ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOËL BRIANÇON
JEAN-PAUL SPEDER

Les conditions de Whitney impliquent $\mu(*)$ constant

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 153-163
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_153_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 153-163.

LES CONDITIONS DE WHITNEY IMPLIQUENT « $\mu^{(*)}$ CONSTANT »

par J. BRIANÇON et J.-P. SPEDER

La situation que nous étudions est la suivante :

X est un représentant d'un germe d'hypersurface à l'origine de $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^p (n > 0,\ p > 0)$, définie par l'équation

$$F(z, t) = 0 \quad (\text{où} \quad z = (z_0, \ldots, z_n)$$

et $t = (t_1, \ldots, t_p))$; nous supposons que X contient

$$Y = \{0\} \times \mathbf{C}^p$$

et que, si ρ désigne la rétraction canonique de X sur Y, l'idéal jacobien relatif (à la rétraction ρ)

$$J_\rho(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right) \mathcal{O}_X$$

définit Y.

Dans ces conditions, pour $y \in Y$ assez voisin de 0, la fibre X_y de ρ au-dessus de y est alors un représentant d'un germe d'hypersurface à singularité isolée de $\mathbf{C}^{n+1} \times \{y\}$.

1. Conditions de Whitney et sections planes génériques.

Dans la situation précédente, lorsque $p = 1$, nous montrons :

THÉORÈME 1. — *Si le couple* (X, Y) *vérifie les conditions de Whitney au voisinage de* 0, *il existe un ouvert dense* $\mathcal{V}^{(i)}$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ *de la grassmannienne des* $i + 1$*-plans passant* *par* Y *tel que, pour tout* $H \in \mathscr{V}^{(i)}$ *et dans un voisinage de* 0 *dépendant de* H :

- X $\cap$ H *est réduit.*
- *Le lieu singulier relatif de* X $\cap$ H *est* Y.
- (X $\cap$ H, Y) *vérifie les conditions de Whitney.*

Étant donnés un disque d'épreuve

$$h : (\mathbf{D}, 0) \to (\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}, 0)$$

et ν la valuation associée dans l'anneau local $\mathcal{O}_{n+2,0}$, nous noterons :

$$\nu(z) = \inf_{0 \leqslant i \leqslant n} \nu(z_i), \qquad \nu(J_\rho(F)) = \inf_{0 \leqslant i \leqslant n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)$$

Lemme 1. — *Si* (X, Y) *vérifie les conditions de Whitney en* 0, *pour tout disque d'épreuve* h *envoyant* $\mathbf{D} - \{0\}$ *dans* X − Y, *on a* :

$$\nu\left(t \frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

Preuve du lemme 1. — Pour $\tau \in \mathbf{D}$, soit

$$h(\tau) = (z_0(\tau), \ldots, z_n(\tau), t(\tau)).$$

Par hypothèse, $F \circ h$ est identiquement nul, on a donc :

$$(*) \quad z_0'(\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \circ h\right)(\tau) + \cdots + z_n'(\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial z_n} \circ h\right)(\tau) = -\, t'(\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ h\right)(\tau))$$

que l'on note $P(\tau) (\tau \in \mathbf{D})$.

D'autre part, si $Q = z_0 \dfrac{\partial F}{\partial z_0} + \cdots + z_n \dfrac{\partial F}{\partial z_n}$, les conditions de Whitney ([8] page 540) impliquent :

$$(**) \qquad \nu(Q) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

De manière évidente, l'ordre de $P(\tau)$ est au moins égal à $\nu(z) + \nu(J_\rho(F)) - 1$; nous allons montrer que l'on a, en fait, une inégalité stricte.

En effet :

— si $\alpha = \nu(z)$, nous avons $z_i(\tau) = a_i \tau^\alpha + \cdots \; (0 \leqslant i \leqslant n)$ où les a_i sont non tous nuls.

— si $\beta = \nu(J_\rho(F))$, nous avons

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h\right)(\tau) = b_i \tau^\beta + \cdots \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

où les b_i sont non tous nuls.

Nous avons alors :

$$P(\tau) = \alpha \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right) \tau^{\alpha+\beta-1} + \cdots$$

et
$$(Q \circ h)(\tau) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right) \tau^{\alpha+\beta} + \cdots$$

D'après (**), $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right)$ est nul et donc l'ordre de $P(\tau)$ est strictement supérieur à $\alpha + \beta - 1$.

Finalement, grâce à (*), $\nu\left(t \dfrac{\partial F}{\partial t}\right) - 1$ égale l'ordre de $P(\tau)$ et donc $\nu\left(t \dfrac{\partial F}{\partial t}\right) > \alpha + \beta$.

