ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

D. BUCCHIONI
ANDRÉ GOLDMAN

Sur certains espaces de formes linéaires liés aux mesures vectorielles

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 3 (1976), p. 173-209
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_173_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 3 (1976), 173-209

SUR CERTAINS ESPACES DE FORMES LINÉAIRES LIÉS AUX MESURES VECTORIELLES

par D. BUCCHIONI et A. GOLDMAN

La théorie générale des mesures vectorielles est évidemment tributaire de la théorie des espaces localement convexes (elc). Inversement bon nombre de propriétés des elc se démontrent par des méthodes propres à l'intégration. Un aspect des liaisons ainsi rencontrées apparaît dans un travail récent de I. Tweddle [24], où l'auteur introduit et caractérise la plus fine topologie localement convexe $\mathcal{C}_0$ sur un elc E, pour laquelle toute mesure μ, définie sur une tribu et à valeurs dans E, est une $\mathcal{C}_0$ -mesure (on reconnaît là une extension du théorème classique d'Orlicz-Pettis). Pour cela I. Tweddle considère l'espace $G' = G'(E)$ des formes linéaires x' sur E telles que pour toute suite (x_n) de E, vérifiant la condition (0) de [24] (suite que nous appelons sous-série convergente en (1.1)), on ait $< \sum x_n , x' > = \sum < x_n , x' >$, et montre que la topologie $\mathcal{C}_0$ n'est autre que la topologie de Mackey $\tau(E , G')$.

Dans ce travail nous explorons une question analogue en recherchant la topologie localement convexe la plus fine $\mathcal{C}_1$ sur E, pour laquelle toute mesure μ à valeurs dans E est $\mathcal{C}_1$ -bornée. Ce qui équivaut à l'introduction de l'espace $G'_1 = G'_1(E)$ des formes linéaires x' sur E transformant toute suite sous-série convergente de E en une suite sommable de scalaires, avec la liaison $\mathcal{C}_1 = \tau(E, G'_1)$.

La topologie $\mathcal{C}_1$ est plus fine que la topologie $\mathcal{C}_0$ et possède de meilleures propriétés. Elle est en particulier bornologique et tonnelée et se relie à $\mathcal{C}_0$ par le fait que tout disque absorbant de E, universellement mesurable pour $\mathcal{C}_0$, est un voisinage de zéro pour $\mathcal{C}_1$. Ces résultats, établis aux paragraphes 1,2 et 3, posent les problèmes suivants :

1) $\mathcal{C}_1$ est-elle la topologie bornologique tonnelée associée à $\mathcal{C}_0$?

2) $\mathcal{C}_1$ est-elle toujours ultrabornologique ?

Une étude fine des espaces bornologiques tonnelés et non ultrabornologiques de M. Valdivia [25], faite au paragraphe 8, et basée sur les propriétés des ensembles universellement mesurables, permet de répondre négativement à la question 1. Par contre nous n'avons pu répondre de façon précise à la question 2. Dans tous les cas rencontrés la topologie $\mathcal{C}_1$ est ultrabornologique, sans que nous ayons pu démontrer ce fait en général (*). Cette difficulté nous a d'ailleurs amenés à étudier, au paragraphe 4, une classe très large d'espaces E, vérifiant la condition notée (S) de (4.1), et pour lesquels $\mathcal{C}_1$ est ultrabornologique et égale à $\mathcal{C}_0$; classe qui contient tous les elc E à bornologie complétante.

Le paragraphe 5 est consacré aux espaces de fonctions continues $C_c(T)$ ou $C_s(T)$, construits sur un espace complètement régulier T. On voit alors que $\mathcal{C}_1$ (égale à $\mathcal{C}_0$) est la topologie de $C_c(\upsilon T)$, ou υT est le replété (realcompactification de Hewitt) de T.

Au paragraphe 6 nous étudions les suites sous-série convergentes dans les sommes directes et dans les produits d'elc. On a toujours $G'_1(\oplus E_i) = \prod G'_1(E_i)$, tandis que la formule duale

$$G'_1\left(\prod E_i\right) = \oplus G'_1(E_i)$$

n'est vraie en général que si l'ensemble I des indices est de cardinal non mesurable, résultat comparable au théorème classique d'Ulam-Mackey relatif aux produits d'espaces bornologiques.

Enfin le paragraphe 7, préparatoire à l'étude des espaces de M. Valdivia rappelée plus haut, fournit des résultats appréciables, basés sur la mesurabilité universelle, et concernant les suites sous-série convergentes dans les réunions dénombrables d'espaces et plus particulièrement dans les limites inductives dénombrables. On y obtient, en passant, des précisions supplémentaires sur la condition (S) du paragraphe 4.

1. L'espace $G'_1(E)$.

Dans ce qui suit E désigne toujours un elc séparé. On rappelle la notion de suite "*sous-série convergente*".

(*) M. Valdivia nous a signalé, depuis, dans une communication personnelle, avoir construit un exemple qui répond de façon négative au problème 2).

1.1 DEFINITION. – *Une suite* (x_n) *de* E *est dite sous-série convergente (en abrégé ssc) si, pour toute suite strictement croissante* (n_k) *d'entiers, la série* $\sum x_{n_k}$ *est convergente dans E.*

Il est facile de vérifier qu'une telle suite (x_n) est Σ-Cauchy, c'est-à-dire satisfait à la condition de Cauchy issue de la sommabilité :

Pour tout voisinage de zéro V *dans* E, *il existe un entier* N, *tel que pour toute partie finie* $P \subset [N, +\infty)$, *on ait* $\sum_{k \in P} x_k \in V$.

On déduit de là en particulier, et ce point sera intéressant au paragraphe 2, que pour toute partie $\Delta \subset \mathbf{N}$, la famille $(x_n)_{n \in \Delta}$ est sommable dans E, ce qui permet de définir $\sum_{n \in \Delta} x_n \in E$.

Réciproquement si E est *semi-complet* toute suite (x_n) qui est Σ-Cauchy est nécessairement ssc. L'utilisation spéciale des suites ssc est donc intéressante uniquement en l'absence de semi-complétude de E.

Lorsque $E = \mathbf{R}$ (ou $E = \mathbf{C}$), il résulte de ce qui vient d'être dit qu'une suite (ξ_n) de scalaires est ssc si et seulement si c'est un élément de l'espace ℓ^1.

Par analogie avec l'espace G' de Tweddle [24], introduisons l'espace $G'_1(E)$:

1.2 DEFINITION. – *On désigne par* $G'_1(E)$ *(ou plus simplement* G'_1*) le sous-espace du dual algébrique* E^* *formé des formes linéaires* x' *sur* E *telles que, pour toute suite* (x_n) *ssc la suite* $(\langle x_n, x' \rangle)$ *soit ssc dans* **R**, *c'est-à-dire telle que* $\sum |\langle x_n, x' \rangle| < +\infty$.

Il est clair que $G'_1(E)$ contient le dual E' de E et que, d'après le théorème d'Orlicz-Pettis, $G'_1(E)$ *ne dépend que de la dualité* $\langle E, E' \rangle$. On n'esquissera pas ici l'étude des analogies et des différences qui existent entre $G'_1(E)$ et l'espace $G'(E)$ de Tweddle, renvoyant pour cela au paragraphe 3.

Désignons maintenant par $\mathcal{C}_1$ la topologie de Mackey $\tau(E, G'_1)$ sur E, associée à la dualité $\langle E, G'_1 \rangle$. Elle est évidemment plus fine que la topologie initiale de E, et même plus fine que la topologie de Mackey $\tau(E, E')$.

Pour toute suite (x_n) ssc de E désignons encore par B $[(x_n)]$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{n \in P} x_n$, où P décrit la famille des parties finies de N. Chaque B $[(x_n)]$ est évidemment $\sigma(E, G'_1)$ -borné, donc est borné pour la topologie $\mathcal{C}_1$, et a fortiori borné pour la topologie initiale de E. L'intérêt des ensemble B $[(x_n)]$ réside dans le fait qu'ils déterminent à eux seuls la topologie $\mathcal{C}_1$.

1.3 THEOREME. – *Pour qu'un disque* D *de* E *soit un voisinage de zéro pour la topologie* $\mathcal{C}_1$, *il faut et il suffit qu'il absorbe toutes les parties* B $[(x_n)]$.

Preuve. – Soit $\mathcal{C}$ la topologie (localement convexe) sur E ayant pour base de voisinages de zéro les disques D absorbant tous les ensembles B $[(x_n)]$. Déjà $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_1$. Mais tout élément $x' \in (E_{\mathcal{C}})'$ est évidemment borné sur chaque B $[(x_n)]$. Donc pour toute suite ssc (x_n) on a $\sum | < x_n, x' > | < + \infty$, autrement dit $x' \in G'_1$. Ainsi la topologie $\mathcal{C}$ est compatible avec la dualité $< E, G'_1 >$, d'où l'égalité $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$.

1.4 COROLLAIRE. – *La topologie* $\mathcal{C}_1$ *est bornologique.*

En suivant [1], désignons par $\widetilde{E}$ (resp. $\approx{E}$) l'espace bornologique (resp. ultrabornologique) associé à E et Par $E^{\cdot}$ (resp. $E^{\cdot\cdot}$) son dual. On rappelle que $E^{\cdot}$ (resp. $E^{\cdot\cdot}$) est l'espace des formes linéaires x' sur E qui sont bornées sur les bornés (resp. sur les disques bornés complétants) de E, ou ce qui revient au même, qui sont bornées sur les compacts (resp. sur les disques compacts) de E. On a évidemment

$$E' \subset E^{\cdot} \subset E^{\cdot\cdot}, \widetilde{E} = \tau(E, E^{\cdot}) \quad \text{et} \quad \overset{\approx}{E} = \tau(E, E^{\cdot\cdot}).$$

La liaison entre ces espaces et l'espace G'_1 est pour l'instant concrétisée (assez grossièrement toutefois) par :

1.5 PROPOSITION. – *On a* $E^{\cdot} \subset G'_1 \subset E^{\cdot\cdot}$.

Preuve. – Il est clair que l'on a $E^{\cdot} \subset G'_1$ puisque la topologie $\mathcal{C}_1$ est bornologique. Montrons qu'une forme linéaire $x' \in G'_1$ est élément de $E^{\cdot\cdot}$, c'est-à-dire est bornée sur tout disque borné complétant B de E. Sinon il existerait une suite (x_n) dans B telle que

$$| < x_n, x' > | \geqslant n^3 ;$$

alors la suite $y_n = \frac{x_n}{n^2}$ serait ssc dans l'espace de Banach E_B, donc a fortiori dans E, et l'on aurait $| < y_n , x' > | \geqslant n$, ce qui est absurde.

1.6 COROLLAIRE. – *Si la bornologie de* E *est complétante, on a*

$$G'_1 = E^{\cdot} = E^{\cdot\cdot}.$$

On retrouve ici, précisée, la remarque faite plus haut selon laquelle l'intérêt et l'originalité de l'espace G'_1 ne peuvent intervenir qu'en l'absence de toute hypothèse de complétude sur E.

2. Liaison avec les mesures vectorielles.

D'une façon générale on désignera par $\mu : \Sigma \to E$ une *mesure* vectorielle à valeurs dans E, définie sur une *tribu* Σ construite sur un ensemble quelconque S. Si l'on a besoin de fixer la tribu Σ, on notera ca (Σ , E) l'espace de ces mesures. La notion de mesure vectorielle et celle de suite ssc étant étroitement liées, on va pouvoir obtenir une caractérisation de G'_1 en termes de mesures vectorielles, en se laissant bien entendu guider par les propriétés de l'espace G' exposées dans Tweddle [24].

