ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENÉ THOM

Les singularités des applications différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 43-87

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__43_0>

LES SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

par **R. THOM** (Strasbourg).

L'étude des singularités d'une fonction numérique sur une variété a fait l'objet, depuis les travaux classiques de M. Morse, d'un grand nombre de recherches. Il m'a semblé que le théorème 4 de cet article, dû à M. Morse (cf. [4]) pouvait faire l'objet d'une généralisation. J'ai été ainsi amené à considérer, de façon plus générale, les singularités d'une application f: $R^n \to R^p$, et, plus généralement, d'une application d'une variété V^n dans une variété M^p. A cet égard, la seule définition des singularités d'une application, ainsi que leur classification, posent des problèmes délicats, qui seront abordés au Chap. I. Au Chap. II, on traitera des singularités « génériques », c'est-à-dire des singularités qui se présentent pour « presque toutes » les applications f: $R^n \to R^p$. J'ai utilisé à cette fin la technique développée dans un article antérieur [8]; on obtient ainsi des renseignements précieux sur les dimensions génériques des ensembles critiques; un phénomène assez méconnu y est mis en lumière : dans une application générique $R^n \to R^p$, où $p < n$, l'abaissement de dimension n'a lieu qu'en un point régulier de l'application, l'application conservant la dimension des ensembles critiques. Le chapitre 3 contient la description des singularités génériques pour les petites dimensions de l'espace but, ainsi que quelques théorèmes d'existence des variétés critiques. Le chapitre IV aborde — sans la résoudre — la question de la stabilité des applications génériques; on y trouvera aussi une liste de problèmes non résolus, cependant fort dignes d'intérêt. Enfin le dernier chapitre traite des propriétés homologiques des ensembles critiques; on peut voir là l'esquisse d'une généralisation de la théorie de Morse, dont je ne dissimule pas le caractère incomplet : seule la théorie des classes caractéristiques a été utilisée ici, alors qu'on pourrait songer à employer une théorie homologique, comme celle de Leray, soit une théorie plus fine comme la « catégorie » de Lusternik-Schnirelmann. Mais le domaine est tellement vaste, et jusqu'à présent si dépourvu d'applications qu'il est difficile d'énoncer autre chose que des généralités.

CHAPITRE PREMIER

On considère ici des applications différentiables de classe C^r de l'espace euclidien R^n dans l'espace euclidien R^p; on supposera que $f(0) = 0$; conformément à la terminologie de C. Ehresmann R^n sera appelé l'espace *source*, et R^p l'espace *but*; en général, n sera pris $\geqslant p$, et la classe r de l'application f sera supposée supérieure au plus grand des nombres n, p [1].

Soit x un point de R^n, k le *rang* de l'application f en x; il est commode d'introduire les deux différences :

$q = n - k$ qu'on appellera le « *corang à la source* » en x.
$r = p - k$ — — « *corang au but* » en x.

On désignera par S_k l'ensemble des points de R^n, où le corang r a (strictement) la valeur k; il est clair que S_{k+1} appartient à l'adhérence de S_k, de sorte que $\overline{S_k}$ constitue l'ensemble des points où le corang r est $\geqslant k$. En particulier S_0 (si $n \geqslant p$) constitue l'ensemble des points *réguliers* de f; c'est un ouvert de R^n.

On considère dans l'espace-but R^p, les ensembles images $Y_k = f(S_k)$; on appelle $Y_1 = f(\overline{S_1})$ l'ensemble des valeurs critiques; on sait que, si l'application f est de classe C^m, où $m \geqslant n - p + 1$, cet ensemble est de mesure nulle dans R^p [6]. Le complémentaire $R^p - Y_1$ est l'ensemble des *valeurs régulières*.

Dans une application différentiable arbitraire, les singularités et la structure topologique des ensembles S_k (et *a fortiori* Y_k) peuvent présenter une extrême variété; on obtiendra néanmoins une structure déjà beaucoup plus simple si on se borne à ne considérer que des applications « génériques »; la définition précise d'une application générique est assez délicate; disons seulement pour le moment que toute application peut être

(1) Ultérieurement, quand on écrira : applications, variétés, il s'agira toujours d'applications, de variétés différentiables de classe aussi élevée que nécessaire. Toute composante connexe d'une variété est supposée paracompacte (réunion dénombrable de compacts).

approchée (avec approximation sur les dérivées d'ordre r) par une application générique, et que toute application assez voisine au sens précédent d'une application générique est elle-même générique.

A toute application f: $R^n \rightarrow R^p$, associons son graphe $G(f)$ dans l'espace-produit R^{n+p}; soit $y = f(x)$ l'image d'un point x de R^n; au point (x, y), le graphe $G(f)$ admet un n-plan tangent T_X; la correspondance $x \rightarrow T_X$ définit une application $\bar{f}$ de R^n dans la grassmannienne G_n^p des n-plans issus de O dans R^{n+p}; on désignera $\bar{f}$ sous le nom d'*application dérivée* de l'application f.

Supposant toujours (pour fixer les idées) $n \geqslant p$, désignons par F_r la pseudo-variété de G_n^p formée des n-plans qui rencontrent le R^n plan $y = 0$ suivant un sous-espace linéaire de dimension $(n - p + r)$.

Les F_r sont, dans G_n^p, des cycles de Schubert, et leur symbole de Schubert est : (Pour la définition de ce symbole, voir par exemple [3] ou [11]).

$$(F_r) \qquad (\underbrace{p-r,\ p-r\ \ldots\ p-r,}_{(n-p+r)} \qquad \underbrace{p,\ \ldots,\ p,\ p}_{(p-r)})$$

La dimension de F_r est donc :

$$(p-r)(n-p+r) + p(p-r) = (p-r)(n+r)$$

et sa codimension dans G_n^p (qui est une variété de dimension np) : codimension de $F_r = np - (np - rn + rp - r^2) = r(n - p + r)$. Comme nous le verrons, ces cycles (mod 2) F_r jouent un rôle important dans la détermination des ensembles critiques S_r; aussi faut-il préciser leur nature topologique; en un point ordinaire, F_r est une variété; les points singuliers de F_r sont ceux qui appartiennent à $\overline{F}_{r+1}$. Il est intéressant de préciser la nature de l'immersion de F_{r+1} dans F_r.

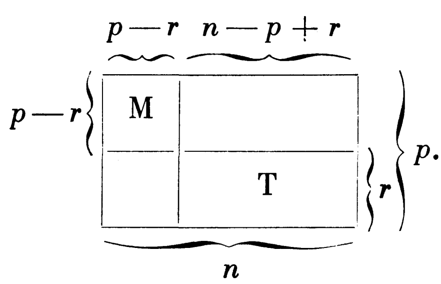
Soit u un point ordinaire de F_{r+1}; ce n-plan de G_n^p peut être engendré par n vecteurs orthogonaux, dont $(n - p + r + 1)$ sont dans $R^n (y = 0)$, où ils engendrent un plan Y, et $(p - r - 1)$ engendrent un sous-espace Z orthogonal à Y. Un voisinage normal à F_{r+1} de u dans F_r est constitué par les n-plans, dont $(n - p + r)$ vecteurs générateurs sont dans le plan Y et $(p - r - 1)$ engendrent Z; il reste un $n^{\text{ième}}$ vecteur V à déterminer, qui doit être dans R^p, et orthogonal à Z; son lieu est par suite un espace linéaire de dimension $p - (p - r - 1) = r + 1$; il en résulte que le voisinage normal de F_{r+1} dans F_r est fibré en espaces euclidiens R^{r+1} sur l'ensemble des R^{n-p+r} contenus dans un $R^{n-p+r+1}$, donc sur une sphère S^{n-p+r}; ce voisinage est donc un fibré de la forme $S^{n-p+r} \times S^r \times R$, fibré qui, au moins homologiquement, est trivial. Il en résulte que F^{r+1} n'est pas plongée comme une sous-variété dans F_r, mais que c'en est un lieu de points singuliers.

Détermination analytique d'un voisinage normal de F_r *dans* G_n^p.

Soient $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ des coordonnées de R^n, $y_j (j = 1, 2, ..., p)$ des coordonnées de R^p; un n-plan dans G_n^p est défini par un système de p équations linéaires de la forme :

$$y_j = \Sigma_i a_j^i x_i.$$

Supposons que le plan appartienne à F_r; cela veut dire que la matrice des a_j est au plus de rang $(p - r)$; si, de plus, c'est un point ordinaire de F_r, la matrice a_j^i est strictement de rang $(p - r)$. Supposons que le mineur M formé des $(p - r)$ premières lignes et $(p - r)$ premières colonnes soit différent de zéro; il subsiste dans la matrice un rectangle T complémentaire, formé des p dernières lignes et $(n - p + r)$ dernières colonnes; associons au mineur M un élément du rectangle T, et, en complétant M par la ligne et la colonne qui se croisent sur cet élément, formons un mineur d'ordre $(p - r + 1)$; nous obtenons ainsi $r(n - p + r)$ mineurs d'ordre $(p - r + 1)$, dont la nullité entraîne la nullité de *tous* les mineurs d'ordre $(p - r + 1)$; en annulant ces mineurs, on écrit ainsi un système d'équations locales de F_r dans G_n^p.



Cette remarque est utile pour la détermination pratique de F_r au voisinage d'un de ses points ordinaires. On pourrait obtenir de même le voisinage normal de F_r dans F_{r-1} en écrivant les relations quadratiques entre mineurs d'ordre $(p-r+1)$ qui apparaissent lorsque les mineurs d'ordre $(p-r+2)$ sont tous nuls.

L'homologie des cycles F_r. — Pour $r \geqslant 1$, les pseudo-variétés F_r ont un cycle fondamental mod. 2; en fait, il est plus pratique d'utiliser les classes de cohomologie qui leur correspondent par la dualité de Poincaré-Veblen; c'est ainsi que F_1 correspond à la classe de Stiefel-Whitney W_{n-p+1}; de façon générale les classes duales aux F_r sont des polynomes par rapport aux classes W_i, qu'on peut calculer explicitement grâce aux formules de multiplication entre cocycles de Schubert qui ont été données par S. Chern [1]; à noter que, pour $n-p=2(k-1)$, la classe duale à F_2 est définie à coefficients entiers; ce n'est autre que la classe de Pontrjagin P_{4k} (Cf. Wu [11]). Il serait intéressant de savoir l'expression cohomologique en coefficients entiers des classes duales aux F_{2k} qui sont définies à coefficients entiers dès que $(n-p)$ est pair.

Ensembles critiques et cycles F_r. — Si, en un point x de R^n, le rang s'abaisse à $p-r$, le plan tangent au point (x, y) correspondant du graphe $G(f)$ est projeté sur R^p suivant un $(p-r)$ plan; c'est dire que le noyau de cette projection, intersection du plan avec R^n, est de dimension $n-p+r$; donc le plan tangent en (x, y) à $G(f)$ appartient au cycle F_r, et réciproquement. Si l'on remonte à la définition de l'application $\bar{f}$, dérivée de f, on voit que les ensembles critiques S_r sont les images réciproques, par $\bar{f}$, des cycles F_r de la grassmannienne.

DÉFINITION. — Un point critique x de S_r sera dit *transversalement critique*, ou encore *générique*, si, au point $\bar{f}(x)$ de la grassmanienne, supposé ordinaire sur F_r, les plans tangents à $\bar{f}(R^n)$ et à F_r sont en position générale.

On montrera, au chapitre II, que toute application f peut être approchée par une application g pour laquelle tous les points des S_r sont génériques. Si cette hypothèse est réalisée, les ensembles critiques S_r sont de vraies sous-variétés de R^n, de codimension $r(n-p+r)$.

De plus S_{r+1}, situé dans l'adhérence de S_r, y admet un voisinage normal homéomorphe au cône sur le produit $S^r \times S^{n-p+r}$, décrit dans l'immersion locale de F_{r+1} dans F_r.

Points critiques ordinaires et points exceptionnels.

Considérons maintenant l'application f, restreinte aux S_r, qui fait passer de S_r à l'ensemble image Y_r. Une première question se pose : cette application est-elle en général de rang maximum?

