ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNE-MARIE CHOLLET

Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques dans des domaines strictement pseudo-convexes

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 1 (1976), p. 51-80

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_51_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 1 (1976), 51-80

ENSEMBLES DE ZÉROS A LA FRONTIÈRE DE FONCTIONS ANALYTIQUES DANS DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

par **Anne-Marie CHOLLET**

Soit D le disque unité du plan complexe et ∂D sa frontière, L. Carleson [1] a caractérisé les sous-ensembles fermés E de ∂D qui sont les ensembles de zéros d'une fonction de $A^m(D)$, la classe des fonctions analytiques dans D, continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m dans $\bar{D}$. B.A. Taylor et D.L. Williams [12], en adaptant la méthode de L. Carleson, et B.I. Korenbljum [10], avec une construction différente, ont montré que la condition donnée par L. Carleson était nécessaire et suffisante pour que s'annule sur E une fonction de $A^\infty(D)$ ainsi que toutes ses dérivées.

On s'intéresse ici aux ensembles de zéros à la frontière de fonctions de $A^\infty(D)$ lorsque D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$. On établit une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé E de ∂D soit l'ensemble des zéros d'une fonction F de $A^\infty(D)$ et aussi l'ensemble des zéros communs à F et à toutes ses dérivées. Elle redonne le résultat de L. Carleson lorsque D est le disque unité du plan complexe. Dans le cas général, elle impose à E d'être plus ou moins mince selon les directions. Elle s'apparente donc à une condition suffisante donnée par A.M. Davie et B.K. Øksendal [6] dans leur étude des ensembles pics pour A(D), la classe des fonctions analytiques dans D, continues dans $\bar{D}$. Pour cette classe, les notions d'ensembles pics et de zéros à la frontière sont équivalentes, ce qui n'est plus vrai pour $A^m(D)$, $m \geqslant 1$.

La première partie de ce travail est consacrée à l'amélioration d'un lemme de A.M. Davie et B.K. Øksendal à l'aide de techniques de G. Henkin. La construction faite dans la deuxième partie diffère de la leur ; au lieu de recouvrir l'ensemble E on utilise un recouvrement de Whitney du complémentaire de E par des boules associées à une pseudo-distance naturelle sur ∂D. On indique dans la troisième partie comment la même méthode permet de construire des fonctions appartenant à des classes plus larges que $A^\infty(D)$, par exemple à $A(D)$, ou à des classes moins larges, celles que l'on obtient en imposant des conditions de croissance aux dérivées successives des fonctions. On généralise pour ces classes des résultats précédemment obtenus [3] dans le disque.

Ces résultats, dans le cas de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, ont fait l'objet d'une précédente note [4].

I

1. D est un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, de classe C^2, strictement pseudo-convexe. D est donc défini par la donnée d'une fonction ρ, à valeurs réelles, de classe C^2 dans un voisinage de $\overline{D}$, l'adhérence de D, telle que

(1.1) $\quad D = \{z\ ;\ \rho(z) < 0\}$,

(1.2) $\quad \operatorname{grad} \rho \neq 0$ sur ∂D,

(1.3) $\quad \rho$ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D, c'est-à-dire

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}(z)\, w_j\, \bar{w}_k > 0\ ,$$

pour tout $w \neq 0$ et pour tout z dans un voisinage de ∂D, la frontière de D.

On peut remarquer que, dans le cas $n = 1$, la condition (1.3) n'impose aucune contrainte supplémentaire à un domaine borné de classe C^2, c'est-à-dire, à un domaine borné défini par une fonction ρ vérifiant les propriétés (1.1) et (1.2).

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, on note :

$\mathcal{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans Ω,

$L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions f de carré intégrable dans Ω pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur $\mathbf{C}^n$, muni de la norme définie par

$$\| f \|_2^2 = \int_\Omega |f(z)|^2\, d\lambda(z)\, .$$

$\mathcal{H}^2(\Omega)$, le sous-espace de $L^2(\Omega)$ constitué des fonctions holomorphes dans Ω,

$\mathcal{C}(\partial D\,,L^2(\Omega))$ [resp. $\mathcal{C}(\partial D\,,\mathcal{H}(\Omega))$], l'espace des fonctions continues sur ∂D, à valeurs dans $L^2(\Omega)$ [resp. $\mathcal{H}(\Omega)$].

On définit de même $\mathcal{C}(\partial D\,,L^2_{0,1}(\Omega))$ et $\mathcal{C}(\partial D\,,\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega))$. $L^2_{0,1}(\Omega)$ désigne l'espace des $(0\,,1)$ formes f à coefficients dans $L^2(\Omega)$ et $H^2_{0,1}(\Omega)$ le sous-espace de $L^2_{0,1}(\Omega)$ des $(0\,,1)$ formes telles que $\bar\partial f = 0$.

∂ et $\bar\partial$ sont les opérateurs différentiels qui associent à une forme f du type $(p\,,q)$

$$f = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar z^J\,,$$

les formes,

$$\partial f = \sum_{I,J} \partial f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar z^J\,,$$

$$\bar\partial f = \sum_{I,J} \bar\partial f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar z^J\,.$$

I et J désignent ici des multi-indices.

Pour toute forme f de $L^2_{0,1}(\Omega)$, on a $\|f\|_2^2 = \sum_{|J|=1} \|f_J\|_2^2$. - utilisera également les notations $\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty(\Omega))$ et $\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty_{0,1}(\Omega))$.

2. Lemme. — *Si f appartient à $\mathcal{C}(\partial D\,,\mathcal{H}^2(\Omega))$ et si on pose, pour tout ζ de ∂D et tout z de Ω, $\tilde f(\zeta\,,z) = f(\zeta)(z)$, alors $\tilde f$ appartient à $\mathcal{C}(\partial D \times \Omega)$.*

On a en effet une injection continue de $\mathcal{H}^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ et $C(\partial D\,,C(\Omega))$ s'identifie à $C(\partial D \times \Omega)$.

3. Lemme. — *Si f appartient à $\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty(\Omega))$, l'application $\partial_z f$ définie sur ∂D par $\partial_z f(\zeta) = \partial_z \tilde f(\zeta\,,z)$ appartient à $\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty_{1,0}(\Omega))$. De même $\bar\partial_z f$ appartient à $\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty_{0,1}(\Omega))$.*

$\mathcal{C}(\partial D\,,C^\infty(\Omega))$ s'identifie en effet à l'espace des fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\partial D \times \Omega)$ dont les dérivées partielles de tous ordres par rapport aux coordonnées réelles sous-jacentes de Ω existent et sont continues.

4. Dans la suite, on emploiera le même symbole pour représenter l'élément de f de $\mathcal{C}(\partial D, L^2(\Omega))$ et la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\partial D \times \Omega$. On fera le même abus de notation pour les éléments de $\mathcal{C}(\partial D, L^2_{0,1}(\Omega))$.

5. LEMME. — *Il existe un opérateur linéaire borné* E *de* $\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega)$ *dans l'orthogonal de* $\mathcal{H}^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *tel que, si* f *appartient à* $\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega)$, *l'on ait* $\bar{\partial} E f = f$.

Ce lemme [7], est un corollaire des estimations L^2 de L. Hormander pour l'opérateur $\bar{\partial}$.

6. Pour tout réel positif δ, on note $D_\delta = \{z \,;\, \rho(z) < \delta\}$.

7. PROPOSITION. — *Il existe des constantes* M, m *et* δ *strictement positives et une fonction* G *telle que :*

a) G *appartient à* $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_\delta))$

b) *Pour tout* (ζ, z) *de* $\partial D \times \bar{D}$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \leqslant -m\,|\zeta - z|^2$$

c) *Pour tout* (ζ, z) *de* $\partial D \times \partial D$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \geqslant -M\,|\zeta - z|^2$$

d) *Pour tout* ζ *de* ∂D

$$\operatorname{grad}_z [\operatorname{Re} G(\zeta, \zeta)] = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \rho(\zeta).$$

Remarque. — Lorsque D est la boule unité de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, on a

$$\rho(z) = |z|^2 - 1$$

et la fonction G définie par $G(\zeta, z) = \langle \bar{\zeta}, z \rangle - 1$ vérifie la proposition.

