ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DOMINGO LUNA

Fonctions différentiables invariantes sous l'opération d'un groupe réductif

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 1 (1976), p. 33-49

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_33_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 1 (1976), 33-49

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES INVARIANTES SOUS L'OPÉRATION D'UN GROUPE RÉDUCTIF

par Domingo LUNA

Soit $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Si U est un ouvert de k^n, on désigne par $\mathcal{P}(U)$ (resp. $\mathcal{A}(U)$, resp. $\mathcal{C}^r(U)$) l'algèbre des fonctions polynômes (resp. analytiques, resp. r-fois continûment dérivables, $r = 0, 1, \ldots, \infty$) définies sur U et à valeurs dans k. Soit Γ un groupe qui opère linéairement dans k^n ; il opère alors aussi dans $\mathcal{P}(k^n)$, $\mathcal{A}(k^n)$, $\mathcal{C}^r(k^n)$. On suppose que l'opération de Γ dans k^n est complètement réductible. Il est alors classique (et dû à Hilbert) que $\mathcal{P}(k^n)^\Gamma$ est une algèbre de type fini sur k. Si $p_1, \ldots, p_m$ est un système de générateurs de $\mathcal{P}(k^n)^\Gamma$, on note $p : k^n \to k^m$ l'application dont les composantes sont $p_1, \ldots, p_m$.

On démontrera dans cet article le théorème suivant :

THEOREME. – 1) *Pour tout* $f \in \mathcal{A}(\mathbf{C}^n)$, *invariant par* Γ, *il existe* $g \in \mathcal{A}(\mathbf{C}^m)$ *tel que* $f = g \circ p$.

2) *Pour tout* $f \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, *invariant par* Γ, *il existe un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^m$ *contenant* $p(\mathbf{R}^n)$ *et* $g \in \mathcal{A}(\Omega)$, *tels que* $f = g \circ p$.

3) *Pour tout* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, *constant sur les fibres de* p, *il existe* $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$ *tel que* $f = g \circ p$.

La démonstration du théorème s'appuie de façon essentielle sur la description des opérations linéaires des groupes réductifs obtenue dans [4]. Sous l'hypothèse que l'image de Γ dans $GL(n, \mathbf{R})$ est compacte, 3) a été démontré récemment par G.W. Schwarz ([5]) ; sa démonstration nous a été utile.

1. Préliminaires.

1.1. Soit G un groupe de Lie qui opère différentiablement dans une variété différentiable X (le corps de base étant **R** ou **C**, et le mot différentiable signifiant : r-fois continûment dérivable ($r = 0, 1, \ldots, \infty$) ou analytique). Si x est un point de X, on désigne par $G \cdot x$ l'orbite de G passant par x, et par G_x le groupe d'isotropie de G en x.

On dira que l'opération de G dans X possède la propriété (A), si toute orbite de G dans X contient dans son adhérence exactement une orbite fermée. On désigne alors par X/G l'ensemble des orbites fermées de G dans X, et par $\pi_{X,G}$ l'application de X dans X/G qui envoie tout point x de X sur l'unique orbite fermée de G dans l'adhérence de $G \cdot x$. On considérera X/G muni de la topologie quotient.

Si l'opération de G dans X possède la propriété (A), il est clair que $\mathcal{C}^r(X)^G = \mathcal{C}^r(X ; \pi_{X,G})$ (où $\mathcal{C}^r(X ; \pi_{X,G})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ sur X qui sont constantes sur les fibres de $\pi_{X,G}$), et que $(\pi_{X,G})^*$ réalise une bijection de $\mathcal{C}^0(X/G)$ sur $\mathcal{C}^0(X)^G = \mathcal{C}^0(X ; \pi_{X,G})$.

Soit Y une deuxième variété différentiable dans laquelle G opère différentiablement et de telle manière que l'opération possède la propriété (A). Toute application continue $\varphi : X \to Y$ qui commute à l'opération de G, induit alors une application continue $\varphi/G : X/G \to Y/G$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{X,G}"'] & Y \arrow[d, "\pi_{Y,G}"] \\
X/G \arrow[r, "\varphi/G"] & Y/G
\end{tikzcd}$$

1.2. Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G, et Y une variété différentiable dans laquelle H opère différentiablement. On désigne par $G *_H Y$ le quotient de $G \times Y$ sous l'opération de H définie par $t(s, y) = (st^{-1}, ty)$ (on note $s * y$ l'image de $(s, y) \in G \times Y$ dans $G *_H Y$). L'ensemble $G *_H Y$ porte une structure naturelle de variété différentiable (c'est le fibré associé au fibré principal $G \to G/H$, de fibre type Y). Le groupe G opère différentiablement dans $G *_H Y$ (si $t \in G$, $s * y \in G *_H Y$, $t(s * y) = ts * y$). On a une application différentiable naturelle $G *_H Y \to G/H$ qui commute à l'opération de G et qui est une fibration localement triviale. L'application $y \in Y \to e * y \in G *_H Y$ (où e désigne l'élément neutre de G) est un isomorphisme différentiable de Y sur une sous-variété fermée de $G *_H Y$, isomorphisme qui commute à l'opération de H ; on identifiera parfois Y avec son image dans $G *_H Y$.

L'opération de H dans Y détermine l'opération de G dans $G *_H Y$. Donnons quelques exemples : l'application qui, à un sous-ensemble de $G *_H Y$, associe son intersection avec Y, réalise une bijection entre l'ensemble des orbites de G (resp. des orbites fermées de G, resp. des ouverts stables par G, resp. des fermés stables par G) dans $G *_H Y$, sur l'ensemble des orbites de H (resp. des orbites fermées de H, resp. ...) dans Y ; l'application $Y \to G *_H Y$ induit une bijection $\mathcal{C}^r(G *_H Y)^G \to \mathcal{C}^r(Y)^H$; pour que l'opération de G dans $G *_H Y$ possède la propriété (A), il faut et il suffit que l'opération de H dans Y la possède ; l'application $Y \to G *_H Y$ induit alors un homéomorphisme $Y/H \to (G *_H Y)/G$; etc..