Rappelons auparavant qu'entre la notion de mesure $\mu : \Sigma \to E$ et celle de fonction additive d'ensembles (fae) à valeurs dans E, existe la notion de fae *exhaustive* (voir par exemple [8], [16], [17]) définie par la condition que pour toute suite disjointe (A_n) dans Σ, on a $\mu(A_n) \to 0$. Pour le cas des fae scalaires, il y a identité entre fae bornées et fae exhaustives. Dans le cas vectoriel, toute fae exhaustive est bornée, la réciproque étant généralement fausse, mais pouvant être vraie dans certains cas (l'espace E est dit alors *exhaustif,* [7], [17]).

Cela étant on a :

2.1 THEOREME. – *Pour qu'une forme linéaire x' sur* E *soit élément de G'_1, il faut et il suffit que, pour toute mesure $\mu : \Sigma \to$* E, *la fae $x' \circ \mu$ soit bornée (ou exhaustive).*

Preuve. – La condition est nécessaire car pour toute suite disjointe (A_n) dans Σ la suite $(\mu(A_n))$ est ssc dans E, donc

$$\sum |< \mu(A_n), x' >| < +\infty$$

et a fortiori $(x' \circ \mu)(A_n) \to 0$. La condition est suffisante car pour toute suite (x_n) ssc dans E, l'application $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to E$, définie par

$$\mu(\Delta) = \sum_{n \in \Delta} x_n,$$

est une mesure à valeurs dans E ; donc $\nu = x' \circ \mu$ est une fae réelle bornée et il est bien connu qu'on a alors $\sum |\nu(\{n\})| \leqslant \|\nu\|$, où $\|\nu\|$ est la norme de la variation ; or $\nu(\{n\}) = < x_n, x' >$ et tout est dit.

On obtient de même une caractérisation de la topologie $\mathcal{T}_1$ en termes de mesures vectorielles :

2.2 PROPOSITION. – *$\mathcal{T}_1$ est la plus fine topologie localement convexe $\mathcal{T}$ sur E pour laquelle toute mesure $\mu : \Sigma \to E$ est une fae $\mathcal{T}$-bornée.*

Preuve. – Déjà μ est évidemment $\sigma(E, G_1')$ -bornée, donc $\mathcal{T}_1$ -bornée. Soit maintenant $\mathcal{T}$ une topologie localement convexe sur E ayant la propriété ; alors $(E_{\mathcal{T}})'$ est contenu dans G_1', donc $\mathcal{T}_1$ est plus fine que la topologie $\tau(E, (E_{\mathcal{T}})')$ et a fortiori plus fine que $\mathcal{T}$.

On en déduit le premier résultat véritablement important :

2.3 THEOREME. – *La topologie $\mathcal{T}_1$ est tonnelée (et bornologique).*

Preuve. – Elle provient du fait que les fae bornées à valeurs dans E sont les mêmes pour toutes les topologies comprises entre $\sigma(E, E')$ et $\beta(E, E')$ ([9], [10]). Or si $\mu : \Sigma \to E$ est une mesure, μ est $\sigma(E, G_1')$ -bornée donc aussi $\beta(E, G_1')$ -bornée et ainsi, avec (2.2), $\mathcal{T}_1$ est plus fine que la topologie forte $\beta(E, G_1')$. On a donc $\mathcal{T}_1 = \beta(E, G_1')$, ce qui suffit.

Remarque 1. – On voit déjà que l'espace $E_{\mathcal{T}_1}$ bien que bornologique, n'est pas, en général, l'espace bornologique $\widetilde{E}$ associé à E. Il suffit de prendre pour E un espace bornologique et non tonnelé.

Du même coup on voit aussi que l'on a $E^{\cdot} \neq G_1'$ en général. D'ailleurs symétriquement en choisissant pour E un espace tonnelé non bornologique on voit que $E_{\mathcal{C}_1}$ n'est pas non plus, en général, l'espace tonnelé E_t associé à E (pour l'espace E_t voir [20]).

Remarque 2. – Ce n'est qu'en 1971 que Valdivia [25] donna des exemples d'espaces bornologiques et tonnelés non ultrabornologiques. On montrera dans la suite de cet article, au paragraphe 8, que dans le cas des espaces E contruits par Valdivia on a

$$E \neq E_{\mathcal{C}_1} = \overset{\approx}{E} .$$

Il en résulte que $E_{\mathcal{C}_1}$ n'est pas, non plus, en général, l'espace bornologique et tonnelé E_γ associé à E (pour l'espace E_γ voir [18]).

Remarque 3. – On peut poser la question de savoir si la topologie $\mathcal{C}_1$ est toujours ultrabornologique, ou ce qui revient au même, puisque $E = \tau(E , E^{\cdot\cdot})$, si $G_1' = E^{\cdot\cdot}$ pour tout elc E. Nous n'avons pu résoudre ce problème, vraisemblablement difficile. Dans l'ignorance, nous proposons toutefois, au paragraphe 4, l'étude d'une classe (S) d'espaces E pour lesquels on a bien $G_1' = E^{\cdot\cdot}$.

3. Liaison avec l'espace G′ (E) de Tweddle.

Dans [24], Tweddle associe à chaque espace E l'espace $G' = G'(E)$ des $x' \in E^*$ tels que, pour toute suite (x_n) ssc de E on ait

$$< \sum x_n , x' > = \sum < x_n , x' >$$

et introduit sur E la topologie $\mathcal{C}_0 = \tau(E , G')$.

Il est clair que G' est un sous-espace de G_1' qui contient le dual E'. Toute la différence entre G' et G_1' provient du fait que pour une suite (x_n) ssc de E et pour $x' \in G_1'$, la série $\sum < x_n , x' >$ est bien convergente, mais ne converge pas en général vers la valeur $< \sum x_n , x' >$. Pour poursuivre la comparaison, rappelons la caractérisation de G' donnée par Tweddle, et dont on a tiré celle de G_1' en (2.1) :

3.1 THEOREME (Tweddle). – *Pour qu'une forme linéaire x' sur* E *soit élément de* G′, *il faut et il suffit que, pour toute mesure*

$$\mu : \Sigma \to E,$$

la fae $x' \circ \mu$ soit une mesure.

Exemple 1. – Désignons par $E = \ell^\infty_\tau$ l'espace $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbf{N})$ muni de la topologie de Mackey $\tau(\ell^\infty, \ell^1)$. C'est un elc complet, semi-réflexif (et même b-réflexif au sens de [2]) et non infratonnelé. On a $E^{\cdot} = E^{\cdot\cdot} = [\ell^\infty]'$, de sorte que $\widetilde{E} = \widetilde{\widetilde{E}} = \ell^\infty$ et $G'_1 = [\ell^\infty]'$. Or $G' = \ell^1$: en effet un élément $\lambda \in G'$ est a priori élément de G'_1, donc s'identifie déjà à une fae bornée sur la tribu $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbf{N})$. Mais cette fae bornée λ est en réalité une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, donc un élément de ℓ^1. Pour le voir considérons l'application

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to E,$$

définie par $\mu(\Delta) = 1_\Delta$, qui est une $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$-mesure, donc aussi une mesure à valeurs dans E d'après le théorème d'Orlicz-Pettis ; mais alors $\lambda \circ \mu$ est une mesure et il est immédiat que $\lambda \circ \mu = \lambda$. On a finalement là un exemple d'espace E pour lequel

$$E' = G' \neq E^{\cdot} = G'_1 = E^{\cdot\cdot}.$$

Pour préciser un peu mieux les liens qui existent toutefois entre G' et G'_1, on peut chercher à comparer la topologie $\mathcal{T}_1 = \tau(E, G'_1)$ à celle de Tweddle $\mathcal{T}_0 = \tau(E, G')$.

3.2 THEOREME. – *Tout disque absorbant* D *de* E, *universellement mesurable pour la topologie $\mathcal{T}_0$, est un voisinage de zéro pour la topologie $\mathcal{T}_1$.*

Preuve. – D'après (1.3) il suffit de montrer que D absorbe les parties $B[(x_n)]$ associées aux suites (x_n) ssc de E. Raisonnons par l'absurde en supposant que D n'absorbe par une telle partie $B[(x_n)]$. On peut alors trouver une suite disjointe (P_n) de parties finies de $\mathbf{N}$ telle que

$$y_n = \sum_{k \in P_n} x_k \notin n\mathrm{D}$$

Comme la suite (y_n) est elle-même ssc, on peut donc en réalité supposer, en remplaçant (x_n) par (y_n), qu'il existe une suite (x_n) ssc telle que $x_n \notin n\,\mathrm{D}$ pour tout $n \geqslant 0$.

En suivant maintenant une idée de Christensen [6], introduisons le groupe abélien à deux éléments $\mathrm{G} = \{0,1\}$, avec sa loi habituelle, puis le groupe compact produit $\mathrm{K} = \mathrm{G}^{\mathrm{N}}$. On définit une application $f : \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ en posant $f(\overline{e}) = \sum e_n x_n$ pour tout élément $\overline{e} = (e_n) \in \mathrm{K}$, ce qui a bien un sens puisque la suite (x_n) est ssc dans E. Montrons que f est continue pour la topologie $\mathscr{C}_0$ sur E. Cela provient du fait que la suite (x_n) est aussi ssc pour $\mathscr{C}_0$ comme il résulte de [24] : alors pour tout voisinage de zéro disqué V pour $\mathscr{C}_0$, il existe un entier N tel que $\sum\limits_{n \in \mathrm{P}} x_n \in \mathrm{V}$ pour toute partie finie $\mathrm{P} \subset \,]\,\mathrm{N}\,, +\infty)$. Fixons $\overline{a} = (a_n) \in \mathrm{K}$ et soit $\mathrm{U_N}$ l'ensemble des $\overline{e} \in \mathrm{K}$ tels que $e_n = 0$ si $n \leqslant \mathrm{N}$; $\mathrm{U_N}$ est un voisinage de l'origine dans K, donc $\overline{a} + \mathrm{U_N}$ est un voisinage de $\overline{a}$. Mais la condition $\overline{b} = (b_n) \in \overline{a} + \mathrm{U_N}$ implique alors

$$f(\overline{b}) - f(\overline{a}) = \sum_{\mathrm{N}+1}^{\infty} b_n x_n - \sum_{\mathrm{N}+1}^{\infty} a_n x_n \in 2\,\mathrm{V}$$

ce qui prouve bien la continuité de f. Puisque D est absorbant dans E, on a $\mathrm{K} = \bigcup f^{-1}(n\,\mathrm{D})$ et les ensembles $\mathrm{A}_n = f^{-1}(n\,\mathrm{D})$ sont des parties universellement mesurables de K. Il en résulte que l'un d'entre eux, soit A_m, a une mesure strictement positive pour la mesure de Haar sur K, d'où suit classiquement que $\mathrm{W} = \mathrm{A}_m - \mathrm{A}_m$ est un voisinage de l'origine dans K. On tire de là l'existence d'un entier N tel que W contienne l'ensemble $\mathrm{U_N}$ défini plus haut. Choisissons maintenant un entier $p > \mathrm{Max}\,(2\,m\,, \mathrm{N})$ et considérons l'élément $\overline{e}_p \in \mathrm{K}$ dont la seule coordonnée non nulle est celle de rang p choisie égale à 1. Alors $\overline{e}_p \in \mathrm{U_N}$ donc $\overline{e}_p \in \mathrm{W}$, et ainsi $\overline{e}_p$ peut s'écrire $\overline{e}_p = \overline{u} - \overline{v}$ avec $\overline{u} = (u_n) \in \mathrm{A}_m$ et $\overline{v} = (v_n) \in \mathrm{A}_m$; remarquons d'ailleurs que l'on a $u_n = v_n$ si $n \neq p$ et $u_p \neq v_p$. Or $f(\overline{u}) \in m\,\mathrm{D}$ et $f(\overline{v}) \in m\,\mathrm{D}$ d'où les conditions

$$\sum u_n x_n \in m\,\mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad \sum v_n x_n \in m\,\mathrm{D}$$

Par différence on en déduit $x_p \in 2\,m\,\mathrm{D}$, ce qui livre enfin la contradiction $x_p \in p\,\mathrm{D}$.