($\langle \bar{\zeta}, z \rangle$ désigne le produit hermitien sur $\mathbf{C}^n$ de ζ et z).

La démonstration nécessite quelques étapes.

1ère étape. — On se propose d'établir le résultat suivant :

Il existe des constantes M_1, m_1, δ_1 et ϵ_1, strictement positives, et il existe une fonction F qui vérifie les propriétés P_1 à P_4,

$P_1(\delta_1)$ F appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_1}))$,

$P_2(\epsilon_1, m_1)$ quel que soit (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$ tel que $|\zeta - z| < \epsilon_1$,

$$\operatorname{Re} F(\zeta, z) \leqslant - m_1 |\zeta - z|^2,$$

$P_3(\epsilon_1, M_1)$ quel que soit (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$ tel que $|\zeta - z| < \epsilon_1$,

$$\operatorname{Re} F(\zeta, z) \geqslant - M_1 |\zeta - z|^2,$$

P_4 pour tout ζ de ∂D,

$$\operatorname{grad}_z [\operatorname{Re} F(\zeta, \zeta)] = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \rho(\zeta).$$

On pose

$$F(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(\zeta) \cdot (z_i - \zeta_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial z_i \partial z_j}(z_i - \zeta_i)(z_j - \zeta_j). \tag{7.1}$$

On note

$$\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial z_i}, \quad \rho_{ij} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial z_j}, \quad \rho_{i,\bar{j}} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Soit ζ un point de ∂D, le développement de Taylor de ρ en ζ s'écrit

$$\rho(z) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\zeta) \cdot (z_i - \zeta_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,j}(\xi) \cdot (z_i - \zeta_i)(z_j - \zeta_j) \right] +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,\bar{j}}(\xi) \cdot (z_i - \zeta_i)(\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j) \tag{7.2}$$

où ξ est un point du segment joignant z à ζ.

Soit $V_\delta = \{z \,;\, |\rho(z)| < \delta\}$.

Puisque ρ est strictement plurisousharmonique et de classe C^2 dans un voisinage de ∂D, il existe δ_1 et il existe m tels que, pour tout ξ dans V_{δ_1} et tout ω dans $\mathbf{C}^n$, on ait

$$\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{i,\bar{j}}(\xi)\cdot \omega_i \bar{\omega}_j \geqslant m\,|\,\omega\,|^2 .$$

La régularité de ρ implique également qu'il existe ϵ_1 tel que, pour tout ξ et tout z dans V_{δ_1} tels que $|\,\xi - z\,| < \epsilon_1$, on ait

$$|\,\rho_{i,j}(\xi) - \rho_{i,j}(z)\,| \leqslant \frac{m}{2n} \cdot$$

De là, pour tout $(\zeta\,, z)$ de $\partial D \times D_{\delta_1}$ tel que $|\,\zeta - z\,| < \epsilon_1$, on a

$$\rho(z) - 2\,\mathrm{Re}\,F(\zeta\,, z) \geqslant \frac{m}{2}\,|\,\zeta - z\,|^2 \;; \tag{7.3}$$

de même, d'après (7.1) et (7.2), il existe une constante M telle que, si $(\zeta\,, z) \in \partial D \times D_{\delta_1}$ on ait

$$\rho(z) - 2\,\mathrm{Re}\,F(\zeta\,, z) \leqslant M\,|\,\zeta - z\,|^2 . \tag{7.4}$$

Il existe donc des constantes M_1, m_1, ϵ_1 et δ_1 strictement positives, telles que F vérifie $P_2(\epsilon_1\,, m_1)$ et $P_3(\epsilon_1\,, M_1)$. $P_1(\delta_1)$ est une conséquence de la définition de F et de la régularité de ρ et P_4 se déduit de (7.3).

2ème étape. – On va maintenant montrer qu'il existe des constantes M_2, m_2, δ_2 et ϵ_2, strictement positives, et une fonction H qui vérifie les propriétés $P_1(\delta_2)$, $P_2(\epsilon_2\,, m_2)$, $P_3(\epsilon_2\,, M_2)$, P_4 et aussi la propriété P_5 ainsi définie :

P_5 : H ne s'annule dans $\partial D \times \overline{D}$ qu'aux points $(\zeta\,, z)$ tels que $\zeta = z$. Ceci sera réalisé en imposant à δ_2 et ϵ_2 des contraintes et, dans un premier temps, $0 < \delta_2 < \delta_1$, $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ et $\delta_2 < \dfrac{m\epsilon_2^2}{8}$. Ainsi, d'après (7.3), on a, pour tout $(\zeta\,, z)$ de $\partial D \times D_{\delta_2}$ tel que $\dfrac{\epsilon_2}{2} < |\,\zeta - z\,| < \epsilon_2$,

$$2\,\mathrm{Re}\,F(\zeta\,, z) < \delta_2 - \frac{m\epsilon_2^2}{8} < 0. \tag{7.5}$$

Soit $\chi(t)$ une fonction de variable réelle de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^+$ telle que

$$\chi(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \epsilon_2/2$$

$$\chi(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \geqslant 2\epsilon_2/3.$$

On pose $K_{\epsilon,\delta} = \{(\zeta, z) \in \partial D \times D_\delta \ ; \ |\zeta - z| < \epsilon\}$ et on définit dans $\partial D \times D_{\delta_2}$

$$B(\zeta, z) = \begin{cases} \bar{\partial}_z \left[\dfrac{\operatorname{Log} F(\zeta, z)}{(F(\zeta, z))^2} \chi(|\zeta - z|)\right] & \text{sur} \quad K_{\epsilon_2, \delta_2} \\ 0 \quad \text{ailleurs.} & \end{cases}$$

D'après (7.5), $\operatorname{Re} F(\zeta, z)$ est négative sur $K_{\epsilon_2,\delta_2} \backslash K_{\epsilon_2/2,\delta_2}$; donc $\operatorname{Log} F(\zeta, z)$ admet une détermination sur cet ensemble.

D'après le lemme 3, B appartient à $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty_{0,1}(D_{\delta_2}))$, donc à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}^2_{0,1}(D_{\delta_2}))$ car $\bar{\partial}_z B = 0$.

On peut donc, d'après le lemme 5, résoudre $\bar{\partial}_z C = B$, avec C appartenant à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$, puisque l'opérateur E intervenant dans le lemme 5 est un opérateur linéaire borné.

On a, de plus, sur $K_{\epsilon_2/2,\delta_2} \cup \complement K_{\epsilon_2,\delta_2}$, $\bar{\partial}_z C = 0$; donc C appartient à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$ et est holomorphe en z dans

$$K_{\epsilon_2,\delta_2} \cup \complement K_{2\epsilon_2/3,\delta_2}.$$

Ainsi, si on pose pour (ζ, z) dans K_{ϵ_2,δ_2},

$$\varphi(\zeta, z) = C(\zeta, z) - \frac{\operatorname{Log} F(\zeta, z)}{[F(\zeta, z)]^2} \chi(|\zeta - z|),$$

φ appartient à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$ et est holomorphe en z dans K_{ϵ_2,δ_2}.

Sur $K_{\epsilon_2,\delta_2} \backslash K_{2\epsilon_2/3,\delta_2}$, on a

$$\varphi = C - \frac{\operatorname{Log} F}{F^2},$$

donc $F = \exp F^2(C - \varphi)$.

