mathfrak{R}$ *définit* un repère rectangulaire $R = \left(M\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ de $\mathfrak{R}$, et si W(S) réalise un F à torsion non nulle, ses composantes $\{\omega\}$ vérifient :

$$(1) \qquad [\omega_3\omega_{31}] = [\omega_3\omega_{32}\omega_2] =]\omega_3\omega_{12}\omega_2] = 0$$
$$(2) \qquad [\omega_1\omega_{12}\omega_2] \neq 0$$
$$(3) \qquad [\omega_3\omega_{32}] \neq 0$$

Ces relations (1) et (2) résultent de (9,7) et des relations de structure $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$ de $\mathfrak{R}$ (cf n° **2**); (3) exprime que $I \neq 0$.

On en déduit, comme au n° **36**,

$$(4) \qquad [\omega_3 d\omega_3] = 0$$
$$(5) \qquad [\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$$

Par suite $\omega_3 = 0$ est complètement intégrable, et, puisque $\omega_3 \not\equiv 0$, on a $\omega_{31} = \lambda\omega_3$; sur une variété $\zeta = V_2(M)$ définie par $\omega_3 = 0$, ω_{31} est nul : ζ est donc une *développable* (lignes asymptotiques doubles, de direction $\vec{e_1}$); ses asymptotiques δ sont les lignes $\omega_2 = \omega_3 = 0$, qui d'après (1) et (5) vérifient $\omega_3 = \omega_{31} = \omega_{12} = 0$, et sont par suite des *géodésiques* de $\mathfrak{R}$: les ζ sont donc des *développables réglées* (¹); d'autre part, sur ζ, $\omega_{32} \not\equiv 0$ d'après (3), donc $d\vec{e_3} \not\equiv 0$, *ζ n'est pas totalement géodésique.* Enfin $\omega_1 = 0$ n'est pas complètement intégrable (d'après (2) et $[\omega_1 d\omega_1] = [\omega_1\omega_{12}\omega_2]$) et les δ ne forment pas une congruence de normales. Remarquons en passant que P est tangent à ζ.

La *réciproque* sera établie au n° 43, car c'est un corollaire d'un résultat relatif à la structure des W(S) qui réalisent un F.

38. *Réalisations particulières dans $\mathfrak{R}$.* — Si l'on n'impose plus à $\mathfrak{R}$ d'être de classe 2 (c'est-à-dire réalisable dans E^5) on peut obtenir des propriétés géométriques supplémentaires pour la

(¹) Cf. E. Cartan, Comptes Rendus, 184, 1927, pp. 138-141.

réalisation de F. On peut, par exemple, considérer les réalisations dans E^6 définies par le système :

$$\Sigma_6^* \begin{cases} \bar{\omega}_1 = \omega_1, \ \bar{\omega}_2 = \omega_2, \ \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \ \bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_6 = 0, \ \mathrm{I}\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}\bar{\omega}_3 = 0; \\ [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{31}] = 0, \ [\bar{\omega}_3\bar{\omega}_{32}] = \mathrm{I}[\omega_{12}\omega_2], \ \sum_\alpha [\bar{\omega}_{42}\bar{\omega}_{41}] = \mathrm{K}[\omega_1\omega_2] \ \text{etc...} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha \geqslant 4, \ \mathrm{I} \neq 0), \end{cases}$$

(obtenu en prolongeant Σ_6 par $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_6 = \mathrm{I}\bar{\omega}_{31} + \mathrm{J}\bar{\omega}_3 = 0$). On montre que ce système est en involution par une méthode analogue à celle des nos **33** à **36**.

Dans une telle réalisation, l'image d'un point m de F (lieu des centres des éléments S correspondant aux éléments linéaires de F centrés en m) est tangente à une *direction principale* de $\mathcal{R}$ [1]. En effet, si l'on pose dans $\mathcal{R}$:

$$\Omega_{12} = \sum_{ij} \mathrm{R}_{12,\,ij}[\omega_i\omega_j], \quad (ij = 12, 23, 31),$$

Σ_6^* donne $\mathrm{R}_{12,13} = \mathrm{R}_{12,23} = 0$, qui exprime que la direction $\omega_1 = \omega_2 = 0$ est une direction principale.

