ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN SAINT RAYMOND

Espaces à modèle séparable

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 3 (1976), p. 211-256

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_211_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 3 (1976), 211-225

ESPACES A MODÈLE SÉPARABLE

par J. SAINT-RAYMOND

On étudie les espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables qui sont image linéaire continue d'un espace de Fréchet séparable. On détermine la classe de Baire de ces espaces dans leur complété, ainsi que la classe de Baire des formes linéaires boréliennes sur ces espaces, en construisant pour chacun une suite transfinie dénombrable d'espaces de Fréchet séparables qui lui est canoniquement associée.

DEFINITION 1. — *Soit* V *un espace localement convexe métrisable. On dit que* V *possède un modèle s'il existe un espace de Fréchet* E *et une application linéaire bijective continue de* E *sur* V ; *et* E *est appelé modèle de* V.

On identifiera souvent E avec l'espace vectoriel V muni d'une topologie plus fine.

PROPOSITION 2. — *Soient* V *et* W *deux espaces qui possèdent les modèles* E *et* F. *Soit* f *une application linéaire continue de* V *dans* W. *Alors* f *est continue de* E *dans* F.

En effet le graphe de f dans V x W est fermé pour les topologies initiales de V et de W, donc a fortiori pour les topologies plus fines E et F. Puisque E et F sont des espaces de Fréchet, l'application f est donc continue de E dans F.

COROLLAIRE 3. — *En particulier, il n'existe qu'au plus un modèle, à un isomorphisme près, pour un espace localement convexe métrisable.*

Il suffit d'appliquer la proposition 2 à l'application identique de V dans V, si V possède les modèles E et F, pour voir que E et F sont isomorphes.

PROPOSITION 4. – *Pour que l'espace* V *possède un modèle, il est nécessaire et suffisant que* V *soit l'image linéaire continue d'un espace de Fréchet.*

La définition montre que la condition est nécessaire. Inversement, si u est une application linéaire et continue de l'espace de Fréchet G sur V, elle se factorise par une application $\bar{u}$ de l'espace quotient $E = G/\mathrm{Ker}\, u$ sur V. L'application $\bar{u}$ étant injective, on voit que E est le modèle de V, ce qui montre que la condition est suffisante.

THEOREME 5. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable de modèle* E, *et* A *une partie bornée de* V. *Pour que* A *soit bornée dans* E, *il faut et il suffit que l'enveloppe dénombrablement convexe de* A *dans le complété* $\hat{V}$ *soit contenue dans* V.

Si u désigne l'application de E sur V, et si (x_n) est une suite bornée de E, pour toute suite sommable (λ_n) de nombres réels, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ appartient à E, ce qui entraîne que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u(x_n) = u\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\right)$$

appartient à V. Il en résulte que la condition est nécessaire.

Inversement, pour montrer que $u^{-1}(A)$ est borné dans E, il suffit de montrer que toute suite de $u^{-1}(A)$ est bornée. Soit (y_n) une suite de points de A. Si l'enveloppe dénombrablement convexe de A est contenue dans V, pour toute suite sommable de nombres positifs (λ_n), on a :

$$\Sigma \lambda_n y_n = (\Sigma \lambda_n) . \Sigma \left(\frac{\lambda_n}{\Sigma \lambda_n} . y_n\right) \in V$$

On a donc, pour toute suite sommable de nombres réels (λ_n)

$$\Sigma \lambda_n y_n = (\Sigma \lambda_n^+ y_n) - (\Sigma \lambda_n^- y_n) \in V$$

Il en résulte que si on définit l'application linéaire f de l^1 dans $\hat{V}$ par

$$f((\lambda_n)) = \Sigma \lambda_n y_n ,$$

f est continue et à valeurs dans V. On déduit alors de la proposition 2, puisque l^1 est complet et donc son propre modèle, que $u^{-1} \circ f$ est continue de l^1 dans E, donc que l'image par $u^{-1} \circ f$ de la boule unité de l^1 est bornée, donc que la suite $u^{-1}(y_n)$ est bornée, ce qui achève de montrer que la condition est suffisante.

Proposition 6. — *Pour que l'espace localement convexe métrisable* V *possède un modèle qui soit un espace de Banach, il faut et il suffit que* V *soit engendré par une partie bornée et dénombrablement convexe.*

Si l'espace de Banach E est le modèle de V, l'image de la boule unité de E est une partie de V bornée et dénombrablement convexe qui engendre V.

Réciproquement si A est bornée et dénombrablement convexe, l'enveloppe convexe B de $A \cup (-A)$ est bornée. Si (λ_n) est une suite de nombres positifs de somme 1 et si $b_n = t_n x_n - (1 - t_n) y_n$ est une suite de points de B, avec $x_n \in A$, $y_n \in A$, $t_n \in [0, 1]$, on a

$$\sum_1^\infty \lambda_n b_n = \sum_1^\infty \lambda_n t_n x_n - \sum_1^\infty \lambda_n (1 - t_n) y_n$$

Or si $s = \sum_1^\infty \lambda_n t_n$, on a $\sum_1^\infty \lambda_n (1 - t_n) = 1 - s$ et on en déduit

$$x = \sum_1^\infty \frac{\lambda_n t_n}{s} \cdot x_n \in A$$

$$y = \sum_1^\infty \frac{\lambda_n (1 - t_n)}{1 - s} y_n \in A$$

$$\sum_1^\infty \lambda_n b_n = s \,.\, x - (1 - s) y \in co\,(A \cup (-A))$$

Il en résulte que B est équilibré et dénombrablement convexe. Si $\| \,.\, \|$ désigne la jauge de B, la topologie de cette norme est plus fine que la topologie de V, puisque B est borné dans V. Si (x_n) est une suite de points de V, et si $\alpha = \sum_1^\infty \| x_n \| < \infty$, on a pour tout p :

$$\sum_{n=p+1}^\infty x_n \in \Big(\sum_{n=p+1}^\infty \| x_n \| \Big) . B$$

ce qui montre que $\| \sum_{n=1}^\infty x_n - \sum_{n=1}^p x_n \| \to 0$ quand $p \to \infty$, c'est-à-dire que la série (x_n) converge pour la norme vers $\sum_1^\infty x_n$. L'espace V, muni de la norme $\| . \|$, est donc un espace de Banach, qui est le modèle de V, muni de la topologie initiale. Ceci termine donc la démonstration.

On s'intéresse maintenant aux espaces localement convexes métrisables qui possèdent un modèle séparable. Ceux-ci sont, bien entendu, séparables eux-mêmes.

PROPOSITION 7. — *Si* V *est un espace localement convexe métrisable de modèle* E *séparable, et si u est l'application de* E *sur* V, *l'application* u^{-1} *de* V *sur* E *est borélienne et* V *est une partie borélienne de son complété* $\hat{V}$.

Ceci résulte immédiatement des théorèmes usuels. Cf. [1], § 6, Th 3.

PROPOSITION 8. — *Soient* V *et* W *deux espaces localement convexes métrisables,* V *ayant un modèle séparable* E, *et f une application linéaire de* V *dans* W. *Si u est l'application de* E *sur* V, *pour que* $f \circ u$ *soit continue, il est nécessaire et suffisant que f soit borélienne.*

Si $f \circ u$ est continue, l'application $f = f \circ u \circ u^{-1}$ est borélienne, puisque u^{-1} est borélienne d après la proposition 7.

Inversement, si f est borélienne, il en est de même de $f \circ u$ puisque u est continue. Il existe donc dans l'espace de Fréchet E un G_δ dense H auquel la restriction de $f \circ u$ est continue. Si C est un voisinage convexe ouvert de 0 dans W et a un point de H

$$H \cap [a + (f \circ u)^{-1}(C)] = [(f \circ u)^{-1}(f \circ u(a) + C)] \cap H$$

est un voisinage de a dans H, et son adhérence contient un ouvert convexe B de E. Puisque H est un G_δ dense de E, ainsi que $2x - H$, que $B \cap (2x - B)$ est un voisinage ouvert de a, dès que $x \in \frac{a + B}{2}$,

$$\phi \neq [B \cap (2x - B)] \cap [H \cap (2x - H)] = (B \cap H) \cap (2x - B \cap H)$$

Il existe donc y et z dans $B \cap H$ tels que $2x - z = y$

Il en résulte que pour tout x dans $\frac{a + B}{2}$, on a

$$f(x)=\frac{f(y)+f(z)}{2}\in\frac{C+C}{2}=C$$

L'application f est donc continue en a, donc continue.

THEOREME 9. – *Pour que l'espace localement convexe métrisable* V *possède un modèle séparable, il faut et il suffit que la topologie de Mackey* $\tau(V, V_b^*)$ *soit polonaise, où* V_b^* *désigne l'ensemble des formes linéaires boréliennes sur* V.

Si E est le modèle de V, et que E est séparable, les formes linéaires continues sur E sont les formes linéaires boréliennes sur V, d'après la proposition 8. De plus, E étant métrisable, la topologie de E est la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, c'est-à-dire la topologie $\tau(V, V_b^*)$. Comme E est polonais, il en est de même de la topologie $\tau(V, V_b^*)$.

Inversement si la topologie $\tau(V, V_b^*)$ est polonaise, V est un espace localement convexe métrisable pour cette topologie, et un G_δ de son complété. Pour tout élément z du complété E, V et $z - V$ sont des G_δ denses de E, donc se coupent. Il existe donc x et y dans V tels que $x = z - y$, ce qui montre que z appartient à V, c'est-à-dire que E = V est complet. Puisque V, muni de la topologie $\tau(V, V_b^*)$ qui est plus fine que la topologie initiale de V, est ainsi un espace de Fréchet séparable, V possède bien un modèle séparable, qui est $\tau(V, V_b^*)$.

THEOREME 10. – *Si* V *possède le modèle séparable* E, *si une suite* (x_n) *de* V *est sommable, ainsi que chacune de ses sous-suites, la suite* $u^{-1}(x_n)$ *est sommable dans* E.

D'après un théorème d'Orlicz (cf. [4], p. 80) il suffit de démontrer que la suite $u^{-1}(x_n)$ est faiblement sommable dans E. Soit h une forme linéaire continue sur E. Si l'on définit l'application φ de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}$ par $\forall A \subset \mathbf{N} \quad \varphi(A) = h \circ u^{-1}\left(\sum_{n\in A} x_n\right)$

il résulte de la proposition 7 que la fonction additive φ est borélienne. Un théorème de Christensen [3] permet alors de conclure que φ est continue, donc que $\sum_{n=1}^{\infty} |h \circ u^{-1}(x_n)| < \infty$, c'est-à-dire que la suite $u^{-1}(x_n)$ est faiblement sommable.

On désignera dans la suite, pour un espace métrique séparable X, par $\mathcal{M}_\alpha$ (X) (resp. $\mathcal{A}_\alpha$(X)) l'ensemble des parties de X qui sont de classe α-multiplicative (resp. de classe α-additive). On rappelle que Z appartient à $\mathcal{M}_\alpha$ (X) si et seulement si son complémentaire appartient à $\mathcal{A}_\alpha$(X), que $\mathcal{M}_0$ est l'ensemble des fermés de X et qu'une partie Z appartient à $\mathcal{M}_\alpha$ (X) si et seulement s'il existe une suite de parties Z_n, d'intersection Z, appartenant à la réunion des classes $\mathcal{A}_\beta$ (X) avec $\beta < \alpha$.

On désignera par $\mathcal{B}_\alpha$ (X , Y), quand X et Y sont métriques séparables, l'ensemble des fonctions de X dans Y pour lesquelles l'image réciproque de tout ouvert de Y appartient à $\mathcal{A}_\alpha$ (X). Cette classification est légèrement différente de la classification donnée dans [5], p. 299. On rappelle que pour tout ordinal dénombrable α, les limites simples de suites de fonctions de classe α de X dans Y sont les fonctions de classe $\alpha + 1$ de X dans Y les plus générales, et que pour tout ordinal dénombrable limite α, les limites simples de suites de fonctions de classes strictement inférieures à α sont les fonctions de classe $(\alpha + 1)$ les plus générales. Cf [5], p. 297. Nous ajouterons à ces propriétés le lemme suivant, quand $Y = \overline{\mathbf{R}}$.

LEMME 11. – *Soient* X *un espace métrique séparable et* α *un ordinal dénombrable limite. Pour qu'une fonction de* X *dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *appartienne à* $\mathcal{B}_\alpha$ (X , $\overline{\mathbf{R}}$) *il faut et il suffit qu'il existe des suites* (f'_n) *et* (f''_n) *respectivement croissante et décroissante de fonctions de* X *dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *de classes strictement inférieures à* α *telles que*

$$f = \lim_{n\to\infty} f'_n = \lim_{n\to\infty} f''_n$$

Pour montrer que f appartient à $\mathcal{B}_\alpha$ (X , $\overline{\mathbf{R}}$) il suffit de montrer que, si $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ $\{x \mid f(x) > \lambda\}$ et $\{x \mid f(x) < \lambda\}$ appartiennent à $\mathcal{A}_\alpha$ (X). Or si (f'_p) croît vers f,

$$\{x \mid f(x) > \lambda\} = \bigcup_p \{x \mid f'_p(x) > \lambda\}$$

et si f''_p décroît vers f,

$$\{x \mid f(x) < \lambda\} = \bigcup_p \{x \mid f''_p(x) < \lambda\}$$

Ces ensembles, unions dénombrables d'ensembles de classes $< \alpha$, sont de classe α-additive, ce qui montre que la condition est suffisante.

Inversement, si f appartient à $\mathcal{B}_\alpha(X, \overline{R})$, on peut se ramener au cas où f est à valeurs dans $[0,1]$ puisque $\overline{R}$ est homéomorphe à $[0,1]$.

Posons

$$Z_q = \{x \mid f(x) > q\} \quad \text{pour} \quad q \in Q \cap [0,1]$$

On a
$$f = \sup_{q \in Q \cap [0,1]} q\, \chi_q$$

si χ_q est la fonction caractéristique de Z_q. Puisque $Z_q \in \mathcal{A}_\alpha(X)$, il existe des ensembles $Y_{q,n}$ de classes $< \alpha$, dont la réunion $\bigcup_n Y_{q,n}$ est égale à Z_q. Si $\chi_{q,n}$ est la fonction caractéristique de $Y_{q,n}$, $\chi_{q,n}$ est de classe $< \alpha$, et on a :

$$f = \sup_{q,n} q \,.\, \chi_{q,n}$$

En ordonnant les couples (q, n) en une suite et en prenant pour f'_p l'enveloppe supérieure des p premières fonctions $q \,.\, \chi_{q,n}$, on obtient f comme limite d'une suite croissante de fonctions de classes $< \alpha$. En remplaçant f par $1 - f$, le même procédé donne une suite décroissante f''_p de fonctions de classes $< \alpha$, convergeant vers f, ce qui termine la démonstration.