On définit dans $\partial D \times D_{\delta_2}$ une fonction H par

$$H = \begin{cases} F \exp F^2 \varphi & \text{sur} \quad K_{\epsilon_2,\delta_2} \\ \exp F^2 C & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{7.6}$$

Ces deux définitions coïncident sur $K_{\epsilon_2,\delta_2}\backslash K_{2\epsilon_2/3,\delta_2}$. H appartient donc à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_2}))$; H n'a pas de zéros sur $\complement K_{\epsilon_2,\delta_2}$ et ne s'annule sur K_{ϵ_2,δ_2} qu'aux points où F s'annule. Comme, d'après $P_2(\epsilon_1, m_1)$ et (7.1), sur $K_{\epsilon_2,\delta_2} \cap (\partial D \times \overline{D})$ la fonction F s'annule seulement aux points (ζ, z) tels que $\zeta = z$, la propriété P_5 est établie pour H.

Il reste à prouver que, pour un choix convenable de constantes, H vérifie les propriétés P_2 à P_4.

Pour cela, il suffit d'établir le résultat suivant :

quitte à réduire ϵ_2 et δ_2, il existe une constante m_0 telle que, l'on ait, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2,δ_2},

$$|\operatorname{Re} H(\zeta, z) - \operatorname{Re} F(\zeta, z)| \leqslant m_0 |\zeta - z|^3. \tag{7.7}$$

En effet, puisque ρ est de classe C^2 au voisinage de $\overline{D}$ et que φ, d'après le lemme 2, est continue sur K_{ϵ_2,δ_2} quitte à réduire ϵ_2 et δ_2, il existe une constante $M_0 > 0$, telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2,δ_2}, on ait

$$|F(\zeta, z)| \leqslant M_0 |\zeta - z|,$$

$$|\varphi(\zeta, z)| \leqslant M_0,$$

et donc, d'après la définition (7.6) de H, il existe m_0 telle que l'on ait

$$|H(\zeta, z) - F(\zeta, z)| \leqslant m_0 |\zeta - z|^3, \quad \text{sur} \quad K_{\epsilon_2,\delta_2}, \tag{7.8}$$

ce qui établit (7.7).

De là on obtient, puisque F vérifie $P_2(\epsilon_1, m_1)$ et $P_3(\epsilon_1, M_1)$, qu'il existe des constantes strictement positives m_2 et M_2 telles que H vérifie $P_2(\epsilon_2, m_2)$ et $P_3(\epsilon_2, M_2)$.

D'après (7.7), puisque F vérifie la condition P_4, H la vérifie également.

Remarque. – On prouve à l'aide de (7.7) et (7.3) que, quitte à réduire à nouveau ϵ_2 et δ_2, il existe une constante m_0 telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2,δ_2}, on ait,

$$2 \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leqslant \rho(z) - m_0 |\zeta - z|^2. \tag{7.9}$$

Dans la suite ϵ_2 et δ_2 seront tels que cette propriété soit vérifiée.

$3^{ème}$ *étape*. — On va établir qu'il existe des constantes ϵ_3, δ_3, m_3, M_3 strictement positives et une fonction G vérifiant les propriétés $P_1(\delta_3)$, $P_2(\epsilon_3, m_3)$, $P_3(\epsilon_3, M_3)$ et P_4, et telle que, de plus, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \overline{D}$, on ait

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0 \quad \text{si} \quad \zeta \neq z \tag{7.10}$$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) = 0 \quad \text{si} \quad \zeta = z. \tag{7.11}$$

Ceci achèvera la démonstration de la proposition 7, car la continuité de $\dfrac{\operatorname{Re} G(\zeta, z)}{|\zeta - z|^2}$ sur $\{(\zeta, z) \in \partial D \times \overline{D} \; ; \; |\zeta - z| \geqslant \epsilon_3\}$ permettra alors, puisque l'on a (7.10) et (7.11), de conclure qu'il existe des constantes m et M, strictement positives, telles que

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \leqslant -m\,|\zeta - z|^2 \quad \text{si} \quad (\zeta, z) \in \partial D \times \overline{D}$$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \geqslant -M\,|\zeta - z|^2 \quad \text{si} \quad (\zeta, z) \in \partial D \times \partial D.$$

On choisit ϵ_3 tel que $0 < \epsilon_3 < \epsilon_2$ et on pose

$$3k = \inf\{|H(\zeta, z)| \; ; \; (\zeta, z) \in \partial D \times \overline{D}, |\zeta - z| \geqslant \epsilon_3\},$$

k est différent de zéro puisque H vérifie P_5.

Si l'on impose à δ_3 de vérifier

$$0 < \delta_3 < \delta_2 \quad \text{et} \quad \delta_3 < k,$$

on a, d'après (7.9), sur K_{ϵ_3, δ_3}

$$\operatorname{Re} H(\zeta, z) < k,$$

donc,

$$H(\zeta, z) \neq k.$$

Ainsi, la fonction G définie sur $\partial D \times D_{\delta_3}$ par

$$G(\zeta, z) = \frac{H(\zeta, z)}{1 - \dfrac{1}{k} H(\zeta, z)} \tag{7.12}$$

appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_3}))$.

On étudie le signe de $\operatorname{Re} G(\zeta, z)$ selon les valeurs de (ζ, z).

Si $(\zeta, z) \in \partial D \times \overline{D}$ et $|\zeta - z| < \epsilon_3$, $\zeta \neq z$, on a, puisque H vérifie $P_2(\epsilon_2, M_2)$, $\operatorname{Re} H(\zeta, z) < 0$, donc $\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0$.

Si $(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}$ et $|\zeta - z| \geqslant \epsilon_3$, alors, par définition de k, on a $|H(\zeta, z)| \geqslant 3k$ et, d'après (7.12), $\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0$.

Ceci établit (7.10) ; par ailleurs (7.11) se déduit de (7.12) puisque H vérifie P_5.

On va maintenant imposer à ϵ_3 et δ_3 des contraintes suffisantes pour que, pour un bon choix de M_3 et m_3, $\mathcal{H}$ vérifie $P_2(\epsilon_3, m_3)$ et $P_3(\epsilon_3, M_3)$. En particulier, on réduira ϵ_3 et δ_3 pour qu'il existe C_1 et C_2 tels que, sur K_{ϵ_3, δ_3}, on ait

$$|H(\zeta, z)| \leqslant C_1 |\zeta - z| \tag{7.13}$$

et

$$\left| G(\zeta, z) - H(\zeta, z) \left[1 + \frac{1}{k} H(\zeta, z) \right] \right| \leqslant C_2 |\zeta - z|^3. \tag{7.14}$$

Ceci implique, d'une part,

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) + \frac{1}{k} [\operatorname{Im} H(\zeta, z)]^2 \geqslant - C_2 |\zeta - z|^3 \tag{7.15}$$

et d'autre part,

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) - \frac{1}{k} [\operatorname{Re} H(\zeta, z)]^2 \leqslant C_2 |\zeta - z|^3. \tag{7.16}$$

On obtient de là, quitte à réduire à nouveau ϵ_3 et δ_3, qu'il existe une constante $C_3 > 0$, telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_3, δ_3}, on ait, d'après (7.15),

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) \geqslant - C_3 |\zeta - z|^2,$$

et, d'après (7.16),

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leqslant C_3 |\zeta - z|^3.$$

De là, puisque H vérifie $P_2(\epsilon_2, m_2)$, $P_3(\epsilon_2, M_2)$ et P_4, il existe ϵ_3, M_3 et m_3 telles que G vérifie $P_2(\epsilon_3, m_3)$, $P_3(\epsilon_3, M_3)$ et P_4.

Ceci achève la démonstration de la proposition 7.

8. On représente par le même symbole z le vecteur de $\mathbf{C}^n$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, et le vecteur de $\mathbf{R}^{2n}$, $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, si $z_k = x_k + i y_k$, $k = 1, \ldots, n$.

On pose

$$\langle z , z' \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i z_i' \tag{8.1}$$

$$(z , z') = \sum_{i=1}^{n} (x_i x_i' + y_i y_i') . \tag{8.2}$$

On a alors

$$(z , z') = \operatorname{Re} \langle z , \overline{z}' \rangle = \operatorname{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z}_i' \Big) .$$

En tout point ζ de ∂D on note ν_ζ le vecteur unitaire de la normale en ζ orientée vers l'extérieur et T_ζ l'espace tangent réel en ζ.