Application au théorème d'Orlicz-Pettis. – Le théorème d'Orlicz-Pettis précise que toute fae $\mu : \Sigma \to E$, définie sur une tribu Σ, et qui est une mesure pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est aussi une mesure pour la topologie $k(E, E')$ (plus fine que $\tau(E, E')$) de la convergence uniforme sur les parties faiblement relativement compactes de E'. On peut essayer d'améliorer ce résultat dans deux voies en l'étendant à des topologies sur E, soit moins fines que $\sigma(E, E')$ (voir par exemple Thomas [23]), soit plus fines que $k(E, E')$.

Pour ce dernier cas on peut alors énoncer, en liaison avec la théorie des espaces G' et G'_1 :

3.3·Proposition. – *Soit* E *un elc tel que* $G'(E) = G'_1(E)$. *Alors les mesures à valeurs dans* E *sont les mêmes pour toutes les topologies comprises entre* $\sigma(E, E')$ *et la topologie* $\mathcal{C}_1 = \tau(E, G'_1)$.

Preuve. – On remarquera déjà que $\mathcal{C}_1$ étant une topologie tonnelée on a $\mathcal{C}_1 = k(E, G'_1)$. Si maintenant μ est une $\sigma(E, E')$-mesure, c'est aussi une mesure à valeurs dans E, donc une $\sigma(E, G')$-mesure et par suite une $\mathcal{C}_0$-mesure par le théorème d'Orlicz-Pettis. L'intérêt de ce théorème est que l'hypothèse $G' = G'_1$ garantit que la topologie $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1$ est plus fine que la topologie forte $\beta(E, E')$ et même plus fine que la topologie de l'espace bornologique tonnelé E_γ [18] associé à E.

Pour obtenir un résultat dans l'autre sens, par affaiblissement des topologies, introduisons pour chaque fae $\mu : \Sigma \to E$ (Σ est toujours une tribu), l'espace $G^*(\mu)$ formé des $x' \in E^*$ tels que $x' \circ \mu$ soit une mesure scalaire. On a alors :

3.4 Lemme 1. – *L'espace* $G^*(\mu)$ *est semi-complet pour la topologie faible* $\sigma[G^*(\mu), E]$.

Preuve. – Car si une suite $x'_n \in G^*(\mu)$ converge faiblement vers un élément $x' \in E^*$, la suite des mesures $x'_n \circ \mu$ converge simplement sur Σ vers la fae $x' \circ \mu$ et il résulte du théorème de Nikodým (voir par ex. [11] p. 160) que $x' \circ \mu$ est une mesure.

3.5. Lemme 2. – *Si* $G^*(\mu)$ *sépare* E (*ce qui est toujours le cas si* μ *est une mesure dans* E) *et si l'espace* $F = \tau[E, G^*(\mu)]$ *est tel* *que* $G'(F) = G'_1(F)$, *alors* F *est bornologique et tonnelé et* $G^*(\mu)$ *est quasi-complet pour la topologie* $\sigma[G^*(\mu), E]$.

Preuve. – On a $F' = G^*(\mu)$, donc μ est une $\sigma(F, F')$-mesure donc une mesure dans F. Il en résulte que $G'(F)$ est contenu dans $G^*(\mu) = F'$, d'où l'égalité $G'_1(F) = G^*(\mu)$, ce qui suffit.

Pour utiliser ce dernier lemme rappelons, [19], qu'un elc E est dit B_r *-complet* lorsqu'un sous-espace vectoriel $Z \subset E'$ dense dans E'_σ est fermé dans E'_σ (donc $Z = E'$) dès que toute intersection $Z \cap H$ avec toute partie équicontinue H de E' est fermée dans H pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Tout espace de Fréchet est B_r-complet et tout espace B_r-complet est complet.

3.6 THEOREME. – *Soit* E *un elc* B_r*-complet et soit* $\mathcal{S}$ *une topologie localement convexe sur* E, *séparée et moins fine que* $\sigma(E, E')$. *Alors toute fae* $\mu : \Sigma \to E$, *qui est une* $\mathcal{S}$*-mesure telle que l'espace* $G^*(\mu)$ *soit quasi-complet pour la topologie* $\sigma[G^*(\mu), E]$ *est en réalité une mesure dans* E.

Preuve. – Il suffit de prouver que μ est une $\sigma(E, E')$-mesure, c'est-à-dire que $E' \subset G^*(\mu)$. Déjà $G^*(\mu)$ contient le dual $(E_{\mathcal{S}})'$, qui est partout dense dans E'_σ puisque $\mathcal{S}$ est séparée, donc $G^*(\mu)$ sépare E et l'espace $Z = E' \cap G^*(\mu)$ est dense dans E'_σ. Il suffit donc de prouver que $Z \cap H$ est fermé dans E'_σ pour chaque partie H équicontinue faiblement fermée ; or si $x'_i \in Z \cap H$ est une suite généralisée qui converge faiblement vers $x' \in E^*$, on a $x' \in H$ puisque H est faiblement compacte et $x' \in G^*(\mu)$ puisque x'_i décrit une partie faiblement bornée de $G^*(\mu)$, donc en résumé $x' \in Z \cap H$ et tout est dit.

Remarque 4. – La condition que $G^*(\mu)$ soit faiblement quasi-complet n'est pas toujours réalisée bien entendu. Par exemple si $E = \ell^\infty = \ell^\infty(N)$ (E est donc B_r-complet) et si $\mathcal{S}$ est la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, on a vu que l'application $\mu : \Delta \to 1_\Delta$, de $\Sigma = \mathcal{P}(N)$ dans E, est une $\mathcal{S}$-mesure sans être une mesure dans E (car $\|\mu(\{n\})\| = 1$). Dans ce cas l'espace $F = \tau(E, G^*(\mu))$ est tel que $G'(F) \neq G'_1(F)$.

4. La condition (S).

On considère ici une classe particulière d'elc E pour lesquels on a $G'_1 = E^{\cdot\cdot}$. Pour cela on introduit la condition :

4.1 DEFINITION. – *On dit que* E *vérifie la condition* (S) *lorsque pour toute suite* (x_n) *ssc de* E *et pour toute suite* $\overline{a} = (a_n) \in \ell^1$, *la suite* $(a_n x_n)$ *est ssc dans E.*

Il est immédiat, ce qui assurera la liaison avec (1.6) que tout elc E dont la bornologie est complétante vérifie la condition (S).

D'ailleurs, dire que E vérifie la condition (S) est en réalité une propriété de la dualité $< E , E' >$. On a même mieux, comme on voit en utilisant (3.1) et le théorème d'Orlicz-Pettis :

4.2 PROPOSITION. – *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *La topologie* $\sigma(E , E')$ *vérifie la condition* (S) ;

b) *La topologie* $\mathscr{C}_0 = \tau(E , G')$ *vérifie la condition* (S).

Donnons maintenant une caractérisation de cette condition (S).

4.3 THEOREME. – *Pour que* E *vérifie la condition* (S) *il faut et il suffit que pour toute suite* (x_n) *ssc dans* E, *l'enveloppe disquée fermée* $\overline{\Gamma}\,[(x_n)]$ *soit faiblement compacte.*

Preuve. – La condition est nécessaire car si E vérifie (S), on peut définir l'application $f : \ell^1(N) \to E$ par $f(\overline{a}) = \sum a_n x_n$. Il est facile de vérifier (puisque $x_n \to 0$ dans E) que f est continue pour les topologies $\sigma(\ell^1 , c_0)$ et $\sigma(E , E')$, et d'en déduire que l'image par f de la boule unité de ℓ^1 (qui est compacte et métrisable pour $\sigma(\ell^1 , c_0)$) est un disque faiblement compact (et faiblement métrisable) de E, d'ailleurs justement égal à $\overline{\Gamma}\,[(x_n)]$.

La condition est suffisante car si $\overline{a} = (a_n) \in \ell^1$ est choisie telle que $\| \overline{a} \| \leqslant 1$, on a $\sum\limits_{n \leqslant N} a_n x_n \in \overline{\Gamma}\,[(x_n)]$ pour tout entier N, donc il suffit de prouver que la suite $(a_n x_n)$ est Σ-Cauchy pour $\sigma(E , E')$, ce qui résulte des inégalités

$$| < \sum_{N}^{M} a_n x_n , x' > | \leqslant \sum_{N}^{M} | a_n | \, | < x_n , x' > | \leqslant \sum_{N}^{M} | < x_n , x' > |$$

et de la convergence de la série $\sum |<x_n , x'>|$.

Passons maintenant au théorème justifiant l'introduction de la condition (S).

4.4 THEOREME. – *On suppose que* E *vérifie la condition* (S). *Relativement à une forme linéaire* x' *sur* E *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $x' \in G_1'$;

b) $x' \in E^{\cdot\cdot}$;

c) *Pour tout compact* K *et toute application linéaire faiblement compacte* $\mu : C(K) \to E$, *l'application composée* $x' \circ \mu$ *est continue (autrement dit une mesure de Radon sur* K).

d) *Pour toute application linéaire faiblement compacte* $\mu : \ell^\infty \to E$ *l'application composée* $x' \circ \mu$ *est continue.*

Preuve. – On a évidemment a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c), et c) $\Rightarrow$ d) puisque $\ell^\infty = C(\beta N)$, où βN est le compactifié de Stone-Cêch de **N**. Montrons d) $\Rightarrow$ a) : sinon il existe une suite (x_n) ssc dans E telle que

$$<x_n , x'> \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum <x_n \ x'> = +\infty.$$

En regroupant au besoin les termes de la série (ce qui ne change pas le caractère ssc), on peut supposer $<x_n , x'> \geqslant n\, 2^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour toute suite $\bar{\xi} = (\xi_n) \in \ell^\infty$, la suite $(2^{-n}\, \xi_n)$ est élément de ℓ^1, donc la suite $(2^{-n}\, \xi_n\, x_n)$ est ssc dans E d'après la condition (S). On peut ainsi définir l'application $\mu : \ell^\infty \to E$ en posant

$$\mu(\bar{\xi}) = \sum_1^\infty 2^{-n}\, \xi_n\, x_n.$$

Il est clair que μ envoie la boule unité de ℓ^∞ dans l'enveloppe disquée fermée $\overline{\Gamma}[(x_n)]$, donc μ est bien faiblement compacte. Alors $x' \circ \mu$ est continue, ce qui est manifestement contredit par les conditions :

$$(x' \circ \mu)(1_{\{n\}}) = 2^{-n} <x_n , x'> \geqslant n.$$

Remarque 5. – La condition c) signifie que x' transforme toute mesure de Radon prolongeable (au sens de Thomas [22]) à valeurs dans E en une mesure de Randon scalaire. Peut-on en déduire pour autant que x' est élément de G' ? La réponse est négative comme on voit avec l'exemple 1, où l'espace $E = \ell^\infty_T$ vérifie la condition (S) (puisqu'il est complet), et où cependant

$$G' = E' = \ell^1 \qquad \text{et} \qquad G'_1 = E^{\cdot\cdot} = [\ell^\infty]'.$$

5. Le cas des espaces de fonctions continues.

Soit T un espace complètement régulier et soit C (T) l'espace de toutes les fonctions continues sur T. On place sur C (T) une topologie $\mathcal{C}$ localement convexe intermédiaire entre celle de la convergence simple sur T (donnant l'espace C_s (T)) et celle de la convergence compacte sur le replété v T de T (donnant l'espace C_c (v T)). On renvoie à [3], [4] et [21] pour des notions plus détaillées sur ces topologies. On se propose ici de caractériser les espaces G' et G'_1 associés à $C_{\mathcal{C}}$ (T).