Lemme 2. — *Si* (X, Y) *vérifie les conditions de Whitney en* 0, *il existe un ouvert dense* $\mathcal{V}^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *de la grassmannienne des* $i + 1$*-plans de* $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}$ *contenant* Y *tel que, pour* $H \in \mathcal{V}^{(i)}$ *et tout disque d'épreuve*

$$h : (\mathbf{D}, 0) \to ((X \cap H)_{\text{red}}, 0)$$

on ait :

$$J_\rho(F) \circ h = J_\rho(F/H) \circ h$$

où $(X \cap H)_{\text{red}}$ *désigne l'espace analytique réduit sous-jacent à* $X \cap H$ *et* $J_\rho(F/H)$ *est la restriction à* $(X \cap H)_{\text{red}}$ *de l'idéal jacobien relatif de* F/H.

Preuve du Lemme 2. — Nous utilisons le théorème suivant de B. Teissier et J. P. Henry ([6]).

Théorème. — *Soit* $G(x_1, \ldots, x_r; a_1, \ldots, a_q)$ *une fonction analytique complexe au voisinage de* $\{0\} \times \mathbf{C}^q \subset \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^q$. *On suppose que* G *et son idéal jacobien relatif (à la rétraction canonique* $\mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^q \to \{0\} \times \mathbf{C}^q$) $\left(\dfrac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial G}{\partial x_r}\right) \mathcal{O}_{r+q}$ *sont contenus dans l'idéal* $(x_1, \ldots, x_r)\, \mathcal{O}_{r+q}$.

Il existe un ouvert dense $\mathscr{V}$ de $\mathbf{C}^q$ tel que, pour tout $a \in \mathscr{V}$ et $j = 1, \ldots, q$, on ait :

$$\frac{\partial G}{\partial a_j} \in \overline{\left(x_1 \frac{\partial G}{\partial x_1}, \ \ldots, x_r \frac{\partial G}{\partial x_r}\right)} \mathcal{O}_{r+q,(0,a)}$$

(clôture intégrale).

Pour $a = (a_{l,j})$ $0 \leqslant l \leqslant n-i$, $n-i+1 \leqslant j \leqslant n$ appartenant à $\mathbf{C}^{(n-i+1)\times i}$, notons H_a le $i+1$-plan d'équation

$$z_0 = \sum_j a_{0,j} z_j, \ \ldots, z_{n-i} = \sum_j a_{n-i,j} z_j.$$

Définissons aussi $\omega : \mathbf{C}^i \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{(n-i+1)\times i} \to \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}$ par

$$\omega(z_{n-i+1}, \ldots, z_n, t; a) = \left(\sum_j a_{0,j} z_j, \ \ldots, \sum_j a_{n-i,j} z_j, z_{n-i+1}, \ldots, z_n, t\right).$$

Comme B. Teissier dans ([6]), appliquons le théorème précédent à $G = F \circ \omega$ qui vérifie de manière évidente les hypothèses du théorème puisque l'on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial z_j} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n-i} a_{l,j} \frac{\partial F}{\partial z_l} \circ \omega + \frac{\partial F}{\partial z_j} \circ \omega & n-i+1 \leqslant j \leqslant n \\ \dfrac{\partial G}{\partial t} = \dfrac{\partial F}{\partial t} \circ \omega \end{cases}$$

Il existe par conséquent un ouvert dense $\mathscr{V}$ de $\mathbf{C}^{(n-i+1)\times i}$ tel que pour $\underline{a} \in \mathscr{V}$ et tout (l, j), on ait :

$$\frac{\partial G}{\partial a_{l,j}} \in \overline{\left(z_{n-i+1} \frac{\partial G}{\partial z_{n-i+1}}, \ \ldots, z_n \frac{\partial G}{\partial z_n}, t \frac{\partial G}{\partial t}\right)}_{(0,\underline{a})}$$

Fixons $\underline{a} \in \mathscr{V}$ et, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées en $(z_0, \ldots, z_n)$, supposons que $\underline{a} = 0$.

Nous avons alors :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right) / H_0 = \frac{\partial F / H_0}{\partial z_j} \qquad n-i+1 \leqslant j \leqslant n.$$

Prenons maintenant un disque d'épreuve

$$h : (\mathbf{D}, 0) \to ((X \cap H_0)_{\text{red}}, 0);$$

il nous reste à montrer que

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_l}\right) \geqslant \inf_{n-i+1 \leqslant j \leqslant n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right) \quad 0 \leqslant l \leqslant n-i.$$

Quitte à permuter les coordonnées $z_0, \ldots, z_{n-i}$, nous pouvons supposer que $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = \inf_{0 \leqslant l \leqslant n-i} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_l}\right)$ et donc aussi que $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = \nu(J_\rho(F))$.