Par analogie avec cette classification, on définit, si V est un espace localement convexe métrisable, la classification suivante des formes linéaires sur V, qui n'est pas exactement la même que la classification usuelle.

DEFINITION 12. — *La classe linéaire* O *se compose des formes linéaires continues. La classe linéaire* $\alpha + 1$ *se compose des limites simples de formes linéaires de classe linéaire* α. *Si* α *est un ordinal limite, la classe linéaire* α *est la réunion des classes linéaires d'indice strictement inférieur à* α.

On déduit de cette définition qu'aucune forme linéaire n'a une classe stricte qui soit de deuxième espèce, et que si α est un ordinal limite, la forme linéaire de classe $\alpha + 1$ la plus générale est limite simple d'une suite de formes linéaires de classes strictement inférieures à α.

COROLLAIRE 13. – *Si* V *est un espace localement convexe métrisable séparable, toute forme linéaire de classe linéaire* α *sur* V *est de classe de Baire* α.

Ceci se démontre immédiatement par récurrence sur la classe α.

PROPOSITION 14. – *Soient* X *un espace métrique séparable et* (f_n) *une suite de fonctions de classe* α *de* X *dans* **R**. *L'ensemble des points de convergence de la suite* (f_n) *est de classe* $\alpha + 2$*-multiplicative. Le même résultat est vrai pour* α *ordinal limite et* (f_n) *de classes strictement inférieures à* α.

En effet l'ensemble de convergence est égal à

$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} \bigcup_{p\in\mathbf{N}} \bigcap_{q\geqslant p} \left\{ x \,/\, |f_q(x) - f_p(x)| \leqslant \frac{1}{m} \right\}$$

et $\left\{ x/ \, |f_q(x) - f_p(x)| \leqslant \dfrac{1}{m} \right\} \in \mathfrak{M}_\alpha(X)$ puisque $f_q - f_p$ appartient à $\mathcal{B}_\alpha(X, \mathbf{R})$.

PROPOSITION 15. – *Soient* X *un espace métrique séparable et* Z *une partie de classe* $\alpha + 1$*-additive de* X. *Il existe une suite* (h_k) *de fonctions de classe* α *(et même de classes* $< \alpha$ *si* α *est de deuxième espèce) de* X *dans* $[0, 1]$, *dont* Z *est l'ensemble de convergence.*

Si Z appartient à $\mathcal{A}_{\alpha+1}(X)$, il existe une suite croissante Z_n d'éléments de $\mathfrak{M}_\alpha(X)$ de réunion Z. Si $\alpha = 0$, la fonction

$$g_{n,k}(x) = \inf(1, k\,d(x, Z_n))$$

est de classe 0, et la suite $(g_{n,k})_k$ croît vers la fonction caractéristique de $\complement Z_n$.

Si $\alpha > 0$, Z_n est l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles $Z_{n,k}$ de classe β-additive, avec $\beta < \alpha$, dont les fonctions caractéristiques sont de classe $\beta + 1 \leqslant \alpha$, et même $< \alpha$ si α est de deuxième espèce. Posons alors $g_{n,k}$ la fonction caractéristique de $\complement Z_{n,k}$.

Dans tous les cas, la fonction caractéristique de $\complement Z_n$ est limite d'une suite croissante de fonctions positives de classe α, soit $(g_{n,k})_k$. Alors les fonctions g'_k définies par :

$$g'_k = \sum_{n=1}^{k} g_{n,k}$$

forment une suite croissante de fonctions positives de classe α (et même de classe $< \alpha$ si α est de 2^e espèce). La suite $(g'_k(x))$ tend vers le nombre entier sup $\{m \mid x \notin Z_m\}$ si $x \in Z$ et vers $+\infty$ si $x \notin Z$.

On définit alors par récurrence sur k, une suite croissante de fonctions positives de classe α (et même de classe $< \alpha$, si α est de 2e espèce), soit g''_k par

$$\begin{cases} g''_1 = g'_1 \\ g''_{k+1} = \inf\left(g'_{k+1}, g''_k + \dfrac{1}{k}\right) \end{cases}$$

La divergence de la série $\left(\frac{1}{k}\right)$ fait que $\lim\limits_{k\to\infty} g''_k = \lim\limits_{k\to\infty} g'_k$. Si on pose alors $h_k = \sin^2 \pi g''_k$, les fonctions h_k sont de classe α (et même de classe $< \alpha$ si α est de 2e espèce), à valeurs dans $[0,1]$ et convergent vers 0 en tout point de Z, puisque $\lim g''_k = \lim g'_k \in \mathbf{N}$. Si x est un point qui n'appartient pas à Z, toute valeur de $[0,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $h_k(x)$, puisque

$$g''_k(x) \to +\infty \quad \text{et} \quad |g''_{k+1}(x) - g''_k(x)| \leqslant \frac{1}{k} \cdot$$

On a donc bien montré que Z est l'ensemble de convergence de la suite (h_k).

THEOREME 16. – *Soient* X *un espace métrique séparable et* Z *une partie de* X *de classe* $\alpha + 2$*-multiplicative. Il existe une suite* (f_n) *de fonctions de classe* α (*et même de classes* $< \alpha$ *si* α *est de deuxième espèce*) *de* X *dans* $[0,1]$, *dont* Z *est l'ensemble de convergence.*

Si Z appartient à $\mathfrak{M}_{\alpha+2}(X)$, il existe une suite décroissante d'ensembles (Z_n) de X, de classe $\alpha + 1$-additive, dont Z est l'intersection. Il existe, d'après la proposition précédente, pour chaque n, une suite $h_{n,k}$ d'applications de classe α (ou de classe $< \alpha$, si α est de seconde espèce) de X dans $[0,1]$ qui converge vers 0 en tout point de Z_n, sans converger hors de Z_n. Posons alors :

$$f_{2k}(x) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} h_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad f_{2k+1}(x) = 0$$

Les fonctions f_k sont de classe α (ou de classe $< \alpha$, si α est de seconde espèce) de X dans $[0,1]$. On vérifie aisément que la suite $(f_k(x))$ converge vers 0 si x appartient à tous les Z_n, c'est-à-dire si x appartient à Z, et que la suite $(f_k(x))$ ne converge pas dès que x n'appartient pas à l'un des Z_n. L'ensemble de convergence de (f_k) est donc exactement Z.

Les démonstrations de la proposition 15 et du théorème 16 sont des extensions simples de celles qui sont données dans [6], dans le cas $\alpha = 0$.

DEFINITION 17. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable de modèle séparable* E *et u l'application de* E *sur* V. *On appelle* DEGRE *de l'application u la classe de Baire de l'application borélienne* u^{-1} *de* V *dans* E.

On a vu dans la proposition 7 que u^{-1} est une application borélienne. En vertu de l'unicité du modèle (corollaire 3) on peut donner la définition suivante.

DEFINITION 18. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable de modèle séparable* E *et u l'application de* E *sur* V. *On appelle degré de l'espace* V *le degré de l'application u.*

PROPOSITION 19. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable de modèle* E, *et u l'application de* E *sur* V. *Pour que u soit de degré au plus* α, *il est nécessaire et suffisant qu'existe dans* E *un système fondamental de voisinages ouverts de* 0 *dont les images par u appartiennent à* $\mathcal{A}_\alpha$ (V).

En effet si u est de degré α, l'image par u d'un ouvert de E est l'image réciproque par u^{-1} d'un ouvert de E, donc est de classe α-additive dans V ; et si (B_n) est un système fondamental de voisinages de 0 dans E, tout ouvert de E est réunion dénombrable de translatés des B_n. On en déduit que si les $u(B_n)$ sont de classe α-additive dans V, il en est de même de l'image de tout ouvert de E, ce qui signifie que u est de degré α.

Il en est ainsi en particulier quand existe dans E un système fondamental de voisinages $(\mathcal{B}_n)$ fermés de 0 dont les images par u sont toutes de classe multiplicative $< \alpha$, puisque alors

$$u(\mathrm{Int}\ \mathrm{B}_n) = \bigcup_{k=1} (1-2^{-k})\, u(\mathrm{B}_n) \in \mathfrak{A}_\alpha (\mathrm{V})$$

On verra plus loin qu'il en est toujours ainsi : si le degré de u est égal à α, il existe un système fondamental de voisinages fermés convexes équilibrés de 0 dont les images par u sont de classe multiplicative $< \alpha$ dans V.

THEOREME 20. — *Soit* V *un espace localement convexe métrisable de modèle séparable* E *et de degré* α. *Si* G *est un fermé de* E, u(G) *est une partie de classe multiplicative* $\alpha + 1$ *du complété* $\hat{\mathrm{V}}$ *de* V. *En particulier* V *appartient à* $\mathfrak{M}_{\alpha+1}(\hat{\mathrm{V}})$.

Ceci est un cas particulier du corollaire 3, page 343 de [5].

On va maintenant construire des exemples d'espaces normés possédant des modèles Banachs séparables, et de degré arbitrairement élevé.

THEOREME 21. — *Pour tout ordinal dénombrable* α, *il existe un espace topologique localement compact dénombrable* $\mathrm{K}_{\alpha+1}$, *une application linéaire injective* $u_{\alpha+1}$ *de degré* $\alpha + 1$ *de l'espace de Banach* $\mathcal{C}_0(\mathrm{K}_{\alpha+1})$ *des fonctions continues sur* $\mathrm{K}_{\alpha+1}$ *tendant vers* 0 *à l'infini dans l'espace de Banach* $c_0(\mathrm{K}_{\alpha+1})$ *des fonctions continues tendant vers* 0 *à l'infini sur l'espace* $\mathrm{K}_{\alpha+1}$ *muni de la topologie discrète, et un point* $a_{\alpha+1}$ *de* $\mathrm{K}_{\alpha+1}$ *tels que, pour tout compact métrisable* T *et toute fonction borélienne* h *de classe* $\alpha + 1$ *de* T *dans* [0,1], *il existe une application continue* φ *de* T *dans* $c_0(\mathrm{K}_{\alpha+1})$ *vérifiant*

$$\forall t \in \mathrm{T} \quad \varphi(t) \in \{u_{\alpha+1}(f) \mid f \in \mathcal{C}_0(\mathrm{K}_{\alpha+1}\ ; \|f\| \leqslant 1\}$$

$$\forall t \in \mathrm{T} \quad h(t) = \epsilon_{a_{\alpha+1}} \circ u_{\alpha+1}^{-1} \circ \varphi(t)$$

Puisqu'il existe des applications boréliennes de classe $\alpha + 1$ qui ne sont pas de classe α, que la mesure de Dirac $\epsilon_{a_{\alpha+1}}$ et la fonction φ sont continues, la dernière propriété entraîne que $u_{\alpha+1}^{-1}$ ne peut pas être de classe $\leqslant \alpha$. Pour montrer que $u_{\alpha+1}$ est exactement de degré $\alpha + 1$, il suffira donc de prouver que $u_{\alpha+1}$ est de degré $\leqslant \alpha + 1$. De plus la métrisabilité de l'espace $\mathrm{K}_{\alpha+1}$ entraîne que l'espace $\mathcal{C}_0(\mathrm{K}_{\alpha+1})$ est un Banach séparable.

Nous choisissons $K_1 = \overline{N}$ le compactifié d'Alexandroff de l'espace discret N. Puisque K_1 est compact l'espace $\mathcal{C}_0(K_1)$ est alors l'espace de toutes les fonctions continues sur K_1, qui s'identifie à l'espace des suites convergentes de nombres réels. Si $x = (x_n)$ est une suite convergente nous notons a_1 le point de $\overline{N} - N$ et

$$\begin{cases} u_1(x)(n) = \dfrac{x_n}{n} \\ u_1(x)(a_1) = 0 \end{cases}$$

On voit alors que u_1 est une application continue de norme 1 de $\mathcal{C}_0(K_1)$ dans $c_0(K_1)$. Si $x \in \operatorname{Ker} u_1$, on a $x_n = n\, u_1(x).(n) = 0$, donc aussi $x(a_1) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ce qui prouve l'injectivité de u_1. Si on désigne par V_1 l'espace $u_1(\mathcal{C}_0(K_1))$ et si on définit les applications w_k de V_1 dans $\mathcal{C}_0(K_1)$ par

$$w_k(y) = (y_1, 2y_2, \ldots, ny_n, \ldots, ky_k, ky_k, \ldots, ky_k, \ldots)$$

pour $$y = (y_n) \in V_1 \subset C_0(K_1)$$

on voit que les applications w_k sont continues et de rang fini sur V_1. On voit aussi que pour tout y de V_1, $w_k(y)$ converge dans $\mathcal{C}_0(K_1)$ vers $u_1^{-1}(y)$. L'application u_1^{-1} est donc de première classe de Baire, comme limite d'une suite d'applications continues. On a donc bien montré que u_1 est de degré au plus 1.

Soit maintenant h une fonction de première classe de Baire du compact T dans $[0,1]$. Il existe une suite d'applications continues (h_n) de T dans $[0,1]$, qui converge simplement vers h sur T. Nous définissons alors la fonction ψ de T dans $\mathcal{C}_0(K_1)$ par

$$\begin{cases} \psi(t)(n) = h_n(t) \\ \psi(t)(a_1) = h(t) \end{cases}$$

Puisque $h(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(t)$, $\psi(t)$ appartient à $\mathcal{C}_0(K_1)$, et on a : $h(t) = \epsilon_{a_1} \circ \psi(t)$, ainsi que $\|\psi(t)\| \leqslant 1$. On définit alors

$$\varphi(t) = u_1 \circ \psi(t).$$

La fonction φ est limite uniforme de la suite φ_n de fonctions continues de T dans $c_0(K_1)$ définie par

$$\varphi_n(t) = \left(h_1(t), \frac{h_2(t)}{2}, \ldots, \frac{h_n(t)}{n}, 0, \ldots, 0, \ldots\right)$$

Il en résulte que φ est continue, et que l'on a

$$h = \epsilon_{a_1} \circ u^{-1} \circ \varphi$$

ce qui démontre le théorème dans le cas $\alpha = 0$.

Supposons le théorème vrai pour l'ordinal β. Nous le démontrons pour $\alpha = \beta + 1$. Il existe donc un compact $K_\alpha = K_{\beta+1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. L'espace localement compact dénombrable $K_{\alpha+1}$ sera alors la somme disjointe de $K_\alpha \times N$ et de $\overline{N}$.