Si on désigne par N_ζ le sous-espace vectoriel complexe engendré par ν_ζ et par L_ζ le sous-espace vectoriel réel engendré par $(i\nu_\zeta)$, on a la décomposition orthogonale complexe

$$\mathbf{C}^n = N_\zeta \oplus P_\zeta$$

et la décomposition orthogonale réelle

$$T_\zeta = L_\zeta \oplus P_\zeta .$$

On notera Π_{N_ζ} la projection orthogonale complexe sur N_ζ et Π_{L_ζ} la projection orthogonale réelle sur L_ζ.

9. COROLLAIRE. – *Il existe des constantes* A_1 *et* A_2, *strictement positives, telles que, pour tout* (ζ , z) *de* $\partial D \times \partial D$ *on ait*

$$| G(\zeta , z) | \leqslant A_1 \, | \zeta - z |^2 + A_2 \, | \Pi_{L_\zeta}(\zeta - z) | .$$

Preuve. – On a

$$| G(\zeta , z) | \leqslant - \operatorname{Re} G(\zeta , z) + | \operatorname{Im} G(\zeta , z) | .$$

On utilise (a) et (c) de la proposition 7 ainsi qu'un développement de Taylor de $\operatorname{Im} G(\zeta , z)$, par rapport à z, au point $z = \zeta$. De là, il existe K tel que, pour tout (ζ , z) de $\partial D \times \partial D$, on ait

$$| G(\zeta , z) | \leqslant K \, | \zeta - z |^2 + | (\operatorname{grad}_z \operatorname{Im} G(\zeta , \zeta), z - \zeta) | .$$

La fonction G vérifie P_4 et est holomorphe en z ; on a donc

$$\frac{\partial}{\partial z} G(\zeta , \zeta) = \frac{\partial}{\partial z} \rho(\zeta) . \tag{9.1}$$

De là, on conclut que $\operatorname{grad}_z \operatorname{Im} G(\zeta , \zeta)$ est porté par $i\nu_\zeta$ et vérifie

$$|\operatorname{grad}_z \operatorname{Im} G(\zeta , \zeta)| = \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \rho(\zeta)| .$$

Ceci, compte-tenu de la régularité de ρ, établit le corollaire.

10. Corollaire. – *Il existe des constantes* B_1 *et* B_2, *strictement positives, telles que, pour tout* (ζ , z) *de* $\partial D \times \partial D$, *on ait*

$$|G(\zeta , z)| \geqslant B_1 |\Pi_{N_\zeta}(\zeta - z)| - B_2 |\zeta - z|^2 .$$

Preuve. – D'après (9.1)

$$\langle \frac{\partial}{\partial z} G(\zeta , \zeta) , z - \zeta \rangle = \langle \overline{\operatorname{grad} \rho(\zeta)} , z - \zeta \rangle .$$

Le vecteur $\operatorname{grad} \rho(\zeta)$ est dans le sous espace vectoriel N_ζ. Le lemme se déduit donc du développement de Taylor de G par rapport à z au point $z = \zeta$, puisque G appartient à $\mathcal{C}(\partial D , \mathcal{H}(D_\delta))$ et que $\operatorname{grad} \rho$ ne s'annule pas sur ∂D.

II

11. On considère sur ∂D la mesure μ induite par la structure euclidienne de $\mathbf{C}^n$ et on définit, pour tout ζ de ∂D et tout $r > 0$, la "boule" $B(\zeta , r)$ de "centre" ζ et de "rayon" r par

$$B(\zeta , r) = \{z \in \partial D \; ; \; |\langle z - \zeta , \overline{\nu}_\zeta \rangle| < r \, , \; |z - \zeta|^2 < r\} . \tag{11.1}$$

Une telle famille de boules vérifie la propriété suivante. [11]

12. Proposition. – *Il existe des constantes strictement positives* K *et* A, $K > 1$, *telles que*

a)

$$B(\zeta_1 , r_1) \cap B(\zeta_2 , r_2) \neq \phi \quad et \quad r_1 \geqslant r_2 \tag{12.1}$$

implique

$$B(\zeta_2, r_2) \subset B(\zeta_1, Kr_1)$$

b)

$$0 < \mu[B(\zeta, Kr)] \leqslant A\mu[B(\zeta, r)]. \qquad (12.2)$$

Plus précisément, il existe des constantes C_1 *et* C_2 *strictement positives telles que*

$$C_1 r^n \leqslant \mu[B(\zeta, r)] \leqslant C_2 r^n. \qquad (12.3)$$

13. On définit de là une pseudo distance sur ∂D en posant

$\rho(z, w) = \inf\{r$; il existe une boule de rayon r contenant z et $w\}$,

On a, en effet, quels que soient z, w et t de ∂D,

$$\rho(z, w) > 0 \Leftrightarrow z \neq w,$$

$$\rho(z, w) = \rho(w, z),$$

$$\rho(z, w) \leqslant K[\rho(z, t) + \rho(t, w)],$$

où K est la constante figurant dans (12.1).

On en déduit alors, pour tout (z, w) de $\partial D \times \partial D$,

$$\rho(z, w) \leqslant |\Pi_{N_z}(z - w)| + |z - w|^2 \leqslant 2K\rho(z, w). \qquad (13.1)$$

Si E est un sous-ensemble fermé de ∂D, on note

$$\rho(z, E) = \inf_{w \in E} \rho(z, w).$$

On peut définir une nouvelle famille de boules

$$\widetilde{B}(z, r) = \{w \in \partial D ; \rho(z, w) < r\}.$$

Les boules $B(z, r)$ et $\widetilde{B}(z, r)$ ne coïncident pas ; on a néanmoins, d'après la proposition 12,

$$B(z, r) \subset \widetilde{B}(z, r) \subset B(z, Kr). \qquad (13.2)$$

On pourra trouver dans [5] une démonstration des deux lemmes suivants.

14. LEMME. – *Il existe une constante* k *telle que, si* E *est un sous-ensemble fermé de* ∂D *et* $\widetilde{B}(\zeta, r(\zeta))$ *un recouvrement de* $\complement E$, *il*

existe une suite de boules disjointes $\widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, r(\zeta_i))$ *telles que la famille* $\{\widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, kr(\zeta_i))\}$ *forme un recouvrement de* $\complement\,\mathrm{E}$.

15. On applique le lemme 14 en posant

$$r(\zeta) = \frac{1}{2\mathrm{K}k}\,\rho(\zeta\,,\mathrm{E}) \tag{15.1}$$

et on note $r_i = r(\zeta_i)$. On en déduit un lemme de recouvrement analogue à celui de Whitney.

16. LEMME. – *Il existe des constantes* k, A, B *et* M *strictement positives telles que, si* E *est un sous-ensemble fermé de* $\partial\mathrm{D}$, *il existe une suite de boules* $\widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, r_i)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1) *les boules* $\widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, r_i)$ *sont disjointes :*

2) $\complement\,\mathrm{E} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, kr_i)$;

3) *Si* z *appartient à une boule* $\widetilde{\mathrm{B}}(\zeta_i\,,\, kr_i)$ *on a*

$$\mathrm{A}r_i \leqslant \rho(z\,,\mathrm{E}) \leqslant \mathrm{B}r_i\,.$$

4) *Un point* z *de* $\complement\,\mathrm{E}$ *ne peut appartenir à plus de* M *boules distinctes.*

17. D'après (13.2), il existe une suite de boules $\mathrm{B}(\zeta_i\,,\, r_i)$ qui vérifie le lemme 16. Plus généralement, si une suite de boules de centre x_i et de rayon α_i vérifie le lemme 16, on dira que les boules dilatées dans le rapport k forment un recouvrement du type Whitney de $\complement\,\mathrm{E}$.