5.1 PROPOSITION. – *Soit* K *un espace compact. Les espaces* C (K) *et* C_s(K) *ont les mêmes suites ssc.*

Preuve. – C'est un résultat de Labuda [16].

5.2 THEOREME. – *Les espaces* C_s (T), $C_{\mathcal{C}}$ (T) *et* C_c (v T) *ont les même suites ssc.*

Preuves. – Il suffit de prouver que toute suite (f_n) ssc dans C_s (T) est aussi ssc dans C_c (v T). Or elle est déjà ssc dans C_s (v T), car pour tout élément $u \in v$ T on sait qu'il existe un point $t \in$ T tel que $u(f_n) = f_n^v(u) = f_n(t)$ pour tout t. On termine avec (5.1), qui permet de passer de C_s (v T) à C_c (v T).

Rappelons [21] que C_c(v T) est toujours ultrabornologique, donc avec (5.2) :

5.3 COROLLAIRE. – *On a* $G'[C_{\mathcal{C}}(T)] = G'_1 \; [C_{\mathcal{C}} \; (T)] = C_c(v\,T)'$ *pour toutes les topologies* $\mathcal{C}$ *considérées et cet espace commun est l'espace des mesures de Radon sur* β T *(compactifié de Stone-Cêch de* T*) à support contenu dans* v T.

Il en résulte en particulier que les topologies $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ associées à $\mathcal{T}$ sont égales à celle de $C_c(\upsilon T)$, donc sont ultrabornologiques ; on retrouve ainsi que $C_c(\upsilon T)$ est l'espace ultrabornologique associé à tous les $C_{\mathcal{T}}(T)$ [13].

Exemple 2. – Si l'on pose $E = C_s(T)$ on a alors $\widetilde{E} = C_s(\upsilon T)$ et $\widetilde{\widetilde{E}} = C_c(\upsilon T)$, d'où les égalités :

$$E' = C_s(T)' \subset E^{\cdot} = C_s(\upsilon T)' \subset G' = G_1' = E^{\cdot\cdot} = C_c(\upsilon T)'.$$

Remarque 6. – On sait que $E = C_s(T)$ n'est pas en général à bornologie complétante (la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que T soit un P-espace [4]). Mais possède t-il la propriété (S) ?

Exemple 3. – Dans le cas particulier où T est un espace discret I, on a $C_s(T) = \mathbf{R}^I$ et $C_c(\upsilon I) = C_s(\upsilon I)$ (car I étant P-espace, il en est de même de υI, donc les compacts de υI sont finis). D'où la formule

$$G_1'(\mathbf{R}^I) = C_s(\upsilon I)'$$

qui ne se réduit à $G_1'(\mathbf{R}^I) = \mathbf{R}^{(I)}$ (somme directe de I exemplaires de $\mathbf{R}$) que si $I = \upsilon I$, c'est-à-dire si le cardinal de I est *non mesurable au sens de* [12], autrement dit inférieur strictement au premier cardinal mesurable (s'il existe !)

6. Produits et sommes directes.

On étudie ici les suites ssc dans un produit $E = \prod E_i$ ou dans une somme directe $\oplus E_i$

Etant donné une famille quelconque $(E_i)_{i\in I}$ d'elc séparés, désignons par $\oplus E_i$ sa somme directe munie de la topologie localement convexe somme directe, et par $\oplus_\Pi E_i$ le même espace mais muni de la topologie (moins fine) induite par celle du produit $\prod E_i$.

Pour simplifier l'écriture utilisons la notation fonctionnelle en notant $x = (x(i))$ un élément du produit $\prod E_i$.

Désignons par $\operatorname{supp} x = \{i \,; x(i) \neq 0\}$ le support de x. On a alors :

6.1 THEOREME. – *Soit* (x_n) *une suite de* $\oplus E_i$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *La suite* (x_n) *est ssc dans* $\oplus E_i$;

b) *Elle est ssc dans* $\oplus_\Pi E_i$;

c) *Il existe une partie finie* $J \subset I$ *telle que* supp $x_n \subset J$ *pour tout n, et pour chaque* $i \in I$ *la suite* $(x_n(i))$ *est ssc dans* E_i.

Preuve. – On a évidemment c) ⇒ a) ⇒ b). Le point délicat est la preuve de l'existence de la partie finie J sous l'hypothèse b). Commençons par montrer qu'il existe une partie finie L telle que, pour tout $i \notin L$, l'ensemble $A_i = \{n\,; x_n(i) \neq 0\}$ soit fini. Supposons le contraire et soit $x_{n_1} \neq 0$; il existe $i_1 \in I$ et une semi-norme p_1 sur E_{i_1} tels que $p_1(x_{n_1}(i_1)) = a_1 > 0$. Il existe alors $i_2 \notin \operatorname{supp} x_{n_1}$ tel que l'ensemble $A_{i_2} \neq \{n\,; x_n(i_2) \neq 0\}$ soit infini. Comme la suite (x_n) tend vers zéro dans $\oplus_\Pi E_i$, on voit qu'il existe un entier $n_2 \in A_{i_2}$ vérifiant

$$p_1(x_{n_2}(i_1)) \leqslant 2^{-2} a_1$$

Fixons alors une semi-norme p_2 sur E_{i_2} telle que

$$p_2(x_{n_2}(i_2)) = a_2 > 0.$$

De proche en proche on construit ainsi des suites (i_r), (x_{n_r}), (p_r), et (a_r) vérifiant :

α) $p_r(x_{n_r}(i_r)) = a_r > 0$

β) $x_{n_r}(i_s) = 0$ pour $s > r$

γ) $p_r(x_{n_s}(i_r)) \leqslant 2^{-s} a_r$ pour $s > r$

Posons $x = \sum x_{n_r}$, où la série converge dans $\oplus_\Pi E_i$, de sorte que $x(i) = \sum x_{n_r}(i)$ pour chaque i. On a donc :

$$p_r(x(i_r)) = p_r\Big[\sum_{s \geqslant r} x_{n_s}(i_r)\Big] \geqslant a_r - \sum_{s > r} 2^{-s} a_r \geqslant \frac{1}{2} a_r$$

d'où $x(i_r) \neq 0$ pour tout $r \geqslant 1$, ce qui est manifestement absurde.

L'existence de l'ensemble fini L étant ainsi prouvée, montrons l'existence de l'ensemble fini J. Pour cela il suffit de prouver que l'ensemble $I_0 = \{i \notin L\,; A_i \neq \phi\}$ est fini (ce qui permet le choix $J = L \cup I_0$). Supposons le contraire. Fixons $i_1 \in I_0$ et $n_1 \in A_{i_1}$. L'ensemble A_{i_1} étant fini (car $I_0 \subset \complement L$), on peut choisir $i_2 \in I_0$

tel que $i_2 \notin \operatorname{supp} x_n$ pour tout $n \in A_{i_1}$; ce qui signifie encore que la condition $x_n(i_1) \neq 0$ implique la condition $x_n(i_2) = 0$. En choisissant alors $n_2 \in A_{i_2}$ on réalise donc les deux conditions $x_{n_2}(i_2) \neq 0$ et $x_{n_1}(i_2) = x_{n_2}(i_1) = 0$. De proche en proche on peut ainsi construire deux suites (i_r) et (n_r) vérifiant $x_{n_r}(i_r) \neq 0$ et $x_{n_r}(i_s) = 0$ pour $s \neq r$. Alors le point $x = \sum x_{n_r}$ de $\oplus E_i$ est tel que $x(i_r) \neq 0$ pour tout r, ce qui est absurde.

On tire de là :

6.2 THEOREME. — *On a les formules de dualité :*

a) $G'(\oplus E) = G'(\oplus_\Pi E_i) = \prod G'(E_i)$

b) $G_1'(\oplus E_i) = G_1'(\oplus_\Pi E_i) = \prod G_1'(E_i)$.

Preuve. — Elle provient du résultat immédiat suivant :

6.3 PROPOSITION. — *Soit* $E = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$ *un produit fini d'elc. On a alors :*

a) $G'(E) = \prod G'(E_i)$

b) $G_1'(E) = \prod G_1'(E_i)$.

On peut maintenant se demander si ces formules subsistent lorsqu'on remplace un produit fini par un produit quelconque $E = \prod_{i \in I} E_i$, à condition bien entendu de remplacer les seconds membres par $\oplus G'(E_i)$ et $\oplus G_1'(E_i)$. L'exemple 3 montre qu'il n'en est rien si card I est mesurable. Lorsque card I est non mesurable on a :

6.4 THEOREME. — *Si le cardinal de* I *est non mesurable alors pour tout produit* $E = \prod_{i \in I} E_i$ *on a :*

a) $G'(E) = \oplus G'(E_i)$

b) $G_1'(E) = \oplus G_1'(E_i)$.

Preuve. — Explicitons quelque peu les isomorphismes qui interviennent. Désignons par j_i et p_i l'injection canonique $j_i : E_i \to E$ et la projection canonique $p_i : E \to E_i$, en nous plaçant d'ailleurs provisoirement dans le cas où I est quelconque. Définissons les applications linéaires :

$$\begin{cases} J : \oplus G'_1(E_i) \to G'_1(E) \\ P : G'_1(E) \to \oplus G'_1(E_i) \end{cases}$$

par :

$$< x, J z' > = \sum < x(i), z'(i) > \qquad \text{pour} \qquad x \in E \qquad (1)$$

$$Px' = z' = (z'(i)) \qquad \text{avec} \qquad z'(i) = x' \circ j_i. \qquad (2)$$

[On vérifie facilement que J opère bien de $\oplus G'_1(E_i)$ dans $G'_1(E)$ et que chaque $z'(i) = x' \circ j_i$ de la formule (2) est bien dans $G'_1(E_i)$. Il n'est toutefois pas évident que supp z' soit fini ; supposons le contraire, il existe alors une suite (i_n) telle que $z'(i_n) \neq 0$, donc des éléments $x_{i_n} \in E_{i_n}$ tels que $< j_{i_n} x_{i_n}, x' > = 1$ pour tout n. Or la suite $(j_{i_n} x_{i_n})$ est ssc dans le produit E, ce qui fournit l'absurdité cherchée].

Il est clair que J est injective, que P est une projection (quand on identifie J à une injection canonique) et que PJ est l'identité sur l'espace $\oplus G'_1(E_i)$. Mais on ne peut garantir que JP soit l'identité sur l'espace $G'_1(E)$, et tout le problème est là. Si l'on fixe $x' \in G'_1(E)$ et si l'on pose $z' = Px'$ alors l'élément $y' = x' - Jz' = x' - JPx'$ s'annule sur chaque élément $j_i x$, autrement dit $y' \in G'_1(E)$ s'annule sur la somme directe $\oplus E_i$.