Une fonction continue sur $K_{\alpha+1}$, nulle à l'infini, est définie par la donnée d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}_0(K_\alpha)$ convergeant uniformément vers 0 et d'une suite convergente de nombres réels. Le point $a_{\alpha+1}$ sera le point de $\overline{N} - N$. Nous définissons alors l'application $u_{\alpha+1}$ par les formules suivantes, si x appartient à $\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})$,

$$\left\{\begin{array}{lll} u_{\alpha+1}(x).(\theta, n) = \dfrac{u_\alpha(x(\cdot, n)).(\theta)}{n} & \text{si} & \begin{array}{l}\theta \in K_\alpha,\ n \in N \\ x(\cdot, n) \in \mathcal{C}_0(K_\alpha)\end{array} \\ u_{\alpha+1}(x).(n) = \left[\dfrac{x(n)}{n^2} - \dfrac{x(a_\alpha, n)}{n}\right] & \text{si} & n \in N \\ u_{\alpha+1}(x).(a_{\alpha+1}) = 0 & & \end{array}\right.$$

Puisque u_α est à valeurs dans $c_0(K_\alpha)$, on voit aisément que pour $\epsilon > 0$ donné, et pour $x \in \mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})$ il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles $\left\|\dfrac{u_\alpha(x(\cdot, n))}{n}\right\| > \epsilon$ et pour chacune de ces valeurs, qu'un nombre fini de $\theta \in K_\alpha$ pour lesquels

$$|u_\alpha(x(\cdot, n))(\theta)| > \epsilon.$$

On voit aussi que pour toute valeur de n assez grande on aura

$$\left|\frac{x(n)}{n^2}\right| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \left|\frac{x(a_\alpha, n)}{n}\right| \leqslant \epsilon.$$

Il en résulte que $u_{\alpha+1}$ est une application linéaire à valeurs dans $c_0(K_{\alpha+1})$; par ailleurs il est clair que si $\|x\| \leqslant 1$, on aura aussi $\|u_{\alpha+1}(x)\| \leqslant 1$, c'est-à-dire que $u_{\alpha+1}$ est continue de norme au plus 1.

Soit x un élément de Ker $u_{\alpha+1}$. Puisque u_α est injectif, on voit que pour tout n, $x(\cdot\,,n)$ est nul, comme fonction sur K_α. De plus, si $0 = u_{\alpha+1}(x).(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{x(n)}{n^2} - \frac{x(a_\alpha, n)}{n}\right] = \frac{x(n)}{2n^2}$ on obtient que pour tout n, $x(n) = 0$ et donc que

$$x(a_{\alpha+1}) = \lim_{n\to\infty} x(n) = 0$$

Il en résulte que $x = 0$, donc que $u_{\alpha+1}$ est injectif. Désignons alors par $V_{\alpha+1}$ l'espace $u_{\alpha+1}(\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})) \subset c_0(K_{\alpha+1})$, et les applications w_k de $V_{\alpha+1}$ dans $\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})$ par :

$$\begin{cases} w_k(y).(\theta, n) = u_\alpha^{-1}(ny(\cdot\,,n))(\theta) & \theta \in K_\alpha,\ n \in \mathbf{N} \\ & n \leqslant k \\ w_k(y).(\theta, n) = 0 & \text{si } \theta \in K_\alpha,\ n \in \mathbf{N},\ n > k \\ w_k(y).(n) = n^2 u_\alpha^{-1}(y(\cdot\,,n))(a_\alpha) + 2n^2 y(n) & \text{si } n \in \mathbf{N}, n \leqslant k \\ w_k(y).(n) = w_k(y).(a_{\alpha+1}) = w_k(y).(k) & \text{si } n \in \mathbf{N},\ n > k \end{cases}$$

Les applications w_k sont linéaires de $V_{\alpha+1}$ dans $\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})$ et sont de classe de Baire α, puisque u_α est de degré α. De plus, pour tout y de $V_{\alpha+1}$, $u_{\alpha+1}^{-1}(y) = \lim_{k\to\infty} w_k(y)$. L'application $u_{\alpha+1}^{-1}$, limite d'une suite d'applications de classes α est donc de classe au plus $\alpha + 1$.

Soit maintenant une application borélienne h de classe $\alpha + 1$ du compact T dans $[0,1]$. Il existe une suite (h_n) d'applications de classe α de T dans $[0,1]$ qui converge simplement vers h. Puisque le théorème est vrai pour l'ordinal β, il existe pour chaque n une application continue φ_n de T dans $c_0(K_\alpha)$ avec

$$\begin{cases} \forall t & \|u_\alpha^{-1} \circ \varphi_n(t)\| \leqslant 1 \\ \forall t & \epsilon_{a_\alpha} \circ u_\alpha^{-1} \circ \varphi_n(t) = h_n(t) \end{cases}$$

On définit alors une application ψ de T dans $\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1})$ par

$$\begin{cases} \psi(t)(\theta, n) = \frac{1}{n} u_\alpha^{-1} \circ \varphi_n(t).(\theta) & \theta \in K_\alpha \\ & n \in \mathbf{N} \\ \psi(t)(n) = h_n(t) \\ \psi(t)(a_{\alpha+1}) = h(t) \end{cases}$$

Si on pose alors $\varphi = u_{\alpha+1} \circ \psi$, on aura bien

$$\forall t \in T \quad \|u_{\alpha+1}^{-1} \circ \varphi(t)\| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad h(t) = \epsilon_{a_{\alpha+1}} \circ u_{\alpha+1}^{-1} \circ \varphi(t)$$

Mais l'application φ s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi(t)\ (\theta, n) = \dfrac{\varphi_n(\theta)}{n^2} & \theta \in K_\alpha\ ,\ n \in N \\ \varphi(t)\,(n) = 0 & \\ \varphi(t)\,(a_{\alpha+1}) = 0 & \end{cases}$$

La continuité des φ_n et la convergence uniforme vers φ des fonctions $\varphi^{(k)}$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}\,(t)\ (\theta, n) = \dfrac{\varphi_n(\theta)}{n^2} & \theta \in K_\alpha\ ,\ n \leqslant k \\ \varphi^{(k)}(t)\ (\theta, n) = 0 & \theta \in K_\alpha , n > k \\ \varphi^{(k)}\,(t)\,(n) = \varphi^{(k)}\,(t)\,(a_{\alpha+1}) = 0 & \end{cases}$$

entraînent la continuité de φ, ce qui termine la démonstration pour l'ordinal α.

Si α est un ordinal limite, borne supérieure d'une suite croissante (β_k) d'ordinaux pour lesquels le théorème est vrai, on désignera par H_k l'espace localement compact K_{β_k+1}, par v_k l'application u_{β_k+1} et b_k le point a_{β_k+1} de H_k.

L'espace $K_{\alpha+1}$ sera la somme disjointe de $\overline{N}$ et des H_k. La construction de $u_{\alpha+1}$ et la démonstration seront analogues à celles du cas précédent en remplaçant $K_\alpha \times N$, c'est-à-dire la somme d'une suite d'espaces tous égaux à K_α par la somme des H_k. Le point $a_{\alpha+1}$ est le point de $\overline{N} - N$, et on définit, pour x appartenant à $\mathcal{C}_0\,(K_{\alpha+1})$, l'élément $u_{\alpha+1}\,(x)$ par

$$\begin{cases} u_{\alpha+1}(x)\ (\theta) = \dfrac{v_k\,(x_{|H_k})\,(\theta)}{k} & \theta \in H_k \\ u_{\alpha+1}(x)\ (k) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x(k)}{k^2} - \dfrac{x(b_k)}{k}\right] & \\ u_{\alpha+1}(x)\ (a_{\alpha+1}) = 0 & \end{cases}$$

On voit, comme précédemment, que $u_{\alpha+1}$ est une application linéaire injective continue de norme au plus 1, à valeurs dans $c_0(K_{\alpha+1})$. Les applications w_k définies de façon analogue au cas précédent sont de classes $\beta_k + 1 < \alpha$ et convergent vers $u_{\alpha+1}^{-1}$, qui est donc de classe de Baire au plus $\alpha+1$. De même, si h est une application borélienne de classe $\alpha + 1$ du compact T dans $[0,1]$, il existe une suite (h_k) de fonctions de classes $< \alpha$ de T dans $[0,1]$ qui converge vers h. En répétant au besoin un nombre fini de fois les fonctions h_k, on peut supposer que la fonction h_k est de classe $\beta_k + 1$, donc qu'il existe des fonctions continues φ_k de T dans $C_0(H_k)$ telles que

$$h_k(t) = \epsilon_{b_k} \circ v_k^{-1} \circ \varphi_k(t)$$

On peut alors construire comme dans le cas précédent une application continue φ de T dans $c_0(K_{\alpha+1})$ telle que

$$\forall t \quad \| u_{\alpha+1}^{-1} \circ \varphi(t) \| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad h(t) = \epsilon_{a_{\alpha+1}} \circ u_{\alpha+1}^{-1} \circ \varphi(t)$$

Ceci termine la démonstration du théorème 21.

COROLLAIRE 22. — *Pour tout ordinal α de première espèce il existe un espace normé qui possède un modèle Banach séparable et qui est de degré α.*

THEOREME 23. — *Soient* T *un compact métrisable et* X *une partie borélienne de* T, *de classe multiplicative $\alpha + 2$. Il existe une application φ de* T *dans $c_0(K_{\alpha+1})$, où $K_{\alpha+1}$ est l'espace construit au théorème 21, qui est un homéomorphisme de* T *sur $\varphi(T)$, telle que $\varphi(X)$ soit la trace sur $\varphi(T)$ du sous-espace $V_{\alpha+1} = u_{\alpha+1}(\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1}))$.*

Il existe, d'après le théorème 16, une suite (h'_n) de fonctions de T dans $[0,1]$, de classe α (ou de classe $< \alpha$, si α est de deuxième espèce) telle que X soit l'ensemble de convergence de T. Il existe aussi une suite (g_n) de fonctions continues de T dans $[0,1]$ qui sépare les points de T. Si on pose

$$\begin{cases} h_{2n}(t) = \dfrac{h'_n(t)}{2} \\[2ex] h_{2n+1}(t) = \dfrac{h'_n(t)}{2} + \dfrac{g_n(t)}{2n} \end{cases}$$

la suite (h_n) sépare les points de T et a X pour ensemble de convergence. Il existe une suite d'applications continues (φ_n) de T dans $c_0(K_\alpha)$ (de T dans $c_0(H_k)$ si $\alpha = \sup \beta_k$ est de deuxième espèce) telles que

$$h_n(t) = \epsilon_{a_\alpha} \circ u_\alpha^{-1} \circ \varphi_n(t)$$

$$(h_k(t) = \epsilon_{b_k} \circ v_k^{-1} \circ \varphi_k(t) \text{ si } \alpha \text{ est de deuxième espèce})$$

On voit comme dans le théorème 21 que si φ est définie par

$$\begin{cases} \varphi(t)\,(\theta, n) = \dfrac{1}{n^2}\varphi_n(\theta) & \theta \in K_\alpha\,,\ n \in N \\ \varphi(t)\,(n) = \varphi(t)\,(a_{\alpha+1}) = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(t)\,(\theta) = \dfrac{1}{k^2}\varphi_k(\theta) & \theta \in H_k \\ \varphi(t)\,(k) = \varphi(t)\,(a_{\alpha+1}) = 0 & \end{cases} \quad \text{pour } \alpha \text{ de deuxième espèce}$$

l'application φ est continue de T dans $c_0(K_{\alpha+1})$, que φ est injective puisque h_n sépare les points, et que $\varphi(t)$ appartient à $u_{\alpha+1}(\mathcal{C}_0(K_{\alpha+1}))$ si et seulement si la suite $h_n(t)$ converge, c'est-à-dire si t appartient à X, donc que

$$\varphi(X) = \varphi(T) \cap V_{\alpha+1}$$

COROLLAIRE 24. – *L'espace* $V_{\alpha+1}$ *ci-dessus est de classe multiplicative* $\alpha + 2$, *dans son complété et contient des fermés homéomorphes à n'importe quel sous-espace de classe* $\alpha + 2$*-muliplicative d'un compact métrisable.*

Puisque $u_{\alpha+1}$ est de degré $\alpha + 1$, il résulte du théorème 20 que $V_{\alpha+1}$ appartient à $\mathfrak{M}_{\alpha+2}(\hat{V}_{\alpha+1})$. Il résulte aussi du théorème 23 que si X est de classe $\alpha + 2$-multiplicative dans T, il est homéomorphe à $\varphi(X) = \varphi(T) \cap V_{\alpha+1}$ qui est fermé dans $V_{\alpha+1}$.

On a ainsi construit un exemple d'espace homogène, qui est universel pour les espaces métrisables lusiniens de classe $\alpha + 2$-multiplicative.

Dans toute la suite, on sera dans la situation suivante : V est un espace localement convexe métrisable, de complété $\hat{V}$, qui possède un modèle séparable E. L'application u est continue, linéaire et bijective de E sur V. On considère un système (A_n) fondamental de voisinages convexes fermés équilibrés de 0 dans $\hat{V}$, et un système (B_n) fondamental de voisinages convexes fermés équilibrés de 0 dans E. On suppose de plus, sans nuire à la généralité, que $u^{-1}(A_n) \supset B_n$. Puisque E est séparable, les polaires B_n^0 sont des compacts métrisables pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.

On définit, par récurrence sur α, des compacts faibles de E' $(K_{n,\alpha})_{\substack{n\in N\\ \alpha<\Omega}}$ et des sous-espaces $(L_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de E' en posant :

$$\begin{cases} K_{n,0} = {}^tu(A_n^0) \subset B_n^0 \\ L_0 = \bigcup\limits_{n\in N} K_{n,0} = {}^tu(V') \\ K_{n,\alpha+1} = \overline{B_n^0 \cap L_\alpha} \\ L_{\alpha+1} = \bigcup\limits_{n\in N} K_{n,\alpha+1} \\ L_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} L_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est de deuxième espèce.} \end{cases}$$

On vérifie par récurrence que $K_{n,\alpha}$ est un compact convexe équilibré et que L_α est un sous-espace vectoriel de E' : en effet pour tout $\lambda \in R$ et tout $n \in N$, il existe m tel que $\lambda B_m \subset B_n$, et par conséquent $\lambda B_n^0 \subset B_m^0$ et aussi $\lambda K_{n,\alpha} \subset K_{m,\alpha}$.