18. LEMME. – *Soit* E *un sous-ensemble fermé de* $\partial\mathrm{D}$ *dans* $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, *et* $\mathrm{B}(\zeta_i\,,r_i)$ *une suite de boules dont les dilatées* $\mathrm{B}(\zeta_i\,,\, kr_i)$ *forment un recouvrement du type Whitney de* $\complement\,\mathrm{E}$, *alors la condition*

$$\int_{\partial\mathrm{D}} \frac{1}{[\rho(z\,,\mathrm{E})]^{n-1}} \log \frac{1}{\rho(z\,,\mathrm{E})}\, d\mu(z) < \infty \tag{18.1}$$

est équivalente à la condition

$$\mu(\mathrm{E}) = 0 \quad \textit{et} \quad \sum_i r_i \log \frac{1}{r_i} < \infty\,. \tag{18.2}$$

Preuve. – La condition (18.1) implique $\mu(\mathrm{E}) = 0$ et le lemme est une conséquence immédiate du lemme 16 et de (12.3).

19. Si D est la boule unité de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, la pseudo-distance $\widetilde{\rho}$ définie par

$$\widetilde{\rho}(\zeta, z) = |1 - \langle \overline{\zeta}, z \rangle|$$

est équivalente à la pseudo-distance ρ introduite dans le paragraphe 13.

Puisque la fonction $\mathrm{G}(\zeta, z) = \langle \overline{\zeta}, z \rangle - 1$ vérifie la proposition 7, on a alors

$$|\mathrm{G}(\zeta, z)| = \widetilde{\rho}(\zeta, z).$$

Cette situation se généralise lorsque D est un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$. C'est ce qu'expriment les lemmes qui suivent.

20. Lemme. – *Il existe une constante* $\mathrm{A}, > 0$, *telle que si* (ζ, z) *appartient à* $\partial\mathrm{D} \times \partial\mathrm{D}$

$$|\mathrm{G}(\zeta, z)| \leqslant \mathrm{A}\rho(\zeta, z).$$

Preuve. – Ce lemme est une conséquence immédiate du corollaire 9 et de (13.1). On a, en effet,

$$|\Pi_{\mathrm{L}_\zeta}(\zeta - z)| \leqslant |\Pi_{\mathrm{N}_\zeta}(\zeta - z)|.$$

21. Lemme. – *Il existe une constante* B, *strictement positive, telle que si* (ζ, z) *appartient à* $\partial\mathrm{D} \times \partial\mathrm{D}$, on ait

$$|\mathrm{G}(\zeta, z)| \geqslant \mathrm{B}\,\rho(\zeta, z).$$

Preuve. – D'après la proposition 7 et le corollaire 10, il existe m, B_1 et B_2 telles que l'on ait

$$|\mathrm{G}(\zeta, z)| \geqslant -\operatorname{Re}\mathrm{G}(\zeta, z) \geqslant m\,|\zeta - z|^2 \tag{21.1}$$

et,

$$|\mathrm{G}(\zeta, z)| \geqslant \mathrm{B}_1\,|\Pi_{\mathrm{N}_\zeta}(\zeta - z)| - \mathrm{B}_2\,|\zeta - z|^2. \tag{21.2}$$

On considère deux cas.

Soit,

$$|\Pi_{\mathrm{N}_\zeta}(\zeta - z)| < \frac{2\mathrm{B}_2}{\mathrm{B}_1}\,|\zeta - z|^2$$

alors, d'après (13.1), on a

$$\rho(\zeta , z) \leqslant \left(\frac{2B_2}{B_1} + 1\right) |\zeta - z|^2,$$

et, pour conclure dans ce cas, on utilise l'inégalité (21.1).

Soit, au contraire,

$$|\Pi_{N_\zeta}(\zeta - z)| \geqslant \frac{2B_2}{B_1} |\zeta - z|^2$$

alors, d'après (21.2), on a

$$|G(\zeta , z)| \geqslant \frac{B_1}{2} |\Pi_{N_\zeta}(\zeta - z)| ,$$

et, d'après (13.1),

$$\rho(\zeta , z) \leqslant \left(\frac{B_1}{2B_2} + 1\right) |\Pi_{N_\zeta}(\zeta - z)| ;$$

ceci achève la démonstration du lemme.

22. On note :

A(D) la classe des fonctions analytiques dans D, continues dans $\overline{D}$,

$A^k(D)$ [resp. $A^\infty(D)$] la classe des fonctions analytiques dans D, continues ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k [resp. de tous ordres] dans $\overline{D}$.

Dans tout ce qui suit, E est un sous-ensemble fermé de ∂D.

On dit que E est un Z^0 pour une classe $\mathcal{A}$, s'il existe une fonction f de $\mathcal{A}$ telle que l'on ait

$$E = \{z \in \overline{D} \ ; f(z) = 0\} = Z^0(f) .$$

On dit que E est un Z^k pour une classe $\mathcal{A}$, s'il existe une fonction f de $\mathcal{A}$, telle que E soit l'ensemble des zéros communs à f et à toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k. On note alors $E = Z^k(f)$, $(k = 1 , 2 , \ldots)$.

De même, E est un Z^∞ pour une classe $\mathcal{A}$, s'il existe une fonction f de $\mathcal{A}$, telle que l'on ait :

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} Z^k(f) = Z^\infty(f) .$$

Dans ce qui suit, à l'exception du théorème 32, on supposera que la fonction ρ définissant le domaine D est de classe $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Pour toute fonction f de $A(D)$, f^* désigne la restriction de f à ∂D.

23. LEMME. – *Soit un domaine borné, strictement pseudo-convexe de classe* $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$, *soit* f *une fonction de* $A(D)$, *si* f^* *appartient à* $C^1(\partial D)$, f *appartient à* $A^1(D)$.

Pour tout $k = 1 \ldots n$, on peut associer au champ de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ un champ de vecteurs tangent à ∂D, T_k, de classe $C^{1+\alpha}$, tel que, pour toute fonction g holomorphe au voisinage de $\overline{D}$ et tout ζ de ∂D, on ait

$$\frac{\partial g}{\partial z_k}(\zeta) = T_k\, g(\zeta)\,. \tag{23.1}$$

On sait (G. Henkin, N. Kerzman, I. Lieb) que toute fonction f de $A(D)$ est limite uniforme sur $\overline{D}$ d'une suite de fonctions f_p holomorphes dans un voisinage de $\overline{D}$ [7].

La suite $(f_p^*)_{p\in N}$ tend uniformément vers f^* sur ∂D, donc, pour tout k, la suite $(T_k f_p^*)_{p\in N}$ tend vers $T_k f^*$ dans $\mathcal{D}'_1(\partial D)$, l'espace des distributions d'ordre 1 sur ∂D.

Soit z un point intérieur à D. Puisque D est de classe $C^{2+\alpha}$, le noyau de Poisson associé $P_z(\zeta)$ est de classe $C^{1+\alpha}$ sur ∂D.

On a donc, d'après (23.1),

$$\frac{\partial f_p}{\partial z_k}(z) = \int_{\partial D} P_z(\zeta)\, T_k f_p^*(\zeta)\, d\mu(\zeta)\,,$$

et, lorsque p tend vers $+\infty$,

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = \int_{\partial D} P_z(\zeta)\, T_k f^*(\zeta)\, d\mu(\zeta)\,.$$

Par hypothèse, $T_k f^*(\zeta)$ est continue sur ∂D ; son intégrale de Poisson est donc continue dans $\overline{D}$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_k}$ coïncide sur D avec une fonction continue dans $\overline{D}$. La fonction f appartient donc à $A^1(D)$.

Le théorème que l'on se propose d'établir maintenant généralise un résultat obtenu, lorsque D est le disque unité du plan complexe, par L. Carleson [1] pour $A^k(D)$, par B.A. Taylor et D.L. Williams [12] et par B.I. Korembljum [10] pour $A^\infty(D)$.