39. *Réalisations dans* E^4. — On démontre aisément que le système $\overline{\Sigma}_4$ (no **15**) est en involution : on opère comme aux nos **33** à **36**; on trouve (avec les mêmes notations) que les équations du système polaire S_2^* de l'élément Q_2^* à 2 dimensions, (qui sont ici en nombre égal à 9), sont en général indépendantes : elles ont un déterminant de rang 9 égal à

$$\Delta = a_{31}b_{41}b_3^2a_{42}^2,$$

si Q_2^* vérifie $b_{31} = b_{32} = b_{42} = a_{32} = 0$, et on voit aisément qu'il existe de tels Q_2^* pour lesquels $\Delta \neq 0$. On arrive ainsi à $s_0 = s_0' = s_1 = s_1' = s_2 = s_2' = 3$. On trouve de plus que *par tout point intégral* passe un élément intégral ordinaire à 3 dimensions, et on aboutit à l'énoncé :

Théorème. — *Tout* F *analytique est réalisable dans* E^4 *au voisinage de chacun de ses éléments linéaires.*

Mais cette réalisation *ne peut en général s'interpréter comme faite dans un espace de Riemann à* 3 *dimensions*. Alors $\omega_3\vec{e}_3 + \omega_4\vec{e}_4$ aurait une direction indépendante de $(dx, dy, d\theta)$ et on aurait

[1] Cf. E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des Espaces de Riemann* (Paris, nos 167 et 192 dans l'édition de 1928).

$[\omega_3\omega_4] = 0$ dans W. Or l'élément intégral générique Q_2 à 2 dimensions de Σ_4 ne vérifie pas une telle relation. Pour avoir une réalisation de F dans un $\mathfrak{R}$ lui-même réalisable dans E^4, on aurait à prolonger Σ_4 par l'équation $\omega_4 = 0$. On trouve que le système Σ_4^* ainsi obtenu n'est pas en involution. Nous n'étudierons pas les prolongements possibles de Σ_4^*.

V. — STRUCTURE DES RÉALISATIONS DANS E^3 ET DANS $\mathfrak{R}$.

40. La connexion induite sur une variété à 3 dimensions W(S) d'éléments S = (M, Δ, P) ne vérifie généralement pas (9, 7), et une W(S) arbitraire ne réalise pas un F. Nous allons caractériser les W(S) qui réalisent un F, et pour cela nous nous appuierons sur un lemme concernant leurs composantes relatives — c'est-à-dire les composantes du repère rectangulaire $M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ défini par $(M\vec{e}_1\vec{e}_2) = S$.

Lemme. — *Pour qu'une variété* W(S), *plongée dans* E^3 *ou dans un* $\mathfrak{R}$, *réalise un* F *à torsion non nulle* (localement), il faut et il suffit que ses composantes relatives $\{\omega\}$ vérifient le système :

$$\begin{aligned}
&(40,1) \qquad [\omega_1\omega_2\omega_{12}] \neq 0\\
&(40,2) \qquad [\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0\\
&(40,3) \qquad [\omega_3 d\omega_3] = 0\\
&(40,4) \qquad [\omega_3\omega_{31}] = [\omega_3\omega_{32}\omega_2] = [\omega_3\omega_{12}\omega_2] = 0\\
&(40,5) \qquad [\omega_3\omega_{32}] \neq 0.
\end{aligned}$$

On a vu au n° 37 que ces conditions sont *nécessaires* dans $\mathfrak{R}$ et il en est de même dans E^3 car les seules relations de structure utilisées au n° 37 sont $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$ qui sont communes à E^3 et à $\mathfrak{R}$.

Ces conditions sont *suffisantes*, car elles entraînent (9, 7) — compte tenu de $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$, et (40,5) exprime que $I \neq 0$.

41. Réalisations dans E^3. — Nous appellerons *famille ordinaire de développables*, une famille de développables qui ne se réduisent pas à des plans, et dont les génératrices ne forment pas une congruence de normales.

Théorème. — *Pour qu'une variété à* 3 *dimensions d'éléments* S = (M, Δ, P) *réalise localement un* F *à torsion non nulle, il faut et il suffit que les* Δ *engendrent une famille ordinaire à un paramètre de développables tangentes aux* P.