La réponse est affirmative, pour raison de dimension; en effet, la dimension générique de S_r est $n - r(n - p + r)$, qui est inférieure à $p - r$, dès que $r \geqslant 1$. Or, tout plan tangent à S_r est situé dans un n-plan tangent à $G(f)$ qui est un point de F_r, dont la projection sur R^p est de dimension $p - r$; la projection du plan tangent à S_r se fait donc génériquement avec conservation de la dimension. Un tel point sera dit « point critique (générique) *ordinaire* ».

Si, au contraire, au point x de S_r, le plan tangent à S_r est appliqué par f sur R^p avec abaissement du rang, on dira que x est un point critique « *exceptionnel* ». Pour bien comprendre l'origine de ces points exceptionnels, il est commode de recourir à la méthode précédente et de les définir par des intersections; soit m la dimension de S_r, q celle du cycle F_r. F_r peut être considéré comme la base d'un fibré H, à savoir l'ensemble des m-plans contenus dans les n-plans qui forment $F_r (m < n)$; la fibre est par suite la grassmannienne G_m^{n-m}. Dans chaque fibre, on peut considérer l'ensemble F'_r des m-plans qui se projettent sur le R^{p-r} intersection de R^p et du n-plan, avec un corang r'; l'ensemble des F'_r est évidemment invariant par les opérations du groupe de structure du fibré H, de sorte que l'ensemble des $F'_{r'}$ constitue un certain cycle $Z_{r'}$ dans H. Le cycle $Z_{r'}$ est d'ailleurs, en ses points ordinaires, une vraie sous-variété de H. Or, dans la base F_r de H, on a une variété $\bar{f}(S_r)$, de dimension m. En associant à tout point de cette variété, son m-plan tangent, on définit au-dessus de la variété $f(S_r)$ une *section* du fibré H; les points d'intersection de cette section avec les cycles $Z_{r'}$ constituent, en projection dans la base Z_r, les points critiques exceptionnels. Ainsi, sur chaque variété S_r, il existe des sous-variétés (génériquement sans singularités) Z_r, sur lesquelles f (restreinte à S_r) présente un « corang au but » égal à r'; dans l'application f: $S_r \to Y_r$, l'image $f(Z_r)$ est en général un lieu de singularités pour Y_r. C'est là un fait mis en évidence pour la première fois par F. Roger [5] : l'ensemble des valeurs critiques présente dans l'espace but des singularités; comme on le verra, ces singularités sont *stables*, c'est-à-dire qu'elles subsistent pour une petite déformation de l'application; de plus, elles ont un caractère spécial, non générique; l'exemple le plus simple, pour faire comprendre ce phénomène, est celui du contour apparent d'une surface projetée sur un plan de coordonnées; on sait qu'un tel contour apparent présente en général des points de rebroussement (Exemple: Contour apparent d'un tore vu assez obliquement par rapport à son axe); on verra que ces rebroussements sont stables; néanmoins, considéré comme singularité de la projection d'une courbe sur un plan, le rebroussement est une singularité instable.

Pour achever la description complète d'une application, il est à nouveau nécessaire de considérer les variétés Z_r, de points critiques exceptionnels; en itérant le raisonnement fait plus haut, on verra que ces variétés critiques présentent des sous-variétés $W_{r''}$ sur lesquelles le rang de f (restreinte à $Z_{r'}$) s'abaisse de r'' unités... etc. On définira ainsi des points critiques « surexceptionnels ». On est néanmoins sûr, pour raison de dimension, que, génériquement au moins, ce processus s'arrête; en fait, si $p \leqslant n$, il ne peut y avoir de points surexceptionnels d'ordre $> p$; on aura finalement partagé l'espace source en une réunion de variétés (sans singularités génériquement) X_i, telles que la restriction de f sur chaque X_i soit de rang maximum.

Terminons par quelques remarques au sujet de ces variétés critiques exceptionnelles. D'abord précisons l'ordre des dérivées partielles de l'application f qui interviennent; dans la détermination des variétés critiques ordinaires S_r, seule intervient l'application $\bar{f}$, c'est-à-dire les dérivées du premier ordre; dans celle des $Z_{r'} \subset S_r$ intervient le plan tangent à $\bar{f}(R^n)$, donc les dérivées du second ordre, dans celle des variétés surexceptionnelles $W_{r''}$ les dérivées troisièmes etc. Il est intéressant, par ailleurs, de donner une idée — ne serait-elle qu'intuitive — de la genèse des singularités des valeurs critiques images de variétés critiques exceptionnelles. On l'obtient par la notion de « ventilation » d'une singularité, par déplacement de l'espace but. Expliquons-nous : supposons donnée une application f: $R^n \to R^p$, critique en O; supposons de plus l'espace but R^p mobile dans un R^{p+m}, et que ce mouvement (à n paramètres) soit défini par une application $g : R^n \to G_p^m$ dans la grassmanienne des p-plans de R^{p+m}; en supposant l'espace but R^p entraîné dans le mouvement défini par g, on définit une application F : $R^n \to R^{m+p}$, et l'image $F(R^n)$ présente en 0 la singularité ventilée de la singularité initiale de f: $R^n \to R^p$. Exemple : $n = p = m = 1$. L'application f: $R^1 \to R^1$ sera définie par $u = t^2$; supposons la droite-but R^1 mobile dans un plan R^2, et soit θ son angle polaire par rapport à une direction fixe. Supposons l'application g définie par $\theta = at$; alors la singularité « ventilée » sera définie dans R^2 par les équations

$$x = t^2 \cos at = t^2 + \cdots$$
$$y = t^2 \sin at = at^3 + \cdots$$

ce qui définit bien un rebroussement.

Les images des points critiques exceptionnels et surexceptionnels présentent des singularités toutes susceptibles de ce mode de génération. Dans le cas particulier important des points critiques de S_1, Z_1 ... etc, les singularités proviennent par ventilation de singularités du type $R^m \to R^m$; d'où l'importance de l'étude de ce type d'applications.

CHAPITRE II

On désignera par $L(R^n, R^p; r)$ l'ensemble des applications différentiables de classe $r (r \geqslant \operatorname{Sup} n, p)$ de R^n dans R^p, muni de la topologie définie par l'écart sur les dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ sur tout compact; $L(R^n, R^p; r)$ est dans ces conditions un espace métrique complet, donc un espace de Baire. Une propriété (P) des applications $f\colon R^n \to R^p$, définie localement en tout point de l'espace source sera dite *générique*, si l'ensemble des f qui ne présentent pas la propriété (P) en au moins un point d'un compact K de R^n forme dans $L(R^n, R^p; r)$ un ensemble *fermé rare* (fermé sans point intérieur).

Définition. — Une application $f\colon R^n \to R^p$ sera dite « *générique à la source* », si : 1°) L'application dérivée $\bar{f}$ de R^n dans la grassmannienne G_n^p est t-régulière (en position générale) sur les cycles de Schubert F_r de G_n^p; 2°) La section définie par une nouvelle dérivation dans le fibré H au-dessus de chaque variété critique $S_r = f^{-1}(F_r)$ coupe t-régulièrement le cycle $Z_{r'}$; alors les variétés critiques exceptionnelles $Z_{r'}$ sont sans singularités; on postulera que les sections (dans un fibré approprié en grassmanniennes) qui définissent dans $Z_{r'}$ les variétés critiques surexceptionnelles $W_{r''}$, sont elles-même t-régulières sur le cycle approprié et ainsi de suite.

Il est clair que l'ensemble des fonctions $f\colon R^n \to R^p$ génériques à la source forment un ouvert de $L(R^n, R^p; r)$ en effet, d'après le théorème I. 5 de [8], la propriété de position générale (plus exactement, de t-régularité) se conserve par une déformation assez petite (avec approximation sur les dérivées); les variétés critiques S_r, $Z_{r'}$, $W_{r''}$ ... restent isotopes à elles-mêmes.

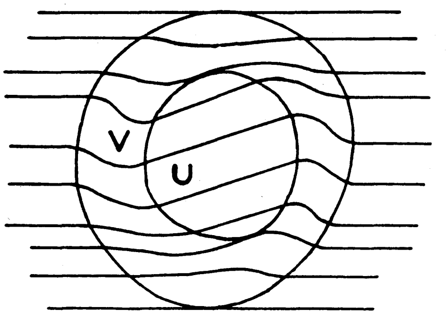
(A noter que dans le théorème I. 5 de [8], on suppose que la déformation a lieu par composition avec un homéomorphisme de l'espace-but; c'est là une restriction inutile ici, et le théorème est valable pour toute déformation dans $L(R^n, R^p, r)$.)

Reste à démontrer, et c'est là le plus délicat, que toute application f peut être approchée arbitrairement près par une application « générique à la source ». Nous allons démontrer d'abord la propriété pour les variétés critiques « ordinaires » S_r, remettant à plus tard la démonstration pour les variétés critiques exceptionnelles. Le principe de la démonstration est le suivant : soit f l'application donnée; supposons que l'ensemble critique S_r de f soit non vide, sinon S_r serait vide pour toute application assez voisine, et la propriété est démontrée. Recouvrons alors S_r par un nombre (fini ou infini, mais dans ce dernier cas, à cause de la paracompacité, dénombrable) de compacts K_j; désignons par M_j l'ensemble des applications de $L(R^n, R^p; r)$ non t-régulières (après dérivation) sur le cycle de Schubert F_r en au moins un point du compact K_j; il est facile de voir que M_j est un fermé dans L; on va montrer qu'au voisinage de f supposé appartenir à M_j, il y a des points qui n'appartiennent pas à M_j; on sait que, sur S_r, le rang est strictement égal à $(p-r)$ on peut donc trouver, au voisinage de tout point x de S_r, un système de $(p-r)$ fonctions $u_1, u_2 \ldots u_{p-r}$, qui sont fonctions coordonnées dans l'espace but R^p, et qu'on peut prendre pour fonctions coordonnées dans R^n. Dans ces conditions, au voisinage de tout $x \in S_r$, il y a une carte dans laquelle R^n a pour coordonnées $(u_1, u_2, \ldots u_{p-r}, x_{p-r+1} \ldots x_n)$, et $R^p(u_1, u_2, \ldots u_{p-r}, y_{p-r+1}, \ldots y)_p$: et où l'application f est représentée par les équations :

$$y_{p-r+j} = h_j(u_k,\ x_{p-r+m}), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1.$$

L'ensemble S_r est alors défini par les relations $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k} = 0$. On supposera S_r recouvert par un atlas formé de telles cartes, et on supposera les compacts K_j assez petits pour être contenus chacun dans une carte. On considérera l'ensemble des applications g assez voisines de f pour admettre le même atlas de cartes distinguées que f; c'est évidemment un espace de Baire X. On montre alors que, pour toute application f il existe une approximation g dont la restriction à K_j est, après dérivation, t-régulière sur le cycle F_r. La déformation de f en g a lieu comme suit : dans l'application f, on projette le graphe $G(f)$ dans l'espace-but parallèlement à l'espace source R^n; on obtiendra g en projetant $G(f)$ suivant une direction un peu oblique par rapport à la direction initiale; analytiquement, sur la carte associée cela revient à remplacer les fonctions y

par des fonctions y' telles que: $y'_j = y_j + \Sigma m^i_j x_i$, où les coefficients m^i_j seront supposés petits. La déformation $f \to g$ n'est ainsi définie que sur l'ouvert U de la carte associée; il est clair néanmoins qu'on peut prolonger la déformation de f en g à l'extérieur de U: ceci résulte des théorèmes classiques de Whitney sur le prolongement des applications différentiables [9], on peut même supposer que cette déformation se réduit à l'identité à l'extérieur d'un voisinage V contenant U;



la figure ci-dessus, dans le cas du plan, en donnera une idée satisfaisante pour tout esprit non imbu d'un excessif formalisme.