Le théorème revient donc à montrer que, sous l'hypothèse que card I est non mesurable, il n'existe aucun élément non nul $x' \in G'_1(E)$ qui s'annule sur $\oplus E_i$. Supposons le contraire et soit $x \in E$ tel que $< x, x' > \neq 0$. Alors $I_0 = \text{supp}\, x$ est infini et card I_0 est non mesurable. Le sous-espace $F = \prod \mathbf{R}\, x(i)$ de E est isomorphe à $\mathbf{R}^{I_0}$ et la restriction $X' = x'_{|F}$ de x' est un élément de $G'_1(F)$ qui s'annule sur la somme directe $\oplus \mathbf{R}\, x(i)$, isomorphe à $\mathbf{R}^{(I_0)}$; on a donc $X' = 0$ d'après ce qu'on a vu à l'exemple 3, ce qui est absurde puisque $x \in F$ et que $< x, x' > \neq 0$. On a ainsi prouvé la formule b) ; on démontrerait a) de la même manière.

Remarque 7. – On a ainsi démontré que si $G'_1(\mathbf{R}^I) = \mathbf{R}^{(I)}$ (ce qui équivaut à $\upsilon I = I$, c'est-à-dire à card I non mesurable) alors la formule b) est vérifiée. On peut montrer la réciproque sour l'hypothèse évidemment que les E_i soient tous non nuls. On obtient d'ailleurs là des résultats très analogues aux résultats d'Ulam-Mackey sur le comportement des produits d'espaces bornologiques ou ultrabornologiques.

Exemple 4. – Pour terminer ce paragraphe, donnons un nouvel exemple utilisant principalement le théorème (6.2). Fixons $I = N$ et soit $k = \mathbf{R}^{(N)}$ l'espace des suites à support fini. Désignons par $k_s = \mathbf{R}^{(N)}_{\Pi}$ l'espace k muni de la topologie de la convergence simple sur N (il est dense dans $\mathbf{R}^N$) et par k_u l'espace k muni de la norme uniforme (il est dense dans c_0). D'après (6.2) on a $G'(k_u) = G'(k_s) = \mathbf{R}^N$. D'où en résumé :

a) Si $E = k_s$ alors $E' = E^{\cdot} = k$ et $G' = G'_1 = E^{\cdot\cdot} = E^* = \mathbf{R}^N$.

b) Si $E = k_u$ alors $E' = E^{\cdot} = \ell^1$ et $G' = G'_1 = E^{\cdot\cdot} = E^* = \mathbf{R}^N$.

7. Limites inductives dénombrables.

On considère un elc (séparé) E, limite inductive d'une suite d'elc (E_n), $E = \varinjlim E_n$. On se propose d'étudier les suites ssc de E. Pour simplifier on supposera que les E_n sont des sous-espaces vectoriels de E, chacun d'eux étant alors muni d'une topologie propre qui n'est pas nécessairement celle induite par E. Mais en fait cette situation n'a rien d'obligatoire et les résultats obtenus se transposent facilement au cas général.

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé T est dite universellement mesurable si, pour tout compact K de T, $A \cap K$ est mesurable pour toute mesure de Radon sur K. On a alors un premier résultat, très simple et très général :

7.1 Proposition. – *Soit* E *un elc et soit* (E_k) *une suite de sous-espaces vectoriels de* E, *supposés universellement mesurables dans* E. *On considère une suite* (x_n) *ssc dans* E *telle que*

$$\overline{B[(x_n)]} \subset \cup E_k .$$

Alors il existe un entier k_0 *tel que* $x_n \in E_{k_0}$ *sauf peut-être pour un ensemble fini d'entiers* n.

Preuve. – Elle est analogue à celle de (3.2). Avec les mêmes notations on considère la fonction $f : \overline{e} \to \sum e_n x_n$, du groupe compact $K = \{0,1\}^N$ dans E, et on remarque que $f(\overline{e})$ est toujours élément de l'adhérence $\overline{B[(x_n)]}$. Il n'y a plus qu'à introduire les parties $A_k = f^{-1}(E_k)$, qui sont universellement mesurables dans K et telles que $K = \cup A_k$, et conclure comme en (3.2).

Remarque 8. – On a évidemment $B[(x_n)] \subset f(K)$ donc

$$\overline{B[(x_n)]} = f(K)$$

et ainsi $\overline{B[(x_n)]}$ est exactement l'ensemble des somme $\sum x_{n_k}$ quand la suite (n_k) varie de façon quelconque.

Remarque 9. – On peut retrouver comme application le théorème (6.1) démontré alors par des voies élémentaires. En effet si (x_n) est une suite ssc dans $\oplus_\Pi E_i$, il existe une suite d'indices i_k telle que (x_n) soit contenue dans la somme directe partielle $\oplus_\Pi E_{i_k} = F$. Comme les conditions

$$x_n \in F \qquad \text{et} \qquad \sum x_n \in \oplus_\Pi E_i$$

impliquent $\sum x_n \in F$ [car la convergence de $\sum x_n$ se faisant dans $\prod E_i$, on a $(\sum x_n)(i) = \sum x_n(i)$] on voit que la suite (x_n) est en fait ssc dans F. On ramène ainsi le problème à une somme directe dénombrable, et la proposition fournit l'implication b) $\Rightarrow$ c) du théorème (6.1).

On tire de la proposition (7.1) un théorème semblable au théorème A p. 16 [14] de Grothendieck.

7.2 THEOREME. – *Soient* E *un elc,* (E_k) *une suite de sous-espaces vectoriels universellement mesurables de* E, F *un espace de Fréchet et* $u : F \to E$ *une application linéaire continue pour la topologie de* F *et la topologie faible* $\sigma(E, E')$ *de* E. *On suppose* $u(F) \subset \cup E_k$. *Alors il existe un entier* k_0 *tel que* $u(F) \subset E_{k_0}$.

Preuve. – Supposons d'abord la suite (E_k) croissante. L'hypothèse $u(F) \not\subset E_n$ pour tout n implique l'existence d'une suite $x_n \in F$ telle que $u(x_n) \notin E_n$. L'espace F étant métrisable il existe une suite $\lambda_n > 0$ telle que $\lambda_n x_n \to 0$ et, F étant complet, la suite

$$y_n = 2^{-n} \lambda_n x_n$$

est ssc dans F. La suite $z_n = u(y_n)$ est donc ssc dans l'espace faible E_σ, donc aussi dans E et, d'après la remarque 8, on a bien

$$\overline{B[(z_n)]} \subset u(F).$$

Donc, d'après (7.1), il existe k_0 et N tels que $u(x_n) \in E_{k_0}$ pour tout

$n \geqslant \mathrm{N}$, ce qui fournit la contradiction grâce à la croissance de la suite (E_k). Dans le cas général on obtient seulement que $u\,(\mathrm{F})$ est contenu dans une réunion finie $\bigcup_{k \in \mathrm{J}} \mathrm{E}_k$; mais $u\,(\mathrm{F})$ étant sous-espace vectoriel de E est en réalité contenu dans l'un des E_k.

En fait ce résultat ne redonne pas celui cité de Grothendieck, relatif au cas où les E_k sont des espaces de Fréchet. En effet l'image continue d'un espace de Fréchet dans E peut ne pas être universellement mesurable. D'un autre côté il est plus général puisqu'il s'applique par exemple quand les E_k sont sousliniens, ou quand ils sont des sous-espaces topologiques de E de type $(\mathcal{M})$ (au sens de Grothendieck), c'est-à-dire des espaces semi-Montel, car alors, pour tout compact K de E, l'intersection $\mathrm{K} \cap \mathrm{E}_k$ est compacte dans E.

Dans le cas considéré par Grothendieck l'application u est même continue de F dans E_{k_0}. Nous ignorons si c'est le cas ici. Mais nous pouvons remédier à cet inconvénient en examinant une situation un peu plus restrictive.

7.3 THEOREME. – *Les hypothèses de* (7.2) *étant conservées, on suppose de plus que chaque espace* E_k *a un système fondamental de voisinages de zéro formé de disques universellement mesurables dans* E *(a fortiori* E_k *est donc universellement mesurable dans* E). *Alors il existe un entier* k_0 *tel que* $u\,(\mathrm{F}) \subset \mathrm{E}_{k_0}$. *l'application*

$$u : \mathrm{F} \to \mathrm{E}_{k_0}$$

étant continue.

Preuve. – L'inclusion $u\,(\mathrm{F}) \subset \mathrm{E}_{k_0}$ provient de (7.2). Quant à la continuité de $u : \mathrm{F} \to \mathrm{E}_{k_0}$, c'est une conséquence du fait [13] que dans un espace de Fréchet tout disque absorbant universellement mesurable est un voisinage de zéro.

7.4 COROLLAIRE. – *Les* E_k *vérifiant toujours les hypothèses de* (7.3), *on suppose de plus que la suite* (E_k) *est croissante et de réunion* E. *Alors pour toute suite* (x_n) *ssc de* E *qui est complétante (c'est-à-dire contenue dans un disque borné complétant de* E), *il existe un entier* k_0 *tel que* (x_n) *soit une suite ssc complétante de* E_{k_0}.

Donnons encore un autre résultat, un peu plus particulier, mais intéressant par la remarque qui suit.

7.5 PROPOSITION. – *On suppose que* $E = \varinjlim E_k$ *est la limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces* E_k, *munis de structures propres d'espaces de Banach, les injections* $E_k \to E_{k+1}$ *étant continues. On suppose de plus que les boules unité* B_k *des* E_k *sont universellement mesurables dans* E *(ce qui est le cas si les* E_k *sont séparables). Alors* E *vérifie la condition* (S).

Preuve. – On peut aisément supposer $B_k \subset B_{k+1}$. Puisque

$$E = \cup\, k\, B_k$$

on voit, en reprenant la preuve de (7.1), que toute suite (x_n) ssc de E est contenue dans un disque $2\, k_0\, B_{k_0}$, donc est a fortiori bornée dans l'espace E_{k_0}. Il suit de là que l'application $u : \ell^1 \to E_{k_0}$, définie par $u\,(\bar{a}) = \sum a_n\, x_n$, est linéaire et continue. La suite $(a_n\, x_n)$ est donc ssc dans E_{k_0} et par suite aussi dans E, ce qui signifie que E vérifie la condition (S).

Remarque 10. – On peut voir à partir de là que E peut vérifier la condition (S) sans que les suites convergentes de E soient incluses dans des disques bornés complétants de E. En effet Köthe [15] donne p. 434, l'exemple d'une limite inductive $E = \varinjlim E_k$, où les E_k sont des espaces de Banach séparables, telle qu'il existe un borné A de E qui n'est absorbé par aucun des espaces E_k. Dans ce cas E vérifie la condition (S) et il est facile de construire une suite convergente vers zéro dans E et non absorbée par chacun des E_k.

Remarque 11. – On ignore si la proposition (7.5) reste vraie lorsqu'on ne suppose plus que les boules B_k sont universellement mesurables dans E. Plus généralement on ignore même s'il existe des espaces ultrabornologiques ne vérifiant par la condition (S). (*)

Avant d'étudier, au paragraphe 8. les suites ssc dans les espaces introduits par Valdivia, donnons quelques théorèmes qui se rattachent aux méthodes exposées ici.

(*) M^r et M^me P. Dierolf nous ont, depuis, communiqué l'exemple d'un tel espace.

On fixe un elc E, un sous-espace F_0 de E de codimension dénombrable, un supplémentaire G de F_0 dans E et une base algébrique $(e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$ de G. Notons G_k l'espace engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ et posons $F_k = F_0 \oplus G_k$. On a alors, avec (7.1) :

7.6 PROPOSITION. – *Si les espaces* F_k *sont universellement mesurables dans* E, *alors toute suite* (x_n) *ssc de E est incluse dans un espace* F_{k_0}.