24. THEOREME. – *Soit* E *un sous-ensemble fermé de* ∂D *dans* $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, *tel que*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho(z, E)}\, d\mu(z) < \infty ,$$

alors, il existe une fonction F *de* $A^\infty(D)$, *non identiquement nulle, nulle seulement sur* E, *telle que, de plus,* E *soit l'ensemble des zéros communs à* F *et à toutes ses dérivées. On a donc*

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F) .$$

Démonstration. – Soit $\{B(\zeta_i, r_i)\}$ une suite de boules telles que les boules dilatées $B(\zeta_i, kr_i)$ forment un recouvrement du type Whitney de $\complement E$.

D'après le lemme 18, la série $\sum_i r_i \operatorname{Log} \frac{1}{r_i}$ converge ; il existe donc une suite de réels positifs λ_i tendant vers $+\infty$ telle que l'on ait

$$\sum_i \lambda_i r_i \operatorname{Log} 1/r_i < \infty \cdot \tag{24.1}$$

On pose, pour tout z dans $\overline{D}\backslash E$,

$$\varphi(z) = \sum_i \frac{\lambda_i r_i \operatorname{Log} 1/r_i}{G(\zeta_i, z) - r_i} \tag{24.2}$$

où $G(\zeta_i, z)$ est la fonction vérifiant la proposition 7. On a

$$| G(\zeta_i, z) - r_i | \geqslant - \operatorname{Re} G(\zeta_i, z) + r_i \geqslant m \,|\zeta_i - z|^2 + r_i .$$

Ainsi φ est analytique donc indéfiniment différentiable dans un voisinage de $\overline{D}$ privé de E.

On se propose d'établir pour φ la propriété suivante : il existe des constantes c et C strictement positives, telles que, si z appartient à $\partial D\backslash E$, z dans $B(\zeta_j, kr_j)$ par exemple, on ait

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < - c\, \lambda_j \operatorname{Log} 1/r_j\,, \tag{24.3}$$

et

$$| \mathrm{D}^{\mathrm{J}} \varphi(z) | < \mathrm{C}^{k+1} \frac{k\,!}{r_j^{k+1}}\,, \tag{24.4}$$

pour tout entier k, et pour tout multi-indice J tel que $|\mathrm{J}| = k$.

D'après la proposition 7, pour tout entier i et pour tout z de $\overline{\mathrm{D}}$, $\operatorname{Re} \mathrm{G}(\zeta_i\,, z)$ est négative.

Ceci implique

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < 0, \qquad \text{pour tout } z \text{ de } \overline{\mathrm{D}} \backslash \mathrm{E}. \tag{24.5}$$

Soit z un point de $\complement\,\mathrm{E}$, z appartient à une des boules dilatées, soit $\mathrm{B}(\zeta_j\,, kr_j)$.

D'après (24.5), on obtient

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < \operatorname{Re} \frac{\lambda_j\, r_j \operatorname{Log} 1/r_j}{\mathrm{G}(\zeta_j\,, z) - r_j}\,.$$

Or, on a

$$\operatorname{Re} \mathrm{G}(\zeta_j\,, z) - r_j \leqslant - r_j$$

et, d'après le lemme 20,

$$| \mathrm{G}(\zeta_j\,, z) - r_j | \leqslant (\mathrm{A} + 1)\, r_j$$

donc,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \leqslant - \frac{\lambda_j \operatorname{Log} 1/r_j}{(\mathrm{A} + 1)^2}$$

ce qui prouve (24.3).

G appartient à $\mathcal{C}(\partial \mathrm{D}\,, \mathcal{H}(\mathrm{D}_\delta))$, donc, d'après les lemmes 2 et 3 et un argument de compacité, il existe une constante M telle que, pour tout k, et tout $(\zeta\,, z)$ dans $\partial \mathrm{D} \times \overline{\mathrm{D}}$, on ait

$$| \mathrm{D}_z^{\mathrm{J}} \mathrm{G}(\zeta\,, z) | \leqslant \mathrm{M}^{k+1}\, k\,!\,. \quad |\mathrm{J}| = k \tag{24.6}$$

En utilisant une formule de dérivation de fonction composée de Fa di Bruno [2] et (24.6) on obtient

$$| \mathrm{D}^{\mathrm{J}} \varphi(z) | \leqslant (2\mathrm{M}^2)^k\, k\,! \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\, r_i \operatorname{Log} 1/r_i}{| r_i - \mathrm{G}(\zeta_i\,, z) |^{k+1}}\,. \tag{24.7}$$

Pour établir (24.4), on distingue deux cas.

Si

$$\rho(\zeta_i , z) \geqslant \frac{1}{2K} \rho(z , E) ,$$

(avec K la constante intervenant dans l'inégalité de pseudo-distance), on a d'après le lemme 21,

$$|r_i - G(\zeta_i , z)| \geqslant |G(\zeta_i , z)| \geqslant B \rho(\zeta_i , z) ,$$

donc,

$$|r_i - G(\zeta_i , z)| \geqslant \frac{B}{2K} \rho(z , E) . \tag{24.9}$$

Si, au contraire,

$$\rho(\zeta_i , z) < \frac{1}{2K} \rho(z , E) ,$$

on a alors, d'après l'inégalité de pseudo-distance,

$$\frac{1}{K} \rho(z , E) \leqslant \rho(z , \zeta_i) + \rho(\zeta_i , E)$$

donc,

$$\frac{1}{2K} \rho(z , E) \leqslant \rho(\zeta_i , E)$$

et d'après (15.1),

$$\frac{1}{2K} \rho(z , E) \leqslant 2K\, kr_i .$$

De là, puisque Re G est négative sur $\partial D \times \bar{D}$, on obtient,

$$|r_i - G(\zeta_i , z)| \geqslant r_i$$

donc,

$$|r_i - G(\zeta_i , z)| \geqslant \frac{1}{4K^2 k} \rho(z , E) . \tag{24.10}$$

Les inégalités (24.9) et (24.10), compte tenu de (24.1), établissent (24.4).

On pose

$$F(z) = \exp \varphi(z) . \tag{24.11}$$

F est analytique dans D, de classe C^∞ dans $\bar{D}\backslash E$. On a une majoration des dérivées d'ordre k de F.

Il existe, en effet, une constante C, > 0, telle que quel que soit l'entier k, > 0, et quel que soit le multi-indice J, $|J| = k$, on ait, pour tout z de $\partial D \setminus E$,

$$|D^J F(z)| \leqslant k!\ \frac{C^k\ |F(z)|}{[\rho(z\ , E)]^{2k}} \cdot \tag{24.12}$$

De là, d'après (24.3) et le lemme 16, si z appartient à $B(\zeta_j\ , kr_j)$,

$$|D^J F(z)| \leqslant k!\ C^k\ r_j^{c\lambda_j - 2k} \tag{24.13}$$

Lorsqu'un point z de $\partial D \setminus E$ tend vers un point de E il appartient successivement à des boules $B(\zeta_j\ , kr_j)$ dont le rayon tend vers zéro. On sait, en effet, que si z appartient à une boule $B(\zeta_j\ , kr_j)$, r_j est équivalent à $\rho(z\ , E)$.

De là, d'après (24.13), lorsque z dans $\partial D \setminus E$ tend vers un point de E, r_j tend vers 0, λ_j tend vers $+\infty$, donc, à partir d'un certain rang, on a

$$c\lambda_j \geqslant 2k + 1\ ,$$

et de là, pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout multi-indice J tel que $|J| = k$

$$\lim_{z \to z_0} |D^J F(z)| = 0, \quad z_0 \in E, \quad z \in \partial D \setminus E. \tag{24.14}$$

La fonction F est holomorphe dans un voisinage de $\overline{D} \setminus E$. Sa restriction à $\partial D \setminus E$ admet, d'après (24.14), un prolongement continu à ∂D.