Cela étant, le graphe dans U de l'application g admet en tout point (x_i) un plan tangent défini par le système d'équations:

$$u_i = u_i; \qquad dy'_{p-r+j} = \sum_k \frac{\partial y'_{p-r+j}}{\partial u_k} du_k + \sum_i \frac{\partial y'_{p-r+j}}{\partial x'_{p-r+i}} dx_{p-r+i},$$

soit:

$$dy'_{p-r+j} = \sum_k \frac{\partial h_j}{\partial u_k} du_k + \sum_i \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_{p-r+i}} + m^i_j\right) dx_{p-r+i}.$$

L'ensemble S_r pour l'application g est donc défini par les équations: $\dfrac{\partial h_j}{\partial x_i} + m^i_j = 0$, ce qui revient, si l'on remarque que les mineurs relatifs au carré $(u_i = u_i)$ forment un système de coordonnées transverse pour le cycle de Schubert F_r, à prendre l'image réciproque de F_r par l'application dérivée $\bar{g}$.

L'application G: $R^n \to R^{r(n-p+r)}$ définie par les équations: $m^i_j = -\dfrac{\partial h_j}{\partial x_{p-r+i}}$ admet des valeurs régulières aussi voisines qu'on voudra de l'origine. Si (m^i_j) désigne les coordonnées d'une telle valeur, ceci signifie que l'application g correspondante, dérivée, est t-régulière sur le cycle de Schubert F_r, ce qu'on voulait précisément obtenir. Nous voyons donc que dans l'espace de Baire X, les sous-espaces M_j sont rares; donc leur réunion est maigre dans X, et n'admet aucun point intérieur; ceci montre qu'au voisinage de tout f il y a des g qui sont, après dérivation, t-régulières sur F_r, et cela confirme la propriété générique énoncée. Nous allons expliciter quelques conséquences de ce résultat.

THÉORÈME 1. — *Toute application* $f: R^n \to R^p$ *peut être approchée arbitrairement près (pour les dérivées partielles d'ordre* $\leqslant r$*) par une application* g*, dont la dérivée* $\bar{g}$ *est t-régulière sur les cycles de Schubert* F_r; par suite les points de R^n où g est strictement de corang au but r forment de vraies sous-variétés S_r.

La codimension de S_r dans R^n est égale à $r(n - p + r)$.

COROLLAIRE. — Si $n < r(n - p + r)$, l'ensemble S_r est « génériquement » vide.

Si de plus $n \geqslant p$, ceci montre que pour $n < r^2$, il n'y a pas de singularité stable de corang au but $\geqslant r$. Exemples :

Points critiques stables de corang 2. — Ils apparaissent seulement pour $n = p = 4$ (applications $R^4 \to R^4$); par contre, les applications $R^5 \to R^4$ n'admettent pas de points critiques stables de corang 2.

Le premier cas de point critique de corang 3 apparaît pour les applications $R^9 \to R^9$, celui de corang r pour les applications $R^{r^2} \to R^{r^2}$. Nous verrons au chapitre III que ces singularités existent effectivement et qu'elles sont « génériques » (stables pour une petite déformation).

La formule donnant la codimension de S_r est valable même pour $p < n$. On peut remarquer que, si r est le corang au but, $n - p + r$ est le corang à la source; ainsi on a la formule, très mnémotechnique :

THÉORÈME 2. — *La codimension générique d'un ensemble critique d'une application est égale au produit du corang à la source par le corang au but.*

On en déduit une conséquence assez curieuse sur les dimensions des ensembles critiques S_r pour les applications $R^n \to R^{n-k}$ et $R^n \to R^{n+k}$ comparées entre elles. Pour chacun des cas, la formule donne :

Pour $R^n \to R^{n-k}$, codimension de $S_r = r(k + r)$
Pour $R^n \to R^{n+k}$, codimension de $S_{r+k} = (r + k)r$.

Par exemple, pour $n = 2, k = 1$, les ensembles critiques des applications $R^2 \to R^1$ et $R^2 \to R^3$ ont même dimension, à savoir zéro : dans le premier cas, on a les points critiques d'une fonction, dans le second les points cuspidaux d'une immersion de R^2 dans R^3.

A titre d'exemple, donnons ci-dessous le tableau des dimensions des dimensions des variétés critiques d'une application $R^5 \to R^n$; r désigne toujours le corang au but, — une dimension négative strictement, donc génériquement l'ensemble vide.

$r =$	0,	1,	2,	3,	4,	5
$n = 1$	5,	0,	—	—	—	—
$n = 2$	5,	1,	—	—	—	—
$n = 3$	5,	2,	—	—	—	—
$n = 4$	5,	3,	—	—	—	—
$n = 5$	5,	4,	1,	—	—	—
$n = 6$	—	5,	3,	—	—	—
$n = 7$	—	—	5,	2,	—	—
$n = 8$	—	—	—	5,	1,	—
$n = 9$	—	—	—	—	5,	0
$n = 10$	—	—	—	—	—	5

La symétrie ainsi mise en évidence jette une lumière curieuse sur ce qu'on a appelé « la dualité de Whitney ». Nous y reviendrons plus tard, à propos des propriétés globales des ensembles critiques. On notera, de façon tout à fait générale, que si n est fixé, c'est pour $p = n$ que les applications $R^n \to R^p$ présentent au point de vue des variétés critiques et du corang la plus grande diversité.

Remarque sur la structure topologique des ensembles critiques.

L'ensemble des points d'une application f, où le corang au but est $\geqslant r$ n'est autre que l'adhérence $\overline{S_r}$; $\overline{S_r}$ contient évidemment S_{r+1}; comme S_{r+1} est l'image réciproque du cycle de Schubert F_{r+1} par l'application dérivée $\bar{f}$, t-régulière sur F_{r+1}, on en déduit que le voisinage normal de S_{r+1} dans S_r est homéomorphe au voisinage de F_{r+1} dans F_r; c'est, rappelons-le, en un point générique, le cône sur le produit des sphères $S^{n-p+r} \times S^r$. Il en résulte que l'ensemble fermé $\overline{S_r}$ n'est pas en général une vraie sous-variété (sauf si $\overline{S_{r+1}}$ est génériquement vide); $\overline{S_r}$ possède $\overline{S_{r+1}}$ comme lieu de points singuliers; chaque $\overline{S_r}$ est néanmoins une pseudovariété (pour $r \geqslant 1$), de sorte qu'on peut parler du cycle fondamental de $\overline{S_r}$; ce cycle est à coefficients entiers si la pseudovariété $\overline{S_r}$ est orientable, modulo 2 en général.

Les singularités critiques exceptionnelles.

Nous allons conduire explicitement le raisonnement dans le cas du point critique exceptionnel le plus banal, c'est-à-dire celui du point de S_1 où la restriction de f est de corang (à la source) égal à 1. Dans un voisinage u d'un tel point (comme en tout point générique de S_1), il existe un système de coordonnées $(u_1, u_2, \ldots u_{p-1}, x_p, \ldots x_n)$ dans lequel l'application f s'exprime par les équations :

$U_i = u_i$; $y = \varphi(u_j, x_i) + \cdots$, où φ est une forme quadratique non identiquement nulle (l'hypothèse de t-régularité de f sur F_1 implique en effet que φ n'est pas nulle). L'ensemble critique S_1 est défini dans U par les équations : $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = 0$, $i = p, p+1, \ldots n$. et son plan tangent au point (x_i, u_j) par :

$$\sum_j x_j \frac{\partial^2 y}{\partial x_r \partial x_j} + \sum_k u_k \frac{\partial^2 y}{\partial x_r \partial u_k} = 0.$$

Ce plan est donc défini dans le produit $R^{p-1} \times R^n$ par la matrice :

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & u_i & x_j \\
\hline
U_i & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} & 0 \\
\hline
\dfrac{\partial y}{\partial x_i} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial u_k} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}
\end{array}$$

(On ne tient pas compte de la ligne relative à y, puisque, sur S_1, cette ligne est une combinaison linéaire des précédentes.)

Dans ces conditions, la variété critique exceptionnelle Z_1 est définie dans R^n par la nullité du déterminant :

$$D = \left| \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \right|.$$

En fait, D peut être considéré comme une coordonnée transverse du cycle Z dans H. (Z étant défini par $D = 0$ dans H.) Supposons que l'image du voisinage de 0 dans S_1 par l'application dérivée (deux fois) dans H soit tout entière au voisinage d'un point générique $z \in Z$; ceci veut dire que sur le voisinage proposé l'application f, restreinte à S_1 est de rang $(p - 2)$ au moins; ou encore qu'on peut trouver sur le voisinage proposé (éventuellement restreint) un mineur d'ordre $(p - 2)$ de la matrice M qui ne s'annule pas dans ce voisinage. Supposons (pour fixer les idées) que ce soit le mineur relatif au premier élément (1re ligne, 1re colonne) de la matrice $M = \left| \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \, \partial x_j} \right|$, soit $Q_1(x, u)$ ce mineur. Déformons alors l'application f en g, g étant définie sur le voisinage considéré par les équations : $U_i = u_i$, $Y = y + a(x_p)^2$. La valeur $D(g)$ du déterminant D pour l'application f sera : $D(g) = D(f) + 2aQ_1(x, u)$.

La relation $D(g) = 0$ s'écrit $a = -1/2D(f)/Q_1(x, u)$; dans le voisinage de 0 considéré, cette relation définit une application de S_1 sur R^1; prenons pour a une valeur régulière $a = c$ de cette fonction, aussi voisine de 0 qu'il le faudra; alors l'application de S_1 dans H, associée à g définie par $Y = y + cx_p^2$, est t-régulière sur le cycle Z, car la coordonnée transverse D est de rang maximum sur S_1.

On montrerait, comme dans le cas de l'addition d'une fonction linéaire, que, pour c assez petit, la déformation de f en g peut se prolonger par une déformation qui se réduit à l'identité à l'extérieur d'un voisinage plus grand.

Reste à montrer que toute application f est « presque partout » sur S_1 de rang $\geqslant p - 2$; si en effet dans un voisinage de 0, tous les mineurs d'ordre $p - 2$ étaient nuls, on pourrait d'abord supposer que l'un au moins des mineurs d'ordre $p - 3$, ne s'annule pas dans le voisinage éventuellement restreint. Dans ces conditions, par addition à y d'une forme quadratique en x convenablement choisie, on peut obtenir que le rang soit partout sur ce voisinage $\geqslant p - 2$, sauf éventuellement sur les points d'une sous-variété, et ainsi de suite pour les rangs inférieurs. La démonstration se complète, comme précédemment, par « recollement des morceaux ». Il importe toutefois de dire qu'elle ne se généralise pas sans difficulté aux variétés critiques exceptionnelles de corang à la source > 1. Comme nous le verrons en effet à la fin du Chapitre 3, quand on forme l'intersection avec un cycle F_r d'une grassmannienne qui définit la variété exceptionnelle, on est amené à considérer les coefficients d'un tableau rectangulaire T d'une matrice. Ces coefficients contiennent en général linéairement les dérivées secondes, de l'application f; or du fait des relations « d'intégrabilité » $\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial x}$ il est possible que le rang de ce tableau s'abaisse; néanmoins, à cause du caractère linéaire de ces relations, l'espace image est un sous-espace linéaire de l'espace des vecteurs transverses à F_r, de sorte qu'on peut encore parler d'application t-régulière que F_r, considéré comme plongé dans ce sous-espace linéaire image. Il en résulte en particulier que la codimension d'un ensemble critique exceptionnel est en général plus petite que celle donnée par la formule du théorème 2. (Voir l'exemple à la fin du Chapitre 3.) Avec cette restriction, le principe de la démonstration antérieure reste valable.

Cas des variétés critiques surexceptionnelles.

Dans le cas d'une variété surexceptionnelle d'ordre k, on est amené à considérer une *variété de drapeaux* d'ordre k (systèmes de k plans emboîtés chacun dans le suivant), et, dans une telle variété un sous-ensemble H défini par des conditions de dimensions de projection sur le facteur R^p, et enfin, dans la sous-variété H, un certain cycle Z; au voisinage d'un point générique de Z, l'immersion de Z dans H est isomorphe à celle d'un cycle de Schubert dans une grassmannienne, de sorte qu'au voisinage d'un tel point, un système de coordonnées normales de Z dans H peut être donnée par les $r(n - p + r)$ mineurs issus du rectangle d'une matrice; dans les lignes de ce rectangle figurent les coefficients du plan tangent à la variété critique d'ordre $(k - 1)$ qu'on applique dans H; ces coefficients contiennent linéairement les dérivées d'ordre k de l'application f.