La condition est nécessaire. — On voit en effet, comme au n° **37**, que les relations (40, 1 à 5) ont les conséquences suivantes : $\omega_3 = 0$ est complètement intégrable, et entraîne $\omega_{31} = 0$ (car $\omega_3 \not\equiv 0$ dans W).

Dans une $V_2(S)$ définie par $\omega_3 = 0$, le lieu $V_2(M)$ des centres est une *développable* $\zeta(\omega_{31} = 0)$, dont les génératrices $(\omega_2 = 0)$ sont les droites $\Delta(\omega_2 = \omega_3 = 0$ entraîne $\omega_{31} = \omega_{32} = \omega_{12} = 0)$; le plan tangent à ζ le long de $\Delta(S)$ est $P(S)$, puisque ζ vérifie $\omega_3 = 0$.

ζ n'est pas réduite à un plan car $\omega_3 = 0$ n'entraîne pas $\omega_{32} = 0$ (40,5); les Δ ne sont pas normales à une surface, car $[\omega_1 d\omega_1] \neq 0$ puisque $d\omega_1 = [\omega_{12}\omega_2]$ et d'après (40, 1).

Réciproquement une famille ordinaire à 1 paramètre de développables ζ de génératrices Δ définit une variété à 3 dimensions d'éléments linéaires (M, Δ), et en prenant P tangent à ζ, on a une variété W(S) à 3 dimensions d'éléments

$$S = (M, \Delta, P) = (M\vec{e}_1\vec{e}_2).$$

Les composantes $\{\omega\}$ de W(S) vérifient (40, 1 et 2) et les autres conditions du n° **40**, car les ζ vérifient $\omega_3 = 0$, qui est donc complètement intégrable; sur ζ, $\omega_{31} = 0$, et $[\omega_3\omega_{31}] \equiv 0$ dans W; sur Δ, $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{32} = \omega_{12} = 0$ et les deux dernières relations de (40, 4) sont vérifiées aussi; enfin (40, 5) est vérifiée puisque ζ ne se réduit pas à un plan.

Ainsi une congruence ordinaire réalise localement deux familles de plans de Finsler, correspondant aux 2 familles de développables ζ. Les éléments S ont pour Δ les génératrices, et pour P les plans tangents aux ζ d'une des familles de développables; M est un point variable de Δ. La variété W(S) ainsi définie réalise localement un F. Rappelons que cet F est doué d'un parallélisme absolu des éléments $(K = 0)$.

Remarquons que si les P forment une famille à 1 paramètre, et les Δ une congruence (alors non ordinaire), W(S) réalise un F qui se réduit à $\mathbf{E}^2$ puisque $[\omega_3\omega_{32}] = 0$, donc $I = 0$, et que d'autre part, $K = 0$ comme dans toute réalisation dans $\mathbf{E}^3$.

42. Cas d'un F_A. — Dans le cas du parallélisme absolu (F_A, $J = 0$, cf n° **11**) on a les particularités suivantes :

I. *Les ζ ont même cône directeur.* — En effet $\omega_{31} = 0$ (cf **18**, 4) d'où (structure de $\mathbf{E}^3$) : $[\omega_{32}\omega_{12}] = 0$, $\omega_{32} = \alpha\omega_{12}$ avec $\alpha \neq 0$

si $I \neq 0$, et la congruence des Δ (vecteur $\vec{e}_1$) admet un cône directeur; les *cylindres* de la congruence vérifient $\omega_{12} = 0$, les ζ constituent l'autre famille de développables, si du moins la relation $\omega_{12} = 0$ n'entraîne pas $\omega_3 = 0$; mais alors on aurait $\omega_3 = \beta\omega_{12}$ et $[\omega_3\omega_{32}] = 0$, I serait nul. Les ζ ont donc même cône directeur.

II. — *Les* Δ *sont les binormales des trajectoires orthogonales des* ζ. C'est ce qu'exprime la relation $\omega_{31} \equiv 0$, en ce qui concerne les courbes $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

43. **Réalisation dans** $\mathfrak{R}$. — Nous dirons qu'une famille de développables réglées ζ est ordinaire si les ζ ne sont pas totalement géodésiques et si leurs génératrices ne forment pas une congruence de normales.