1.3. Soit X un ensemble analytique réel. Si X est plongé comme sous-ensemble analytique fermé dans un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, on dispose de fonctions privilégiées sur X, celles qui sont restriction à X d'une fonction différentiable sur U ; on vérifie sans peine que la famille de ces fonctions ne dépend pas du plongement ; on les appellera les fonctions différentiables sur X.

Il paraît que cette notion de fonctions différentiables n'est pas la bonne : on peut avoir intérêt, comme déjà pour les fonctions analytiques, à établir les fonctions différentiables sur un ensemble analytique réel comme les sections d'un certain faisceau en algèbres possédant en général des éléments nilpotents. Mais l'emploi auquel nous pensons est très anodin ; il s'agit pour nous d'écrire un passage de la démonstration du théorème de manière intrinsèque (voir 3.3), et la notion naïve nous suffit pour cela amplement.

1.4. Soient X, Y deux variétés $\mathcal{C}^\infty$ (dénombrables à l'infini), et soit $p : X \to Y$ une application $\mathcal{C}^\infty$. On désigne par $\mathcal{C}^\infty(X\,; p)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X, constantes sur les fibres de p.

En utilisant des partitions de l'unité, on démontre sans peine les deux assertions suivantes : si $p^*\mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(X\,;p)$, alors $p^*\mathcal{C}^\infty(V) = \mathcal{C}^\infty(p^{-1}(V)\,;p)$, quel que soit l'ouvert V de Y ; inversement, si $p^*\mathcal{C}^\infty(V_i) = \mathcal{C}^\infty(p^{-1}(V_i)\,;p)$, pour une famille couvrante V_i $(i \in I)$ d'ouverts de Y, alors $p^*\mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(X\,;p)$. Il est clair que ces assertions subsistent si Y est seulement un ensemble analytique réel.

Si A est un sous-ensemble de X, on désigne par $\mathcal{C}^\infty(X, A)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X, plates sur A. On pose

$$\mathcal{C}^\infty(X, A; p) = \mathcal{C}^\infty(X, A) \cap \mathcal{C}^\infty(X; p) .$$

LEMME. – *Soient* X, Y, Z *trois variétés* $\mathcal{C}^\infty$ *(dénombrables à l'infini),* $p : X \to Y$ *une application* $\mathcal{C}^\infty$, *et* A *un sous-ensemble de* Z. *Si* $p^* \mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(X; p)$, *alors*

$$(id_Z \times p)^* \mathcal{C}^\infty(Z \times Y, A \times Y) = \mathcal{C}^\infty(Z \times X, A \times X; id_Z \times p) .$$

Il est bien connu que $\mathcal{C}^\infty(X)$, $\mathcal{C}^\infty(Z)$, $\mathcal{C}^\infty(Z \times X)$, etc. sont des espaces de Frechet nucléaires, et qu'on a un isomorphisme naturel $\mathcal{C}^\infty(Z) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(Z \times X)$. Montrons que le sous-espace fermé $\mathcal{C}^\infty(Z) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X; p)$ de $\mathcal{C}^\infty(Z) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X)$ s'identifie par cet isomorphisme à $\mathcal{C}^\infty(Z \times X; id_Z \times p)$.

Puisque l'image de $\mathcal{C}^\infty(Z) \otimes \mathcal{C}^\infty(X; p)$ est contenue dans $\mathcal{C}^\infty(Z \times X; id_Z \times p)$, et que $\mathcal{C}^\infty(Z \times X; id_Z \times p)$ est fermé dans $\mathcal{C}^\infty(Z \times X)$, il suffit de voir que $\mathcal{C}^\infty(Z) \otimes \mathcal{C}^\infty(X; p)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(Z \times X; id_Z \times p)$. Cette assertion est locale en Z ; il suffit donc de la démontrer pour $Z = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = T$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(T \times X; id_T \times p)$. Considérons la série de Fourier de f

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} f_\alpha(x)\, e^{2\pi i(\alpha, t)} , \qquad (*)$$

où $f_\alpha(x) = \int_T f(t, x)\, e^{-2\pi i(\alpha, t)}\, dt$. On a $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X; p)$, et les sommes partielles de (*) tendent vers f (dans l'espace de Frechet $\mathcal{C}^\infty(T \times X)$). D'où la densité voulue.

On voit de la même manière que $\mathcal{C}^\infty(Z, A) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X)$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(Z \times X, A \times X)$.

Enfin, $\mathcal{C}^\infty(Z, A) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X; p)$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(Z \times X, A \times X; id_Z \times p)$. En effet, plus généralement, si E, F sont des espaces de Frechet nucléaires et si $E' \subset E$, $F' \subset F$ sont des sous-espaces fermés, $E' \hat{\otimes} F'$ s'identifie à l'intersection de $E' \hat{\otimes} F$ et de $E \hat{\otimes} F'$ dans $E \hat{\otimes} F$; cela résulte aussitôt du diagramme suivant, dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & E' \hat{\otimes} F' & \to & E \hat{\otimes} F' & \to & E/E' \hat{\otimes} F' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & E' \hat{\otimes} F & \to & E \hat{\otimes} F & \to & E/E' \hat{\otimes} F \end{array}$$

De ce qui précède, il résulte que

$$(id_Z \times p)^* : \mathcal{C}^\infty(Z \times Y , A \times Y) \to \mathcal{C}^\infty(Z \times X , A \times X ; id_Z \times p)$$

s'identifie à

$$id_{\mathcal{C}^\infty(Z , A)} \hat{\otimes} p^* : \mathcal{C}^\infty(Z , A) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(Y) \to \mathcal{C}^\infty(Z , A) \hat{\otimes} \mathcal{C}^\infty(X ; p) .$$

Le lemme en découle, grâce aux propriétés bien connues du produit tensoriel topologique.