Dans une carte locale associée, on sera amené à ajouter aux variables y des formes homogènes de degré k en x, en prenant pour coefficients variables ceux qui, après dérivation, figurent dans les $r(n - p + r)$ mineurs qui donnent les équations locales de Z dans H. Ici encore, on choisira les valeurs de ces coefficients pour que l'application obtenue dans H soit t-régulière sur le cycle Z, compte tenu éventuellement des relations linéaires entre coefficients qui proviennent des relations d'intégrabilité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Le procédé par recollement des morceaux s'applique alors sans autre modification. J'envisage de revenir sur ce point dans une publication ultérieure.

CHAPITRE III

FORME GÉNÉRIQUE DES SINGULARITÉS POUR LES PETITES DIMENSIONS

On va s'occuper ici des singularités présentées par les applications génériques de R^n dans R^p, où p est petit.

1° $p = 1$. **Singularités d'une fonction.** — Soit $f\colon R^n \to R^1$ une fonction, $G(f)$ son graphe dans R^{n+1}; on considère l'application dérivée de R^n dans G_n^1; le cycle de Schubert F_1 se réduit à un point de G_n^1 (le n-plan horizontal); un système de coordonnées normales pour F_1 est donné par les coefficients de l'équation du plan tangent, donc par les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot$ D'après le théorème 2, pour une f générique à la source, l'ensemble critique S_1 se réduit à un certain nombre de points; en chacun de ces points, les dérivées f'_{x_i} sont des formes linéaires des coordonnées locales, et par suite de la régularité sur F_1, ces *formes linéaires sont indépendantes.* Ceci exprime que le développement local f autour de chaque point critique commence par une forme quadratique non dégénérée. Donc :

Théorème 3. — *Toute fonction différentiable sur* R^n *peut être approchée d'aussi près qu'on veut (ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à un ordre arbitrairement grand, quoique fini), par une fonction g dont les seules singularités sont des points critiques quadratiques non dégénérés.*

[Cf. M. Morse, The calculus of variations in the large. *Colloque*, Publ. XVIII, p. 178, th. 8. 7.]

2° $p = 2$. **Singularités d'une application dans le plan.** — Il n'existe qu'un seul ensemble critique génériquement non vide, S_1; sa dimension est 1, et comme S_2 est vide, c'est une vraie sous-variété (courbe dans R^n). Il y a des points critiques exceptionnels, définis comme $S_1(S_1)$; il est aisé de voir la singularité correspondante dans le plan but; elle provient par « ventilation » de la singularité $R^1 \rightarrow R^1$ définie par $u = t^2$; composée avec une application de degré 1 de R^1 dans $G_1^1 = S^1$, elle donne, comme on l'a vu au chapitre I, un *rebroussement de type ordinaire.* On obtient aisément les équations locales de la singularité; on peut donner à R^n un système de coordonnées de la forme $R^n(u, x_2, x_n) \rightarrow R^2(u, v)$, où v est une forme quadratique φ en u et x_i; la courbe critique dans R^n est définie par $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, son vecteur tangent en 0 par $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$. Dans le cas actuel, où le rang de la forme $\varphi(0, x_i)$ s'abaisse, on peut supposer que v admet un développement qui débute par

$$v = ux_2 + x_3^2 + \cdots + (x_n)^2$$

la courbe critique est alors paramétrée localement par la variable x_2; son image par l'application est composée de $u = (x_2)^2$ par une « ventilation » d'angle kx_2; ce qui donne en posant $x_2 = t$ pour image de la courbe critique $u = t^2$, $v = kt^3 + \cdots$. On retrouverait d'ailleurs directement ce résultat en écrivant le terme en $(x_2)^3$ du développement de v. Dans le cas $R^2 \rightarrow R^2$ la singularité est représentée par l'équation : $z = x^3 - xy$, où f envoie le plan (x, y) sur le plan (y, z). Nous reverrons d'ailleurs ce cas en général.

3° $p = 3$. — Ici encore, on a le seul ensemble critique S_1 qui est une vraie surface; sur S_1, on a des courbes exceptionnelles $S_1(S_1)$ et des points surexceptionnels $S_1(S_1(S_1))$. Dans l'espace but, les courbes exceptionnelles ont pour images des courbes lieux de rebroussements de la surface des valeurs critiques. Les points surexceptionnels ont pour image des rebroussements des courbes lieux des rebroussements de la surface critique. En général une application $R^2 \rightarrow R^3$ présente des points de corang au but égal à 2 : ce sont les points cuspidaux; nous voyons ici *que la surface des valeurs critiques ne présente pas en général de points cuspidaux*; ainsi : un ensemble de valeurs critiques présente des singularités stables autres que les singularités génériques, et, de plus, certaines singularités génériques pour les dimensions considérées peuvent ne pas se présenter. Les équations locales de l'application $R^3 \to R^3$ au voisinage d'un point critique surexceptionnel pris comme origine peuvent être mises sous la forme :

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = zy + z^2x - z^4.$$

La surface critique est définie par $\dfrac{\partial Z}{\partial z} = y + 2zx - 4z^3 = 0$ et son image sur le plan XY, définie par la représentation paramétrique en x et z : $X = x$, $Y = -2zx + 4z^3$ présente la singularité du point critique exceptionnel $R^2 \to R^2$; la troisième coordonnée :

$$Z = z(-2zx + 4z^3) + z^2x - z^4 = -z^2x + 3z^4$$

définit la « ventilation » dans R^3 de cette singularité.

Pour être complet, mentionnons encore la singularité générique d'une application $R^2 \to R^3$; il s'agit de l'ensemble S_2, formé de points isolés; au voisinage d'un tel point, l'application est représentée par les équations : $x = u, y = uv, z = v^2$; il s'agit là du classique point cuspidal d'une surface. On sait qu'un tel point est l'extrémité d'un segment de la courbe de self-intersection $u = 0$, dont l'image est l'axe des z. La variété de self-intersection présente donc une singularité de corang 1 en ce point.

4° $p = 4$. — Le cas $R^3 \to R^4$ présente pour unique singularité un S_2 qui est une courbe de points cuspidaux (produit topologique de la singularité $R^2 \to R^3$ par R.); cette courbe peut d'ailleurs présenter elle-même des points critiques exceptionnels qui donnent lieu à des rebroussements.

Le cas intéressant est présenté par les applications $R^4 \to R^4$; S_1 est alors formé d'une variété de dimension 3 qui peut elle-même présenter les variétés critiques exceptionnelles et surexceptionnelles qu'on explicitera aisément; mais, de plus, on a un S_2 composé de points isolés, qui sont des points singuliers pour $\overline{S_1}$. Un système d'équations locales au voisinage d'un point de S_2 est donné par :

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = w^2 + t^2, \qquad Z = uw + vt.$$

Si, en effet, on forme la matrice des coefficients du plan tangent au graphe, on trouve :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & \boxed{\begin{matrix} w & t \\ u & v \end{matrix}} \end{array}\right]$$

et par suite l'application dérivée $\bar{f}$ est régulière sur le cycle de Schubert F_2, les coordonnées normales de F_2 étant données par les éléments du carré marqué en pointillé.

Pour les applications $R^5 \rightarrow R^4$, S_2 est vide; de même pour $R^n \rightarrow R^4$, $n > 5$. Terminons là ces considérations particulières, et arrivons à l'étude des singularités générales.

Variétés critiques S_r. *Forme générique locale. Existence.*

Jusqu'à présent, nous n'avons pas montré l'existence effective de sous-variétés critiques S_r, non vides, lorsque leur codimension générique leur permet, c'est-à-dire, lorsque $n \geqslant r(n - p + r)$. Cette existence n'est pas évidente : en effet, étant donnée une application $g : R^n \rightarrow G_n^p$, il est en général impossible d' « intégrer » cette application, c'est-à-dire de trouver une application f: $R^n \rightarrow R^p$, dont g est la dérivée; g doit satisfaire à des conditions d'intégrabilité qui s'expriment par exemple par la symétrie de certains coefficients. C'est pourquoi l'existence d'une application f, dont la dérivée $\bar{f}$ est t-régulière sur le cycle de Schubert F_r nécessite une démonstration. Étant donné un système $(u_1, u_2, u_{p-r}, x_{p-r+1}, \ldots x_n)$ de coordonnées dans R^n, considérons l'application dans R^p de coordonnées $(U_1, U_2, \ldots U_{p-r}, Y_{p-r+1}, \ldots Y_p)$ définie par les équations :

$$U_m = u_m, \quad m = 1, \quad 2 \ldots p - r; \qquad Y_{p-r+1} = \sum_i (x_{p-r+i})^2;$$
$$Y_{p-r+2} = U_1 x_{p-r+1} + U_2 x_{p-r+2} + \cdots U_{n-p+r} x_n;$$
$$Y_{p-r+3} = U_{n-p+r+1} x_{p-r+1} + U_{n-p+r+2} x_{p-r+2} + \cdots$$

et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de toutes les variables U_i; or cet épuisement ne saurait se produire, car il y a $(p - r)$ variables U_j, et on dispose de $(r - 1)$ formes quadratiques Y_{p-r+j}, $j > 1$, contenant chacune $(n - p + r)$ coefficients; et l'on a : $(p-r) > (r-1)(n-p+r)$ dès que $n > r(n-p+r)$, ce qu'on a supposé initialement.

L'ensemble critique S_r de l'application f est alors un plan défini par les formes linéaires : $\dfrac{\partial Y_{p-r+j}}{\partial x_{n-p-r+k}} = 0$, formes en nombre égal à $r.(n-p+r)$; si on explicite ces formes en x_j et u_k, on constate que l'ensemble de ces formes en u_k et x_j est de rang maximum, égal à $r(n-p+r)$. On en déduit que l'application dérivée $\bar{f}$ est t-régulière sur le cycle de Schubert F_r.

Ainsi, tous les ensembles critiques S_r à dimension générique non négative se présentent effectivement, et peuvent être réalisés par des applications algébriques qui s'expriment localement grâce à des formes quadratiques. Il resterait à savoir, mais c'est là un problème que nous laisserons de côté, si tout point générique de S_r admet une carte locale dans laquelle l'application f a la forme ci-dessus. Nous ne traiterons le problème que dans le cas des points génériques de S_1.

Cas des points corang au but égal à 1 $(n \geqslant p)$ (cf. [5]).

En un tel point, il existe une carte locale (u_1, u_{p-1}, x) dans laquelle l'application dans $R_p(U_1, U_2, \ldots U_{p-1}, y)$ prend la forme: $U_j = u_j$, $j = 1, 2, \ldots p-1$; $y = \varphi(u, x_{p-1+i}) + \cdots$, où φ est une forme quadratique en u et x; par un changement de variables homéomorphisme de l'espace source tangent à l'identité en 0, on peut supposer que y se réduit à la seule forme quadratique φ, les termes d'ordre supérieur disparaissant [4]. Par ailleurs, on peut ajouter à y une forme quadratique arbitraire en les (u_i); cela revient à effectuer dans l'espace but R^p un homéomorphisme tangent à l'identité à l'origine. La condition de t-régularité de l'application dérivée f s'exprime par le fait que les $(n-p+1)$ formes linéaires $\dfrac{\partial y}{\partial x_{n-p+i}}$ sont linéairement indépendantes. Le rang de la forme $\varphi(u_j, x)$ ne peut donc (génériquement) s'abaisser en dessous de $(n-p+1)$. Après soustraction d'une forme quadratique arbitraire dn u_i, la forme réduite $\varphi(0, x_i)$ obtenue pour $u_i = 0$ est donc de rang $n-2(p-1)$ au moins.