Nous pouvons enfin nous limiter au cas où

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H_0)_{\text{red}} - Y$$

$\left(\text{car sinon } \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = +\infty\right)$.

Le disque d'épreuve h se relève en $\tilde{h}$: $(\mathbf{D}, 0) \to (G^{-1}(0), (0, 0))$ tel que $h = \omega \circ \tilde{h}$ et $a \circ \tilde{h} = 0$; nous noterons w la valuation associée à $\tilde{h}$.

D'après le théorème précédent, nous avons :

$$(*) \quad w\left(\frac{\partial G}{\partial a_{0,j}}\right) \geqslant \inf\left[w(z) + \inf_{n-i+1 \leqslant j \leqslant n} w\left(\frac{\partial G}{\partial z_j}\right), w\left(t\frac{\partial G}{\partial t}\right)\right]$$

pour $n-i+1 \leqslant j \leqslant n$.

Or, nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial a_{0,j}} = z_j \frac{\partial F}{\partial z_0} \circ \omega \quad n-i+1 \leqslant j \leqslant n$$

et d'autre part, d'après le lemme 1 :

$$w\left(t\frac{\partial G}{\partial t}\right) = \nu\left(t\frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F)) = \nu(z) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right).$$

Finalement, puisque $H_0 = \{z_0 = \cdots = z_{n-i} = 0\}$ l'inégalité

$$(*) \quad \nu(z) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) \geqslant \inf\left[\nu(z) + \inf_{n-i+1 \leqslant j \leqslant n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right), w\left(t\frac{\partial G}{\partial t}\right)\right]$$

implique :

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) \geqslant \inf_{n-i+1 \leqslant j \leqslant n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right).$$

Remarque. — Sous les conditions du lemme 2, il résulte de ([4] 0 proposition 0.4) que :

$$\overline{J_\rho(F)\mathcal{O}_{(X\cap H)_{red},0}} = \overline{J_\rho(F/H)_0}.$$

Dans un voisinage de 0 dépendant de H, le support du lieu singulier relatif de $X \cap H$ est donc identique à Y.

Preuve du Théorème 1. — Comme $i \geqslant 2$, la remarque précédente indique que, dans un voisinage de 0 dépendant de H, $X \cap H$ est réduit.

De plus, pour tout $H \in \mathscr{V}^{(i)}$ et tout disque d'épreuve $h : (\mathbf{D}, 0) \to (X \cap H, y)$ (où y appartient à un voisinage de 0 dépendant de H), nous avons aussi :

$$J_\rho(F) \circ h = J_\rho(F/H) \circ h.$$

Supposons encore que le $i + 1$-plan H ait pour équations $z_0 = \cdots = z_{n-i} = 0$. Pour assurer les conditions de Whitney de $(X \cap H, Y)$ au voisinage de 0, il suffit donc de montrer que, pour tout disque d'épreuve $h : (\mathbf{D}, 0) \to (X \cap H, y)$ tel que y est suffisamment voisin de 0 dans Y et

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H) - Y,$$

on a :

$$a_H) \quad \nu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(J_\rho(F/H))$$

$$b_H) \quad \nu\left(\sum_{j=n-i+1}^{n} z_j \frac{\partial F}{\partial z_j}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F/H))$$

Or, comme le couple (X, Y) vérifie les conditions de Whitney en y, on a :

$$a) \quad \nu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(J_\rho(F))$$

$$b) \quad \nu\left(\sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

D'où le résultat puisque, d'après le lemme 2,

$$\nu(J_\rho(F)) = \nu(J_\rho(F/H)).$$

Remarque. — Dans le cas où $i = 1$, le lemme 2 et sa remarque permettent d'obtenir le résultat analogue suivant :

Pour tout plan $H \in \mathscr{V}^{(1)}$, il existe un voisinage ouvert

W_H de 0 tel que, pour tout $y \in Y \cap W_H$, $X_y \cap H$ et $X_0 \cap H$ ont même multiplicité en y et 0 respectivement.