Cette situation conduit au problème suivant : supposons F_0 universellement mesurable dans E ; peut-on en déduire que les espaces F_k sont universellement mesurables dans E ? C'est évidemment le cas lorsque F_0 est souslinien, ou un $K_{\sigma\delta}$, ou plus généralement lorsque c'est un espace $\mathcal{K}$-analytique, au sens de Choquet [5]. Afin d'obtenir un résultat plus général, commençons par quelques rappels concernant l'opération (A) de Souslin.

Désignons par S l'ensemble des suites finies $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ d'entiers $n_j \geqslant 1$ et par $\Sigma = (N^*)^{N^*}$ l'ensemble des suites infinies $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ d'entiers $n_k \geqslant 1$. On écrit $s \prec \sigma$ (resp. $s \prec s'$) lorsque s est une section commençante de σ (resp. de s'). Soient T un espace topologique, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_T$ la tribu des parties universellement mesurables et $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{U}$. On appelle système déterminant sur $\mathcal{H}$ toute application $\Delta : s \to H_s$ de S dans $\mathcal{H}$ telle que $s \prec s' \Rightarrow H_{s'} \subset H_s$. On prolonge l'application Δ à l'ensemble Σ en posant $H_\sigma = \bigcap\limits_{s \prec \sigma} H_s$; H_σ est alors élément de $\mathcal{U}$ et n'appartient plus nécessairement à $\mathcal{H}$. En fait on n'utilisera pas ici systématiquement l'ensemble Σ, ce qui va introduire une différence, utile pour la suite, avec les définitions données par Choquet [5]. Introduisons sur Σ sa topologie naturelle d'espace produit et fixons une partie borélienne Σ' de Σ. On appelle alors Σ'-noyau du système déterminant $\Delta = (H_s)$, l'ensemble $H_{\Sigma'}(\Delta) = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma'} H_\sigma$. Les ensembles de la forme $H_{\Sigma'}(\Delta)$, quand Δ varie, sont appelés $(\mathcal{H}, \Sigma')$-sousliniens. On a alors les théorèmes suivants, conséquences d'un résultat récent de Sainte-Beuve :

7.7 THEOREME ([13], th. 1.7). – *Tout ensemble* $(\mathcal{H}, \Sigma')$-*souslinien est universellement mesurable dans T.*

7.8 THEOREME ([13], th. 1.9). – *Soit* E *un elc. On prend pour* $\mathcal{H}$ *la famille* $\mathfrak{F}$ *des fermés de* E. *On fixe un sous-espace topologique* F_0 *de* E, *non nécessairement sous-espace vectoriel. On suppose que* F_0 *est* $(\mathfrak{F}, \Sigma')$*-souslinien dans* E. *Alors pour tout fermé* V *de* F_0 *et pour tout compact* K *de* E, *l'ensemble* V + K *est* $(\mathfrak{F}, \Sigma')$*-souslinien dans* E.

En revenant aux notations de (7.6), on peut maintenant donner une réponse au problème posé alors :

7.9 COROLLAIRE. – *On suppose que* F_0 *est* $(\mathfrak{F}, \Sigma')$*-souslinien dans* E. *Alors les espaces* $F_k = F_0 \oplus G_k$. *sont universellement mesurables dans* E.

Preuve. – Il suffit de remarquer que G_k, qui est de dimension finie, est un K_σ dans E.

8. Les suites ssc dans les espaces de Valdivia.

En caractérisant les suites ssc dans les espaces bornologiques tonnelés et non ultrabornologiques introduits par Valdivia [25], on montre que l'espace $E_{\mathfrak{G}_1}$ n'est pas en général l'espace bornologique tonnelé associé à E. Rappelons brièvement la construction de Valdivia, en nous plaçant dans un cas particulier qui simplifie les notations tout en laissant bien en lumière les difficultés rencontrées. Soit $(P_m)_{m \geqslant 1}$ une suite d'espaces ultrabornologiques non réduits à (0), et soit $P = \prod P_m$ leur produit. Pour tout $x \in P$ on désigne par $x(m)$ la composante de x sur P_m et par $f_x(m)$ le nombre des entiers $k \in [1, m]$ tels que $x(k) \neq 0$. Il est facile de voir que pour chaque m la fonction $x \to f_x(m)$ est semi-continue inférieurement. On fixe une fonction φ sur $\mathbf{N}^*$, supposée croissante et telle que

$$0 < \varphi(m) \leqslant m \text{ et } \lim_{m \to +\infty} \varphi(m) = +\infty.$$

On désigne par L_φ le sous-espace de P formé des éléments x tels que $\lim_{m \to +\infty} f_x(m)/\varphi(m) = 0$. Alors L_φ est un espace ultrabornologique [25].

Fixons maintenant un élément $e_1 \in P$ tel que $e_1(m) \neq 0$ pour tout $m \geqslant 1$. On a évidemment $e_1 \notin L_\varphi$. Pour tout entier $k \geqslant 2$ on définit alors l'élément $e_k \in P$ par :

$$\begin{cases} e_k(m) = 2^{k-1}\, e_1(m) & \text{si } m = j\, 2^k\,; j = 1, 2\ldots \\ e_k(m) = e_1(m) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit G_k l'espace engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ et soit $G = \cup\, G_k$. On pose enfin $E = L_\varphi \oplus G$; alors E est bornologique tonnelé et non ultrabornologique [25], quand on le munit de la topologie induite par P.

Il s'agit, dans tout le paragraphe, d'obtenir une caractérisation des suites (x_n) ssc de E. Pour cela on commence par préciser quelque peu la situation de l'espace L_φ dans les espaces E et P.

Introduisons, dans l'ensemble Σ de toutes les suites infinies $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ d'entiers $n_k \geqslant 1$, l'ensemble Σ' des éléments σ tels que $n_k \to +\infty$. Il est immédiat que Σ' est un $F_{\sigma\delta}$ de Σ, donc a fortiori une partie borélienne. Il est immédiat aussi, compte tenu de la semi-continuité inférieure des fonctions $x \to f_x(m)$, que l'espace L_φ est un $F_{\sigma\delta}$ de P, mais cela ne nous sera pas d'un grand secours. Montrons plutôt que L_φ est un Σ'-noyau d'un système déterminant (H_s) formé de fermés de P. Il suffit de considérer pour chaque suite finie $s = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ l'ensemble

$$\Delta(s) = H_s = \{x \in P\,; f_x(i) \leqslant \frac{\varphi(i)}{n_i} \quad \text{pour tout } i \leqslant k\}$$

et de constater que $L_\varphi = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} H_\sigma$. On a donc :

8.1 Proposition. — *L'espace* L_φ *est un* $(\mathfrak{F}, \Sigma')$*-souslinien de* P, *donc aussi un* $(\mathfrak{F}, \Sigma')$*-souslinien de* E.

En conséquence on a, avec (7.9) et (7.6) :

8.2 Proposition. — *Pour toute suite* (x_n) ssc *de* E *il existe un entier k tel que* (x_n) *soit contenue dans l'espace* $F_k = L_\varphi \oplus G_k$.

Il suit de là que les éléments x_n admettent une décomposition de la forme :

$$x_n = z_n + \sum_{i=1}^{k} \theta_n^i\, e_i \qquad \text{avec } z_n \in L_\varphi$$

ce qui oblige à étudier les suites (z_n) et (θ_n^i).

Donnons d'abord deux lemmes techniques délicats.

Pour les énoncer introduisons, pour toute suite $s = (x_n)$ de E l'ensemble J_s des entiers m pour lesquels il existe une semi-norme continue p_m sur P_m telle que l'on ait $p_m[x_n(m)] \neq 0$ pour une infinité d'entiers n. Les deux lemmes consistent à étudier séparément, pour une suite (x_n) de L_φ ssc dans E, les deux conditions $J_s \neq \phi$ et $J_s = \phi$.

8.3 LEMME 1. – *Soit* $s = (x_n)$ *une suite de* L_φ *ssc dans* E. *Alors tout élément* $x \in P$ *tel que* $x(m) = 0$ *pour tout* $m \notin J_s$ *appartient à l'espace* L_φ.

Preuve. – Raisonnons par l'absurde en supposant $x \notin L_\varphi$ et soit $\beta = \limsup f_x(m)/\varphi(m) > 0$. Fixons une fois pour toutes un nombre α tel que $0 < \alpha < \beta$ et choisissons les semi-normes p_m sur P_m de façon à satisfaire à la fois aux conditions définissant J_s et aux égalités $p_m[e_1(m)] = 1$.

a) Choisissons un point $m_1 \in J_s$ (on suppose $J_s \neq \phi$ car sinon il n'y a plus rien à démontrer), puis un entier n_1 tel que $x_{n_1} = x'_1$ vérifie $p_{m_1}[x'_1(m_1)] = \lambda_0 > 0$. Tenant compte des deux conditions $x'_1 \in L_\varphi$ et $x \notin L_\varphi$, on peut alors trouver un entier N_1 tel que l'ensemble

$$*_1)\ A_1 = \{m\,; m_1 < m < N_1\,; x'_1(m) = 0 \quad \text{et} \quad x(m) \neq 0\}$$

soit tel que card $A_1 > \alpha\,\varphi(N_1)$. On a évidemment $A_1 \subset J_s$ d'après la condition imposée à x. Ecrivons A_1 sous forme d'une suite finie croissante $A_1 = \{m_2, m_3, \ldots, m_{M_1}\}$

b) Utilisons maintenant le fait que $x_n \to 0$ dans l'espace P et que $m_j \in J_s$ pour obtenir, de proche en proche, une suite finie croissante $B_1 = \{n_2, n_3, \ldots, n_{M_1}\}$ telle qu'en posant $x'_j = x_{n_j}$, l'ensemble $C_1 = \{x'_j\,; j = 2, \ldots, M_1\}$ vérifie les conditions :

$$\alpha_1)\ p_{m_1}[x'_k(m_1)] \leqslant 2^{-k}\lambda_0 \quad \text{pour} \quad k = 2, \ldots, M_1$$

$$\beta_1)\ p_{m_j}[x'_k(m_j)] \leqslant 2^{-4k}\,\text{Min}\,[\lambda_0\,, \gamma^1_{jk}] \quad \text{pour} \quad k\,, j = 2, \ldots, M_1$$

où γ^1_{jk} est la plus petite des valeurs *non nulles*

$$p_{m_j}[x'_i(m_j)] \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i < k.$$

$$\gamma_1)\ p_{m_j}[x'_j(m_j)] > 0 \quad \text{pour} \quad j = 2, \ldots, M_1$$

Introduisons encore le nombre λ_1, égal à la plus petite des valeurs non nulles $p_{m_j}[x'_k(m_j)]$ pour $k, j = 2, \ldots, M_1$.

c) On recommence cette opération en construisant par récurrence les suites croissantes (N_r), (M_r), les familles (A_r), (B_r), (C_r) et la suite décroissante (λ_r), de façon que l'on ait :

$$
*_r) \quad \begin{cases} A_r = \{m \,;\, N_{r-1} \leqslant m < N_r \,;\, x'_j(m) = 0 \quad \forall j \leqslant M_{r-1} \,;\, x(m) \neq 0\} \\ A_r = \{m_j \,;\, M_{r-1} < j \leqslant M_r\} \\ \operatorname{card} A_r > \alpha\, \varphi(N_r) \\ B_r = \{n_j \,;\, M_{r-1} < j \leqslant M_r\} \quad \text{et} \quad C_r = \{x'_j = x_{n_j} \,;\, M_{r-1} < j \leqslant M_r\} \end{cases}
$$

$$\alpha_r)\ p_{m_j}[x'_k(m_j)] \leqslant 2^{-k}\lambda_{r-1} \qquad \text{pour} \qquad j \leqslant M_{r-1} < k \leqslant M_r$$

$$\beta_r)\ p_{m_j}[x'_k(m_j)] \leqslant 2^{-4k}\operatorname{Min}[\lambda_{r-1}, \gamma^r_{jk}] \qquad \text{pour} \qquad M_{r-1} < k, j \leqslant M_r$$

où γ^r_{jk} est la plus petite des valeurs non nulles

$$p_{m_j}[x'_i(m_j)] \qquad \text{pour} \qquad M_{r-1} < i < k$$

$$\gamma_r)\ p_{m_j}[x'_j(m_j)] > 0 \qquad \text{pour} \qquad M_{r-1} < j \leqslant M_r$$

avec pour λ_r la plus petite des valeurs non nulles $p_{m_j}[x'_k(m_j)]$ pour $M_{r-1} < k, j \leqslant M_r$, de sorte qu'on a $\lambda_r \leqslant 2^{-4}\lambda_{r-1}$ d'après β_r).