Il est clair que l'indice de la forme quadratique restreinte au plan $u = 0$, $\varphi(0, x_i)$, est un invariant; on peut l'interpréter de la manière suivante : supposons que le point $x = 0$ soit un point critique ordinaire; alors l'application $\bar{f}$ est de rang maximum sur la variété critique en x et par suite l'image de la variété critique est en $y = f(x)$ une sous-variété de dimension $(p - 1)$ régulièrement plongée dans R^p; considérons une courbe R^1 transverse à cette variété en y, et soit Q son image réciproque par f; c'est en général une sous-variété Y, et la restriction de f à Y définit une fonction $f : Y \to R^1$; l'indice de cette fonction, qui présente en x dans Y un point critique, est l'indice de la forme $\varphi(0, y)$. On l'appellera « *indice transverse* » du point indiqué x.

Si on veut exprimer analytiquement la condition pour qu'un point critique soit non exceptionnel, il faut exprimer que l'application $\dot{f}$ sur le plan tangent à S_1 est de rang maximum, donc que son noyau est nul. Or, dans l'espace des vecteurs tangents à R^n en O, $\dot{f}$ admet pour noyau le $(n - p + 1)$-plan $u_1 = u_2 = \cdots = u_{p-1} = 0$, et le plan tangent à S_1, défini par $\dfrac{\partial y}{\partial x_j} = 0$, n'est autre que le plan conjugué du noyau de f par rapport au cône du second degré défini par $\varphi(u, x) = 0$. Or un plan et son conjugué ne peuvent admettre de droite commune que si le plan est tangent au cône le long de cette droite. Ce qui revient à dire que l'hyperquadrique définie projectivement par l'équation $\varphi(0, x) = 0$ admet un point double. Les points critiques exceptionnels sont donc caractérisés par le fait que la quadrique $\varphi(0, x_i) = 0$ présente des points multiples; en un point générique, au contraire, cette quadrique est sans singularité et réciproquement.

Il est facile, dès lors, de déterminer la structure topologique en un point de corang au but égal à 1, qui est non exceptionnel; on peut en effet supposer les variables u_i (donc U_i) choisies de façon que le plan tangent à la variété critique dans l'espace but R^p soit défini par $Y = 0$. Ceci impose que le plan tangent à S_1 en O soit le plan défini par $x_{n-p+i} = 0$. Dans ces conditions, Y prend la forme :

$Y = \Sigma a_j^i(x_j)(x_i)$, les termes en $u_i x_j$ étant nuls.

On voit alors que la singularité n'est autre que le produit topologique par un espace R^{p-1} (celui des u_i, resp. U_i) de l'application $Y: R^{n-p+1} \to R^1$ qui présente un point critique à l'origine.

Points critiques exceptionnels génériques.

Soit O un tel point; en ce point O, la variété critique S_1 admet un $(p-1)$ plan tangent, qu'on supposera paramétré par les coordonnées $u_1, u_2, \ldots u_{p-2}, v$; on a supposé les fonctions u_i choisies de façon à être de rang total $(p-2)$ sur ce plan tangent, le noyau de l'application prolongée $\dot{f}$ étant la droite $u_i = 0$, paramétrée par la fonction v. Dans ces conditions l'application f restreinte sur S_1 peut être définie par les formules :

$$U_i = u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots p-2; \qquad V = 3v^2.$$

Complétons le système de coordonnées de R^n en

$$(u_1, \quad u_2, \quad u_{p-2}, \quad w, \quad v, \quad x_{p+1}, \quad \ldots, \quad x_n)$$

et celui de R^p en $(U_1, U_2, \ldots, U_{p-2}, W, Y)$. On plonge alors S_1 dans R^n en posant : $w = V = 3v^2$, et, l'application f: $R^n \to R^p$ étant définie par $U_i = u_i$, $W = w$, Y débutera par une forme quadratique en (u_i, v, x_j). Mais alors l'ensemble critique S_1 est défini par les équations $\frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial v} = 0$. Comme cet ensemble doit s'identifier à S_1, définie par $x_j = 0$, et $w - 3v^2 = 0$, on voit que $Y = wv - v^3 + \Sigma(x_j)^2$, où $\Sigma(x_j)^2$ est une forme quadratique de rang $n-p$ strictement. Sur cette forme réduite, on voit que la singularité est le produit par un espace R^{p-2} (celui des $u_i = U_i$) de la singularité $R^{n-p+2} \to R^2$ associée à un point de rebroussement de la courbe contour apparent.

On vérifiera aisément sur cette forme réduite que l'indice transverse d'un point critique ordinaire voisin du point exceptionnel varie de une unité lorsque ce point traverse la variété des points exceptionnels.

Quelques résultats sur les singularités exceptionnelles.

La description explicite de « toutes » les singularités génériques des applications différentiables apparaît évidemment comme une tâche quasi chimérique. Du moins peut-on à leur sujet se poser la question préjudicielle de leur existence. On a déjà vu que toutes les variétés critiques S_r de corang au but r existent, dès que les conditions dimensionnelles du th. 2 sont satisfaites; on peut par suite se demander s'il en va de même pour les singularités exceptionnelles. La réponse est affirmative lorsqu'il s'agit de singularités surexceptionnelles d'ordre k fini, pourvu que les k singularités composantes soient « banales » c'est-à-dire de corang 1; elle est négative en général pour des singularités de corang supérieur à 1. Montrons-le :

Existence de singularités surexceptionnelles d'ordre quelconque dont toutes les singularités composantes sont de corang (*au but*) *égal à* 1.

Il s'agit de construire une application f: R^n — R^p, telle que si S_{j+1} désigne la variété critique de S_j (supposée passer par l'origine O), le point O soit un point critique de corang au but égal à 1, générique, pour toutes les restrictions $f|S_j$, $j=1, 2, k-1$ la construction procède par récurrence sur k. Supposons connue une application g: $R^{p-1} \rightarrow R^{p-1}$, telle que O soit point critique de corang 1 pour toutes les variétés critiques successives (au nombre de $k-1$); l'application étant f de corang 1, on suppose qu'on peut trouver $(p-2)$ fonctions $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$ conservées par l'application; en complètant ces fonctions u_i par une $(p-1)^{\text{ème}}$ fonction v, on obtient un système de coordonnées de l'espace source, dans lequel l'application f dans R^{p-1} de coordonnées (U_1, U_{p-2}, W) s'exprime par les équations : $U_i = u_i$, $W = h(u_i, v)$; h polynome de degré k. On immerge alors l'espace source R^{p-1} dans un espace R^n de coordonnées $(u_i, w, v, x_{n-p+1}, \ldots, x_n)$, en posant : $x_{n-p+i} = 0$; $w = h(u_i, v)$; on pose alors :

$$Y = wv - \int_0^v h(u_i, v)\, dv + \Sigma (x_{n-p+j})^2. \qquad \text{(P)}$$

On vérifiera immédiatement que l'application F :

$$R^n(u_i, w, v, x_{n-p+j}) \rightarrow R^p(U_i, W, Y)$$

définie par les équations : $U_i = u_i$, $i = 1, 2, \ldots p-2$; $W = w$; $Y =$ le polynôme (P) répond aux conditions voulues. On voit que le polynôme qui sert à définir Y est alors de degré $k+1$; en effet, dans le cas de $S_1 (k=1)$, il suffit pour définir Y d'une forme quadratique.

Inexistence (en général) d'une singularité exceptionnelle de corang 2.

Considérons une application $f\colon R^n \rightarrow R^5$, $n \geqslant 5$; la variété critique S_1 est de dimension 4; en chaque point $x \in S_1$, le plan tangent à S_1 est appliqué dans R^5 avec un rang égal à 4; on pourrait donc s'attendre à voir la variété S_1 présenter des singularités exceptionnelles du type $S_2(S_1)$, de corang 2, qui seraient par suite des points isolés. Pour $n = 5$, il est évident qu'une telle singularité est impossible : en effet, en un point générique de S_1, le noyau de l'application f est de dimension 1 dans l'espace des vecteurs tangents (corang 1); par suite un R^4 ne peut être appliqué par f sur un R^2; pour $n = 6$, ce raisonnement ne tient plus. Prenons dans R^6 un système de coordonnées u, v, x, y, z, t, tel que les 4 fonctions u, v, x, y définissent une application de rang maximum sur R^4 ; prenons alors dans R^5 un système de coordonnées (U, V, X, Y, Z) tel que $U = u$, $V = v$, $X = x$, $Y = y$. L'ensemble critique S_1 est alors défini par l'équation $\dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0$ et $\dfrac{\partial Z}{\partial t} = 0$; le plan tangent devant contenir le noyau de f, on peut supposer que c'est le plan $u = v = 0$; on obtiendra cette situation en posant :

$Z = uz + vt + g(u, v, x, y, z, t)$, où g contient des termes du 3e ordre au moins; une représentation paramétrique de S_1 dans R^6 est donnée par les 4 variables (x, y, z, t) et les équations : $ux = -\dfrac{\partial g}{\partial z}$; $v = -\dfrac{\partial g}{\partial t}\cdot$ Le plan tangent à S_1 sera par suite, au point (x, y, z, t), défini par la matrice :

$$
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & x & y & z & t \\
\hline
X & 1 & 0 & 0 & 0 \\
Y & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
U & \dfrac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial t} \\
V & \dfrac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial z} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}
\end{array}
$$

L'intersection de l'image de S_1 par l'application 2 fois dérivée avec le cycle de Schubert $F_2 \subset G_2^2$ sera donc définie par les équations $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z\, \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$; elles sont au nombre de trois, au lieu des quatre qui apparaissent normalement. Cela prouve que du fait de la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 g}{\partial z\, \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial t\, \partial z}$, l'intersection de $\bar{\bar{f}}(S_1)$ avec le cycle F_2 (ou son prolongé dans un fibré tel que H, p. 17) n'est *jamais t-régulière*; l'ensemble critique $S_1(S_2)$ existera, mais sera de dimension 1 au lieu de zéro. Dans le cas $n > 6$, on a, semble-t-il, une conclusion analogue. Nous ne ferons ici qu'attirer l'attention sur ce phénomène, qui mériterait une étude plus poussée. Il souligne en tout cas la différence de nature entre les singularités des variétés critiques et les singularités critiques tout court, différence qu'on a signalée antérieurement.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS GLOBALES DES APPLICATIONS GÉNÉRIQUES

Rappelons qu'une propriété (P) des applications f: $R^n \to R^p$, définie localement en tout point de l'espace source, est dite « générique », si l'ensemble des f qui ne présentent pas la propriété (P) en au moins un point d'un compact K de R^n forme dans $L(R^n, R^p; r)$ un sous-ensemble *fermé rare* (fermé sans point intérieur).

Passage du local au global.

V^n et M^p désignant deux variétés de dimensions respectives n, p l'espace $L(V^n, M^p; r)$ des applications de classe r de V^n dans M^p est défini, et c'est un espace de Baire. On va montrer que, si (P) est générique, l'ensemble des applications f: $V^n \to M^p$ qui, en au moins un point de V^n, ne présente pas la propriété (P) est un ensemble *maigre* de $L(V^n, M^p; r)$.

Soit K_j un compact de V^n, (D_j) l'ensemble des f qui ne présentent pas la propriété (P) en au moins un point de K_j. On va montrer que D_j est *rare* dans $L(V^n, M^p)$. En effet :

i) (D_j) *est fermé*; car si g appartient au complémentaire de (D_i), g présente la propriété (P) en tout point de K_j; il en va de même de toute g' assez voisine de g, puisque (P) est générique.

ii) (D_j) *n'a pas de point intérieur.* Soit g un point de (D_i). Faisons choix sur V^n d'un atlas U_j, et sur M^p d'un atlas W^k, tels que l'image par g d'un ouvert U_i soit contenue dans un ouvert W_j de W^k. Désignons par (G) un voisinage ouvert de g dans L(V, M) assez petit pour que, si $f \in (G)$, l'image $f(U_{ij})$ soit elle aussi contenue dans W_j. Il existera par suite une application canonique h de (G) dans $L(U_i, W_j)$ définie par la restriction de l'application à (U_i); h est évidemment une application ouverte pour la topologie d'espaces de Baire définie sur (G) et $L(U_i, W_j)$. Posons $K_{ji} = U_i \cap K_j$, et désignons par Z_{ij} l'ensemble des $f \in (G)$ qui ne présentent pas (P) en au moins un point de K_{ji}; Z_{ij} est dans $L(U_i, W_j)$ un ensemble rare. Par suite son image réciproque $h^{-1}(Z_{ij})$ dans (G) est également rare dans (G); la réunion (pour i variable) des $h^{-1}(Z_{ij})$ dans (G) donne évidemment l'intersection $(G) \cap D_j$. C'est donc dans (G) un ensemble maigre, donc sans point intérieur, et par suite, au voisinage de g, il y a une $g' \in (G)$ qui n'appartient pas à (D_j).