Remarque. – Il est clair que le lemme reste valable si Z est une variété à bord (nous l'utiliserons pour $Z = \mathbf{R}_+$).

1.5. Soient $e_1 , \ldots , e_m$ des entiers naturels. Posons

$$q(y_1 , \ldots , y_m) = y_1^{2e_1} + \cdots + y_m^{2e_m} .$$

Désignons par Y l'ensemble des $y \in \mathbf{R}^m$ tels que $q(y) = 1$; Y est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^m$. Choisissons des entiers naturels $d_1 , \ldots , d_m$ tels que $e_1 d_1 = \cdots = e_m d_m = l$, et définissons $\beta : \mathbf{R}_+ \times Y \to \mathbf{R}^m$ par $\beta(t , y_1 , \ldots , y_m) = (t^{d_1} y_1 , \ldots , t^{d_m} y_m)$.

Lemme. – *On a* $\beta^* \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m , \{0\}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times Y , \{0\} \times Y)$.

On vérifie que $\beta : (\mathbf{R}_+ - \{0\}) \times Y \to \mathbf{R}^m - \{0\}$ est un difféomorphisme (son inverse β^{-1} est donné par

$$\beta^{-1}(y_1 , \ldots , y_m) = (q(y)^{1/2l} , q(y)^{-1/2e_1} y_1 , \ldots , q(y)^{-1/2e_m} y_m)) .$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times Y , \{0\} \times Y)$. Définissons une fonction g sur $\mathbf{R}^m$ par

$$g(y) = \begin{cases} f(\beta^{-1}(y)) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

On a $\beta^* g = f$. Reste à montrer que g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, plate à l'origine.

Pour cela, il suffit de voir que, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$, $D^\alpha g = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^{\alpha_m} g \to 0$, pour $y \to 0$; ou encore que $\beta^* D^\alpha g \to 0$, pour $t \to 0$. Considérons l'opérateur différentiel $\beta^* D^\alpha (\beta^{-1})^*$ sur $(\mathbf{R}_+ - \{0\}) \times Y$; on vérifie que, pour $N \in \mathbf{N}$ grand, $t^N \beta^* D^\alpha (\beta^{-1})^*$ est la restriction sur $(\mathbf{R}_+ - \{0\}) \times Y$ d'un opérateur différentiel défini sur $\mathbf{R}_+ \times Y$. Puisque f est plate sur $\{0\} \times Y$, $t^N \beta^* D^\alpha (\beta^{-1})^* f$ l'est également. Par suite, on a bien $\beta^* D^\alpha g = t^{-N}(t^N \beta^* D^\alpha (\beta^{-1})^* f) \to 0$, pour $t \to 0$.

2. Description des opérations linéaires des groupes réductifs.

Pour les démonstrations des faits rappelés dans ce paragraphe, voir [3] et [4] (en attendant mieux).

2.1. *Le cas complexe.*

Soit G un groupe algébrique réductif complexe. Soit X une variété algébrique affine (disons lisse) dans laquelle G opère (morphiquement). La variété X porte deux topologies : celle de Zariski et la topologie transcendante, déduite de celle de $\mathbf{C}$; dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à la seconde.

L'opération de G dans Y possède la propriété (A). De plus, l'ensemble des orbites fermées X/G porte une structure naturelle de variété algébrique affine (pouvant posséder des singularités), et $\pi_{X,G} : X \to X/G$ est un morphisme de variétés algébriques.

Pour tout fermé G-stable F de X, $\pi_{X,G}(F)$ est fermé dans X/G. On en déduit que $\pi_{X,G}$ est ouverte aux points des orbites fermées de G dans X, et que la topologie de X/G en tant que variété algébrique complexe est aussi celle de X/G en tant qu'espace des orbites fermées (1.1).

Si Y est une deuxième variété algébrique affine lisse dans laquelle G opère, et si $\varphi : X \to Y$ est un G-morphisme algébrique, l'application $\varphi/G : X/G \to Y/G$ est également un morphisme algébrique.

Soit $G \to GL(M)$ une représentation rationnelle de dimension finie. Par définition, $\mathfrak{R}(M)^G$ est l'algèbre des fonctions régulières sur la variété algébrique affine M/G. La donnée d'un système de générateurs $p_1, \ldots, p_m$ de $\mathcal{P}(\mathrm{M})^{\mathrm{G}}$ équivaut à la donnée d'une immersion fermée algébrique de M/G dans $\mathbf{C}^m$, et si l'on désigne par $p : \mathrm{M} \to \mathbf{C}^m$ l'application dont les composantes sont $p_1, \ldots, p_m$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{M} \arrow[dl, "\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \mathrm{M}/\mathrm{G} \arrow[rr, hook] & & \mathbf{C}^m . \end{tikzcd}$$

Soit T une orbite fermée de G dans M. Pour analyser l'opération de G au voisinage de T, on procède de la façon suivante (le cas des variétés affines lisses générales est semblable et à peine plus compliqué ; nous n'en aurons pas besoin dans la suite).