THEOREME 25. — *Pour tout ordinal dénombrable α, l'ensemble $L_{\alpha+1}$ est formé des limites de suites faiblement convergentes d'éléments de L_α.*

En effet, soit f un élément de $L_{\alpha+1}$. Il existe un entier n tel que f appartienne à $K_{n,\alpha+1}$. Puisque E est séparable, le compact B_n^0 est métrisable, et f, adhérent à $B_n^0 \cap L_\alpha$, est limite d'une suite d'éléments de $B_n^0 \cap L_\alpha$.

Inversement, si f est limite d'une suite faiblement convergente (f_m) d'élément de L_α, l'ensemble $\{f_m \mid m \in N\}$ est équicontinu puisque l'espace de Fréchet E est tonnelé. Il existe donc un entier n tel que

$$\{f_m \mid m \in N\} \subset B_n^0$$

On a alors

$$\forall x \in B_n \qquad |f(x)| = \lim |f_m(x)| \leqslant 1$$

et on voit que f est adhérent à $B_n^0 \cap L_\alpha$, donc appartient à $K_{n,\alpha+1}$, et par conséquent à $L_{\alpha+1}$.

COROLLAIRE 26. – *Pour qu'une forme linéaire g borélienne sur* V *soit de classe linéaire α, il faut et il suffit que $g \circ u$ appartienne à* L_α.

Si on identifie par u les espaces vectoriels E et V, cet énoncé signifie que L_α est l'ensemble des formes linéaires de classe linéaire α pour la topologie de V.

L'énoncé du corollaire est vrai pour $\alpha = 0$ par définition de L_0. Le théorème 25 montre que si l'énoncé est vrai pour α, il est vrai pour $\alpha + 1$. De plus, si α est un ordinal limite, la définition de L_α comme réunion des L_β pour $\beta < \alpha$, et la définition 12 de la classe linéaire α, montrent que l'énoncé est encore vrai pour α s'il est vrai pour tous les ordinaux β inférieurs à α.

Ceci montre que l'énoncé est vrai pour tout ordinal α.

THEOREME 27. – *Il existe un ordinal dénombrable λ tel que* L_λ *soit égal à* E'.

Pour chaque entier n, le compact B_n^0 est métrisable. Si $(\omega_i)_{i\in N}$ est une base dénombrable de la topologie de B_n^0, et si on définit

$$\Delta = \{i \mid \exists\, \alpha_i < \Omega \ ; \ K_{n,\alpha_i} \cap \omega_i \neq \phi\}$$

et
$$\gamma_n = \sup_{i \in \Delta} \alpha_i + 1 < \Omega$$

on a

$$\forall \gamma' \geqslant \gamma_n \quad K_{n,\gamma'} \subset B_n^0 - \bigcup_{i \notin \Delta} \omega_i \subset K_{n,\gamma_n} \subset K_{n,\gamma'}$$

puisque

$$\omega_i \cap K_{n,\gamma_n} = \phi \Rightarrow i \notin \Delta$$

Si on désigne par λ la borne supérieure des γ_n, on obtient :

$$\forall n \ : \ K_{n,\lambda+1} = K_{n,\lambda}$$

Ceci entraîne

$$\forall n \ , \ K_{n,\lambda+1} = \overline{B_n^0 \cap L_\lambda} = K_{n,\lambda} \subset L_\lambda \cap B_n^0$$

La trace sur chaque B_n^0 de l'espace vectoriel L_λ est donc faiblement compacte, ce qui entraîne que L_λ est fermé pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, (cf. [2], chap. IV, § 2, Th. 5).

Par ailleurs, puisque u est injective, $L_0 = {}^t u(V')$ est faiblement dense dans E', et L_λ qui contient L_0 est faiblement dense dans E'. Puisque L_λ est aussi faiblement fermé, on a $L_\lambda = E'$.

COROLLAIRE 28. – *Toute forme linéaire borélienne sur* V *possède une classe linéaire, et celle-ci est bornée par l'ordinal* λ.

Ceci résulte immédiatement de la proposition 8, du corollaire 26 et du théorème 27.

THEOREME 29. – *Pour qu'une forme linéaire f sur* V *soit de première classe linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que f soit bornée par 1 sur* $\overline{u(B_n)}$.

Pour que f soit de première classe linéaire sur V, il est nécessaire et suffisant, d'après le corollaire 26, qu'il existe n tel que $f \circ u$ appartienne à $K_{n,1} = K_{n,1}^{00}$, puisque $K_{n,1}$, fermé convexe et équilibré, est égal à son bipolaire. Or

$$K_{n,1}^0 = (B_n^0 \cap L_0)^0 = \Big(\bigcup_{m\in N} B_n^0 \cap {}^t u(A_m^0)\Big)^0$$

$$= \Big(\bigcup_{\substack{m\in N\\ \epsilon>0}} [(1-\epsilon)B_n^0] \cap {}^t u(A_m^0)\Big)^0$$

$$= \bigcap_{\substack{m\in N\\ \epsilon>0}} ((1-\epsilon)B_n^0 \cap {}^t u(A_m^0))^0 = \bigcap_{\substack{m\\ \epsilon>0}} \overline{\mathrm{conv}((1-\epsilon)^{-1}B_n \cup u^{-1}(A_n))}$$

De plus

$$\overline{\mathrm{conv}((1-\epsilon)^{-1}B_n \cup u^{-1}(A_m))} \subset (1-\epsilon)^{-1}B_n + 2u^{-1}(A_m)$$

Et, puisque $\dfrac{1-\epsilon}{1-\epsilon/2} + \dfrac{\epsilon}{2-\epsilon} = 1$, on a aussi, pour un m',

$$\Big(1-\frac{\epsilon}{2}\Big)^{-1} B_n + u^{-1}(A_{m'}) \subset \Big(1-\frac{\epsilon}{2}\Big)^{-1} B_n + \frac{\epsilon}{2-\epsilon} u^{-1}(A_m) \subset$$

$$\subset \mathrm{conv}\,[(1-\epsilon)^{-1} B_n + \cup\, u^{-1}(A_m)]$$

Il en résulte que

$$K^0_{n,1} = \bigcap_{\substack{m \\ \epsilon > 0}} \overline{\operatorname{conv}((1-\epsilon)^{-1} B_n \cup u^{-1}(A_m))} = \bigcap_{\substack{m \\ \epsilon > 0}} [(1-\epsilon)^{-1} B_n + u^{-1}(A_m))$$

$$= \bigcap_{\substack{\epsilon > 0 \\ m}} u^{-1}[(1-\epsilon)^{-1} u(B_n) + A$$

$$= \bigcap_{\epsilon > 0} u^{-1}[(1-\epsilon)^{-1} \overline{u(B_n)}]$$

$$K^0_{n,1} = u^{-1}(\overline{u(B_n)})$$

Pour que f soit de première classe linéaire, il est donc nécessaire et suffisant que $f \circ u$ soit borné par 1 sur $K^0_{n,1} = \overline{u^{-1}(u(B_n)}$, donc que f soit borné par 1 sur $\overline{u(B_n)}$.

THEOREME 30. – *Il existe un espace de Fréchet séparable* N_1, *une application linéaire continue injective* u_1 *de* N_1 *dans* $\hat{V}$ *de degré* 1 *et une application linéaire continue injective* r_1 *de* E *dans* N_1 *tels que*

i) $u = u_1 \circ r_1$

ii) $r_1(E)$ *est dense dans* N_1

iii) ${}^t r_1(N_1') = L_1$

Soit $\widetilde{C}_n$ l'adhérence de $u(B_n)$ dans $\hat{V}$. Désignons par W_n l'espace vectoriel engendré par $\widetilde{C}_n$, soit, puisque $\widetilde{C}_n$ est convexe équilibré.

$$W_n = \bigcup_{k \in N} k \,.\, \widetilde{C}_n$$

Si on désigne maintenant par $\widetilde{N}_1$ l'intersection des W_n, $\widetilde{N}_1$ est un espace vectoriel sur lequel les $(\widetilde{C}_n \cap \widetilde{N}_1)_n$ forment un système fondamental de voisinages convexes de 0 pour une topologie localement convexe métrisable, plus fine que la topologie de $\hat{V}$ puisque

$$\widetilde{C}_n = \overline{u(B_n)} \subset \overline{A_n} = A_n$$

Il existe donc une application linéaire continue injective u_1 de $\widetilde{N}_1$ dans $\hat{V}$. Par ailleurs, puisque, $\widetilde{N}_1$ contient V, on a

$$u(B_n) \subset \overline{u(B_n)} \cap \widetilde{N}_1 = \widetilde{C}_n \cap \widetilde{N}_1$$

Donc l'application r_1 de E dans $\widetilde{N}_1$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad r_1(x) = u(x)$$

est continue. Définissons alors N_1 par

$$\mathrm{N}_1 = \overline{r_1(\mathrm{E})}$$

Si on montre que $\widetilde{\mathrm{N}}_1$ est complet, puisque E est séparable, il en sera de même du sous-espace N_1 de $\widetilde{\mathrm{N}}_1$, qui sera donc un Fréchet séparable. Soit donc (x_i) une suite de Cauchy dans $\widetilde{\mathrm{N}}_1$. La suite $u_1(x_i)$ est une suite de Cauchy de $\hat{\mathrm{V}}$ et converge dans $\hat{\mathrm{V}}$ vers un point a. Si q_n est dans $\widetilde{\mathrm{N}}_1$ la jauge de $\widetilde{\mathrm{C}}_n$, la suite $q_n(x_i)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$, donc une suite bornée ; il existe donc, pour tout n, un k tel que

$$\forall i \quad x_i \in k\,\widetilde{\mathrm{C}}_n \subset \mathrm{W}_n$$

Puisque $k\widetilde{\mathrm{C}}_n$ est fermé dans $\hat{\mathrm{V}}$, le point a appartient à $k\,\widetilde{\mathrm{C}}_n \subset \mathrm{W}_n$. Ceci étant valable pour tout n, on a

$$a \in \bigcap_n \mathrm{W}_n = \widetilde{\mathrm{N}}_1$$

Pour tout n, il existe M_n avec

$$\forall i, \forall j \geqslant \mathrm{M}_n \quad x_i \in x_j + \widetilde{\mathrm{C}}_n$$

et puisque $x_j + \widetilde{\mathrm{C}}_n$ est fermé dans $\hat{\mathrm{V}}$, on a

$$\forall j \geqslant \mathrm{M}_n \quad a \in x_j + \widetilde{\mathrm{C}}_n$$

c'est-à-dire $x_j \in a + \widetilde{\mathrm{C}}_n$ et ceci signifie que (x_i) converge vers a dans $\widetilde{\mathrm{N}}_1$; l'espace $\widetilde{\mathrm{N}}_1$ est donc complet.

Soit f une forme linéaire sur E. Pour que f appartienne à L_1, il faut et il suffit, d'après le théorème 29, que $f \circ u^{-1}$ soit bornée par 1 sur l'adhérence dans V d'un $u(\mathrm{B}_n)$, c'est-à-dire bornée par 1 sur $\mathrm{V} \cap u_1(\widetilde{\mathrm{C}}_n)$, c'est-à-dire encore que $f \circ r^{-1}$ soit bornée par 1 sur un voisinage de 0 dans le sous-espace $r_1(\mathrm{E})$ de $\widetilde{\mathrm{N}}_1$. Cette condition signifie que $f \circ r^{-1}$ est continue sur le sous-espace $r_1(\mathrm{E})$, donc est la restriction à $r_1(\mathrm{E})$ d'une forme linéaire continue g sur $\mathrm{N}_1 = \overline{r_1(\mathrm{E})}$, et par conséquent que

$$f = {}^t r_1(g)$$

On a donc bien montré que L_1 est égal à ${}^t r_1(\mathrm{N}'_1)$.

Pour montrer que u_1 est de degré 1, il suffit, en vertu de la remarque qui suit la proposition 19, de montrer que N_1 possède un système fondamental (C_n) de voisinages de 0, dont les images par u_1 sont de classe 0-multiplicative, c'est-à-dire fermées dans $u_1(N_1)$. Or, si C_n est défini par

$$C_n = \widetilde{C}_n \cap N_1$$

on a

$$u_1(C_n) = u_1(N_1) \cap \widetilde{C}_n = u_1(N_1) \cap \overline{u(B_n)}$$

qui est fermé dans $u_1(N_1)$ puisque $\overline{u(B_n)}$ est fermé dans $\hat{V}$.

THEOREME 31. — *Il existe pour tout ordinal dénombrable α un espace de Fréchet séparable N_α et une injection linéaire continue r_α d'image dense de E dans N_α. Il existe pour tout couple (α, β) d'ordinaux dénombrables tels que $\alpha \leqslant \beta$ une injection linéaire continue $v_{\alpha,\beta}$ de N_β dans N_α telles que*

$$\begin{cases} N_0 = \hat{V} \\ r_0 = u \\ v_{\alpha,\beta} \circ v_{\beta,\gamma} = v_{\alpha,\gamma} \quad \text{si} \quad \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \\ v_{\alpha,\beta} \circ r_\beta = r_\alpha \\ {}^t r_\alpha (N'_\alpha) = L_\alpha \end{cases}$$

Le théorème précédent montre l'existence de N_1, muni des propriétés énoncées ci-dessus.

Si N_α est construit, on détermine $N_{\alpha+1}$ et $v_{\alpha,\alpha+1}$ en faisant la construction du théorème 30 sur l'application r_α de E dans l'espace N_α. On pose, pour $\gamma < \alpha$

$$v_{\gamma,\alpha+1} = v_{\gamma,\alpha} \circ v_{\alpha,\alpha+1}$$

D'autre part, puisque $L_\alpha = {}^t r_\alpha (N'_\alpha)$, si f est une forme linéaire sur E appartenant à $L_{\alpha+1}$, il existe une suite de formes linéaires continues g_i sur N_α telle que

$$\forall x \in E \qquad f(x) = \lim_{i \to \infty} {}^t r_\alpha (g_i)$$

La forme linéaire $f \circ r_\alpha^{-1}$ est donc de première classe linéaire sur l'espace $r_\alpha(E)$, et par conséquent il existe une forme linéaire continue g sur $N_{\alpha+1}$ telle que

$$f \circ r_\alpha^{-1} = g \circ v_{\alpha,\alpha+1}^{-1}$$

c'est-à-dire

$$f = g \circ r_{\alpha+1} = {}^t r_{\alpha+1}(g)$$

Inversement, si f appartient à ${}^t r_{\alpha+1}(N_{\alpha+1})$, il existe une suite de formes linéaires continues sur N_α, soit (g_i), telles que, en tout point de E, ${}^t r_\alpha(g_i)$ converge vers f. Comme les formes linéaires ${}^t r_\alpha(g_i)$ appartiennent à L_α, f appartient à $L_{\alpha+1}$.