Si on recouvre ensuite V^n par une infinité au plus dénombrable de compacts, on en déduira que l'ensemble des $f \in L(V^n, M^p)$, qui, en un point de V^n ne présentent pas la propriété (P), est représenté par $\bigcup_j (D_j)$ donc par un ensemble « maigre » (*rare*, si V^n est compacte : il n'y a alors qu'un nombre fini de K_j).

Comme application de ce théorème, citons :

Théorème 4. — *Toute fonction numérique réelle sur une variété peut être approchée arbitrairement près (ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre r) par une fonction qui ne présente que des points critiques quadratiques non dégénérés.*

Il est clair qu'on pourrait énoncer un théorème analogue pour tout système de singularités génériques $R^n \to R^p$, une fois qu'on a obtenu une description exhaustive de ces singularités. Par exemple :

Théorème 5. — *Toute application f d'une variété* V^n *sur le plan* R^2 *peut être approchée par une application g qui ne présente qu'une courbe critique de corang au but égal à* 1, *sans singularités dans* V^n; *en projection dans* R^2, *la courbe critique présentera, outre des points de self-intersection, des rebroussements ordinaires (images de points critiques exceptionnels).*

Quelques généralités sur les applications génériques.

Donnons d'abord quelques définitions.

Ensemble différentiable. — Un ensemble E de R^k est dit « différentiable de classe *r* » si, en tout point x de E, il existe un voisinage U_x de x dans R^k, et, dans U_x un ideal (à base finie) de fonctions différentiables de classe r, tel que $U_x \cap E$ soit l'ensemble des points qui annulent toutes les fonctions de l'idéal. On pourra supposer E défini par un «système cohérent d'idéaux» relatif à un atlas U_j recouvrant E. [En fait, tout ensemble fermé est différentiable au sens précédent. Dans ce qui suit, on supposera de plus que E est une *variété avec singularités :* les fonctions de base de l'idéal ont des dérivées partielles d'ordre fini non nulles en tout point de E.]

Ensembles différentiablement isotopes. — Deux ensembles différentiables E, E′, tous deux définis dans un même ouvert U de R^k, par des systèmes cohérents d'idéaux, seront dits diffétentiablement isotopes s'il existe un homéomorphisme $h: U \to U$, qui se réduit à l'identité sur la frontière de U, et qui transforme le système d'idéaux relatif à E en celui relatif à E′.

Ensembles localement isotopes. — Deux ensembles différentiables E, E′ seront dits localement isotopes, si, sur un voisinage commun U, il existe un atlas U_i, tel que dans chaque U_i les intersections $E \cap U_i$, $E' \cap U_i$ soient différentiablement isotopes (les homéomorphismes h^2 de U_i ne se réduisant pas nécessairement à l'identité sur la frontière de U_i).

Ensembles continuement isotopes. — Soit E un ensemble différentiable dépendant continuement d'un paramètre t; on dira que E reste *continuement isotope à lui-même*, si, pour toute valeur de t, il existe un homéomorphisme h_t de U qui transforme E en E_t. Même définition pour des ensembles localement continuement isotopes. A cet égard, on a le théorème :

THÉORÈME 6. — Deux ensembles différentiables *continuement localement isotopes* sont *globalement continuement isotopes.*

Démonstration. — On forme le produit $R^k \times R$, où le facteur R est paramétré par t; dans chaque produit $U_i \times R$, l'homéomorphisme $h^i(t)$ permet de définir en tout point y une direction D_y, sur laquelle on peut supposer t de rang maximum; on associera à tout point $y \in U_i \times R$ un vecteur $V^i(y)$, non nul en tout point de $U_i \times R$ parallèle à D_y. Soit $(c_i(y), y \in U)$ une partition de l'unité subordonnée à l'atlas U_i; on associe à tout point (y, t) le vecteur $Z = \Sigma c_i(y)\, V_i(y)$. Le champ de vecteur ainsi défini est partout de rang 1 sur l'axe des t, et son intégration donne un système de trajectoires qui définit l'homéomorphisme global $h(t)$ cherché. On peut d'ailleurs supposer que le complémentaire de U est recouvert par un élément X de l'atlas, sur lequel on prend un champ parallèle à l'axe des t. Dans ces conditions, l'homéomorphisme $h(t)$ obtenu se réduit à l'identité à l'extérieur de U.

Un lemme fondamental. — Supposons que l'ensemble E soit défini comme l'image réciproque d'une sous-variété par une application t-régulière de l'espace R^k contenant E. E est alors elle-même une sous-variété. Si l'on déforme suffisamment peu l'application f, alors l'ensemble E reste continuement isotope à lui-même.

Il suffit de montrer que E reste localement continuement isotope à lui-même; la démonstration a été donnée dans [8] (Th. d'isotopie I. 5). Ce résultat se généralise ensuite aux ensembles différentiables contenant des points singuliers; il suffit de supposer que chacune des variétés de points singuliers est elle-même définie comme image réciproque d'une sous-variété par une application t-régulière, le plongement d'une variété de points singuliers dans une variété singulière à laquelle elle adhère étant lui-même défini par une application t-régulière. Si ces conditions sont satisfaites, pour une déformation assez petite de l'application, E reste continuement isotope à lui-même.

On pourra définir comme suit une application f: $R^n \to R^p$ générique à la source : f est *générique à la source*, si chacune des variétés critiques de f (critiques simples S_r, critiques exceptionnelles et surexceptionnelles) peut être définie comme image réciproques d'une sous-variété par une application t-régulière (canoniquement définie par « dérivation » à partir de f).

On entend par là, par exemple, que les variétés critiques S_r sont définies comme images réciproques des cycles de Schubert F_r par l'application dérivée $\bar{f}$, supposée t-régulière sur F_r, que les variétés exceptionnelles sont elles aussi des images réciproques de certains cycles de variétés de drapeaux etc. Il faut noter, à ce propos, qu'il y a lieu de tenir compte du phénomène signalé à la fin du chapitre précédent, à savoir que les applications dérivées ne sont pas arbitraires ce qui peut avoir pour effet un abaissement de la codimension du cycle définissant une variété exceptionnelle.

Si ces conditions sont satisfaites, toute déformation de l'application f, suffisamment petite, définira une isotopie continue de l'ensemble S des variétés critiques (simples exceptionnelles, surexceptionnelles) dans l'espace source R^n.

Considérons maintenant l'ensemble $f(S)$ des valeurs critiques; on pourrait penser qu'il résulte du fait précédent que, pour toute déformation assez petite de f, l'ensemble $f(S)$ reste continuement isotope à lui-même dans l'espace-but R^p. Cela n'est vrai que pour « presque toutes » les applications. Etant donné en effet un ensemble différentiable $E \to R^n$, et une application $f: E \to R^m$, toute f peut être approchée par une application « générique au but » g qui jouit de la propriété caractéristique suivante; pour toute déformation assez petite de g, l'ensemble $g(E)$ reste continuement isotope à lui-même. Nous admettrons ce résultat dont la démonstration paraît difficile sans une analyse préalable des singularités génériques... Dans le cas de $f(S)$, la situation est encore compliquée du fait que les singularités génériques des variétés critiques sont d'un type spécial.

Dans ces conditions, si une application f: $V^n \to M^p$ est générique à la source et au but, on peut conjecturer ce qui suit : à toute application f' assez voisine de f, on peut associer un homéomorphisme h de V^n, et un homéomorphisme j de M^p, tels que : $f'_0 h = j_0 f$. Les homéomorphismes (non uniques) h et j sont voisins de l'identité, dépendent continuement de f', et se réduisent à l'identité si f' tend vers f. Nous allons démontrer complètement ce fait dans le cas des applications de V^n dans R^1 (fonctions).

Une fonction sur V^n est générique à la source, si et seulement si elle ne présente que des points critiques quadratiques non dégénérés. Elle sera de plus *générique au but*, si les valeurs critiques correspondantes sont toutes distinctes et en nombre fini. Soient q_i les points critiques de f, $c_i = f(q_i)$ les valeurs critiques correspondantes, supposées toutes distinctes. On suppose donnée une déformation $f(t)$ de f (avec approximation sur les dérivées d'ordre $r \geqslant 2$) telle que les valeurs critiques $f(t, q_i(t))$ restent distinctes. On peut considérer cette déformation comme une application F de $V^n \times I$ dans $R^n \times I$, F appliquant (V^n, t)

dans (R, t). Dans l'espace R^2 but de F, les trajectoires des valeurs critiques $f(t, q_i(t))$ sont données, et on peut admettre qu'elles coupent transversalement les lignes $t =$ constante. Comme ces trajectoires demeurent distinctes, on peut définir un homéomorphisme $h_t(R) \to R$, tel que $h_t(q_i) = f(t, q_i(t))$; on désignera par G le système de trajectoires défini par $x \to (h_t(x), t)$ pour t variable. Chaque point critique q_i admet un voisinage fixe U_i dans V^n (U_i disjoints), tel que $q_i(t)$ reste continuement isotope à lui-même dans U_i pour t variable; soit $k(t)$ un homéomorphisme de $U = \bigcup_i U_i$ sur lui-même, tel que $k(t, q_i) = q_i(t)$, et qui se réduit à l'identité sur la frontière de U; cet homéomorphisme $k(t)$, complété par l'identité à l'extérieur de U, permet de définir sur le produit $V^n \times I$ un système de trajectoires (K), et sur chaque trajectoire de (K), la différentielle dt ne s'annule pas; désignons par k un vecteur non nul, qui, en chaque point de $V^n \times I$, est tangent à la courbe (K) passant par ce point, et est fonction continue (ainsi que ses dérivées) du point. Soit (x, t) un point de $V^n \times t$, (y, t) son image par F dans R^2; si x est (x, t) critique pour $f(t)$, la trajectoire de (x, t) qui est une $(q_i(t), t)$ se projette sur R^2 suivant une (G); sinon, considérons en (x, t) le plan tangent (qui existe nécessairement, F étant régulière sur la (G)) à l'image réciproque $F^{-1}(G)$ de la trajectoire (G) issue du point (y, t); soit k' la projection suivant la direction $t =$ constante et orthogonale de k sur ce plan. k' n'est jamais nul, parce que sa projection sur l'axe des t n'est pas nulle. L'intégration du champ de vecteurs k' donne naissance à un système de trajectoires (K') qui va remplacer le système (K) initial; mais les trajectoires (K') se projettent par F sur les trajectoires (G); elles définissent par suite un homéomorphisme $k'(t)$ de V^n sur elle-même, tel que : $f(t) \circ k'(t) = h_t \circ f$, ce qu'il fallait précisément construire.

Quelques problèmes. — 1° Démontrer le théorème précédent (stabilité des applications génériques) en toute généralité, sans avoir à passer par une description des singularités.

2° Disons qu'un ensemble différentiable $E \subset V^n$ est *algébroide*, s'il est isotope (continuement ou non) à un ensemble E' défini par un système cohérent d'idéaux de fonctions algébriques (de R^n ou de la variété algébrique V^n). Il résulte du théorème précédent que l'ensemble des variétés critiques d'une application générique dans l'espace source, et l'ensemble des valeurs critiques dans l'espace but sont algébroides car on peut approcher f par une application algébrique. Problème : Un ensemble E qui est localement algébroide l'est-il globalement? ([1])

3° On a vu que si des ensembles différentiables E, E′ sont localement continuement isotopes, ils le sont globalement; qu'advient-il de cette affirmation si on laisse tomber l'hypothèse « continuement »?

([1]) Dans tous les exemples cités au chapitre III, une singularité générique surexceptionnelle d'ordre k admet toujours une représentation algébrique locale où ne figurent que des polynômes de degré $(k + 1)$ au plus. Il y aurait lieu de démontrer si c'est là un phénomène général.