On choisit $x \in \mathrm{T}$. Le groupe d'isotropie G_x est réductif. On choisit un supplémentaire N de $\mathrm{T}_x(\mathrm{G} \,.\, x)$ dans $\mathrm{T}_x\mathrm{M} = \mathrm{M}$, stable par G_x. La G-variété $\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N}$ (qui est isomorphe au fibré normal à T dans M) possède une structure naturelle de variété algébrique affine lisse. L'identification de $(\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N})/\mathrm{G}$ et de N/G_x respecte leurs structures de variété algébrique affine. L'application

$$(s, y) \in \mathrm{G} \times \mathrm{N} \to s(x + y) \in \mathrm{M}$$

induit un G-morphisme algébrique $\varphi : \mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N} \to \mathrm{M}$. Résumons la situation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{N},\mathrm{G}_x}"'] & \mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N},\mathrm{G}}"] & \mathrm{M} \arrow[d, "\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}"] \\ \mathrm{N}/\mathrm{G}_x \arrow[r, phantom, "="] & (\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N})/\mathrm{G} \arrow[r] & \mathrm{M}/\mathrm{G} . \end{tikzcd}$$

Il existe alors un voisinage ouvert (pour la topologie transcendante) $\overline{\mathrm{V}}$ de $\pi_{\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N},\mathrm{G}}(e * 0) = \pi_{\mathrm{N},\mathrm{G}_x}(0)$ dans $(\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N})/\mathrm{G} = \mathrm{N}/\mathrm{G}_x$ possédant les propriétés suivantes (on pose $\mathrm{V} = \pi_{\mathrm{N},\mathrm{G}_x}^{-1}(\overline{\mathrm{V}})$; $\pi_{\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N},\mathrm{G}}^{-1}(\overline{\mathrm{V}})$ s'identifie alors à $\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{V}$) : $\varphi/\mathrm{G}(\overline{\mathrm{V}}) = \overline{\mathrm{U}}$ est ouvert dans M/G, et $\varphi/\mathrm{G} : \overline{\mathrm{V}} \to \overline{\mathrm{U}}$ et $\varphi : \mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{V} \to \mathrm{U} = \pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}^{-1}(\overline{\mathrm{U}})$ sont des isomorphismes analytiques. Résumons la situation :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_{N, G_x}"'] & G *_{G_x} V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi_{G *_{G_x} N, G}"] & U \arrow[d, "\pi_{M, G}"] \\
& \bar{V} \arrow[r, "\sim"] & \bar{U}
\end{tikzcd}$$

2.2. *Le cas réel.*

Supposons maintenant que G et $G \to GL(M)$ soient définis sur le corps des réels. Il est alors clair que M/G et $\pi_{M,G}$ le sont aussi. L'opération de $G_{\mathbf{R}}$ dans $M_{\mathbf{R}}$ possède la propriété (A) ; on peut donc considérer l'espace des orbites fermées $M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}}$ et l'application $\pi_{M_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}} : M_{\mathbf{R}} \to M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}}$. Résumons la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\pi_{M,G}"'] & & M_{\mathbf{R}} \arrow[ll, hook'] \arrow[d, "\pi_{M,G}"'] \arrow[dr, "\pi_{M_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}}"] & \\
M/G & \supset & (M/G)_{\mathbf{R}} \supset \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}}) & M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

En général, $\pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}}) \neq (M/G)_{\mathbf{R}}$ et l'application

$$M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}} \to \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$$

n'est pas injective. Pour tout fermé $G_{\mathbf{R}}$-stable F de $M_{\mathbf{R}}$, $\pi_{M,G}(F)$ et $\pi_{M_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}}(F)$ sont fermés dans $(M/G)_{\mathbf{R}}$ et $M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}}$. En particulier, $\pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$ est fermé dans $(M/G)_{\mathbf{R}}$, et les applications

$$\pi_{M,G} : M_{\mathbf{R}} \to \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}}) \quad \text{et} \quad \pi_{M_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}}$$

sont ouvertes aux points des orbites fermées de $G_{\mathbf{R}}$ dans $M_{\mathbf{R}}$. L'application $M_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{R}} \to \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$ est ouverte et fermée, et ses fibres sont finies.

Soit $x \in M_{\mathbf{R}}$; G_x et $G \, . \, x$ sont alors définis sur $\mathbf{R}$. On a $(G_x)_{\mathbf{R}} = (G_{\mathbf{R}})_x = G_x \cap G_{\mathbf{R}}$. Par contre, on a en général $(G \, . \, x)_{\mathbf{R}} \neq G_{\mathbf{R}} \, . \, x$; mais $(G \, . \, x)_{\mathbf{R}}$ n'est composé que d'un nombre fini d'orbites de $G_{\mathbf{R}}$ qui ont comme dimension (réelle) la dimension (complexe) de $G \, . \, x$, et qui sont ouvertes et fermées dans $(\mathrm{G}\,.\,x)_{\mathbf{R}}$. L'orbite $\mathrm{G}\,.\,x$ est fermée si et seulement si $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}\,.\,x$ l'est.

Soit T une orbite fermée de G dans M, et supposons $\mathrm{T}_{\mathbf{R}} \neq \phi$. Pour analyser l'opération de $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$ au voisinage de $\mathrm{T}_{\mathbf{R}}$, on précise la construction que nous avons détaillée à la fin du paragraphe précédent, de la façon suivante.

On choisit $x \in \mathrm{T}_{\mathbf{R}}$ et N défini sur $\mathbf{R}$; $\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N}$ et $\varphi : \mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ le sont alors également. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_{\mathbf{R}} \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{V})_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{U}_{\mathbf{R}} \arrow[d] \\ & \overline{\mathrm{V}}_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\sim"] & \overline{\mathrm{U}}_{\mathbf{R}}\,. \end{tikzcd}$$