Théorème. — *Pour qu'une variété à* 3 *dimensions d'éléments* $S = (M, \Delta, P)$ *d'un espace de Riemann à* 3 *dimensions réalise localement un plan de Finsler à torsion non nulle, il faut et il suffit que les éléments linéaires* (M, Δ) *soient les éléments de contact des génératrices d'une famille ordinaire à* 1 *paramètre de développables réglées tangentes aux* P.

Même démonstration que dans E^3 au remplacement près des Δ par les génératrices δ comme solutions de $\omega_2 = \omega_3 = 0$.

On avait d'ailleurs pratiquement établi au n° 37 que cette condition était nécessaire.

Ce théorème a pour corollaire immédiat celui du n° 37; en particulier la réciproque que nous avions alors laissée en suspens est maintenant établie.

VI. — CORRESPONDANCES ENTRE F ET SES RÉALISATIONS.

44. **Images.** — Soit F un plan de Finsler, $W(S) = W$ une réalisation de F : W est constituée par une famille de développables ζ de E^3 ou de développables réglées ζ de $\mathfrak{R}$. La donnée de ζ associe à tout M un élément $S = (M, \Delta, P) = S(x, y, \theta)$ attaché à un élément linéaire $(l) = (x, y, \theta)$ de F.

Nous appellerons *image* de l'élément (x, y, θ) le centre $M = M(x, y, \theta)$ de l'élément $S(x, y, \theta)$ de W; *image d'un ensemble* $\mathcal{E}$ d'éléments (x, y, θ) l'ensemble des $M(x, y, \theta)$

correspondant aux $(x, y, \theta) \in \mathcal{E}$. L'image d'une *courbe* est l'image de l'ensemble de ses éléments de contact. L'image d'un *point* est l'image de l'ensemble des éléments linéaires (de F) centrés en ce point.

Dans une réalisation au voisinage d'un élément linéaire (l_0) de F, l'image d'un (l) voisin de (l_0) est bien définie. Il n'en est plus de même dans une réalisation semi-globale : l'image de (l) est alors l'ensemble des $S(x, y, \theta + k\pi)$ définis par $(l) = (x, y, \theta)$.

45. Correspondances générales. — THÉORÈMES. I. — *Les images des points de* F *sont les trajectoires orthogonales des* ζ.

En effet les points de F sont définis par $\omega_1 = \omega_2 = 0$, qui définissent précisément les trajectoires orthogonales γ des ζ. Dans la réalisation semi-globale du n° 27, il y a correspondance biunivoque entre les points voisins de (x_0, y_0) et les γ voisines de $\gamma(x_0, y_0)$.

II. — *Les images des courbes de* F *sont les courbes trajectoires orthogonales des lignes de courbure non rectilignes des* ζ (non géodésiques dans le cas d'une réalisation dans $\mathfrak{R}$), car ces familles d'éléments (x, y, θ) sont caractérisées par $\omega_2 = 0$.

III. — *Les géodésiques de* F *ont pour images les génératrices des* ζ, puisque définies par $\omega_2 = \omega_{12} = 0$.

Une *géodésique* joignant 2 points m_1, m_2 de F a pour image une génératrice Δ (ou δ) qui s'appuie sur les courbes γ_1, γ_2 images de m_1, m_2 : au voisinage d'un élément (x, y, θ) une telle génératrice est bien définie; la distance m_1m_2 est la longueur du segment de cette génératrice qui est compris entre γ_1 et γ_2.

On a ainsi le schéma local suivant pour la métrique d'un plan de Finsler : soit une famille à 1 paramètre de développables de E^3 ou de développables réglées d'un $\mathfrak{R}$ du n° 37 ; leurs trajectoires orthogonales sont les points γ de F ; la distance $(\gamma_1\gamma_2)$ est la longueur du segment de génératrice dont les extrémités sont sur γ_1 et γ_2.

Signalons enfin que la *longueur* d'un *arc de courbe* C de F peut s'interpréter comme le travail $\left(\int \omega_1\right)$ du vecteur unitaire de Δ le long de l'image de C.

46. Courbure et torsion. — I. — *La courbure superficielle* K *de* F *en* (l) *est la courbure riemannienne en* M *image de* (l) *dans la direction de* ζ.