Pour ceci, il suffit de montrer qu'au voisinage de 0 on a $(X \cap H)_{red} = Y$. Supposons le contraire : il existe un disque d'épreuve $h : (\mathbf{D}, 0) \to ((X \cap H)_{red}, 0)$ tel que

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H)_{red} - Y.$$

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées en $z_0, \ldots, z_n$, nous pouvons supposer que H est défini par les équations $z_0 = \cdots = z_{n-1} = 0$; $\nu(z_n)$ et $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)$ (remarque du lemme 2) sont alors finis, ce qui est en contradiction avec la condition *b*) de Whitney pour le couple (X, Y) en 0 qui implique :

$$\nu\left(z_n \frac{\partial F}{\partial z_n}\right) > \nu(z_n) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)$$

2. Les conditions de Whitney impliquent « $\mu^{(*)}$ constant ».

Rappelons que B. Teissier ([4]) attache à un germe

$$(X_0, 0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$$

d'hypersurface à singularité isolée, une suite décroissante d'entiers :

$$\mu^{(*)}(X_0) = (\mu^{(n+1)}(X_0), \ldots, \mu^{(i)}(X_0), \ldots, \mu^{(0)}(X_0))$$

où $\mu^{(i)}(X_0)$ est le nombre de cycles évanescents (ou nombre de Milnor) de l'intersection de $(X_0, 0)$ avec un i-plan général de $\mathbf{C}^{n+1}$.

En particulier $\mu^{(0)}(X_0) = 1$ et $\mu^{(1)}(X_0)$ est égal à la multiplicité de X_0 moins 1.

Théorème 2. — *Si le couple* (X, Y) *vérifie les conditions de Whitney au voisinage de* 0 *dans* Y, *la suite* $\mu^{(*)}(X_y, y)$ *est constante au voisinage de* 0 *dans* Y.

Preuve dans le cas $p = 1$. — Soient i, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$, et (y_r) une suite de points de Y tendant vers 0.

Il existe un ouvert dense $\mathcal{V}_0$ de $i+1$-plans passant par Y tel que $\mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0)$ pour $H \in \mathcal{V}_0$.

Pour $r \in \mathbf{N}$, il existe un ouvert dense $\mathcal{V}_r$ de $i+1$-plans passant par Y tel que $\mu^{(i)}(X_{y_r} \cap H, y_r) = \mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r)$ pour $H \in \mathcal{V}_r$.

Dans le cas où $2 \leqslant i \leqslant n+1$, le théorème 1 assure l'existence d'un ouvert dense $\mathcal{V}^{(i)}$ de $i+1$-plans passant par Y tel que, pour tout $H \in \mathcal{V}^{(i)}$, il existe un voisinage ouvert W_H de 0 dans lequel $X \cap H$ est réduit, son lieu singulier relatif est Y et $(X \cap H, Y)$ vérifie les conditions de Whitney.

Pour $H \in \mathcal{V}^{(i)}$ et $y \in Y \cap W_H$, on déduit du théorème de Thom-Mather ([7]) que $(X_y \cap H, y)$ et $(X_0 \cap H, 0)$ ont même type topologique et donc, d'après ([4] 0 Théorème 1.4) que :

$$\mu^{(i)}(X_y \cap H, y) = \mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0).$$

Prenons alors, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, un $i+1$-plan

$$H \in \mathcal{V}^{(i)} \cap \mathcal{V}_0 \cap (\cap_r \mathcal{V}_r)$$

(dense) et un point $y_r \in W_H$ (pour $i = 1$, référons-nous à la remarque suivant la démonstration du théorème 1).

Nous savons :

$$\mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r) = \mu^{(i)}(X_{y_r} \cap H, y_r) = \mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0).$$

Ainsi, pour toute suite (y_r) de points de Y tendant vers 0, $\mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r)$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ est constant et égal à $\mu^{(i)}(X_0, 0)$ dès que r est suffisamment grand; ceci implique que l'application $y \longmapsto \mu^{(i)}(X_y, y)$ est constante au voisinage de 0 et, par conséquent, localement constante sur tout voisinage ouvert de 0 dans Y le long duquel (X, Y) vérifie les conditions de Whitney.

Preuve du Théorème 2 *pour un nombre quelconque de paramètres*. — Dans la situation décrite au début, si (X, Y) vérifie les conditions de Whitney le long d'un polydisque ouvert Ω de centre 0 dans Y, pour tout changement de base $t = \gamma(\tau)$, $\gamma : (\mathbf{D}, 0) \to (\Omega, 0)$ le couple $(X', \mathbf{D})$ obtenu a pour lieu singulier relatif (à la rétraction canonique $\rho' : X' \to \mathbf{D}$) $\mathbf{D}$ et vérifie les conditions de Whitney le long de $\mathbf{D}$.