Reste à expliciter $(\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{V})_{\mathbf{R}}$. Soient $\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_k$ les orbites de $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$ dans $\mathrm{T}_{\mathbf{R}}$. Choisissons $x_1 = x \in \mathrm{T}_1$, $x_2 \in \mathrm{T}_2, \dots, x_k \in \mathrm{T}_k$. Le G-morphisme $\varphi : \mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ détermine des supplémentaires N_i de $\mathrm{T}_{x_i}(\mathrm{G}\,.\,x)$ dans $\mathrm{T}_{x_i}\mathrm{M} = \mathrm{M}$, stables par G_{x_i} et définis sur $\mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, k$). Les $\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_{x_i}} \mathrm{N}_i$ sont deux à deux naturellement G-isomorphes ; nous identifierons dans la suite les $(\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_{x_i}} \mathrm{N}_i)/\mathrm{G} = \mathrm{N}_i/\mathrm{G}_{x_i}$. Posons $\mathrm{V}_i = \pi^{-1}_{\mathrm{N}_i, \mathrm{G}_{x_i}}(\overline{\mathrm{V}})$, où $\overline{\mathrm{V}} \subset \mathrm{N}/\mathrm{G}_x = \mathrm{N}_1/\mathrm{G}_{x_1} = \cdots = \mathrm{N}_k/\mathrm{G}_{x_k}$. La $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-variété réelle analytique $(\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{V})_{\mathbf{R}}$ est alors naturellement $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-isomorphe à la réunion disjointe des $\mathrm{G}_{\mathbf{R}} *_{(\mathrm{G}_{\mathbf{R}})_{x_i}} (\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$. L'application qui, à un sous-ensemble de $\mathrm{G}_{\mathbf{R}} *_{(\mathrm{G}_{\mathbf{R}})_{x_i}} (\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$, associe son intersection avec $(\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$, réalise une bijection de l'ensemble des fibres de $\pi_{\mathrm{G} *_{\mathrm{G}_x} \mathrm{N}, \mathrm{G}}$ dans $\mathrm{G}_{\mathbf{R}} *_{(\mathrm{G}_{\mathbf{R}})_{x_i}} (\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$ sur l'ensemble des fibres de $\pi_{\mathrm{N}_i, \mathrm{G}_{x_i}}$ dans $(\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$; l'application réciproque est celle qui, à un sous-ensemble de $(\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$, associe le plus petit sous-ensemble $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-stable de $\mathrm{G}_{\mathbf{R}} *_{(\mathrm{G}_{\mathbf{R}})_{x_i}} (\mathrm{V}_i)_{\mathbf{R}}$ le contenant.

Remarque. – D'après ce qui précède, on voit facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

1) L'application $\mathrm{M}_{\mathbf{R}}/\mathrm{G}_{\mathbf{R}} \to \pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(\mathrm{M}_{\mathbf{R}})$ est bijective ;

2) Les fonctions de $\mathcal{P}(M_{\mathbf{R}})^{G_{\mathbf{R}}}$ séparent les orbites fermées de $G_{\mathbf{R}}$ dans $M_{\mathbf{R}}$;

3) Toute orbite fermée de G dans M qui rencontre $M_{\mathbf{R}}$, coupe $M_{\mathbf{R}}$ suivant une seule orbite de $G_{\mathbf{R}}$;

4) On a $\mathcal{C}^r(M_{\mathbf{R}})^{G_{\mathbf{R}}} = \mathcal{C}^r(M_{\mathbf{R}}\,;\pi_{M,G})$, pour tout $r \geqslant 0$.

Les conditions précédentes sont remplies par exemple : si $G_{\mathbf{R}}$ est compact ; ou encore si $G_{\mathbf{R}}$ et $M_{\mathbf{R}}$ peuvent être munis d'une structure complexe compatible avec l'opération. Pour deux exemples simples illustrant la situation, voir l'opération de $SL(n\,,\mathbf{R})$ dans $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ et $S^2(\mathbf{R}^n)$.

3. Démonstration du théorème.

Quitte à remplacer Γ par le plus petit sous-groupe algébrique contenant l'image de Γ dans $GL(n\,,k)$, on peut supposer que Γ est un groupe algébrique réductif (c'est-à-dire, avec les notations de 2, dans le cas complexe on peut supposer que $\mathbf{C}^n = M$ et $\Gamma = G$, et dans le cas réel que $\mathbf{R}^n = M_{\mathbf{R}}$ et $\Gamma = G_{\mathbf{R}}$). En effet, $G \subset GL(M)$ opère encore de façon complètement réductible dans M, donc G est réductif ; d'autre part, Γ et G (et dans le cas réel Γ et $G_{\mathbf{R}}$) laissent invariantes les mêmes fonctions polynômes, ainsi que les mêmes fonctions analytiques partout définies (penser aux séries de Taylor à l'origine).

3.1. *Le cas analytique complexe.*

Nous utiliserons les notations de 2.1 ($\Gamma = G$, $\mathbf{C}^n = M$). Il suffit de montrer que $(\pi_{M,G})^* \mathcal{A}(M/G) = \mathcal{A}(M)^G$. En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ {}^{\pi_{M,G}}\swarrow & & \searrow{}^{p} \\ M/G & \hookrightarrow & \mathbf{C}^m \end{array},$$

où $M/G \to \mathbf{C}^m$ est une immersion fermée algébrique ; il est bien connu que la restriction $\mathcal{A}(\mathbf{C}^m) \to \mathcal{A}(M/G)$ est alors surjective. Nous allons même démontrer un résultat un peu plus général, qui nous sera utile dans la démonstration de la deuxième partie du théorème : si $\bar{\Omega}$ est un ouvert de M/G, et si $\Omega = \pi_{M,G}^{-1}(\bar{\Omega})$, alors

$$(\pi_{M,G} \mid \Omega)^* \, \mathcal{A}(\bar{\Omega}) = \mathcal{A}(\Omega)^G . \qquad (*)$$

On a $(\pi_{M,G} \mid \bar{\Omega})^* \, \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{A}(\Omega)^G$. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{C}^0(\Omega)$ sont des espaces de Frechet. Il est clair que $\mathcal{C}^0(\Omega)^G = \mathcal{C}^0(\Omega\,; \pi_{M,G})$ est fermé dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$. Puisque la topologie de $\bar{\Omega}$ est aussi la topologie finale de $\pi_{M,G} : \Omega \to \bar{\Omega}$, on voit que $(\pi_{M,G} \mid \Omega)^* : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}^0(\Omega)^G$ est un isomorphisme d'espaces de Frechet. On sait que $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$ est fermé dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (voir [2], p. 156) ; par suite, $(\pi_{M,G} \mid \Omega)^* \, \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ est fermé dans $\mathcal{A}(\Omega)^G$.