CHAPITRE V

PROPRIÉTÉS HOMOLOGIQUES DES VARIÉTÉS CRITIQUES

La formule du théorème 2 donnant la codimension générique de l'ensemble critique S_r montre que cette codimension ne dépend que de la différence $(n - p)$ des espaces source et but, le corang r étant fixé; il en résulte que toute singularité critique simple d'une application $R^n \rightarrow R^p$ donne naissance, par multiplication topologique de la source et du but par un facteur R, à une singularité simple d'une application $R^{n+1} \rightarrow R^{p+1}$, qu'on pourrait appeler la singularité « *suspendue* » de la singularité initiale. On démontrera facilement que la suspendue d'une singularité générique est encore une singularité générique; et la dimension de l'ensemble critique pour la singularité suspendue est égale à celle de l'ensemble critique de la singularité initiale, augmentée d'une unité. Ces considérations se généralisent aux singularités critiques exceptionnelles et surexceptionnelles, bien qu'ici la démonstration soit plus longue à expliciter. Bien entendu, toutes les singularités génériques des applications $R^{n+1} \rightarrow R^{p+1}$ ne sont pas des suspendues; il est aisé de voir la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi : une application f: $R^{n+1} \rightarrow R^{p+1}$, telle que $f(0) = 0$, est, en 0, une *suspendue*, si, et seulement si l'ensemble critique de dimension minimum associé à la singularité est de dimension $\geqslant 1$. Nous entendons par là, que si l'on forme au voisinage de O la suite des variétés critiques simples, exceptionnelles, surexceptionnelles, la variété de dimension la plus petite est de dimension 1; dans ces conditions on peut trouver au voisinage de V une fonction t qui est de rang maximum en tout point sur chacune des variétés critiques; ceci entraîne que les ensembles critiques définis par intersection des variétés critiques par les hypersurfaces $t =$ constante, sont, pour t variable, « continuement isotopes », ce qui montre que l'application f est suspendue d'une application g, restriction de f à l'hypersurface $t =$ constante. Il en résulte que, si une singularité d'une application $f: R^{n+1} \to R^{p+1}$ n'est pas la suspendue d'une application de R^n dans R^p, l'ensemble critique de dimension minimum de f est de dimension 0, donc se réduit à l'origine O.

Invariance par homotopie des cycles critiques.

Soient f, g deux applications d'une même variété V^n dans une variété M^p; supposons f, g *homotopes* et génériques. On peut alors trouver une application F, générique, de $V^n \times I$ dans $M^p \times I$, telle que $F(V, t)$ soit dans (M, t) et que $f = F|(V, 0)$ $g = F|(V, 1)$; on peut de plus supposer que F coïncide avec f, resp. g pour les valeurs de t voisines de 0, resp. 1. Formons, dans ces conditions, les ensembles critiques de l'application F; par exemple, l'ensemble S_r de F est une « pseudo-variété » à bord, dont le bord est constitué des ensembles critiques S_r de f et g; ces bords sont eux-mêmes des pseudo-variétés, donc des cycles mod. 2. Il peut éventuellement se produire qu'un S_r de F n'ait pas de représentant dans V, 0 et V, 1; c'est qu'alors la singularité correspondante n'est pas une suspendue, et par suite, les points singuliers correspondants sont des points isolés; les voisinages locaux de ces points dans les ensembles S_j de F pour $j < r$ sont toujours cycliques (ce sont des cônes quadratiques), de telle sorte que l'existence de ces points n'empêche pas d'affirmer que tout S_j est un cycle molulo ses bords dans V, 0 et V, 1. Ceci permet d'affirmer :

THÉORÈME 7. — *Les pseudo-variétés critiques* S_r *de corang* r *de deux applications* f, g *homotopes de* V^n *dans* M^p *définissent des cycles mod.* 2 *qui sont homologues.*

REMARQUE. — Dans certains cas, on peut substituer à l'homologie mod. 2 l'homologie à coefficients entiers : ce sera notamment le cas des cycles critiques duaux des classes caractéristiques de Pontrjagin, dans une variété orientable.

Il est visible que le résultat précédent s'étend aux variétés critiques exceptionnelles et surexceptionnelles; néanmoins, on se heurte ici à la difficulté suivante : on ne connaît pas le voisinage des points singuliers isolés de l'application F dans les ensembles critiques exceptionnels; il ne fait guère de doute, cependant, qu'ils soient tous à voisinages cycliques. La démonstration pourra être conduite explicitement dans le cas des singularités exceptionnelles de corang un pour les petites dimensions, pour lesquelles il n'y a pas ce singularités exceptionnelles de corang $\geqslant 2$, soit $p < 4$.

Supposons que l'ensemble critique S_r existe (tant pour f, g que pour F) et que, pour ces 3 applications, l'ensemble critique S_{r+1} ait une dimension générique strictement négative. Dans ces conditions, S_r est dans $V^n \times I$ une sous-variété à bord admettant pour bord les ensembles S_r de f et g. On voit donc, en ce cas, que les cycles critiques peuvent être réalisés par de vraies sous-variétés, et que ces sous-variétés sont L-équivalentes au sens de [8] (donc cobordantes).

Un cas particulier important. — *L'espace-but est un espace euclidien* R^k. Supposons donnée une application f d'une variété compacte V^n dans un espace euclidien R^k. Les classes d'homologie des ensembles critiques de cette application ne dépendent pas de l'application f, puisque toutes les applications de V^n dans R^k sont homotopes.

On peut supposer V^n plongée régulièrement dans un espace R^{k+m}, de telle façon que l'application f soit donnée par projection de R^{k+m} sur le k-plan R^k des k premières coordonnées. Dans ces conditions les ensembles critiques S_r sont les images réciproques par $\bar{f}$ des cycles de Schubert F_r de la grassmannienne G_n^{m+k-n}. Les classes d'homologie des cycles S_r peuvent donc être calculées; rappelons que :

1° La classe de cohomologie duale à S_1 dans une application de V^n dans R^p, $p < n$, est la classe de Stiefel-Whitney W^{n-p+1}.

2° La classe de cohomologie (entière) duale de S_2 dans une application $V^n \to R^{n-2k}$ est la classe de Pontrjagin P^{4k} (réduite mod 2 $(W^{2k})^2$).

A propos de la propriété 1, il est intéressant de remarquer que, pour une application g: $V^n \to R^{n+k}$, l'ensemble critique de corang à la 1 source (qui a même dimension que l'ensemble critique de corang au but 1 pour une application de V^n dans R^{n-k}) a pour classe d'homologie la classe duale à la classe $\overline{W_{k+1}}$ dans les notations de Whitney.

Corollaire. — Un *théorème d'invariance pour les classes caractéristiques.*

Soient données deux variétés V, V′ de même dimension n, dont on suppose ce qui suit : 1° V et V′ ont même type d'homotopie. 2° Il existe une variété à bord Q admettant pour bord V et V′, qui a même type d'homotopie que le produit $V \times I$ (ou encore : dont V et V′ sont des rétractes). Dans ces conditions l'application de Q dans un espace euclidien de la forme $R^k \times I$ (V étant appliqué dans R^k, O et V′ dans $R^k \times 1$) permet d'affirmer :

V et V′ ont des classes caractéristiques (de Stiefel-Whitney et Pontrjagin) qui se correspondent dans l'isomorphisme des types d'homotopie.

Ce résultat, bien entendu, n'apprend rien pour les classes de Stiefel-Whitney, dont on sait qu'elles sont déterminées par le type d'homologie de V^n; mais, le résultat est assez intéressant pour les classes de Pontrjagin. On sait en effet qu'il existe des variétés de même type d'homotopie, mais dont les classes de Pontrjagin ne se correspondent pas. (Ce sont des espaces fibrés en sphères S^3 sur S^4 comme base; cf [2].)

Classe d'homologie du cycle critique d'une application f : $V^n \rightarrow M^p$.

Soit $\overline{S_1}$ l'ensemble critique de corang au but $\geqslant 1$ d'une application f de V^n dans $M^p (p < n)$. Sur le complémentaire de $\overline{S_1}$, f est de rang maximum, et par suite l'espace des vecteurs tangents à V_n se décompose en tout point de $V^n - \overline{S_1}$ en une somme directe de deux espaces vectoriels : le noyau R^{n-p} de l'application prolongée $\dot{f}$, et un sous-espace transverse R^p, appliquée par f sur l'espace tangent des vecteurs au but isomorphiquement; il en résulte qu'on peut écrire, sur $V^n - \overline{S_1}$, la relation de multiplication entre « polynômes de Stiefel-Whitney » qui exprime que l'espace des vecteurs tangents en tout point de $V^n - \overline{S_1}$ est joint (au sens de Whitney) des deux espaces fibrés précédents; comme l'espace fibré de fibre R^p n'est autre que l'espace fibré induit de l'espace des vecteurs tangents à la variété-but par l'application, on en déduit que l'image (par injection sur $V^n - S_1$) du polynôme de Stiefel-Whitney $\Sigma W_i t^i$ de V^n est « divisible » sur $V^n - \overline{S_1}$ par le polynôme $\Sigma f^*(U_j)t^j$, image par f du polynôme de Stiefel-Whitney $\Sigma U_j t^j$ de M^p. Or, si l'on effectue formellement la division (suivant les puissances croissantes) de $\Sigma W_i t^i$ par $f^*(\Sigma U_j t^j)$, et qu'on arrête la division au terme en t^{n-p} du quotient, on obtient en général un polynôme reste, de la forme $\Sigma t^{n-p+i} c_{n-p+i}$ $1 \leqslant i \leqslant n$.

Il en résulte que toutes les classes c_{n-p+i}, $i = 1, \ldots p$, doivent avoir une image nulle dans $V^n - \overline{S_1}$; en particulier, comme $\overline{S_1}$ est de dimension $p - 1$, une seule classe de cohomologie est annulée dans l'homomorphisme d'injection

$$H^{n-p+1}(V^n) \rightarrow H^{n-p+1}(V^n - \overline{S_1}),$$

à savoir la classe duale, par la dualité de Poincaré-Veblen, au cycle fondamental de $H^{p-1}(\overline{S_1})$. On a donc le théorème :

THÉORÈME 8. — *Pour toute application f d'une variété V^n dans une variété M^p, $(n \geqslant p)$ la classe d'homologie du cycle des points critiques de corang au but 1 est duale du coefficient du terme de degré $n - p + 1$ qui figure dans le reste de la division du polynôme de Stiefel-Whitney de V^n par l'image par f^* du polynôme de Stiefel-Whithey de M^p.*

On remarquera que toutes les classes c_{n-p+i} ont des images nulles dans le complémentaire de $\overline{S_1}$; on peut interpréter ce résultat comme suit : les classes d'homologie duales aux c_{n-p+i} ont des cycles représentatifs dont le support est contenu dans $\overline{S_1}$.

Pour la détermination des ensembles critiques S_r de f de corang $r > 1$, je ne connais pas de procédé pratique. On peut signaler le procédé théorique que voici : on forme le produit $P = V^n \times M^p$, et, dans P, le graphe $G(f)$ de l'application f; P est la base d'un fibré H dont la fibre est la grassmannienne G_n^p des p-plans issus du point donné x de P; dans chaque fibre on a un cycle de Schubert $F_r(x)$ et la réunion de tous les $F_r(x)$, lorsque x décrit P forme un cycle Z; par ailleurs, si l'on associe à tout point $x \in G(f)$ le n-plan tangent à $G(f)$ en x, on définit une section canonique $G'(f)$ de H au-dessus de $G(f)$. On est ramené alors à former l'intersection des cycles Z et $G'(f)$ dans H. Projetée sur $G(f)$, elle donnera l'ensemble critique S_r. La difficulté essentielle réside ici dans la détermination de la classe d'homologie de Z, difficulté qui ne semble nullement insurmontable d'ailleurs.

Classes d'homologie des cycles critiques exceptionnels.

Étant donnée une application $f\colon V^n \to R^p$, où $p \leqslant n$, l'ensemble critique S_1 est une pseudo-variété de dimension $p - 1$; sur S_1 on a une variété critique exceptionnelle X_1, de corang à la source égal à 1. On se propose de déterminer la classe d'homologie mod 2 de X_1 dans V^n, classe indépendante de (f), comme on l'a vu plus haut.