Soit,

$$F^* = \begin{cases} F & \text{sur} \quad \partial D \setminus E, \\ 0 & \text{sur} \quad E. \end{cases}$$

Puisque F est holomorphe et bornée dans D et que E est de mesure nulle sur ∂D, F est l'intégrale de Poisson-Szegö de F^* [11]. Or le noyau de Poisson-Szegö est une approximation de l'identité et F^* est continue sur ∂D, F appartient donc à A(D) et, d'après (24.5), s'annule seulement sur E.

On a, de plus, si z appartient à $\partial D \setminus E$, z dans $B(\zeta_j\ , kr_j)$ par exemple,

$$|F(z)| \leqslant r_j^{c\lambda_j}\ .$$

La fonction F^* admet donc des dérivées d'ordre 1 nulles en chaque point de E, ce qui, compte tenu de (24.14), implique que F^* est de classe C^1 sur ∂D. D'après le lemme 23, F appartient donc à $A^1(D)$. On conclut par itération que F appartient à $A^\infty(D)$ et que F et toutes ses dérivées s'annulent sur E. On a alors

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F)$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

25. On a donc deux formes équivalentes (18.1) et (18.2) d'une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé de ∂D soit un Z^0 et un Z^∞ pour $A^\infty(D)$. On va en donner une nouvelle version dont l'intérêt réside dans son application à l'étude de cas particuliers.

26. On désigne par $N_\epsilon(E)$ le nombre minimal de boules B de rayon ϵ dont la réunion recouvre E.

On note

$$E_\epsilon = \{z \in \partial D \; ; \; \rho(z\,, E) \leqslant \epsilon\}. \tag{26.1}$$

27. Proposition. — *Il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$c_1 N_\epsilon(E)\, \epsilon^n \leqslant \mu(E_\epsilon) \leqslant c_2 N_\epsilon(E)\, \epsilon^n\,. \tag{27.1}$$

Preuve. — L'inégalité de droite se déduit simplement des définitions de E_ϵ, $N_\epsilon(E)$ et de (12.3). On établit l'inégalité de gauche en comparant $N_\epsilon(E)$ et le nombre maximal de points z_i, $i = 1, 2, \ldots$ tels que l'on ait, pour tout i et j, $i \neq j$,

$$\rho(z_i\,, z_j) \geqslant \epsilon\,.$$

28. Proposition. — *La condition*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z\,.\,E)]^{n-1}} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho(z\,.\,E)}\, d\mu(z) < \infty \tag{28.1}$$

équivaut, lorsque $n = 1$, à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E)\, d\epsilon < \infty \tag{28.2}$$

et lorsque $n \geqslant 2$, *à*

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \,.\, \mathrm{Log}\, \frac{1}{\epsilon}\, d\epsilon < \infty \,. \tag{28.3}$$

Démonstration. – Soit

$$B_k = \{z \in \partial D \ ; \ 2^{-k-1} < \rho(z\,,E) \leqslant 2^{-k}\}\,.$$

La condition (28.1) est équivalente à

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\, 2^{(n-1)k}\, \mu(B_k) < \infty\,.$$

On note

$$C_k = \bigcup_{j \geqslant k} B_j\,.$$

et on obtient, en sommant par parties

$$\sum_{k=1}^{N} k\, 2^{(n-1)k}\, \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{N} 2^{(n-1)(k-1)}\, [k(2^{n-1} - 1) + 1]\, \mu(C_k) - $$
$$- N\, 2^{(n-1)N}\, \mu(C_{N+1}).$$

D'après (28.1), $N\, 2^{(n-1)N}\, \mu(C_N)$ tend vers 0, lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, 2^{(n-1)k}\, \mu(B_k) < \infty$$

équivaut, lorsque $n = 1$, à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) < \infty\,, \tag{28.4}$$

et, lorsque $n \geqslant 2$, à

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(n-1)k}\, k\, \mu(C_k) < \infty\,. \tag{28.5}$$

D'après (26.1) et la proposition 27,

$$C_k = E_{1/2^k} \quad \text{et} \quad 2^{nk}\, \mu(C_k) \leqslant c_2\, N_{1/2^k}(E)$$

(28.4) équivaut donc à $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, N_{1/2^k}(E) < \infty$ et (28.5) à

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\, N_{1/2^k}(E) < \infty\,.$

Ceci établit la proposition.

29. L'équivalence, lorsque $n = 1$ et $D = \{z \in C \; ; \; |z| = 1\}$, des conditions (18.2) et (28.2) figure dans [8]. La pseudo-distance $\rho(z, w)$ coïncide alors avec la distance euclidienne sur ∂D.

Voici un énoncé simple qui est une conséquence facile du théorème 24 et de la proposition 28.

30. Proposition. – *Si* Γ *est un arc sur* δD *de classe* $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *dont la tangente en chaque point* ζ *est dans* P_ζ, *le sous-espace complexe de dimension* $(n-1)$ *de l'espace tangent à* D *en* ζ, *il existe une fonction* F, *non identiquement nulle, de* $A^\infty(D)$ *telle que l'on ait*

$$\Gamma = Z^0(F) = Z^\infty(F) .$$

Démonstration. – On peut supposer ici $n > 1$. Soit γ l'application de $[a, b]$ dans $\mathbf{C}^n$ définissant Γ. Il existe une constante M telle que, pour tout couple (t, t_1) de points de $[a, b]$, on ait

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1) - (t - t_1)\gamma'(t_1)| \leqslant M |t - t_1|^{1+\alpha}$$

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1)| \leqslant M |t - t_1|$$

De là, en notant

$$z = \gamma(t) \quad , \quad z_1 = \gamma(t_1)$$

on obtient

$$|\Pi_{N_{z_1}}(z - z_1)| \leqslant M |t - t_1|^{1+\alpha} \tag{30.1}$$

$$|z - z_1|^2 \leqslant M^2 |t - t_1|^2 . \tag{30.2}$$

Soit $P(\epsilon)$ le nombre minimal d'intervalles de longueur $\epsilon^{1/1+\alpha}$ dont la réunion recouvre $[a, b]$; $P(\epsilon)$ est de l'ordre de $\dfrac{1}{\epsilon^{1/1+\alpha}}$.

Soient t_i les centres de ces intervalles et $\gamma(t_i)$ leurs images. D'après (30.1) et (30.2), on a

$$E \subset \bigcup_i B(\gamma(t_i), \epsilon) ,$$

donc

$$N_\epsilon(E) \leqslant P(\epsilon) ,$$

et

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \operatorname{Log} \frac{1}{\epsilon} \, d\epsilon < \infty ,$$

III

Un sous-ensemble E de ∂D est pic pour A(D) s'il existe une fonction f de A(D) telle que

$$f(z) = 1 \quad \text{si } z \text{ appartient à E et,}$$

$$|f(z)| < 1 \quad \text{ailleurs,}$$

ou, ce qui est équivalent, s'il existe une fonction de A(D), nulle seulement sur E, dont la partie réelle soit positive dans $\overline{D}$.

31. PROPOSITION. – *Il n'existe pas d'ensembles infinis qui soient pics pour* $A^m(D)$, $m \geq 1$.

Ce résultat est établi dans [13] lorsque D est le disque unité du plan complexe. Il s'étend lorsque D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, à frontière de classe C^2. En effet, s'il existe un ensemble infini pic pour $A^1(D)$, il existe un point z_0 de ∂D et une fonction f de $A^1(D)$ telle que

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \overline{D},$$

et,

$$f(z_0) = f'(z_0) = 0 .$$

Alors, en se restreignant à un disque convenable passant par z_0 et contenu dans $\overline{D}$, on obtient une contradiction.

32. Dans [6], A.M. Davie et B.K. Øksendal ont donné une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble E de ∂D soit un ensemble pic pour A(D). D'après la proposition 31, leur construction ne s'étend pas aux classes $A^m(\overline{D})$, $m \geq 1$.