Si maintenant les N_β sont construits pour tout ordinal β inférieur à l'ordinal limite α, on définit N_α et les $v_{\beta,\alpha}$ comme limite projective du système $[(N_\beta)_{\beta<\alpha} ; (v_{\beta,\gamma})_{\beta\leqslant\gamma<\alpha}]$.

Alors N_α s'injecte de façon linéaire et continue dans chaque N_β pour $\beta < \alpha$, et, en particulier, on a :

$$v_{0,\alpha}(N_\alpha) = \bigcap_{\beta<\alpha} v_{0,\beta}(N_\beta) \subset N_0 = \hat{V}$$

L'espace N_α est alors un espace de Fréchet séparable, et puisque E s'injecte dans chaque N_β, il existe une injection linéaire continue r_α de E dans N_α. De plus, puisque $r_\beta(E)$ est dense dans chaque N_β, $r_\alpha(E)$ sera dense dans N_α.

Pour que la forme linéaire f sur N_α soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit bornée sur un voisinage de 0, c'est-à-dire qu'il existe $\beta < \alpha$, et un voisinage U de 0 dans N_β tels que f soit bornée sur $v_{\beta,\alpha}^{-1}(U)$, c'est-à-dire encore que f appartienne à ${}^t v_{\beta,\alpha}(N'_\beta)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} {}^t r_\alpha(N'_\alpha) &= \bigcup_{\beta<\alpha} {}^t r_\alpha({}^t v_{\beta,\alpha}(N_\beta)) = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^t r_\beta(N'_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \\ &= L_\alpha \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

THEOREME 32. — *Il existe un ordinal dénombrable* λ *tel que* N_λ *soit isomorphe à* E, *ainsi que les espaces* N_α *pour* $\alpha \geqslant \lambda$.

Il existe, d'après le théorème 27 un ordinal λ tel que $L_\lambda = E'$. Alors l'injection linéaire continue r_λ de E dans N_λ vérifie

$${}^t r_\lambda(N'_\lambda) = L_\lambda = E'$$

On en déduit que l'application r_λ^{-1} de r_λ (E) dans E est faiblement continue, donc continue pour les topologies de Mackey $\tau(r_\lambda(\mathrm{E}), \mathrm{N}'_\lambda)$ et $\tau(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ qui coïncident avec les topologies métrisables de r_λ (E) et de E, ce qui montre que r_λ est un isomorphisme de E sur r_λ (E), donc aussi que ce dernier est complet comme E, et égal à son complété N_λ. Ceci prouve que r_λ est un isomorphisme de E sur N_λ.

Puisque, pour tout α supérieur à λ, on a encore $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{L}_\lambda = \mathrm{E}'$, la même démonstration prouve que N_α est alors isomorphe à E, donc aussi à N_λ, c'est-à-dire que la suite transfinie (N_α) stationne à N_λ.

PROPOSITION 33. – *Le sous-espace* r_α (E) *de l'espace de Fréchet* N_α *est muni de la topologie de Mackey* $\tau(\mathrm{E}, \mathrm{L}_\alpha)$ *et* N_α *est son complété.*

Puisque la topologie de N_α, et par conséquent celle du sous-espace r_α (E), est métrisable, elle est égale à la topologie de Mackey associée à la dualité avec N_α, c'est-à-dire, modulo l'isomorphisme algébrique r_α de E sur r_α (E) à la topologie de Mackey $\tau(\mathrm{E}, {}^t r_\alpha(\mathrm{N}'_\alpha)) = \tau(\mathrm{E}, \mathrm{L}_\alpha)$.

Puisque N_α est l'adhérence dans $\widetilde{\mathrm{N}}_\alpha$ de r_α (E), N_α est le complété de r_α (E).

Ce résultat montre que la topologie de Mackey $\tau(\mathrm{E}, \mathrm{L}_\alpha)$ est métrisable et donne une caractérisation de l'espace N_α comme complété d'un espace localement convexe métrisable.

DEFINITION 34. – *On appellera modèle d'ordre* α *de* V, *l'espace de Fréchet* N_α *ainsi construit.*

PROPOSITION 35. – *Soient* V *et* W *deux espaces localement convexes métrisables qui possèdent respectivement les modèles séparables* E *et* F. *Si* φ *est une application linéaire continue de* V *dans* W, *il existe des applications linéaires continues* φ_α *de* N_α *dans* P_α, *où* N_α *et* P_α *désignent respectivement les modèles d'ordre* α *de* V *et* W, *qui coïncident avec* φ *sur les images canoniques de* V *dans* N_α.

Désignons par L_α et M_α les espaces de formes linéaires, sur E et F respectivement, qui sont de classe linéaire α pour les topologies de V et de W. On a vu dans la proposition 2 que φ était continue pour les topologies de E et F. Puisque ${}^t\varphi(\mathrm{W}') \subset \mathrm{V}'$ on voit que ${}^t\varphi(\mathrm{M}_0) \subset \mathrm{L}_0$.

De plus, si une suite g_i de formes linéaires sur F converge simplement sur F vers une forme linéaire g, les formes linéaires ${}^t\varphi(g_i)$ convergent simplement sur E vers ${}^t\varphi(g)$. Il en résulte que pour tout α, on a

$${}^t\varphi(\mathrm{M}_\alpha) \subset \mathrm{L}_\alpha$$

donc que pour tout α, l'application φ est continue pour les topologies de Mackey $\tau(\mathrm{E}, \mathrm{L}_\alpha)$ et $\tau(\mathrm{F}, \mathrm{M}_\alpha)$, et se prolonge aux complétés en des applications continues φ_α de N_α dans P_α.

THEOREME 36. – *Pour tout ordinal dénombrable α, l'application $v_{0,\alpha}$ de N_α dans $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ est de degré au plus α.*

L'énoncé est trivial pour $\alpha = 0$. S'il est vrai pour l'ordinal α, l'application $v_{0,\alpha}^{-1}$ de $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ dans N_α est de classe de Baire α. Il résulte du théorème 30 et de la construction de $\mathrm{N}_{\alpha+1}$ à partir de N_α, que $v_{\alpha,\alpha+1}$ est de degré 1, donc $v_{\alpha,\alpha+1}^{-1}$ de première classe de Baire. Alors, l'application

$$v_{0,\alpha+1}^{-1} = v_{\alpha,\alpha+1}^{-1} \circ v_{0,\alpha}^{-1}$$

est de classe de Baire $\alpha + 1$ au plus ; ce qui démontre l'énoncé pour l'ordinal $\alpha + 1$.

Si α est un ordinal de deuxième espèce, il existe dans N_α un système fondamental de voisinages de 0 de la forme $v_{\beta,\alpha}^{-1}(\mathrm{U})$, où $\beta < \alpha$ et U est un voisinage ouvert de O dans N_β. Alors

$$v_{0,\alpha}[v_{\beta,\alpha}^{-1}(\mathrm{U})] = v_{0,\beta}(\mathrm{U}) \cap v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$$

qui est de classe β-additive dans $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ si l'énoncé est vrai pour tout β inférieur à α. Il résulte alors de la proposition 19 que $v_{0,\alpha}$ est de degré α au plus.

PROPOSITION 37. – *Pour tout ordinal α tel que $\beta + \alpha \leqslant \gamma$ le modèle d'ordre α du sous-espace $v_{\beta,\gamma}(\mathrm{N}_\gamma)$ de N_β est isomorphe à $\mathrm{N}_{\beta+\alpha}$.*

Puisque $v_{\beta,\gamma}(\mathrm{N}_\gamma)$ contient $r_\beta(\mathrm{E})$ qui est dense dans N_β, l'énoncé est vrai pour $\alpha = 0$. S'il est vrai pour α et si $\beta + \alpha + 1 \leqslant \gamma$ un système fondamental de voisinages de 0 dans le modèle d'ordre $\alpha + 1$ de $v_{\beta,\gamma}(\mathrm{N}_\gamma)$ est déterminé par les adhérences dans $\mathrm{N}_{\beta+\alpha}$ des images par $v_{\beta+\alpha,\gamma}$ des voisinages de 0 dans N_γ qui sont eux-mêmes les adhérences dans un N_δ avec $\gamma > \delta \geqslant \beta + \alpha$ d'images par r_γ de voisinages de 0 dans E. Comme la topologie de N_δ est plus fine que celle de $\mathrm{N}_{\beta+\alpha}$, les adhérences dans $N_{\beta+\alpha}$ des images par $v_{\beta+\alpha,\gamma}$ des voisinages de 0 dans N_γ sont les mêmes que les adhérences dans $N_{\beta+\alpha}$ des images par $r_{\beta+\alpha}$ des voisinages de 0 dans E. Ceci montre que $\widetilde{N}_{\beta+\alpha+1}$ est isomorphe à l'espace analogue $\widetilde{P}_{\alpha+1}$ défini par $v_{\beta,\gamma}(N_\gamma)$, et donc que $N_{\beta+\alpha+1}$ est isomorphe à l'espace $P_{\alpha+1}$, modèle d'ordre $\alpha+1$ de $v_{\beta,\gamma}(N_\gamma)$. Donc l'énoncé est vrai pour $\alpha+1$.

Si l'énoncé est vrai pour tout ordinal δ inférieur à un ordinal limite α, on aura :

$$P_\alpha = \varprojlim_{\delta<\alpha} P_\delta \quad \text{isomorphe à} \quad \varprojlim_{\delta<\alpha} N_{\beta+\delta} = N_{\beta+\alpha}$$

ce qui prouve l'énoncé pour l'ordinal α, et termine la démonstration de la proposition.

THEOREME 38. – *Si le modèle* E *est un espace de Banach, pour tout ordinal dénombrable* α, le modèle $N_{\alpha+1}$ *d'ordre* $\alpha+1$ *est un Banach. Si pour un ordinal limite* α*, le modèle d'ordre* α *est un Banach, il existe un ordinal* β *inférieur à* α *tel que* E *soit isomorphe à* N_β *(donc aussi à* N_α*).*

Si E est un Banach, on peut choisir les voisinages B_n tous homothétiques. Alors les adhérences de $r_\alpha(B_n)$ dans N_α sont homothétiques et l'espace $\widetilde{N}_{\alpha+1}$ est un espace normé de même que son sous-espace $N_{\alpha+1}$, qui est donc un Banach.

Si N_α est un Banach, pour un ordinal limite α, N'_α est un Banach. Comme on a :

$$N'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^t v_{\beta,\alpha}(N'_\beta)$$

il existe un $\beta<\alpha$ tel que ${}^t v_{\beta,\alpha}(N'_\beta)$ soit non maigre dans l'espace de Baire N'_α, muni de la topologie de la norme. Alors l'application ${}^t v_{\beta,\alpha}$ est surjective de N'_β sur N'_α. Ceci entraîne que l'application $v^{-1}_{\beta,\alpha}$ de $v_{\beta,\alpha}(N_\alpha)$ sur N_α est faiblement continue, donc continue, puisque ces topologies sont métrisables. Ceci signifie que $v_{\beta,\alpha}$ est un isomorphisme, donc que $v_{\beta,\alpha}(N_\alpha)$ est complet, et égal à son complété N_β, donc enfin que N_α est isomorphe à N_β, ainsi qu'à tous les N_δ pour $\beta \leqslant \delta < \alpha$. Or si N_β est isomorphe à $N_{\beta+1}$, on sait que L_β est égal à $L_{\beta+1}$, c'est-à-dire que $L_\beta = E'$, donc que N_β est isomorphe à E, ainsi que N_α.

En particulier, si E est un Banach, le plus petit ordinal α tel que N_α soit isomorphe à E est un ordinal de première espèce.

LEMME 39. — *Soit* H *un* G_δ *dense de* E. *Si g est une fonction de première classe de Baire définie sur le sous-espace u* (H) *de* V *et à valeurs réelles, il existe un* G_δ *dense* H′ *de* E, *contenu dans* H *tel que la restriction au sous-espace* r_1 (H′) *de* N_1 *de la fonction* $g \circ u_1$ *soit continue.*

Puisque g est de première classe de Baire, il existe une suite de fonctions continues (g_m) qui converge simplement vers g sur u (H). Pour tout entier k et tout entier m, l'ensemble

$$G_{m,k} = \left\{ x \in H \mid \forall p \geqslant m, \forall q \geqslant m \mid g_p \circ u(x) - g_q \circ u(x) \mid \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fermé dans H. Puisque la suite $g_p \circ u(x)$ converge vers $g \circ u(x)$, c'est une suite de Cauchy dans **R**, et il en résulte que, pour tout k

$$H = \bigcup_m G_{m,k}$$

Puisque H est un G_δ de E, il est polonais, donc espace de Baire, et on en déduit que la réunion U_k des intérieurs dans H des $G_{m,k}$ est un ouvert partout dense de H. Alors l'intersection H′ des ouverts U_k est un G_δ dense de H, donc un G_δ dense de E, contenu dans H. Nous montrons maintenant que la restriction à r_1 (H′) de $g \circ u_1$ est continue. Soit donc x un point de H′ et $\epsilon > 0$; il existe un entier k tel que $1/k \leqslant \frac{\epsilon}{3}$, et puisque $x \in U_k$, il existe deux entiers m et n tels que

$$(x + B_n) \cap H \subset G_{m,k}$$

Ceci signifie que, pour tout p et tout q supérieurs à m, pour tout y appartenant à H tel que $y - x \in B_n$, on a :

$$| g_p \circ u(y) - g_q \circ u(y) | \leqslant \frac{1}{k}$$

L'ensemble des points de u (H) où cette inégalité est vérifiée est fermé dans u(H), donc contient l'adhérence dans u(H) de $u[(x + B_n) \cap H]$, qui est identique à l'adhérence dans u(H) de $u[\overline{(x + B_n) \cap H}]$. Or H est partout dense dans E, et $x + B_n$ est identique à l'adhérence de son intérieur. Il en résulte que l'inégalité ci-dessus est vérifiée en tout point de

$$u(\mathrm{H}) \cap \overline{u[(x + \mathrm{B}_n) \cap \mathrm{H}]} = u(\mathrm{H}) \cap \overline{u(\mathrm{B}_n)} = u(\mathrm{H}) \cap \widetilde{\mathrm{C}}_n$$

donc aussi l'inégalité obtenue en passant à la limite :

$$|g_m \circ u(y) - g \circ u(y) \leqslant 1/k$$

D'après la continuité de $g_m \circ u_1$, il existe aussi un entier $n' \geqslant n$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{H} \text{ tel que } r_1(y) - r_1(x) \in \widetilde{\mathrm{C}}_{n'}\ , \quad |g_m \circ u(y) - g_m \circ u(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

Il en résulte que pour tout y de H$'$ tel que $r_1(y) - r_1(x) \in \widetilde{\mathrm{C}}_n$, on a :

$$|g \circ u(y) - g \circ u(x)| \leqslant |g \circ u(y) - g_m \circ u(y)|$$
$$+ |g_m \circ u(y) - g_m \circ u(x) + |g_m \circ u(x) - g \circ u(x)| \leqslant \frac{3}{k} \leqslant \epsilon$$

ce qui montre la continuité de $g \circ u_1$ au point $r_1(x)$, puisque les $\mathrm{N}_1 \cap \widetilde{\mathrm{C}}_n$ forment une base de voisinages de 0 dans N_1, et termine la démonstration du lemme.