Pour terminer la démonstration de (*), il suffirait de montrer que $(\pi_{M,G} \mid \Omega)^* \, \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{A}(\Omega)^G$. Nous allons établir ceci seulement pour des ouverts particuliers formant une base de la topologie de M/G. L'égalité (*) pour les ouverts quelconques de M/G en résulte aussitôt : en effet, pour tout ouvert $\bar{\Omega} \subset M/G$ et pour tout $f \in \mathcal{A}(\Omega)^G$, il existe un $g \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ unique tel que $f = (\pi_{M,G})^* g$; et, pour une fonction, la propriété d'être analytique est une propriété locale.

Soit T une orbite fermée de G dans M (nous n'excluons pas le cas $T = \{0\}$). Nous utiliserons les notations que nous avons introduites dans 2.1 pour décrire l'opération de G au voisinage de T ($x \in T$, $N \subset M$, $\bar{V} \subset N/G_x$, etc.). Le groupe $\mathbf{C}^*$ opère dans N et N/G_x par homothéties ; quitte à rétrécir $\bar{V}$, on peut supposer $\theta\bar{V} \subset \bar{V}$, quel que soit $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta| \leqslant 1$, sans porter atteinte aux propriétés de $\bar{V}$ énumérées dans 2.1. On a alors aussi $\theta V \subset V$, quel que soit $\theta \in \mathbf{C}$, $|\theta| \leqslant 1$. Pour les ouverts V de M qui ont cette propriété, on voit de façon élémentaire que la série de Taylor en 0 de tout $f \in \mathcal{A}(V)$ tend uniformément sur tout compact de V vers f. Par suite, $\mathcal{P}(V)^{G_x}$ est dense dans $\mathcal{A}(V)^{G_x}$. Par définition de N/G_x, $\mathcal{P}(V)^{G_x} \subset \mathcal{A}(\bar{V})$. L'injection canonique $V \to G *_{G_x} V$ permet d'identifier $\mathcal{A}(V)^{G_x}$ et $\mathcal{A}(G *_{G_x} V)^G$ (en tant qu'espaces de Frechet) ; il est clair que

$$\mathcal{P}(V)^{G_x} \quad \text{et} \quad (\pi_{G *_{G_x} N, G} \mid G *_{G_x} V)^* \, \mathcal{P}(V)^{G_x}$$

se correspondent dans cette identification. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr] & G *_{G_x} V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ & \overline{V} \arrow[r, "\sim"] & \overline{U} \end{tikzcd}$$

résulte alors que $(\pi_{M,G} | U)^* \mathcal{A}(\overline{U})$ est dense dans $\mathcal{A}(U)^G$. On voit sans peine que les $\overline{U}$ ainsi construits forment une base de la topologie de M/G. La première partie du théorème est démontrée.

3.2. *Le cas analytique réel.*

Nous utiliserons les notations de 2.2 ($\Gamma = G_{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}^n = M_{\mathbf{R}}$).

Soit f une fonction analytique réelle sur $M_{\mathbf{R}}$, invariante par $G_{\mathbf{R}}$. La fonction f détermine un germe à l'origine de M d'une fonction analytique complexe ; ce germe, que nous notons f_0, est invariant par G. Désignons par Ω_1 l'ensemble des $x \in M$ tels que f_0 se prolonge analytiquement le long du chemin tx, $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'ensemble Ω_1 est ouvert dans M, stable par G et contient $M_{\mathbf{R}}$. Le germe f_0 se prolonge de façon unique en une fonction analytique complexe G-invariante sur Ω_1, que nous notons encore f_0.

Désignons par Ω_2 le complémentaire de $\pi_{M,G}(M - \Omega_1)$ dans M/G ; puisque $M - \Omega_1$ est fermé et stable par G, $\pi_{M,G}(M - \Omega_1)$ est fermé (2.1), donc Ω_2 est ouvert dans M/G. Toute orbite fermée de G dans M au-dessus de $\pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$ coupe $M_{\mathbf{R}}$ (en effet, soit $\xi \in \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$; puisque l'opération de $G_{\mathbf{R}}$ dans $M_{\mathbf{R}}$ possède la propriété (A), il existe des orbites fermées de $G_{\mathbf{R}}$ dans $M_{\mathbf{R}}$ au-dessus de ξ ; par ailleurs, si $x \in M_{\mathbf{R}}$, l'orbite $G \,.\, x$ est fermée si et seulement si $G_{\mathbf{R}} \,.\, x$ l'est ; l'unique orbite fermée de G dans M au-dessus de ξ coupe donc bien $M_{\mathbf{R}}$). Puisque Ω_1 contient $M_{\mathbf{R}}$, on en déduit que Ω_2 contient $\pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}})$. D'après la démonstration de la première partie du théorème, il existe une fonction analytique complexe h_0 sur Ω_2 telle que $(\pi_{M,G} | \pi_{M,G}^{-1}(\Omega_2))^* h_0$ et f_0 coïncident sur $\pi_{M,G}^{-1}(\Omega_2)$.