Traitons d'abord le cas $p = 2$, relativement plus simple; on sait qu'alors la variété critique S_1 est une courbe, dont l'image dans le plan R^2 (contour apparent de la variété) présente un certain nombre de points de rebroussements ordinaires, images des points critiques exceptionnels.

Soit q le nombre de ces points. On supposera la variété compacte de dimension n, et plongée dans un espace euclidien $R^2 \times R^N$, l'application f étant la projection sur le plan R^2 des deux premières coordonnées (x, y).

Soit F_1 le cycle de Schubert de G_n^{N+2} formé des n-plans qui se projettent sur R^2 suivant un R^1; en associant à tout élément y de F_1 sa projection dans R^2, on définit une application canonique G de F_1 dans la grassmannienne G_1^1 des droites *non orientées* du plan; comme S_1 est l'image réciproque de l'intersection par F_1 de l'image de V^n par l'application dérivée, on peut considérer que S_1 est plongée dans F_1. Or S_1, étant une réunion de cercles, peut être muni d'une orientation, d'ailleurs arbitraire. Associons à chaque point du contour apparent $F(S_1)$ sa tangente orientée; on définit ainsi une application h de S_1 dans la grassmannienne $\hat{G}_1^1$ des droites *orientées* du plan; cette application est continue en tout point de S_1, sauf aux q points critiques exceptionnels, où elle est discontinue (elle passe de la droite orientée à la droite orientée en sens inverse). Comme toute application continue d'un cercle dans $\hat{G}_1^1$ a, par identification, un degré pair sur G_1^1, on en déduit que le degré de l'application $h : S_1 \to G_1^1$ est de degré congru à q modulo 2.

Or il est aisé de calculer le degré de l'application h; il suffit (calculant mod 2) de compter le nombre des points où le contour apparent $F(S_1)$ admet une tangente parallèle à une direction donnée, par exemple la direction, $y = 0$. Il revient alors au même de compter le nombre des points critiques de la fonction y sur V^n, nombre égal mod 2 à la caractéristique d'Euler $\chi(V^n)$ (ou encore, au nombre de Stiefel-Whitney $W_n(V^n)$).

Nous avons par suite démontré :

Théorème 9. — *Le nombre des points de rebroussements présentés génériquement par le contour apparent d'une variété* V *compacte en projection sur un plan de coordonnées est congru mod* 2 *à la caractéristique d'Euler de* V.

Nous avons utilisé, en passant, la propriété suivante, peut-être connue? *Si un système de courbes fermées dans le plan, ne présente comme singularités que des self-intersections et des rebroussements, sa classe (nombre des tangentes issues d'un point donné) est congrue mod* 2 *au nombre des rebroussements.* Forme réelle assez curieuse du théorème de Plücker.

Revenons maintenant au cas général d'une application f de V^n dans R^p, supposée obtenue par projection de V^n plongée dans un R^{p+N}. L'ensemble critique S_1 sera, ici encore, considéré comme plongé dans le cycle de Schubert F_1 (supposé réduit à ses seuls points ordinaires).

On supposera pour simplifier que S_1 n'a pas de points de corang > 1, de sorte que c'est une vraie sous-variété de dimension $p - 1$, duale à la classe de Stiefel-Whitney W^{n-p+1}. Ici encore, on a une application canonique de F_1 sur la grassmannienne G_{p-1}^1 des $(p-1)$-plans non orientés, c'est-à-dire, espace projectif $PR(p-1)$; soit $h : S_1 \to G_{p-1}^1$, l'application induite sur la variété critique, considérée comme plongée dans F_1. On va déterminer l'obstruction au relèvement de l'application h en une application h' de S_1 dans la grassmannienne de dimension $\hat{G}_{p-1}^1$ des $(p-1)$-plans orientés. Soit Z_1 dans S_1 le cycle de dimension $p-2$ dual à la classe W_1 de la structure tangente à la variété S_1 : ceci veut dire que le complémentaire $S_1 - Z_1$ est une $(p-1)$-variété orientable. Soit par ailleurs X_1 la variété critique exceptionnelle de S_1; sur $S_1 - X_1$, le plongement dans R^N est de rang maximum; il en résulte que sur le complémentaire $S_1 - X_1 - Z_1$, on peut associer à tout point de l'image $f(S_1)$ son $(p-1)$-plan tangent *orienté*: donc, sur $S_1 - X_1 - Z_1$, l'application h est projection d'une application h' dans la grassmannienne des $(p-1)$ plans orientés; sur $X_1 + Z_1$, l'application h' se prolonge en « sautant d'un feuillet sur l'autre », c'est-à-dire en renversant l'orientation du $(p-1)$ plan lorsqu'on traverse le $(p-2)$-cycle $X_1 + Z_1$. Il en résulte que l'obstruction à l'existence d'une application h' est donnée par la classe de cohomologie duale du cycle $X_1 + Z_1$, soit $W_1(S) + D$, en désignant par D la classe duale au cycle critique exceptionnel X_1. Or, on peut calculer aisément cette obstruction: soit u la classe caractéristique du revêtement à deux feuillets $\hat{G}^1_{P_1} \to G^1_{P_1}$; l'obstruction au relèvement de l'application h dans $\hat{G}^1_{p-1}$ est $h^*(u) = W_1(S_1) + D$. Or u est dans $G^1_{p-1} = PR(p-1)$ la classe duale à l'hyperplan linéaire $PR(p-2)$; on est donc ramené à considérer dans G^1_{p-1} l'ensemble des $(p-1)$-plans contenant une direction fixe (A); soit (J), dans la grassmannienne initiale G^N_n, l'ensemble des n-plans qui se projettent sur R^p suivant un $(p-1)$-plan contenant (A); si H_A désigne, dans R^p, l'hyperplan orthogonal à (A), J peut être défini comme l'ensemble des n-plans de G^N_n dont la projection sur H_A est un $(p-2)$-plan. J est par suite un cycle de Schubert (F_1) de G^N_n, et sa classe de cohomologie duale est la classe de Stiefel-Whitney W_{n-p+2}. Soit alors (T) un voisinage tubulaire de (S_1) dans V^n,

$$\varphi^* : H^{p-1-k}(S) \simeq H^{n-k}(V^n)$$

l'isomorphisme (φ^*) attaché (définition et notation de [7]); le cycle $J \cap S_1$ admet pour classe duale dans (S_1) l'obstruction $h^*(u)$, et pour duale dans T la classe W_{n-p+2}; donc

$$W_{n-p+2} = \varphi^*(h(u)) = \varphi^*(W_1(S_1) + D);$$

soit $i: S_1 \to V^n$ l'injection de S_1 dans V^n, $W^\vee_1$ la classe de Stiefel-Whitney de dimension 1 de l'espace fibré des vecteurs normaux à S_1 dans V^n. La formule de dualité de Whitney donne: $W_1(S_1) = i^*(W_1) + W^\vee_1$. Or les formules (8) et (32) de [7] donnent respectivement: $\varphi^*(i^*(W_1)) = W_1 . \varphi^*(1) = W_1 . W_{n-p+1}$ et $\varphi^*(W_1) = Sq^1\varphi^*(1) = Sq^1 W_{n-p+1} = W_1 . W_{n-p+1} + (n-p+2)W_{n-p+2}$, d'après la formule de Wu [12].

Reste finalement : $\varphi^*(D) = (n - p + 1)W_{n+p+2}$. Donc :

THÉORÈME 10. — *La classe d'homologie mod 2 du cycle critique exceptionnel* X_1 *est nulle dans* S_1, *si la codimension* $(n - p + 1)$ *de* S_1 *dans* V^n *est paire; si* $(n - p + 1)$ *est impaire, la classe* X_1 *est duale de la classe de Stiefel-Whitney* W_{n-p+2} *dans* V^n.

Remarque. — Si les variétés critiques S_1 et X_1 présentent des singularités de corang > 1, la démonstration précédente est encore valable, en considérant les homologies relatives de S_1 et X_1 modulo les ensembles singuliers, ce qui ne change en rien la classe fondamentale de X_1.

La nullité mod 2 du cycle X_1 dans le cas où la codimension $(n - p + 1)$ est paire se démontre d'ailleurs x facilement grâce à la notion d'*indice transverse* d'une singularité de corang 1; on sait que lorsqu'on franchit le cycle X_1 dans S_1 l'indice transverse de la singularité varie d'une unité; il faut d'ailleurs remarquer que, X_1 n'étant pas en général à voisinage orientable dans S_1, il n'y a pas lieu de distinguer, si la codimension est c, l'indice q de l'indice $c - q$. Or, si c est paire, même après identification des indices complémentaires, tout changement d'une unité de l'indice conduit à un changement de classe pour l'indice (un indice ne pouvant être transformé en son complémentaire). Si l'on considère par suite un lacet L dans S_1, le nombre total de changements d'indices, donc de points critiques exceptionnels sur L est nécessairement pair, puisque l'indice final doit coïncider avec l'indice initial ou son complémentaire. D'où résulte que X est homologue à 0 mod 2 dans S_1. Si la codimension c est impaire $c = 2k + 1$, les deux indices $(k, k + 1)$ et $(k + 1, k)$ sont à identifier, de sorte que le nombre des points exceptionnels sur L peut être impair. On peut affirmer de plus :

Si la classe de Stiefel-Whitney W_{n-p+2} *d'une variété* V^n *est non nulle, et si* $n - p$ *est paire, la variété critique d'une application de* V^n *dans* R^p *présente toujours des points d'indice* $(n - p)/2$.

Car le changement d'indice de $(n - p)/2$ à son complémentaire doit se présenter au moins une fois sur tout lacet L dont le nombre d'intersection avec X dans S_1 est égal à 1.

On pourrait pousser l'étude plus loin, et étudier notamment l'homologie des cycles critiques surexceptionnels; signalons en passant ce résultat :

THÉORÈME 11. — *Le nombre des points critiques surexceptionnels présentés génériquement par une application d'une variété* V^3 *compacte de dimension* 3 *dans l'espace* R^3 *est pair.*

Ceci résulte immédiatement du fait que toute variété V^3 de dimension 3 est le bord d'une variété à bord Q^4 de dimension 4; les points critiques surexceptionnels dans V^3 sont alors le bord d'une courbe critique surexceptionnelle pour un prolongement de f à Q^4.

Il ne fait guère de doute, en conclusion, que l'étude des propriétés locales ou globales des singularités des applications différentiables ouvre à la recherche un domaine d'une extrême richesse; à tel point qu'il sera peut-être nécessaire d'attendre quelque peu pour y distinguer les problèmes et les méthodes qui peuvent être intéressants pour les disciplines voisines, Géométrie Différentielle et Géométrie Algébrique notamment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. CHERN, On the multiplication of the characteristic ring of a sphere-bundle, *Ann of Math.*, 49, 1948, p. 2.

[2] A. DOLD, Uber fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen, *Math. Zeitschr. Bd.* 62, S. 111-136 (1955).

[3] C. EHRESMAN, Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *Journal de Math.*, 104 (1939), pp. 362-372.

[4] M. MORSE, Functional Topology and abstract variational Theory Memorial, Fascicule 10.

[5] F. ROGER, Sur les variétés critiques des systèmes de fonctions de plusieurs variables... *Comptes Rendus* 1939, p. 29.

[6] A. SARD, The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48, N° 12 pp. 883-890.

[7] R. THOM, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, *Annales Ecole Norm. Sup.*, 69 (3), 1952, pp. 109-181.

[8] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Commentarii Math. Helv.*, 28 (1), 1954 pp. 17-86.

[9] H. WHITNEY, Analytic Extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1), 1934, pp. 63-89.

[10] H. WHITNEY, Topology of differentiable Manifolds, *Michigan Lectures*, pp. 101-141.

[11] W. T. WU, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, *Act. Sci. et Ind.*, n° 1183.

[12] W. T. WU, On squares in Grassmannian Manifolds, *Acta Scientia Sinica*, Vol II, pp. 91-115.