THEOREME 40. — *Si g est une fonction borélienne de classe α de* V *dans* **R**, *il existe un* G_δ *dense* H *de* E *tel que la restriction au sous-espace r_α* (H) *de* N_α, *de la fonction $g \circ v_{0,\alpha}$ soit continue.*

L'énoncé est trivial dans le cas $\alpha = 0$, où on peut prendre H = E.

Si l'énoncé est vrai pour l'ordinal α, et si g est une fonction de classe $\alpha + 1$, il existe une suite (g_n) de fonctions de classe α sur V qui converge simplement vers g. L'hypothèse de récurrence assure alors l'existence de G_δ denses H_n de E tels que la restriction à $r_\alpha(\mathrm{H}_n)$ de $g_n \circ v_{0,\alpha}$ soit continue. L'intersection H$'$ des H_n est encore un G_δ dense de E, et la restriction de chaque $g_n \circ v_{0,\alpha}$ à $r_\alpha(\mathrm{H}')$ est continue. La restriction de $g \circ v_{0,\alpha}$ à $r_\alpha(\mathrm{H}')$ est donc de première classe de Baire ; comme $\mathrm{N}_{\alpha+1}$ est construit à partir de r_α comme N_1 à partir de u, le lemme 39 nous permet d'affirmer l'existence d'un G_δ dense de E, H, contenu dans H$'$, tel que la restriction de

$$g \circ v_{0,\alpha} \circ v_{\alpha,\alpha+1} = g \circ v_{0,\alpha+1} \quad \text{à} \quad r_{\alpha+1}(\mathrm{H})$$

soit continue, ce qui montre que l'énoncé est vrai pour l'ordinal $\alpha + 1$.

Si l'énoncé est vrai pour tout ordinal β inférieur à l'ordinal limite α, et si g est de classe α sur V, il existe d'après le lemme 11 deux suites monotones g'_m et g''_m de fonctions de classes strictement inférieures à α à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, qui convergent vers g respectivement en croissant et en décroissant. Puisque $\overline{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à une partie de $\mathbf{R}$ et que l'énoncé du théorème est vrai pour les classes de g'_m et g''_m, il existe des G_δ denses H'_m et H''_m de E tels que les restrictions à $r_{\beta'_m}(\mathrm{H}'_m)$ (resp. $r_{\beta''_m}(\mathrm{H}''_m)$) des fonctions $g'_m \circ v_{0,\beta'_m}$ (resp. $g''_m \circ v_{0,\beta''_m}$) soient continues.

L'intersection $\mathrm{H} = (\bigcap_m \mathrm{H}'_m) \cap (\bigcap_m \mathrm{H}''_m)$ est encore un G_δ dense de E, et les applications $v_{\beta'_m,\alpha}$ et $v_{\beta''_m,\alpha}$ sont continues ; il en résulte que les restrictions à $r_\alpha(\mathrm{H})$ des fonctions $g'_m \circ v_{0,\alpha}$ et $g''_m \circ v_{0,\alpha}$ sont continues. Alors, l'application $g \circ v_{0,\alpha} = \sup g'_m \circ v_{0,\alpha} = \inf g''_m \circ v_{0,\alpha}$ a sa restriction à $r_\alpha(\mathrm{H})$ qui est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, donc continue, ce qui démontre l'énoncé pour l'ordinal α.

THEOREME 41. – *Soit f une forme linéaire borélienne sur* V, *de classe de Baire α. Alors f est de classe linéaire α. En particulier, si α est un ordinal limite, f n'est pas strictement de classe α.*

Si on applique le théorème 40 à la fonction f, on obtient un G_δ dense, H, de E tel que la restriction de $f \circ v_{0,\alpha}$ à $r_\alpha(\mathrm{H})$ soit continue. Il existe donc un point x de H et un voisinage ouvert convexe U de 0 dans N_α tel que

$$\forall y \in \mathrm{H} \cap (x + r_\alpha^{-1}(\mathrm{U})) \qquad |f \circ u(y) - f \circ u(x) \leqslant 1$$

Si z est un point quelconque de $x + r_\alpha^{-1}(\mathrm{U})$, l'ensemble

$$[x + r_\alpha^{-1}(\mathrm{U})] \cap [2z - x - r_\alpha^{-1}(\mathrm{U})]$$

est un voisinage ouvert de z donc rencontre le G_δ dense $\mathrm{H} \cap (2z - \mathrm{H})$. Ceci entraîne l'existence de y et y' appartenant à $\mathrm{H} \cap (x + r^{-1}(\mathrm{U}))$ tels que $y = 2z - y'$, c'est-à-dire $z = \dfrac{y + y'}{2}$. On a alors :

$$f \circ u(z) = \frac{1}{2}\,[f \circ u(y) + f \circ u(y')]$$

donc

$$|f \circ u(z) - f \circ u(x)| = |\frac{1}{2}(f \circ u(y) - f \circ u(x)) + \frac{1}{2}(f \circ u(y') - f \circ u(x))| \leqslant 1$$

ce qui montre que $f \circ v_{0,\alpha}$ est bornée sur l'ouvert $U + r_\alpha(x)$ de l'espace $r_\alpha(E)$, donc continue sur cet espace, et se prolonge en une forme linéaire continue sur le complété N_α. Il s'ensuit que $f \circ u$ appartient à L_α, c'est-à-dire que f est de classe linéaire α sur V, d'après le corollaire 26.

Enfin, d'après la définition 12, toute forme linéaire de classe linéaire α, où α est un ordinal limite, est de classe linéaire inférieure, donc de classe de Baire inférieure, d'après le corollaire 13.

COROLLAIRE 42. – *Pour une forme linéaire borélienne sur* V, *la classe linéaire et la classe de Baire coïncident.*

Ceci résulte immédiatement du théorème 41 et du corollaire 13.

THEOREME 43. – *Si φ est une application linéaire borélienne de classe α de* V *dans un espace de Fréchet* W, *il existe une application linéaire continue ψ de N_α dans* W *telle que :* $\varphi = \psi \circ (v_{0,\alpha}^{-1} | V)$.

L'application linéaire $\varphi \circ v_{0,\alpha}$ est définie sur le sous-espace dense $r_\alpha(E)$ de N_α. Si f est une forme linéaire continue sur W, $f \circ \varphi$ est une forme linéaire de classe de Baire α sur V, donc de classe linéaire α d'après le théorème 41, c'est-à-dire que $f \circ \varphi \circ v_{0,\alpha}$ est continue, d'après le théorème 31.

L'application $\varphi \circ v_{0,\alpha}$ est donc faiblement continue de l'espace métrisable $r_\alpha(E)$ dans l'espace W. Cette application est donc continue, et se prolonge en une application linéaire continue ψ du complété N_α dans l'espace complet W.

THEOREME 44. – *L'application linéaire continue $v_{0,\alpha}$ est exactement de degré α, à moins qu'il n'existe un ordinal β inférieur à α tel que N_β soit isomorphe à* E (*et à* N_α).

Il résulte du théorème 36 que le degré de $v_{0,\alpha}$ est au plus égal à α. Si ce degré est un ordinal β inférieur à α, l'application $v_{0,\alpha}^{-1}|\mathrm{V}$ est de classe de Baire au plus β de V dans $r_\alpha(\mathrm{E})$. Si f est une forme linéaire continue quelconque sur $r_\alpha(\mathrm{E})$, c'est-à-dire si $f \circ r_\alpha$ appartient à L_α, l'application $f \circ v_{0,\alpha}^{-1}$ est de classe de Baire au plus β, donc de classe linéaire au plus β, ce qui signifie que $f \circ v_{0,\alpha}^{-1} \circ u = f \circ r_\alpha$ appartient à L_β. On a donc $\mathrm{L}_\alpha \subset \mathrm{L}_\beta$, et par conséquent $\mathrm{L}_{\beta+1} = \mathrm{L}_\beta$ ce qui n'est possible que si $\mathrm{L}_\beta = \mathrm{E}'$ et $\mathrm{N}_\beta = \mathrm{E}$. On a alors aussi $\mathrm{N}_\alpha = \mathrm{E}$.

COROLLAIRE 45. – *Le degré de u est égal à la borne supérieure des classes de Baire des formes linéaires boréliennes sur* V, *et au plus petit ordinal α tel que* N_α *soit isomorphe à* E.

Pour le plus petit ordinal α tel que N_α soit isomorphe à E, on a $v_{0,\alpha} = u$ et le degré de $v_{0,\alpha}$ est égal à α d'après le théorème 44. Le degré de u est donc égal à α.

Si β est strictement inférieur à cet α, N_β n'est pas isomorphe canoniquement à E, et L_β n'est pas égal à E'. Il existe donc des formes linéaires boréliennes sur V qui ne sont pas de classe linéaire β, c'est-à-dire pas de classe de Baire β. Inversement, si f est une forme linéaire borélienne sur V, $f \circ u$ est continue sur E, donc $f = (f \circ u) \circ u^{-1}$ est de classe de Baire au plus α, si α est le degré de u. Le degré de u est donc bien la borne supérieure des classes de Baire des formes linéaires boréliennes sur V.

COROLLAIRE 46. – *Soit φ une application linéaire borélienne de* V *dans un espace de Fréchet* W. *Pour que φ soit de classe de Baire α, il faut et il suffit que φ se prolonge en une application linéaire borélienne de* $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ *dans* W.

Si φ est de classe α, le théorème 43 donne l'existence d'une application linéaire continue ψ de N_α dans W telle que $\varphi = \psi \circ (v_{0,\alpha}^{-1}|\mathrm{V})$. L'application $\psi \circ v_{0,\alpha}^{-1}$ est borélienne de classe α de $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ dans W et prolonge φ.

Inversement, si φ se prolonge en une application $\widetilde{\varphi}$ de $v_{0,\alpha}(\mathrm{N}_\alpha)$ dans W, borélienne, l'application $\widetilde{\varphi} \circ v_{0,\alpha}$ est continue sur N_α, d'après la propostion 8.

Et puisque $v_{0,\alpha}^{-1}$ est de classe α d'après le théorème 44, l'application

$$\varphi = (\tilde{\varphi} \circ v_{0,\alpha}) \circ (v_{0,\alpha}^{-1} \mid V)$$

est de classe de Baire au plus α sur V, ce qui achève la démonstration.

THEOREME 47. — *Pour que u soit de degré α, il faut et il suffit qu'il existe dans* E *un système fondamental de voisinages convexes fermés de* 0 *dont les images par u soient de classes multiplicatives dans* V *inférieures strictement à α.*

On a déjà vu dans la proposition 19 que la condition était suffisante. Si u est de degré α, E est isomorphe à N_α. Si α possède un prédécesseur β, N_α possède un système fondamental de voisinages dont les images par $v_{\beta,\beta+1}$ sont fermés dans N_β. Comme $v_{0,\beta}$ est de degré β, l'image d'un fermé de N_β par $v_{0,\beta}$ est de classe multiplicative β dans $v_{0,\beta}(N_\beta) \supset V$. Donc N_α possède un système fondamental de voisinages convexes fermés dont les images par $u = v_{0,\alpha} = v_{0,\beta} \circ v_{\beta,\alpha}$ sont de classes multiplicatives $\beta < \alpha$ dans V.

Si α est un ordinal limite, un système fondamental de voisinages de 0 est formé des images réciproques par les applications $v_{\beta,\alpha}$ des voisinages de 0 dans N_β pour les β inférieurs à α. Et puisque, si U est un voisinage convexe fermé de 0 dans N_β, on a :

$$u\,[v_{\beta,\alpha}^{-1}(U)] = v_{0,\beta}(U) \cap V$$

où $v_{0,\beta}(U)$ est de classe multiplicative β puisque $v_{0,\beta}$ est de degré β. Donc N_α possède un système fondamental de voisinages fermés convexes de 0 dont les images par u sont de classes multiplicatives dans V strictement inférieures à α.

Nous allons maintenant démontrer un théorème analogue au théorème 40, qui nous permettra d'obtenir des résultats sur la classe multiplicative de V dans $\hat{V}$.

LEMME 48. — *Soient* R' *un* G_δ *dense de* E, S' *un* G_δ *dense de* $N_0 = \hat{V}$, *contenant* $u(R')$, *et h une fonction de première classe de Baire de* S' *dans* **R**. *Alors il existe un* G_δ *dense* R *de* E *et un* G_δ *dense* S *de* N_1, *contenant* $r_1(R)$, *tels que la restriction à* S *de* $h \circ u_1$ *soit continue.*

Puisque h est de première classe de Baire, il existe une suite (h_m) de fonctions continues de S' dans **R**, qui converge simplement vers h. Les fonctions $h_m \circ u$ sont continues sur R'. Par conséquent, pour tout entier m et tout entier k l'ensemble

$$G_{m,k} = \left\{ x \in R' \mid \forall p \geqslant m\,,\ \forall q \geqslant m \mid h_p \circ u(x) - h_q \circ u(x) \mid \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fermé dans R'. Puisque la suite $h_p \circ u(x)$ est de Cauchy pour tout x de R', pour chaque entier k, on a

$$R' \doteq \bigcup_m G_{m,k}$$

Et, puisque R' est un G_δ de E, c'est un espace de Baire ; la réunion U_k des intérieurs dans R' des $G_{m,k}$ est un ouvert partout dense de R'. Il existe donc des points $x_{n,k,i}$ dans R' tels que

$$U_k = R' \cap \Big(\bigcup_{n,i} (x_{n,k,i} + B_n) \Big)$$

et $R' \cap (x_{n,k,i} + B_n) \subset G_{m,k}$ pour un m au moins.