Soit $p_1, \ldots, p_m$ un système de générateurs de $\mathcal{P}(M_{\mathbf{R}})^{G_{\mathbf{R}}}$. Il détermine une immersion fermée algébrique définie sur les réels $M/G \hookrightarrow \mathbf{C}^m$, que nous considérerons comme une inclusion. Résumons la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_2 & \subset & M/G & \subset & \mathbf{C}^m \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}}) & \subset & (M/G)_{\mathbf{R}} & \subset & \mathbf{R}^m \end{array} .$$

Choisissons un ouvert Ω_3 de $\mathbf{C}^m$ tel que $\Omega_3 \cap (M/G) = \Omega_2$. Il est connu qu'on peut trouver un ouvert Ω_4 de Ω_3, qui est de Stein et qui a les mêmes points réels que Ω_3 (voir [1]). Puisque $\Omega_4 \cap (M/G) \subset \Omega_2$ et que $\Omega_4 \cap (M/G)$ est un sous-espace analytique fermé de Ω_4, il existe une fonction analytique complexe g_0 sur Ω_4 telle que g_0 et h_0 coïncident sur $\Omega_4 \cap (M/G)$.

Posons $\Omega = (\Omega_3)_{\mathbf{R}} = (\Omega_4)_{\mathbf{R}}$ et $g = \mathrm{Re}(g_0) \mid \Omega$. Nous prétendons que Ω et g satisfont aux exigences du théorème. En effet, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathbf{R}} & = & \mathbf{R}^n \\ \pi_{M,G} \downarrow & & \downarrow p \\ (M/G)_{\mathbf{R}} & \subset & \mathbf{R}^m \end{array} ;$$

il est clair que Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^m$ contenant $\pi_{M,G}(M_{\mathbf{R}}) = p(\mathbf{R}^n)$, que g est une fonction analytique réelle sur Ω, et que

$$p^* g = (\pi_{M,G} \mid M_{\mathbf{R}})^* \,\mathrm{Re}(g_0) = (\pi_{M,G} \mid M_{\mathbf{R}})^* \,\mathrm{Re}(h_0) =$$
$$= (\pi_{M,G} \mid M_{\mathbf{R}})^* h_0 = f_0 \mid M_{\mathbf{R}} = f .$$

La deuxième partie du théorème est démontrée.

3.3. *Le cas différentiable.*

Soient $\Gamma \to GL(n, \mathbf{R})$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)^\Gamma$ et $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ comme dans l'énoncé du théorème. Nous allons démontrer que

$$p^* \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n ; p) . \qquad (*)$$

Il est clair que (*) ne dépend pas du système de générateurs choisi. Nous allons procéder par récurrence sur n (si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer). Supposons donc (*) démontré pour tout $\Gamma' \to GL(n', \mathbf{R})$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème et tel que $n' < n$.

Si $(\mathbf{R}^n)^\Gamma \neq 0$, quitte à changer éventuellement de base dans $\mathbf{R}^n$, on peut écrire $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, où Γ laisse stable $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et opère trivialement dans $\mathbf{R} \times \{0\}$. Dans ce cas, on peut choisir le système de générateurs $p_1, \ldots, p_m$ de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)^\Gamma$ tel que $p_1 = x_1$, et tel que $p_2, \ldots, p_m$ ne dépendent pas de x_1 et forment un système de générateurs de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^{n-1})^\Gamma$; l'application $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ s'identifie à $id_{\mathbf{R}} \times p' : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{m-1}$, où $p' = (p_2, \ldots, p_m)$. L'assertion (*) résulte alors aussitôt de 1.4 (pour $\mathrm{X} = \mathbf{R}^{n-1}$, $\mathrm{Y} = \mathbf{R}^{m-1}$, $\mathrm{Z} = \mathbf{R}$, $\mathrm{A} = \phi$) et de l'hypothèse de récurrence.

Supposons donc $(\mathbf{R}^n)^\Gamma = 0$. Posons $\mathrm{F} = p^{-1}(0)$. Si $\mathrm{F} = \mathbf{R}^n$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, nous allons d'abord voir, en nous servant de l'hypothèse de récurrence, que

$$(p \mid \mathbf{R}^n - \mathrm{F})^* \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m - \{0\}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n - \mathrm{F}\,; p)\,. \qquad (**)$$

Pour cela, il est commode de se servir des notations intrinsèques introduites dans 2.2 ($\Gamma = \mathrm{G}_{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}^n = \mathrm{M}_{\mathbf{R}}$). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{M}_{\mathbf{R}} \arrow[dl, "\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ (\mathrm{M}/\mathrm{G})_{\mathbf{R}} \arrow[rr, hook] & & \mathbf{R}^m\,. \end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{F} = p^{-1}(0) = (\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}^{-1}(\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(0)))_{\mathbf{R}}$. L'égalité (**) est équivalente à

$$(\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}} \mid \mathrm{M}_{\mathbf{R}} - \mathrm{F})^* \mathcal{C}^\infty((\mathrm{M}/\mathrm{G})_{\mathbf{R}} - \{\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(0)\}) = \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M}_{\mathbf{R}} - \mathrm{F}\,; \pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}) \quad (**')$$

(nous utilisons ici les fonctions différentiables sur la variété analytique réelle $(\mathrm{M}/\mathrm{G})_{\mathbf{R}}$, voir 1.3).