Alors pour chaque entier $j \geqslant 1$, il existe un entier r unique tel que $M_{r-1} < j \leqslant M_r$ et un entier unique $\bar{j}$, qui est le premier indice

$$\bar{j} \in \,]M_{r-1}, M_r] \qquad \text{tel que} \qquad p_{m_j}[x'_{\bar{j}}(m_j)] \neq 0.$$

D'après γ_r) on a même $\bar{j} \leqslant j$. Mais on a aussi la propriété importante, issue de β_r) :

$$\delta_r)\ p_{m_j}[x'_k(m_j)] \leqslant 2^{-4k}\, p_{m_j}[x'_{\bar{j}}(m_j)] \qquad \text{pour} \qquad \bar{j} < k \leqslant M_r$$

d) On peut maintenant introduire l'élément

$$y = \sum x_{n_k} = \sum_{k \geqslant 1} x'_k$$

qui appartient à E d'après l'hypothèse. Fixons l'indice $j \in \,]M_{r-1}, M_r]$ et donnons un encadrement de la valeur $p_{m_j}[y(m_j)]$, en utilisant le fait que $x'_k(m_j) = 0$ pour $k \leqslant M_{r-1}$ d'après la définition de A_r. On a alors, en majorant :

$$p_{m_j}[y(m_j)] \leqslant \sum_{M_{r-1}<k\leqslant M_r} p_{m_j}[x'_k(m_j)] + \sum_{\ell > M_r} p_{m_j}[x'_\ell(m_j)]$$

$$\leqslant \lambda_{r-1} \cdot \sum_1^\infty 2^{-4k} + \lambda_r \cdot \sum_1^\infty 2^{-\ell}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{r-1}}{15} + \lambda_r \leqslant \frac{\lambda_{r-1}}{15} + \frac{\lambda_{r-1}}{16} \leqslant \frac{2\lambda_{r-1}}{16} < \frac{\lambda_{r-1}}{5}$$

et en minorant :

$$p_{m_j}[y(m_j)] = p_{m_j}[x'_{\bar{j}}(m_j) + \sum_{\substack{k\neq j \\ M_{r-1}<k\leqslant M_r}} x'_k(m_j) + \sum_{\ell > M_r} x'_\ell(m_j)]$$

$$\geqslant p_{m_j}[x'_{\bar{j}}(m_j)]\,(1 - \sum_{k=1}^\infty 2^{-4k}) - \lambda_r \sum_1^\infty 2^{-\ell}$$

$$\geqslant \frac{14}{15}\lambda_r - \frac{\lambda_r}{2} > \frac{2}{5}\lambda_r$$

D'où en résumé les inégalités strictes :

$$\epsilon_r)\ \frac{2\lambda_r}{5} < p_{m_j}[y(m_j)] < \frac{\lambda_{r-1}}{5} \qquad \text{pour} \qquad M_{r-1} < j \leqslant M_r$$

e) En décomposant $y \in E$ sous la forme

$$y = z + \sum_{i=1}^{h} \theta_i e_i\,, \quad z \in L_\varphi$$

on peut alors utiliser pleinement la propriété card $A_r > \alpha\,\varphi(N_r)$, qui prouve que l'on a aussi $f_z(N_r) <$ card A_r pour r assez grand et qui permet donc l'obtention, pour chaque $r \geqslant r_0$, d'un entier

$$j \in\,]M_{r-1}, M_r] \qquad \text{tel que} \qquad z(m_j) = 0.$$

Pour ces entiers m_j on a

$$y(m_j) = \sum_{i=1}^{h} \theta_i e_i(m_j).$$

Or $e_i(m_j)$ est soit égal à $e_1(m_j)$, soit égal à $2^{i-1} e_1(m_j)$, et les semi-normes p_m ont été choisies telles que $p_m[e_1(m)] = 1$. Il suit facilement de là que la suite $p_{m_j}[y(m_j)]$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Or les inégalités ϵ_r) montrent aisément que la suite $p_{m_j}[y(m_j)]$ est strictement décroissante, ce qui fournit enfin la contradiction cherchée.

Le second lemme se rapporte comme on a dit à la condition $J_s = \phi$.

8.4 LEMME 2. – *Soit* $s = (x_n)$ *une suite de* L_φ *ssc dans* E. *On suppose* $J_s = \phi$. *Alors la suite* (x_n) *est ssc dans* L_φ.

Preuve. – La condition $J_s = \phi$ reste évidemment vraie quand on remplace la suite (x_n) par une sous-suite. Il suffit donc de prouver que la somme $x = \sum x_n$, a priori dans E, est en réalité dans L_φ. Raisonnons par l'absurde en supposant $x \notin L_\varphi$. Alors

$$\limsup f_x(m)/\varphi(m) = \beta > 0.$$

Choisissons α tel que $0 < \alpha < \mathrm{Min}(\beta ; 1)$, puis fixons pour chaque m, une semi-norme continue p_m sur P_m telle que $p_m[e_1(m)] = 1$ et $p_m[x(m)] \neq 0$ si $x(m) \neq 0$. L'hypothèse $J_s = \phi$ implique alors que pour tout entier m, l'ensemble $H_m = \{n ; p_m[x_n(m)] \neq 0\}$ est fini. Avant de commencer une construction récurrente, introduisons une notation pratique en écrivant $m \perp n$ chaque fois que $x_n(m) = 0$.

a) Fixons $M_1 = 1$ et soit $B_1 = H_{M_1}$. Comme dans la preuve de (8.3), on voit qu'il existe un entier $M_1' > M_1$ tel que l'ensemble

$$C_1 = \{m ; M_1 < m < M_1' ; m \perp B_1 \quad \text{et} \quad x(m) \neq 0\}$$

vérifie card $C_1 > \alpha\, \varphi(M_1')$. On a donc $C_1 \perp B_1$.

Soit maintenant

$$D_1 = \bigcup_{m \in C_1} H_m = \{n ; \exists\, m \in C_1 , p_m[x_n(m)] \neq 0\}.$$

Alors D_1 est fini et disjoint de B_1.

b) Au rang 2, on voit qu'il existe un entier $M_2 > M_1'$ tel que l'ensemble

$$A_2 = \{m ; M_1' < m < M_2 ; m = (2q + 1)\, 2 \text{ pour } q \in \mathrm{N} ; m \perp (B_1 \cup D_1)\}$$

vérifie card $A_2 > \frac{\alpha}{2^2} \varphi(M_2)$.

Alors l'ensemble $B_2 = \{n ; \exists\, m \in A_2, p_m[x_n(m)] \neq 0\}$ est fini et disjoint de $B_1 \cup D_1$, et l'on peut trouver un entier $M'_2 > M_2$ tel que l'ensemble

$$C_2 = \{m ; M_2 < m < M'_2 ; m \perp (B_1 \cup D_1 \cup B_2) ; x(m) \neq 0\}$$

vérifie card $C_2 > \alpha\, \varphi(M'_2)$. On pose enfin

$$D_2 = \{n ; \exists\, m \in C_2, p_m[x_n(m)] \neq 0\}$$

qui est fini et disjoint de $B_1 \cup D_1 \cup B_2$.

c) De proche en proche on construit ainsi des suites (A_r), (M_r), (B_r), (C_r), (M'_r) et (D_r) telles que l'on ait :

α) Pour r s'écrivant (de façon unique) $r = (2\ell + 1)\, 2^t$ avec $t \geqslant 0$

$$A_r = \{m ; M'_{r-1} < m < M_r ; m = (2q+1)\, 2^t$$

pour

$$q \in \mathrm{N} ; m \perp \bigcup_{s<r} (B_s \cup D_s)\}$$

avec card $A_r > \frac{\alpha}{2^{t+1}} \varphi(M_r)$.

β) $B_r = \{n ; \exists\, m \in A_r, p_m\ [x_n(m)] \neq 0\}$

[donc B_r est fini et disjoint des $B_s \cup D_s$ pour $s < r$].

γ) $C_r = \{m ; M_r < m < M'_r ; m \perp B_r ; m \perp \bigcup_{s<r} (B_s \cup D_s) ; x(m) \neq 0\}$

avec card $C_r > \alpha\, \varphi(M'_r)$.

δ) $D_r = \{n ; \exists\, m \in C_r, p_m[x_n(m)] \neq 0\}$

[donc D_r est fini et disjoint de B_r et des $B_s \cup D_s$ pour $s < r$].

d) Soit $y = \sum_{n \in \cup D_r} x_n$. C'est un élément de E.

D'après δ) on a $p_m[x_n(m)] = 0$ pour $m \notin C_r$ et $n \notin D_r$. Il suit de là qu'en écrivant pour $m \in C_r$

$$x(m) = \sum_n x_n(m) = \sum_{n \in D_r} x_n(m) + \sum_{n \notin D_r} x_n(m)$$

on obtient

$$p_m[x(m)] = p_m\left[\sum_{n \in D_r} x_n(m)\right] = p_m[y(m)]$$

de sorte que l'on a $y(m) \neq 0$ pour $m \in \cup C_r$, puisque d'après γ), on a $x(m) \neq 0$ et par conséquent $p_m[x(m)] \neq 0$ d'après le choix des semi-normes p_m. Ainsi $y \notin L_\varphi$ d'après les conditions de cardinalité imposées aux ensembles C_r. On peut donc décomposer y sous la forme

$$y = z + \sum_{k=1}^{h} \theta_k e_k, z \in L_\varphi$$

les *coefficients* θ_k *n'étant pas tous nuls.*

e) Fixons maintenant $m \in A_r$ et $n \in D_s$. On a $m \perp n$ si $s < r$ d'après α), donc $x_n(m) = 0$; de plus pour $s \geqslant r$, l'ensemble D_s est disjoint de B_r d'après δ) donc $n \notin B_r$ et $p_m[x_n(m)] = 0$ d'après β). Finalement on a toujours $p_m[x_n(m)] = 0$ quel que soit le choix de r et s. On tire de là que $p_m[y(m)] = 0$ pour $m \in \cup A_r$.

f) Fixons t tel que $1 \leqslant t \leqslant h$. La condition de cardinalité imposée en α) aux A_r, pour r s'écrivant $r = (2\ell + 1)2^t$, montre qu'il existe un tel r et un entier $m = (2q+1)2^t \in A_r$ tel que $z(m) = 0$, puisque $z \in L_\varphi$. Calculons $e_k(m)$ pour $1 \leqslant k \leqslant h$:

- Si $k \leqslant t$ alors $m = (2q+1)2^{t-k}2^k$ et $e_k(m) = 2^{k-1}e_1(m)$.
- Si $k > t$ alors $m = (2q+1)2^t \neq j2^k$ pour tout j et

$$e_k(m) = e_1(m).$$

On en déduit

$$y(m) = \left[\sum_{1 \leqslant k \leqslant t} 2^{k-1}\theta_k + \sum_{t < k \leqslant h} \theta_k\right] e_1(m)$$

ce qui, avec les conditions $p_m[y(m)] = 0$, vues en e) et

$$p_m[e_1(m)] = 1,$$

imposée au départ, fournit le système de Cramer

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant t} 2^{k-1}\,\theta_k + \sum_{t < k \leqslant h} \theta_k = 0 \; ; t = 1, 2, \ldots, h$$

qui donne à son tour la nullité de tous les coefficients θ_k, apportant ainsi la contradiction avec ce qu'on a vu en d).