Nous désignerons par ω_n l'intérieur dans N_1 de $\widetilde{C}_n \cap N_1$, et par B'_n l'intérieur dans E de B_n.

Alors : $$W_k = \bigcup_{n,i} (r_1(x_{n,k,i}) + \omega_n)$$

est un ouvert de N_1, qui contient l'image par r_1 de l'ouvert

$$\bigcup_{n,i} (x_{n,k,i} + B'_n)$$

de E. Puisque le fermé

$$x_{n,k,i} + (B_n \setminus B'_n)$$

est rare, l'ouvert

$$U'_k = R' \cap \Big(\bigcup_{n,i} (x_{n,k,i} + B'_n) \Big)$$

est partout dense dans R', puisque $U_k \setminus U'_k$ est maigre. Nous posons maintenant

$$S = u_1^{-1}(S') \cap \bigcap_{k \in N} W_k$$

L'ensemble S est un G_δ de N_1, puisque les W_k sont ouverts, que S' est un G_δ, et que u_1 est continue. On voit immédiatement que S contient $r_1 \big(\bigcap_{k \in N} U'_k \big)$; et puisque les U'_k sont des ouverts partout denses de R', leur intersection R est un G_δ partout dense de R', donc un G_δ partout dense de E. Par conséquent, r_1 (R) est partout dense dans $\overline{r_1 (E)} = N_1$, et puisque S contient r_1 (R), S est partout dense dans N_1.

Nous montrons maintenant que $h \circ u_1$ est continue sur S. Soient x un point de S, et $\epsilon > 0$. Il existe des entiers i, n et k tels que

$$\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{3}$$

et $$x \in r_1 (x_{n,k,i}) + \omega_n$$

Puisque $x_{n,k,i} + B_n$ est inclus dans un $G_{m,k}$, on a :

$$\forall p \geqslant m, \forall q \geqslant m \quad , \quad \forall y \in R' \cap (x_{n,k,i} + B_n)$$

$$| h_p \circ u (y) - h_q \circ u (y) | \leqslant \frac{1}{k}$$

La continuité de h_p et de h_q, et la densité de u (R') dans S' font que cette inégalité est valable en tout point de

$$S' \cap [\overline{u (x_{n,k,i} + B_n)}] = S' \cap [u (x_{n,k,i}) + \widetilde{C}_n]$$

donc, a fortiori, que

$$\forall p \geqslant m, \forall q \geqslant m \quad , \quad \forall z \in S \cap [r_1 (x_{n,k,i}) + \omega_n]$$

$$| h_p \circ u_1 (z) - h_q \circ u_1 (z) | \leqslant \frac{1}{k}$$

et par conséquent que, en passant à la limite,

$$\forall z \in S \cap [r_1 (x_{n,k,i}) + \omega_n] \quad | h \circ u_1 (z) - h_m \circ u_1 (z) | \leqslant \frac{1}{k}$$

La continuité de $h_m \circ u_1{}_{|S}$ au point x nous permet d'affirmer l'existence d'un entier $n' \geqslant n$ tel que

$$x + \omega_{n'} \subset r_1 (x_{n,k,i}) + \omega_n$$

et $$\forall z \in S \cap (x + \omega_{n'}) \quad | h_m \circ u_1 (z) - h_m \circ u_1 (x) | \leqslant \frac{1}{k}$$

Pour tout point z de $S \cap (x + \omega_{n'})$ on a donc :

$$|h \circ u_1(z) - h \circ u_1(x)| \leqslant |h \circ u_1(z) - h_m \circ u_1(z)| +$$

$$+ |h_m \circ u_1(z) - h_m \circ u_1(x)| + |h_m \circ u_1(x) - h \circ u_1(x)| \leqslant \frac{3}{k} \leqslant \epsilon$$

ce qui exprime la continuité en x de $h \circ u_1|_S$, et termine la démonstration du lemme.

THEOREME 49. – *Si h est une fonction borélienne de classe α de $\hat{V}$ dans R, il existe un G_δ dense, R, de E et un G_δ dense, S, de N_α, contenant $r_\alpha(R)$ tels que la restriction de $h \circ v_{0,\alpha}$ à S soit continue.*

L'énoncé est trivial dans le cas $\alpha = 0$, en prenant $R = E$ et $S = \hat{V}$.

Si l'énoncé est vrai pour un ordinal α, et si h est une fonction borélienne de classe $\alpha + 1$ sur $\hat{V}$, il existe une suite (h_m) de fonctions de classe α sur $\hat{V}$ qui converge vers h. Si on applique alors l'énoncé aux fonctions h_m, on obtient une suite (R_m) de G_δ denses de E et une suite (S_m) de G_δ denses de N_α tels que $r_\alpha(R_m) \subset S_m$ et que $h_m \circ v_{0,\alpha}|S_m$ soit continue.

Si on pose alors $R' = \bigcap_m R_m$ et $S' = \bigcap_m S_m$, R' et S' sont des G_δ denses respectivement de E et de N_α, et on a

$$S' \supset r_\alpha(R')$$

De plus, puisque les $h_m \circ v_{0,\alpha}|S'$ sont continues, la fonction $h \circ v_{0,\alpha}|S'$ est de première classe de Baire. Et puisque on obtient $N_{\alpha+1}$ à partir de N_α et r_α comme N_1 à partir de $\hat{V}$ et u, on peut appliquer le lemme 48 : il existe un G_δ dense, R, de E et un G_δ dense, S, de $N_{\alpha+1}$ contenant $r_{\alpha+1}(R)$ tels que $h \circ v_{0,\alpha+1}|S$ soit continue, ce qui est l'énoncé du théorème pour l'ordinal $\alpha + 1$.

Si l'énoncé est vrai pour tout ordinal β inférieur à l'ordinal limite α, et si h est une fonction borélienne de classe α, il existe, en vertu du lemme 11, deux suites monotones (h'_m) et (h''_m) de fonctions de classes β_m strictement inférieures à α, à valeurs dans $\overline{R}$ qui convergent vers h respectivement en croissant et en décroissant. Il existe alors puisque $\overline{R}$ est homéomorphe à $[0, 1]$ des G_δ denses R'_m et R''_m de E et des G_δ denses S'_m et S''_m de N_{β_m} tels que

$$\begin{cases} r_{\beta_m}(\mathrm{R}'_m) \subset \mathrm{S}'_m & \text{et} \quad h'_m \circ v_{0,\beta_m}|\mathrm{S}'_m \text{ soit continue} \\ r_{\beta_m}(\mathrm{R}''_m) \subset \mathrm{S}''_m & \text{et} \quad h''_m \circ v_{0,\beta_m}|\mathrm{S}''_m \text{ soit continue} \end{cases}$$

Si on pose
$$\begin{cases} \mathrm{R} = \bigcap\limits_m (\mathrm{R}'_m \cap \mathrm{R}''_m) \\ \mathrm{S} = \bigcap\limits_m v_{\beta_m,\alpha}^{-1} (\mathrm{S}'_m \cap \mathrm{S}''_m), \end{cases}$$

R est un G_δ dense de E et S est un G_δ de N_α qui contient $r_\alpha(\mathrm{R})$. Et puisque $r_\alpha(\mathrm{R})$ est dense dans $r_\alpha(\mathrm{E})$ donc dans $r_\alpha(\mathrm{E}) = \mathrm{N}_\alpha$, S est un G_δ dense de N_α.

De plus, les fonctions $h'_m \circ v_{0,\alpha}$ et $h''_m \circ v_{0,\alpha}$ ont des restrictions à S qui sont continues. Par conséquent

$$h \circ v_{0,\alpha}|\mathrm{S} = \sup_m (h'_m \circ v_{0,\alpha}|\mathrm{S})$$

est semi-continue inférieurement, et

$$h \circ v_{0,\alpha}|\mathrm{S} = \inf_m (h''_m \circ v_{0,\alpha}|\mathrm{S})$$

est semi-continue supérieurement.

La fonction $h \circ v_{0,\alpha}|\mathrm{S}$ est donc continue, ce qui montre que l'énoncé est vrai pour l'ordinal α.

Par conséquent, l'énoncé du théorème est vrai pour tout ordinal dénombrable.

PROPOSITION 50. – *Soit* Z *une partie de* $\hat{\mathrm{V}}$, *de classe* α*-additive, contenant* V. *Alors* $v_{0,\alpha}^{-1}(\mathrm{Z})$ *contient un* G_δ *dense de* N_α.

L'ensemble Z est réunion d'une suite croissante d'ensembles Z_n de classes multiplicatives $< \alpha$, dont les fonctions caractéristiques χ_n sont de classes $\leqslant \alpha$. La fonction

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_n$$

est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\leqslant \alpha$, donc elle est elle-même de classe $\leqslant \alpha$ (cf. [5], p. 293). De plus, l'ensemble

$$\{x \in \hat{\mathrm{V}} \mid \chi(x) > 0\} = \bigcup_n \{x \mid \chi_n(x) > 0\} = \bigcup_n \mathrm{Z}_n$$
$$= \mathrm{Z}$$

Si on applique à la fonction χ le théorème 49, on obtient un G_δ dense R de E et un G_δ dense, S, de N_α tels que $S \supset r_\alpha(R)$ et $\chi \circ v_{0,\alpha}|S$ soit continue. Par conséquent $S \cap v_{0,\alpha}^{-1}(Z) = \{x \in S \mid \chi \circ v_{0,\alpha}(x) > 0\}$ est ouvert dans S donc est un G_δ de N_α, qui contient

$$r_\alpha(R) \cap v_{0,\alpha}^{-1}(Z) \supset r_\alpha(R) \cap v_{0,\alpha}^{-1}(V) = r_\alpha(R) \cap r_\alpha(E) = r_\alpha(R)$$

Et puisque $r_\alpha(R)$ est partout dense dans $r_\alpha(E)$ donc dans $\overline{r_\alpha(E)} = N_\alpha$, l'ensemble $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ contient le G_δ dense $S \cap v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ de N_α.

THEOREME 51. – *Soit* Z *une partie de* $\hat{V}$, *de classe* $\alpha + 1$*-multiplicative contenant* V. *Alors* $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ *contient un* G_δ *dense de* N_α.

L'ensemble Z est l'intersection d'une suite (Z_n) de parties de $\hat{V}$ de classe α-additive. Puisque Z contient V, chacun des Z_n contient V ; d'après la proposition 50, chacun des $v_{0,\alpha}^{-1}(Z_n)$ est un résiduel de N_α, ce qui entraîne que $v_{0,\alpha}^{-1}(Z) = \bigcap_n v_{0,\alpha}^{-1}(Z_n)$ est un résiduel de N_α, d'où le théorème.

THEOREME 52. – *Soit* Z *un sous-espace vectoriel borélien de* $\hat{V}$, *de classe* $\alpha + 1$*-multiplicative, contenant* V. *Alors* Z *contient* $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$.

Il résulte du théorème précédent que $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ est un résiduel de N_α. Soit x un point de N_α ; puisque $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ et $x + v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ sont des résiduels de N_α, ils se coupent. Il existe donc y et z dans $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ tels que

$$y = x + z$$

donc que

$$v_{0,\alpha}(x) = v_{0,\alpha}(y - z) = v_{0,\alpha}(y) - v_{0,\alpha}(z) \in Z - Z = Z$$

Ceci montre que Z contient le point $v_{0,\alpha}(x)$, donc que Z contient $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$.

COROLLAIRE 53. – *Le sous-espace* $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ *de* $\hat{V}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel borélien de classe* $\alpha + 1$*-multiplicative de* $\hat{V}$ *qui contienne* V.

D'après le théorème 44, $v_{0,\alpha}$ est de degré α. Et d'après le théorème 20, $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ est de classe $\alpha + 1$-multiplicative.

Inversement, le théorème précédent montre que tout sous-espace vectoriel de classe $\alpha + 1$-multiplicative contenant V contient $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$. On peut remarquer que si α est un ordinal limite, la définition de N_α comme limite projective des N_β pour $\beta < \alpha$ donne que :

$$v_{0,\alpha}(N_\alpha) = \bigcap_{\beta<\alpha} v_{0,\beta}(N_\beta)$$

et puisque $v_{0,\beta}(N_\beta)$ est de classe $\beta + 1$-multiplicative, $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ est de classe α-multiplicative. Le plus petit sous-espace vectoriel de classe $\alpha + 1$-multiplicative contenant V est alors de classe α-multiplicative.

THEOREME 54. – *Pour que le degré de u soit égal à α, il est nécessaire et suffisant que* V *soit de classe* $\alpha + 1$*-multiplicative dans* $\hat{V}$. *Si α est un ordinal limite,* V *est alors même de classe α-multiplicative dans* $\hat{V}$.

Le théorème 20 montre que si u est de degré α, V est de classe multiplicative $\alpha + 1$. La remarque qui précède montre que V est même de classe multiplicative α si le degré α de u est un ordinal limite.

Inversement si V est de classe $\alpha + 1$-multiplicative dans $\hat{V}$, il résulte du théorème 52 que V contient $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$, donc que

$$v_{0,\alpha}^{-1}(V) = r_\alpha(E) = N_\alpha .$$

L'application continue injective r_α de E dans N_α est donc surjective, donc est un isomorphisme puisque E et N_α sont des espaces de Fréchet. D'après le corollaire 45, u est alors de degré α.

THEOREME 55. – *Soit* V *un espace localement convexe métrisable qui possède le modèle séparable* E. *Si* H *est un hyperplan borélien de* V, *toute forme linéaire de classe α sur* H *se prolonge en une forme linéaire de classe α sur* V.

Si u est l'application canonique de E sur V, nous désignerons par M le sous-espace borélien $u^{-1}(H)$, qui est un hyperplan de E. Si α est un point de E qui n'appartient pas à M et si f est la forme linéaire nulle sur M qui vaut 1 au point a, si X est une partie borélienne de **R**, on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(X) = M + X \cdot a \\ f^{-1}(CX) = M + (CX) \cdot a \end{cases}$$

Puisque X et CX sont boréliens, donc analytiques, $M + X.a$ et $M + (CX).a$ sont tous deux analytiques, et complémentaires dans E donc boréliens dans E. Ceci montre que la forme linéaire f est borélienne, donc continue d'après la proposition 8.

L'hyperplan M est donc fermé ; et puisque u est injective et que M est un Fréchet, M est le modèle de H.

Nous allons maintenant démontrer que, pour tout α, les topologies induites sur H par le modèle d'ordre α de V et le modèle d'ordre α de H sont identiques.

C'est immédiat si $\alpha = 0$, auquel cas, ces topologies sont la topologie induite par V.