En effet, il résulte des relations du n° 40 que

$$[\omega_{32}\omega_{31}] = -\lambda I[\omega_{12}\omega_2] = \mu[\omega_2\omega_3],$$

donc

$$[\omega_{42}\omega_{41}] = \nu[\omega_2\omega_3] + K[\omega_1\omega_2], \qquad \text{et} \qquad R_{12,12} = K.$$

L'interprétation de la *torsion* I est moins simple. On trouve que I (x, y, θ) est égale, *dans* $\mathcal{R}$, au rapport en M (x, y, θ) de la courbure principale de ζ à la torsion géodésique de l'image de (x, y) sur l'image de l'ensemble des géodésiques issues de (x, y).

Si l'on désigne respectivement par β et γ les 2 termes de ce rapport on a en effet d'après les relations du n° 40 :

$$\omega_{32} = \alpha\omega_3 + \beta\omega_2 \qquad \omega_{12} = \gamma\omega_3 + \delta\omega_2$$

et

$$[\omega_3\omega_{32}] = \frac{\beta}{\gamma}[\omega_{12}\omega_2].$$

II. — **Dans E^3**, on a toujours $K = 0$. Soit φ le point de contact de P avec la surface focale Φ de la congruence des Δ : *le rapport* $\frac{I}{J}$ *est égal à la distance focale* $M\varphi$ *de l'élément* S. Cela résulte immédiatement de la relation $I\omega_{31} + J\omega_3 = 0$ établie au n° 18.

On sait qu'alors $I_{11} = 0$, $I_1 = J$ est donc constant quand $\omega_2 = \omega_{12} = 0$, c'est-à-dire le long de Δ. On trouve que, si ρ est la courbure totale de Φ, et R_g le rayon de courbure géodésique sur Φ de l'arête de rebroussement de la seconde développable passant par Δ :

$$J = \rho R_g,$$

si du moins Φ n'est pas dégénérée en une courbe.

[Soit $T = \frac{-I}{J}$, et $\{\tilde{\omega}\}$ les composantes du repère $(\varphi\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ de Φ. On trouve $\tilde{\omega}_1 = T_2\omega_2 + T_3\omega_{12}$ $(= \omega_1 + dT$, car $\varphi = M + T\vec{e}_1$, et d'autre part $dT = -\omega_1 + T_2\omega_2 + T_3\omega_{12})$; et $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 + T\omega_{12}$. D'où $[\omega_{32}\omega_{31}] = \rho(T_3 - TT_2)[\omega_{12}\omega_2]$; et $\tilde{\omega}_2 = 0$ définit l'arête de rebroussement de la 2e développable, d'où $R_g = T_3 - TT_2$].

47. Cas du parallélisme absolu (F_A). I. — Les éléments linéaires de F *parallèles* à un élément donné vérifient $\omega_{12} = 0$ et forment une variété à 2 dimensions (cf n° 11) dont l'image est un cylindre (cf n° 42). *Des géodésiques (de* F) *parallèles entre elles ont pour images des droites parallèles* (formant un cylindre).

II. — On a vu au n° 42 que les Δ sont les binormales des trajectoires orthogonales des ζ, c'est-à-dire des images des points de F. Remarquons que ces images *ne peuvent être des droites* car on a $\omega_{32} = \alpha\omega_{12}$, $\alpha \neq 0$ si $I \neq 0$, et l'on ne peut avoir $d\vec{e}_3 = 0$ quand $\omega_1 = \omega_2 = 0$ (puisqu'alors $\omega_{12} \neq 0$).

III. — La torsion *vérifie*

$$I = \frac{R}{T} \operatorname{tg} \psi$$

où ψ *désigne l'angle des plans focaux,* R *et* T *les rayons de courbure et de torsion de l'image de* (x, y). [au point image de (x, y, θ)]. En effet compte tenu des inégalités du n° 40 et de $\omega_{31} = 0$:

$$\omega_{32} = \alpha\omega_{12}, \qquad \alpha\omega_3 + I\omega_2 = \beta\omega_{12}$$

d'où
$$\alpha = \frac{-T}{R} \qquad \text{et} \qquad I = \alpha \operatorname{tg} \psi.$$

IV. — Remarquons que α est constant le long d'un cylindre $\Pi(\omega_{12} = 0)$.

Car $d\omega_{32} = 0$ donc $[d\alpha\omega_{12}] = 0$, et $\omega_{12} = 0$ entraîne $d\alpha = 0$.