Soit T une orbite fermée de G dans M au-dessus d'un point de $\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(\mathrm{M}_{\mathbf{R}}) - \{\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(0)\}$, et soit $x \in \mathrm{T}_{\mathbf{R}}$. Le lecteur est prié de se reporter aux notations que nous avons introduites vers la fin de 2.2 pour décrire l'application $\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}} : \mathrm{M}_{\mathbf{R}} \to (\mathrm{M}/\mathrm{G})_{\mathbf{R}}$ au voisinage de $\pi_{\mathrm{M},\mathrm{G}}(x)$. L'hypothèse de récurrence (appliquée à l'opération des $(\mathrm{G}_{\mathbf{R}})_{x_i}$ dans les $(\mathrm{N}_i)_{\mathbf{R}}$) donne

$$(\pi_{\mathrm{N}_i,\mathrm{G}_{x_i}} \mid (\mathrm{N}_i)_{\mathbf{R}})^* \mathcal{C}^\infty((\mathrm{N}_i/\mathrm{G}_{x_i})_{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}^\infty((\mathrm{N}_i)_{\mathbf{R}}\,; \pi_{\mathrm{N}_i,\mathrm{G}_{x_i}})\,,$$

$i = 1, \ldots, k$. D'où aussitôt

$$(\pi_{N_i, G_{x_i}} \mid (V_i)_{\mathbf{R}})^* \mathcal{C}^\infty(\overline{V}_{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}^\infty((V_i)_{\mathbf{R}} \,;\, \pi_{N_i, G_{x_i}}) \,,$$

$i = 1, \ldots, k$. Vu la structure de $(G *_{G_x} V)_{\mathbf{R}}$, on en déduit que

$$(\pi_{G *_{G_x} N, G} \mid (G *_{G_x} V)_{\mathbf{R}})^* \; \mathcal{C}^\infty(\overline{V}_{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}^\infty((G *_{G_x} V)_{\mathbf{R}} \,;\, \pi_{G *_{G_x} N, G}) \,.$$

Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(G *_{G_x} V)_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & U_{\mathbf{R}} \arrow[d] \\
\overline{V}_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\sim"] & \overline{U}_{\mathbf{R}}
\end{tikzcd}$$

découle alors que $(\pi_{M, G} \mid U_{\mathbf{R}})^* \; \mathcal{C}^\infty(\overline{U}_{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}^\infty(U_{\mathbf{R}} \,;\, \pi_{M, G})$. Puisque les $\overline{U}$ considérés recouvrent $\pi_{M, G}(M_{\mathbf{R}}) - \{\pi_{M, G}(0)\}$, on en tire facilement, en utilisant une partition de l'unité, l'égalité (**').

Revenons aux notations Γ, $\mathbf{R}^n$ (pour comprendre ce qui va suivre, le lecteur a intérêt à oublier l'épisode précédent de la démonstration, et à n'en retenir que (**)). Choisissons les générateurs $p_1, \ldots, p_m$ de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)^\Gamma$ homogènes de degré $d_1, \ldots, d_m$. Soient $e_1, \ldots, e_m$ des entiers positifs tels que $d_1 e_1 = \cdots = d_m e_m$. Posons

$$q(y) = y_1^{2e_1} + \cdots + y_m^{2e_m} \;,\; Y = q^{-1}(1)$$

et $$X = p^{-1}(Y) = (q \circ p)^{-1}(1) \;;$$

X et Y sont des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ ($q \circ p$ est un polynôme homogène). Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[d, "p"'] & \mathbf{R}_+ \times X \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "id_{\mathbf{R}_+} \times p"] \\
\mathbf{R}^m & \mathbf{R}_+ \times Y \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd} \,,$$

où α est défini par $\alpha(t, x) = tx$ et β par

$$\beta(t, y_1, \ldots, y_m) = (t^{d_1} y_1, \ldots, t^{d_m} y_m) \,.$$

On vérifie facilement que ce diagramme est commutatif, et que $\alpha : (\mathbf{R}_+ - \{0\}) \times X \to \mathbf{R}^n - F$ et $\beta : (\mathbf{R}_+ - \{0\}) \times Y \to \mathbf{R}^m - \{0\}$ sont des isomorphismes de variétés différentiables. De (**) résulte alors aussitôt que $(p \mid X)^* \mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(X ; p)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n ; p)$. La série de Taylor T de f en 0 est une série formelle Γ-invariante. Du fait que $p_1, \ldots, p_m$ engendrent $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)^\Gamma$, on déduit sans peine que T s'écrit comme série formelle en $p_1, \ldots, p_m$, d'où l'existence d'une série formelle S en $y_1, \ldots, y_m$ telle que $p^*S = T$. D'après un résultat classique d'Emile Borel, il existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$ dont la série de Taylor en 0 est S. Alors

$$f - p^*h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \{0\} ; p) .$$

Pour montrer (*), il suffit donc de voir que $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \{0\} ; p) \subset p^*\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \{0\}; p)$. Alors $\alpha^* f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times X, \{0\} \times X ; id_{\mathbf{R}_+} \times p)$. D'après 1.4,

$$(id_{\mathbf{R}_+} \times p)^* \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times Y, \{0\} \times Y) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times X, \{0\} \times X ; id_{\mathbf{R}_+} \times p) ,$$

et d'après 1.5, $\beta^* \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m, \{0\}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times Y, \{0\} \times Y)$. Choisissons $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m, \{0\})$ tel que $(\beta \circ (id_{\mathbf{R}_+} \times p))^* g = \alpha^* f$. Puisque p^*g et f coïncident sur $\mathbf{R}^n - F$, on a $p^*g = f$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque. — On démontre de même que le théorème reste vrai, mutatis mutandis, pour les opérations des groupes algébriques réductifs dans les variétés algébriques affines lisses (réels ou complexes).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. GRAUERT, On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds, *Ann. of Math.*, 68 (1958), 460-472.

[2] R.C. GUNNING, H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, (1965).

[3] D. LUNA, Slices étales, *Bull. Soc. Math. de France*, Mémoire 33 (1973), 81-105.

[4] D. LUNA, Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, 97 (1975), 172-181.

[5] G.W. SCHWARZ, Smooth Functions Invariant Under the Action of a Compact Lie Group, *Topology,* 14 (1975), 63-68.

Manuscrit reçu le 15 février 1975
Accepté par B. Malgrange.

Domingo LUNA,
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91505 Orsay.