En revanche, on peut donner des conditions sur E telles que, avec les idées développées dans la démonstration du théorème 24, on sache construire des fonctions, nulles seulement sur E, appartenant, soit à A(D) (les résultats obtenus sont alors contenus dans ceux de A.M. Davie et B.K. Øksendal [6]), soit à des classes plus régulières que $A^\infty(D)$, à des classes de Gevrey par exemple.

33. THEOREME. – *Soit* E *un sous-ensemble fermé de* ∂D *dans* $\mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, *de mesure nulle, vérifiant*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z\,,\,E)]^{n-1}}\, d\mu(z) < \infty \tag{33.1}$$

alors, il existe une fonction F *de* A(D) *telle que l'on ait*

$$E = Z^0(F)\,.$$

Démonstration. – Si $n \geqslant 2$, la condition (33.1) est équivalente à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E)\, d\epsilon < \infty\,, \tag{33.2}$$

ou à

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i r_i < \infty\,, \tag{33.3}$$

si r_i désigne le rayon des boules d'un recouvrement du type Whitney de C E. On note ζ_i leur centre.

Si $n = 1$, on a encore $\Sigma\, r_i < \infty$.

On montre alors en reprenant les idées et les notations de la démonstration du théorème 24 que la fonction

$$F(z) = \exp \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i\, r_i}{G(z_i\,,\,z) - r_i}$$

appartient à A(D) et s'annule seulement sur E.

34. Soit $(M_k)_{k \geqslant 0}$, une suite de réels positifs, logarithmiquement convexe, on désigne par $\{M_k\}^+$ la classe des fonctions f, analytiques dans D, continues ainsi que leurs dérivées de tous ordres dans $\bar{D}$, qui vérifient la propriété suivante : il existe une constante A_f telle que, pour tout z dans $\bar{D}$, tout entier k positif ou nul et tout multi-indice J tel que $|J| = k$, on ait

$$|D^J f(z)| \leqslant A_f^{k+1}\, M_{k+1}\,.$$

On pose

$$T(r) = \sup_k \frac{r^k}{M_k}\,\cdot$$

Le théorème suivant généralise un résultat [3] précédemment établi, lorsque D est le disque unité du plan complexe.

35. THEOREME. – *Soit* E *un sous-ensemble fermé de* ∂D *dans* C^n, $n \geqslant 1$, *vérifiant*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z\,,E)]^{n-1}} \operatorname{Log} T\left(\frac{1}{\rho(z\,,E)}\right) d\mu(z) < \infty \qquad (35.1)$$

alors il existe une fonction F *de* $\{M_{2k}\}^+$ *telle que l'on ait*

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F)\,.$$

Démonstration. – La condition (35.1) est équivalente, quel que soit n, à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \operatorname{Log} T\left(\frac{1}{\epsilon}\right) d\epsilon < \infty \qquad (35.2)$$

ou à,

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i r_i \operatorname{Log} T(1/r_i) < \infty \qquad (35.3)$$

si r_i désigne ici encore le rayon des boules d'un recouvrement du type Whitney de $\complement E$.

On pose

$$T^*(r) = \sup_k \frac{r^k}{2^k M_k}\,.$$

En adaptant, à l'aide des méthodes détaillées dans [3], la démonstration du théorème 24 dont on reprend les notations, on montre que la fonction

$$F(z) = \exp \sum_i \frac{r_i \operatorname{Log} T^*(1/r_i)}{G(\zeta_i\,,z) - r_i}$$

appartient à $\{M_{2k}\}^+$, qu'elle s'annule seulement sur E et que, de plus, E est l'ensemble des zéros communs à F et à toutes ses dérivées.

36. PROPOSITION. – *Soit* $D = \{z \in C^n \;;\; |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$, *la non-quasi-analyticité d'une classe* $\{M_{2k}\}^+$, *c'est-à-dire l'existence dans la classe d'une fonction non identiquement nulle s'annulant en un point ainsi que toutes ses dérivées, équivaut à la condition*

$$\int_0^1 \operatorname{Log} T(1/\epsilon)\, d\epsilon < \infty\,.$$

Démonstration. – Ce résultat, si $n = 1$, est établi dans [9]. On ramène le cas général à l'étude d'une fonction d'une variable sur un disque en coupant D par une droite complexe.

37. PROPOSITION. – *Soit* D *un sous-ensemble borné strictement pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, *la condition*

$$\int_0^1 \operatorname{Log} T(1/\epsilon)\, d\epsilon < \infty$$

implique l'existence dans la classe $\{M_{2k}\}^+$ *d'une fonction non identiquement nulle qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur un sous-ensemble parfait de* ∂D.

Démonstration. – Il existe une fonction φ strictement croissante, tendant vers $+\infty$ quand ϵ telle que

$$\int_0^1 \varphi(\epsilon) \operatorname{Log} T(1/\epsilon)\, d\epsilon < \infty .$$

Soit Γ un arc de classe C^2 sur ∂D, défini par $\gamma(t)$, t dans $[0, 1]$ par exemple, tel que la tangente à Γ en chaque point ζ soit situé dans P_ζ, le sous-espace complexe de dimension $n - 1$ de l'espace tangent à D en ζ.

On construit sur $[0, 1]$ un ensemble parfait F tel que le nombre minimal d'intervalles de longueur $\sqrt{\epsilon}$ dont la réunion recouvre E soit majoré par C $\varphi(\epsilon)$ où C désigne une constante ne dépendant que de E. On prend, par exemple,

$$F = \left\{ x \; ; \; x = \Sigma \frac{\alpha_j}{[\psi(1/2^j)] + 1}, \alpha_j = 0 , 1 \right\} .$$

ψ désigne ici la fonction réciproque de φ et $[\psi(t)]$, la partie entière de $\psi(t)$.

Soit E, l'image par γ de F, E est parfait et l'on a, d'après (30.1) et (30.2),

$$N_\epsilon(E) < C\, \varphi(\epsilon) .$$

On en déduit donc

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \operatorname{Log} T(1/\epsilon)\, d\epsilon < \infty .$$

E vérifie donc la condition (35.1) et l'on a

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F),$$

avec F appartenant à $\{M_{2k}\}^+$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Carleson, Sets of uniqueness for functions, regular in the unit circle, *Acta Math.*, 87 (1952), 325-345.

[2] A.-M. Chollet, Zéros dans les classes de Gevrey de type analytique, *Bull. Soc. Math.*, 96 (1972), 65-82.

[3] A.-M. Chollet, Ensembles de zéros de fonctions analytiques dans le disque dont les valeurs au bord appartiennent à une classe très régulière, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 276 (1973), 731-733.

[4] A.-M. Chollet, Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques dans la boule de $\mathbf{C}^n$, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 277 (1973), 1165-1167.

[5] R. Coifman, et G. Weiss, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, Springer-Verlag (1971).

[6] A.M. Davie and B.K. Øksendal, Peak interpolation sets for some algebras of analytic functions, *Pacific J. Math.*, 41 (1972), 81-87.

[7] G.M. Henkin, Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications, *Math. USSR Sb.*, 7 (1969), 597-616.

[8] J.-P. Kahane et Y. Katznelson, Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle, *J. Anal. Math.* Jérusalem, 23 (1970), 185-197.

[9] B.I. Korenbljum, Quasi analytic classes of functions in a circle, *Soviet Math. Dokl.*, 6 (1965), 1155-1158.

[10] B.I. Korembljum, Functions holomorphic in a disk and smooth in its closure, *Soviet Math. Dokl.*, 12 (1971), 1312-1315.

[11] E. Stein, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton (1972).

[12] B.A. TAYLOR and D.L. WILLIAMS, Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, *Can. J. Math.*, 22 (1970), 1266-1283.

[13] B.A. TAYLOR and D.L. WILLIAMS, The peak sets of A^m, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 604-605.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1974
Accepté par J.P. Kahane.

Anne-Marie CHOLLET,
Université Paris XI
U.E.R. Mathématique
91405 Orsay.