Si cette propriété est vraie pour tout α inférieur strictement à un ordinal γ, nous allons la démontrer pour l'ordinal γ. Si γ est un ordinal limite, ces topologies sont les limites projectives des topologies induites respectivement par les modèles d'ordre α de V et les modèles d'ordre α de H, pour $\alpha < \gamma$; et puisque ces topologies coïncident pour $\alpha < \gamma$, les limites inductives coïncident encore.

Si γ est le successeur d'un ordinal α, une base de la topologie induite par le modèle d'ordre γ de V est donnée par

$$(r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (B_n)})_n$$

et une base de la topologie induite par le modèle d'ordre γ de H est donnée par

$$(r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (B_n \cap M)})_n$$

Dans les deux cas, les adhérences sont prises dans $r_\alpha (E)$, puisque les topologies des deux modèles d'ordre α coïncident sur $r_\alpha (M)$.

Si, pour tout n, les ensembles $\overline{r_\alpha (B_n \cap M)} \cap r_\alpha (E)$ engendrent E, les ensembles $r_\alpha^{-1} (\overline{r_\alpha (B_n \cap M)})$ sont des tonneaux de l'espace de Fréchet E, donc des voisinages de 0. Pour tout n, il existe n' tel que

$$r_\alpha (B_{n'}) \subset \overline{r_\alpha (B_n \cap M)}$$

donc que

$$\overline{r_\alpha (B_{n'})} \subset \overline{r_\alpha (B_n \cap M)} \subset \overline{r_\alpha (B_n)}$$

ou encore que

$$r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (B_{n'})} \subset r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (B_n \cap M)} \subset r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (B_n)}$$

ce qui signifie que ces bases de voisinages sont équivalentes donc que les topologies coïncident.

Si, au contraire, il existe un n tel que $\overline{r_\alpha (B_n \cap M)} \cap r_\alpha (E)$ soit contenu dans r_α (M), les ensembles

$$M \cap B_n + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] a$$

où a est un point de E extérieur à H sont des tonneaux de E, donc des voisinages de 0, et forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E. Alors, d'après la compacité de

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] r_\alpha (a)$$

on a :

$$r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha \left((M \cap B_n) + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] a\right)} = r_\alpha (M) \cap \left(\overline{r_\alpha (M \cap B_n)} + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] r_\alpha (a)\right) = r_\alpha (M) \cap \overline{r_\alpha (M \cap B_n)}$$

ce qui signifie encore que les topologies induites sur H par les modèles d'ordre $\alpha + 1$ de V et de H coïncident.

Cette propriété est donc valable pour tout ordinal α. Les formes linéaires sur H qui sont continues pour la topologie induite par le modèle d'ordre α de H sont les formes linéaires de classe α sur H.

Les formes linéaires sur H qui sont continues pour la topologie induite par le modèle d'ordre α de V sont, d'après le théorème de Hahn-Banach, restrictions des formes linéaires sur V continues pour la topologie du modèle d'ordre α de V, c'est-à-dire restrictions des formes linéaires de classe α sur V.

L'identité de ces deux topologies entraîne donc le théorème.

THEOREME 56. – *Soient* N_α *et* P_α *respectivement les modèles d'ordre* α *de* V *et de son hyperplan borélien* H. *Alors* P_α *est un sous-espace fermé de* N_α.

On a montré dans le théorème précédent que l'hyperplan $M = u^{-1}$ (H) est fermé et est le modèle de H, et que sur H, les topologies induites par P_α et par N_α coïncident. Par conséquent l'adhérence de r_α (M) dans N_α est isomorphe au complété de H pour la topologie induite par P_α, c'est-à-dire P_α. Il en résulte que P_α est canoniquement isomorphe à l'adhérence de r_α (M) dans N_α, qui est un sous-espace fermé de N_α.

THEOREME 57. – *Les notations étant les mêmes que ci-dessus,* P_α *est de codimension au plus 1 dans* N_α.

Le dual de l'espace de Fréchet N_α/P_α est isomorphe à l'espace des formes linéaires continues sur N_α nulles sur P_α, c'est-à-dire des formes linéaires boréliennes de classe α sur V nulles sur H. Comme H est un hyperplan de V, cet espace est de dimension 1 s'il existe une forme linéaire de classe α sur V nulle sur H, et sinon de dimension 0. Il en résulte que N_α/P_α a la même dimension finie que son dual, c'est-à-dire 1 s'il existe une forme linéaire de classe α sur V nulle sur H, et sinon 0.

THEOREME 58. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable possédant le modèle séparable* E, *l une forme linéaire borélienne non nulle sur* V, H *le noyau de l, et a un point de* V *qui n'appartient pas à* H. *Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) H est de classe α-multiplicative dans V

ii) l est de classe α

iii) a n'appartient pas à $v_{0,\alpha}(P_\alpha)$

iv) P_α est de codimension 1 dans N_α

où N_α *et* P_α *désignent respectivement les modèles d'ordre α de* V *et de* H.

Si le point a n'appartient pas à $v_{0,\alpha}(P_\alpha)$, et puisque $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ contient V, donc contient a, on a nécessairement $N_\alpha \neq P_\alpha$ donc N_α/P_α, qui n'est pas de dimension 0 est de dimension 1, d'après le théorème 57. Donc la proposition iii) entraîne la proposition iv).

On a vu au théorème 57 que si P_α est de codimension 1 dans N_α, il existe une forme borélienne de classe α sur V non nulle sur V, et nulle sur H. Cette forme linéaire est proportionnelle à l. Donc l est de classe de Baire α, et la proposition iv) entraîne la proposition ii).

Si la forme linéaire l est de classe de Baire α sur V, son noyau $H = l^{-1}(0)$ est de classe α-multiplicative dans V, et la proposition ii) entraîne la proposition i).

Si le point a appartient à $v_{0,\alpha}$ (P_α), le sous-espace $v_{0,\alpha}$ (P_α) contient H et contient a, donc contient V, et puisqu'il est de classe $\alpha +$ 1-multiplicative dans $\hat{V}$, il contient $v_{0,\alpha}$ (N_α) d'après le théorème 52. Et puisque $v_{0,\alpha}$ est injective, on a nécessairement $P_\alpha = N_\alpha$, ce qui montre que la proposition iv) entraîne la proposition iii).

Reste à montrer que la proposition i) entraîne la proposition iv). Puisque H est de classe α-multiplicative dans V, il existe un ensemble Z dans $\hat{V}$, de classe α-multiplicative tel que :

$$Z \cap V = H$$

Puisque Z est de classe α-multiplicative, donc de classe α +1-multiplicative dans $\hat{V}$, il résulte du théorème 51 que $v_{0,\alpha}^{-1}$ (Z) est un résiduel de P_α.

Puisque $\hat{V} \setminus Z$ est de classe α-additive, on voit comme dans la proposition 50 qu'il existe une fonction χ de classe α de $\hat{V}$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que

$$\hat{V} \setminus Z = \{x \,/\, \chi(x) > 0\}$$

En appliquant à χ le théorème 49, on trouve un G_δ dense R de E et un G_δ dense S de N_α contenant r_α(R) tels que la restriction à S de $\chi \circ v_{0,\alpha}$ est continue. Donc $S \cap v_{0,\alpha}^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z)$ est un ouvert de S. De plus $u^{-1}(\hat{V} \setminus Z) = E - M$ est un ouvert partout dense de E, puisque M est un hyperplan fermé de E. Par conséquent $R \cap u^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z)$ est partout dense dans E, et r_α $(R \cap u^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z))$ est partout dense dans r_α (E) donc dans N_α. Et $S \cap v_{0,\alpha}^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z)$ qui contient r_α $(R \cap u^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z))$ est un ouvert partout dense de S, donc un G_δ dense de N_α.

Si N_α et P_α coïncidaient, $v_{0,\alpha}^{-1}$ (Z) qui est un résiduel de P_α, et $v_{0,\alpha}^{-1}$ $(\hat{V} \setminus Z)$ qui est un résiduel de N_α se rencontreraient. Puisque ces deux ensembles sont complémentaires dans N_α, il est impossible que P_α soit de codimension 0 dans N_α. Ceci montre que la proposition i) entraîne la proposition iv) et termine la démonstration du théorème.

THEOREME 59. – *Si* V *est un espace localement convexe métrisable qui possède le modèle séparable* E, *et si* H *est un hyperplan borélien de* V, *le degré de* V *est égal au degré de* H.

On a vu dans la démonstration du théorème 55 que l'hyperplan $M = u^{-1}$ (H) de E est fermé dans E, et est le modèle de H. Si u^{-1} est de classe de Baire α, sa restriction à H est de classe au plus α. Donc le degré de H est au plus égal au degré de V.

Inversement, si α est le degré de H, le modèle P_α d'ordre α de H s'identifie au modèle de H, c'est-à-dire M.

Par conséquent, $v_{0,\alpha}(P_\alpha)$ est identique à H, et ne contient pas V. Donc $v_{0,\alpha}(P_\alpha)$ n'est pas égal à $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$. Il en résulte que N_α/P_α n'est pas de dimension 0, donc est de dimension 1. Alors le théorème 58 nous permet d'affirmer que les formes linéaires sur V qui sont nulles sur H sont de classe de Baire α.

Si f est une forme linéaire borélienne sur V, $f_{|H}$ est une forme linéaire borélienne sur H, donc de classe au plus α, puisque H est de degré α, et en vertu du corollaire 45. D'après le théorème 55, $f_{|H}$ s'étend en une forme linéaire g sur V de classe α, et puisque $g - f$ est nul sur H, la forme linéaire $g - f$ est de classe de Baire α sur V. Alors

$$f = g - (g - f)$$

est aussi de classe de Baire α sur V.

Puisque toute forme linéaire borélienne sur V est de classe au plus α, V est de degré au plus α, donc de degré inférieur ou égal à celui de H.

On a donc prouvé que les degrés de V et de H étaient égaux.

THEOREME 60. – *Soient* V *un espace localement convexe métrisable qui possède le modèle séparable* E, *et* H *un sous-espace vectoriel borélien de* V *de codimension finie dans* V. *Alors* H *possède un modèle séparable, et si* N_α et P_α *désignent respectivement les modèles d'ordre* α *de* V *et de* H :

i) Toute forme linéaire de classe α sur H se prolonge en une forme linéaire de classe α sur V.

ii) P_α est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie de N_α

iii) Les degrés de H et de V sont égaux.

Le sous-espace $u^{-1}(H)$ de E est borélien et de codimension finie. Si F est un supplémentaire algébrique de $u^{-1}(H)$ dans E, et si p désigne la projection de E sur F parallèlement à $u^{-1}(H)$, pour tout borélien X de F, on aura :

$$p^{-1}(X) = X + u^{-1}(H) \qquad \text{est analytique}$$

$$p^{-1}(CX) = CX + u^{-1}(H) \qquad \text{est analytique}$$

Ces deux analytiques sont complémentaires l'un de l'autre dans E, donc sont boréliens dans E. Il en résulte que l'application p est borélienne, donc continue d'après la proposition 8. Par conséquent $p^{-1}(0) = u^{-1}(H) = M$ est fermé dans E, donc est un espace de Fréchet ; et puisque $u_{|M}$ est injective et que $u(M) = H$, M est le modèle de H.

Il existe, si n est la codimension de H dans V, c'est-à-dire la codimension de M dans E, une suite finie $M_0 = M, M_1, \ldots, M_n = E$ croissante de sous-espaces fermés de E telle que M_i soit de codimension 1 dans M_{i+1}. Si on pose $H_i = u(M_i)$, et si on applique à H_i et H_{i+1} les théorèmes 55, 56, 57 et 59, on obtient pour toute forme linéaire borélienne f_0 de classe α sur H_0, des extensions successives f_i de classe α sur H_i, donc une extension de classe α sur V ; on obtient que P_α est isomorphe à un sous-espace fermé de N_α de codimension au plus n et que les degrés de tous les H_i sont égaux, donc que le degré de H est égal au degré de V.

THEOREME 61. – *Soit* V *un espace localement convexe métrisable qui possède le modèle séparable* E. *Si* φ *est une application linéaire borélienne sur* V *de rang fini, une condition nécessaire et suffisante pour que* φ *soit de classe* α *est que le noyau de* φ *soit de classe* α-*multiplicative dans* V.

La condition est trivialement nécessaire.

Nous démontrons la réciproque par récurrence sur le rang de φ. Si φ est de rang 1, le théorème est une conséquence du théorème 58. S'il est vrai pour toute application de rang n, et si φ est de rang $n + 1$, soient H le noyau de φ et a un point situé hors de H. Puisque H est de classe α-multiplicative dans V, il est de classe α-multiplicative dans le sous-espace $H + \mathbf{R}.a$ de V. Il résulte alors du théorème 58 que la forme linéaire l nulle sur H et qui vaut 1 au point a est de classe α sur $H + \mathbf{R}a$, donc se prolonge, d'après le théorème 60 en une forme linéaire $\overline{l}$ sur V. La restriction de φ au noyau de $\overline{l}$ est de rang n, et puisque H est de classe α-multiplicative dans Ker $\overline{l}$, la restriction de φ à Ker $\overline{l}$ est de classe α en vertu de l'hypothèse de récurrence. Il existe donc des points $z_1, \ldots, z_n$ dans l'image de φ et des formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ de classe α sur Ker $\overline{l}$ tels que

$$\forall x \in \operatorname{Ker} \overline{l} \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot z_i$$

Si on prolonge, en vertu du théorème 58, les formes linéaires f_i en des formes linéaires g_i de classe α sur V, l'application linéaire

$$x \to \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot z_i$$

sera nulle sur Ker $\overline{l}$. Il existe donc z_{n+1} dans l'image de φ tel que

$$\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot z_i = \overline{l}(x) \cdot z_{n+1}$$

Et, puisque $$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot z_i + \overline{l}(x) \cdot z_{n+1}$$

l'application φ est de classe de Baire α, ce qui termine la récurrence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Topologie générale. Chap. IX.

[2] N. Bourbaki, EVT, Chap. III, IV, V.

[3] J.P.R. Christensen, Borel structures and a topological zero-one law, *Math. Scand,* 29 (1971).

[4] Day, Normed Linear Spaces.

[5] C. Kuratowski, Topologie, Volume 1, 4e édition.

[6] J. Saint-raymond, Convergence d'une suite de fonctions, *Bull. Sc. Math.,* 96 (1972).

Manuscrit reçu le 26 mai 1975
Proposé par G. Choquet.

J. Saint-Raymond,
Université Paris VI
Mathématiques - Tour 46
4, place Jussieu
75 230 Paris Cedex 05.