48. Plan de Minkowski (cf. n° 12.). I. — *Les cylindres* Π *sont alors des plans.* En effet, pour un plan de Minkowski, $[\omega_{12} dI] = 0$, donc I est constant sur un cylindre Π; comme α l'est aussi, il en est de même de ψ ($I = \alpha \operatorname{tg} \psi$, ainsi qu'on vient de le voir), l'angle des plans focaux est donc *constant sur* Π; mais le plan focal non tangent à Π est le plan $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ qui a une direction fixe quand $\omega_{12} = 0$, par suite le cylindre Π est un plan. La surface focale est elle-même une développable. *Des géodésiques parallèles de* F *ont pour images des droites parallèles situées dans un même plan.*

II. — *Si l'image* γ_0 *d'un point de* F *est une hélice, il en est de même des images* γ *de tous les points*; en effet le long de Π, les $\vec{e}_3$ sont tous parallèles entre eux; donc si le long de γ_0, $\vec{e}_3$ fait avec une direction δ un angle constant V, il en est de même de toutes les γ (avec le même V et la même δ).

49. Réalisations particulières des F_A. — Soit un plan F_A, c'est-à-dire vérifiant $J = K = 0$. On peut imposer à la réalisation de F_A d'admettre pour images des points de F_A des *hélices* de rapport $\frac{R}{T}$ donné. On obtient ces réalisations en résolvant le système Σ_3 prolongé par

$$\omega_{31} = 0 \qquad \omega_{32} = m\omega_{12} \qquad \omega_3 = -I\omega_2 + X\omega_{12}$$
$$d\omega_3 = -I_3[\omega_{12}\omega_2] - I\,d\omega_2 + [dX\,\omega_{12}]$$

où figure une fonction inconnue auxiliaire X et où m désigne le rapport donné. Ce système est en involution; il est presque immédiat de le voir, et on peut aisément résoudre pour ce système un problème de Cauchy analogue à celui du nº 25. La relation qui définit la correspondance entre θ et s est

$$Z\,d\theta = \frac{ds}{T}$$

Remarquons que *si l'on prend* $R = T$, *la torsion est la tangente de l'angle des plans focaux.*

50. *Dans le cas du plan de Minkowski*, cette réalisation se construit immédiatement, une fois résolue la relation $Zd\theta = \frac{ds}{T}$; soit γ_0 l'hélice donnée, vérifiant $R = T$, que l'on désire associer au point m_0 de F, et $M(\theta)$ le point de γ_0 qui est l'image de (m_0, θ); la binormale à γ_0 en M est une Δ, et les autres Δ sont les parallèles à $\Delta(\theta)$ situées dans des plans passant par $\Delta(\theta)$ et faisant avec γ_0 un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \psi$, avec $\operatorname{tg}\psi = I(\theta)$,

On peut, dans le cas du plan de Minkowski, imposer une condition différente aux réalisations, et *fixer l'angle* ψ *des plans focaux. Si* $\psi = \frac{\pi}{4}$ *la torsion est alors égale à* $\frac{R}{T}$ On montre pour cela que le système Σ_3 prolongé par

$$\omega_{31} = 0 \quad \omega_{32} = -I\omega_{12} \quad \omega_3 = \omega_2 + X\omega_{12} \quad [\omega_1\omega_{12}] + [dX\omega_{12}] = 0$$

est en involution (on a pris ici l'angle $\psi = \frac{\pi}{4}$; X est une fonction inconnue auxiliaire).

On obtiendra une réalisation *semi-globale* de ce type en prenant pour $S(x_0, y_0, \theta)$ les éléments $(M\vec{e}_1\vec{e}_2)$ tels que les composantes de $(M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ vérifient

$$\omega_3 = X_0(\theta)\omega_{12}, \qquad \omega_{32} = -I(\theta)\omega_{12},$$

X_0 étant arbitraire mais de signe constant et de période 2π; on peut prendre $X_0 = 1$. Soit γ_0 la courbe lieu de M, la congruence des Δ est celle des parallèles aux binormales $\Delta_0(\theta)$ de γ_0 situées dans les plans passant par $\Delta_0(\theta)$ et coupant γ_0 sous l'angle $\frac{\pi}{4}$.