En effet, notons :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mathrm{Id} \times \gamma : \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}^{n+1} \times \Omega \\ x_i &= z_i \circ \Gamma \quad i = 0, \ldots, n \\ G &= F \circ \Gamma. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$J_{\rho'}(G) = J_\rho(F)\mathcal{O}_{X'}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right) \circ \Gamma$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial F}{\partial t_k} \circ \Gamma\right) \frac{\partial t_k}{\partial \tau}.$$

De plus, pour tout disque d'épreuve $h : (\mathbf{D}, 0) \to (X', y')$ tel que $y' \in \mathbf{D}$ et $h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset X' - \mathbf{D}$, si l'on note ν la valuation de $\mathcal{O}_{X', y'}$ associée à h et w celle de $\mathcal{O}_{X, \gamma(y')}$ associée à $\Gamma \circ h$, on a :

$$a) \quad \nu\left(\frac{\partial G}{\partial \tau}\right) \geqslant \inf_{1 \leqslant k \leqslant p} w\left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right) > w(J_\rho(F)) = \nu(J_{\rho'}(G))$$

$$\begin{aligned} b) \quad \nu\left(\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}\right) = w\left(\sum_{i=0}^{n} z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right) &> w(z) + w(J_\rho(F)) \\ &= \nu(x) + \nu(J_{\rho'}(G)) \end{aligned}$$

d'où les conditions de Whitney pour le couple $(X', \mathbf{D})$.

Terminons maintenant la démonstration :

D'après la première partie ($p = 1$), pour tout changement de base γ et tout $\tau \in \mathbf{D}$, $\mu^{(*)}(X_{\gamma(\tau)}, \gamma(\tau))$ est égal à

$$\mu^{(*)}(X_0, 0)$$

(car $\mathbf{D}$ est connexe) ; par conséquent

$$\mu^{(*)}(X_y, y) = \mu^{(*)}(X_0, 0)$$

pour tout $y \in \Omega$ (on peut « joindre » tout point de Ω à 0 par un tel chemin γ).

Notons enfin que, dans ([2] corollary 6.2), H. Hironaka avait déjà montré que $\mu^{(1)}(X_y, y)$ est constant au voisinage de 0 dans Y.

3. Corollaire.

Toujours dans la situation décrite au début, il y a équivalence entre les conditions suivantes :

1) *Le couple* (X, Y) *vérifie les conditions de Whitney au voisinage de* 0.

2) *La suite* $\mu^{(*)}(X_y, y)$ *est constante pour* y *voisin de* 0 *dans* Y.

3) « *Conditions* (C) *de B. Teissier* » :
Pour $1 \leqslant k \leqslant p$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} \in \overline{(z_0, \ldots, z_n)\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)}\, \mathcal{O}_{n+1+p}$$

4) « *Condition d'H. Hironaka* » :
L'éclatement de X *le long de* $(z_0, \ldots, z_n)J_\rho(F)$ *est équidimensionnel au-dessus de* Y *au voisinage de* 0.

1) $\Longrightarrow$ 2) c'est notre théorème 2.

2) $\Longleftrightarrow$ 3) est montré par B. Teissier ([5] Theorem 3).

2) $\Longrightarrow$ 4) il suffit de montrer 4) pour tout changement de base ([3] théorème 2) ; il suffit donc de montrer 4) dans le cas où $p = 1$, or 2) implique l'équimultiplicité de l'idéal

$$(z_0, \ldots, z_n)\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_X$$

([4] II. Corollaire 1.8) et on conclut avec la proposition 3.1 de ([4] II).

4) $\Longrightarrow$ 1) est montré par J. P. Spéder dans ([3]).

Remarque. — Les conditions équivalentes d'équisingularité ainsi obtenues sont strictement plus fortes que la trivialité topologique (voir [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Briançon, J. P. Speder, La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney, Note au *C.R.A.S.*, Paris, 280 (1975), 365-367.

[2] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications, *Publications Mathématiques* n° 31, IHES (1970).

[3] J. P. SPEDER, Éclatements jacobiens et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, 7 et 8 (1973).
[4] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, 7 et 8 (1973).
[5] B. TEISSIER, Introduction to equisingularity problems, *Sympos. algebraic geometry*, Arcata (1974).
[6] B. TEISSIER, Note technique, supplément à « Introduction to equisingularity problems », Preprint, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique de Paris (1974).
[7] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bulletin A.M.S.*, 75, 2 (1969).
[8] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Annals of Mathematics*, 81 (1965).

Manuscrit reçu le 14 mars 1975
Proposé par B. Malgrange.

J. BRIANÇON et J. P. SPEDER,
Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06000 Nice.