De ces deux lemmes techniques on déduit :

8.5 THEOREME. – *Soit* (x_n) *une suite de* L_φ *supposée ssc dans* E. *Alors* (x_n) *est en réalité ssc dans* L_φ.

Preuve. – Définissons les suites $u = (y_n)$ et $v = (z_n)$ à partir de la suite $s = (x_n)$ selon :

$$m \notin J_s \Rightarrow y_n(m) = x_n(m) \quad \text{et} \quad z_n(m) = 0$$

$$m \in J_s \Rightarrow y_n(m) = 0 \quad \text{et} \quad z_n(m) = x_n(m)$$

On a évidemment $x_n = y_n + z_n$. De plus $J_u = \phi$ et $J_v = J_s$. Il est clair aussi que (y_n) et (z_n) sont deux suites de L_φ ssc dans E. D'après (8.3), toute somme z, construite avec les z_n, est nécessairement élément de L_φ, ce qui signifie que (z_n) est ssc dans L_φ. D'après (8.4) et la condition $J_u = \phi$, la suite (y_n) est aussi ssc dans L_φ, ce qui prouve le théorème.

Le théorème (8.5) n'est cependant pas encore suffisant pour caractériser les suites ssc de E. Il nous faut un troisième lemme, dont la démonstration se rapproche de celle de (8.3).

8.6 LEMME 3. – *Soit* (x_n) *une suite de* $L_\varphi \oplus \mathrm{R}\, e_1$, *supposée ssc dans* E. *On pose* $x_n = z_n + \beta_n e_1$, *avec* $z_n \in L_\varphi$. *Alors*

$$\sum |\beta_n| < +\infty.$$

Preuve. – Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $\beta_n \geqslant 0$. Si l'on avait $\sum \beta_n = +\infty$, on pourrait regrouper les éléments x_n par blocs consécutifs

$$y_k = \sum_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} x_n = z'_k + \gamma_k e_1$$

de façon que $\gamma_k \geqslant 1$ pour tout entier k, la suite (y_k) restant ssc dans E. Il suffit donc de démontrer que l'hypothèse $\beta_n \geqslant 1$ pour tout n est absurde.

Pour cela choisissons des semi-normes p_m sur P_m telles que $p_m[e_1(m)] = 1$ et un nombre α tel que $0 < \alpha < 1$. Partant de $M_0 = 1$ et $N_1 = 1$, on construit de proche en proche des suites strictement croissantes (M_r) et (N_r) et des ensembles (A_r) tels que

$$\alpha)\ p_m\,[x_{N_r}(m)] \leqslant 2^{-r} \qquad \text{pour tout} \qquad m \in \bigcup_{s<r} A_s$$

$$\beta)\ A_r = \{m\ ;\ M_{r-1} < m < M_r\ ;\ z_{N_s}(m) = 0 \qquad \text{pour} \qquad s \leqslant r\}$$

avec card $A_r < \alpha\,\varphi(M_r)$.

On introduit ensuite la somme $y = \sum\limits_{k \geqslant 1} x_{N_k} \in E$ et on utilise α) et β) pour montrer que

$$m \in A_r \Rightarrow p_m\,[y(m)] = p_m\,[(\sum_{s \leqslant r} \beta_{N_s})\, e_1(m) + \sum_{s>r} x_{N_s}(m)]$$

d'où l'on déduit l'encadrement :

$$(*)\ r - 2^{-r} \leqslant p_m\,[y(m)] \leqslant r + 2^{-r}\ ;\ m \in A_r$$

On écrit ensuite, comme en (8.3), $y = z + \sum\limits_{i=1}^{h} \theta_i e_i$ et l'on remarque que les conditions de cardinalité imposées aux A_r assurent l'existence pour tout $r \geqslant r_0$ d'un point $m \in A_r$ tel que $z(m) = 0$. On construit ainsi une suite infinie d'entiers m telle que la suite des valeurs $p_m\,[y(m)]$ soit finie quand on l'exprime à partir des θ_i, et soit au contraire strictement croissante comme on voit avec l'encadrement (*) ; d'où la contradiction.

On peut maintenant examiner une situation plus générale.

8.7 Proposition. – *Soit* (x_n) *une suite de* $L_\varphi \oplus G_k$, *supposée ssc dans* E. *On pose*

$$x_n = z_n + \theta_n^1 e_1 + \ldots + \theta_n^k e_k\ ;\ z_n \in L_\varphi$$

Alors chacune des séries $\sum\limits_n \theta_n^i$ *est absolument convergente.*

Preuve. – Fixons un entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant k$, et faisons varier m selon $m_q = (2q-1)\,2^r$, $q \geqslant 1$. Alors $x_n(m_q)$ s'écrit :

$$x_n (m_q) = z_n (m_q) + [\theta_n^1 + 2\, \theta_n^2 + \ \ldots + \ 2^{r-1}\, \theta_n^r + \theta_n^{r+1} + \ldots + \theta_n^k]\; e_1 (m_q)$$

$$x_n (m_q) = z_n (m_q) + \beta_n^r\, e_1 (m_q).$$

ce qui définit le coefficient β_n^r.

En remplaçant alors le produit $\mathrm{P} = \prod \mathrm{P}_m$ par le sous-produit $\prod \mathrm{P}_{m_q}$, la fonction φ par la fonction $\varphi_r : q \to \dfrac{1}{2^{r+1}} \varphi (m_q)$ [qui vérifie encore $\varphi_r (q) \leqslant q$], on voit aisément qu'on ramène, sur le jeu des coordonnées m_q, la question au lemme (8.6). La série $\sum \beta_n^r$ est donc absolument convergente pour chaque valeur de $r = 1, 2, \ldots, k$.

Pour conclure il reste seulement à exprimer les θ_n^i en fonction des β_n^r, ce qui se fait explicitement en inversant la matrice

$$\mathrm{M}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

En rassemblant alors les résultats obtenus en (8.2), (8.5) et (8.7), on obtient le théorème :

8.8 THEOREME. — *Soit* (x_n) *une suite de l'espace* E. *Pour que* (x_n) *soit scc dans* E *il faut et il suffit que l'on ait les trois conditions :*

a) *Il existe un entier* k *tel que* (x_n) *soit contenue dans l'espace* $\mathrm{F}_k = \mathrm{L}_\varphi \oplus \mathrm{G}_k$. *On peut alors poser*

$$x_n = z_n + \theta_n^1\, e_1 + \ldots + \theta_n^k\, e_k \ ; z_n \in \mathrm{L}_\varphi$$

b) *La suite* (z_n) *est ssc dans* L_φ.

c) *Chacune des séries* $\sum_n \theta^i_n$ *est absolument convergente, autrement dit la suite* (y_n) *définie par*

$$y_n = \theta^1_n e_1 + \dots + \theta^k_n e_k$$

est ssc dans l'espace G_k.

Preuve. – On obtient a) avec (8.2), c) avec (8.7). La suite (z_n) est donc ssc dans E, donc aussi dans L_φ d'après (8.5). La suffisance des conditions est par ailleurs évidente.

Pour terminer, on montre donc ce qui a été annoncé dans les premières lignes du paragraphe 8.

8.9 THEOREME. – *L'espace* E *de Valdivia est un espace bornologique tonnelé non ultrabornologique pour lequel on a*

$$G'(E) = G'_1(E) = E^{\cdot\cdot} \neq E'.$$

Preuve. – Rappelons que L_φ est ultrabornologique, de même que chaque G_k. Il en résulte que toute forme linéaire $x' \in E^{\cdot\cdot}$ a ses restrictions à L_φ et aux G_k qui sont continues. Il suit de là, avec le théorème (8.8), que pour toute suite (x_n) ssc de E, la suite

$$(< x_n , x' >)$$

est ssc et $\sum < x_n , x' > = < \sum x_n , x' >$. On obtient donc $x' \in G'(E)$, ce qui achève tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BUCHWALTER, Espaces vectoriels bornologiques, Publ. Dép. Math. Lyon, 2-1 (1965), 2-53.

[2] H. BUCHWALTER, Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité, Publ. Dép. Math. Lyon, 8-1 (1971), 91-106.

[3] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, *J. Math. Pures et Appl.*, 51 (1972), 399-418.

[4] H. BUCHWALTER et J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace $C_s(T)$, *J. Math. Pures et Appl.*, 52 (1973), 337-352.

[5] G. CHOQUET, Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 9 (1959), 75-81.

[6] J.P.R. CHRISTENSEN, On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups, *Israël J. Math.*, 13, 3 et 4 (1972), 255-260.

[7] J. DIESTEL, Applications of weak compactness and bases to vector measures and vectorial integration, *Revue Roum. Math. Pures et Appl.*, XVIII-2 (1973), 211-224.

[8] L. DREWNOWSKI, Topological rings of sets, continuous set functions, integration II, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 20 (1972), 277-286.

[9] L. DREWNOWSKI, Uniform boundedness principle for finitely additive vector measures, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 21 (1973), 115-118.

[10] L. DREWNOWSKI et I. LABUDA, Sur quelques théorèmes du type d'Orlicz-Pettis II, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 21 (1973), 119-126.

[11] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, Linear operators I, (1958), New-York.

[12] L. GILLMAN et M. JERISON, Rings of continuous functions, (1960), Princeton.

[13] A. GOLDMAN, Sur les ensembles universellement mesurables dans les espaces localement convexes, Publ. Dép. Math. Lyon, 12-2 (1975), 1-29.

[14] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 16 (1955).

[15] G. KÖTHE, Topological vector spaces I, (1969).

[16] I. LABUDA, Sur quelques généralisations des théorèmes de Nikodým et de Vitali-Hahn-Saks, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 20 (1972), 447-456.

[17] I. LABUDA, Sur quelques théorèmes du type d'Orlicz-Pettis I, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 21 (1973), 127-132.

[18] K. NOUREDDINE, L'espace bornologique tonnelé associé à un espace localement convexe, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 275, série A (1972), 977-979.

[19] V. PTAK, Completeness and the open mapping theorem, *Bull. Soc. Math. France*, 86 (1958), 41-74.

[20] A. ROBERT, Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques, *Comment. Math. Helvet.*, 42-4 (1967), 314-342.

[21] J. SCHMETS et M. DE WILDE, Caractérisation des espaces C (X) ultrabornologiques, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège,* 40^e année, 3-4 (1971), 113-121.

[22] E. THOMAS, L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 20-2 (1970), 55-191.

[23] E. THOMAS, The Lebesgue-Nikodým theorem for vector-valued Radon measures, *Mem. Amer. Math. Soc.,* 139 (1974).

[24] I. TWEDDLE, Unconditional convergence and vector-valued measures, *J. London Math. Soc.,* 2-2 (1970), 603-610.

[25] M. VALDIVIA, A class of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological, *Math. Ann.,* 194 (1971), 43-51.

Manuscrit reçu le 26 mai 1975
Proposé par G. Choquet.

D. BUCCHIONI et A. GOLDMAN,
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, bd du 11 Novembre 1918
69621 – Villeurbanne.