ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Faisceaux maximaux de fonctions associées à un opérateur elliptique du second ordre

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 3 (1976), p. 257-274

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_257_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 3 (1976), 257-274

FAISCEAUX MAXIMAUX DE FONCTIONS ASSOCIÉES A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DU SECOND ORDRE

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

Dans [5] nous avons montré que les sursolutions locales d'un opérateur différentiel elliptique du second ordre vérifiaient un certain principe du minimum dans W^2_{loc} et qu'elles formaient un faisceau $\mathfrak{F}$ de cônes convexes maximal pour ce principe du minimum dans W^2_{loc}. On sait aussi que $\mathfrak{F}$ peut être caractérisé à l'aide d'un problème de Dirichlet variationnel.

Les éléments de $\mathfrak{F}$ ont des représentants s.c.i. $> -\infty$ formant un faisceau $\hat{\mathfrak{F}}$ vérifiant le principe du minimum usuel.

Nous nous proposons ici d'étudier les faisceaux de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ contenant $\hat{\mathfrak{F}}$ et vérifiant le principe du minimum. Nous montrons qu'il en existe un plus grand que tous les autres.

Nous pourrions ici comme dans [5] ignorer les représentants quasi-continus des éléments de l'espace de Sobolev, mais leur utilisation facilite grandement l'étude que nous avons en vue.

Signalons enfin que nos résultats rejoignent ceux de M. et R.M. Hervé (cf. [9]) mais nous n'utilisons pas la propriété de Harnack démontrée par Stampacchia [10] ; au contraire, nos méthodes nous permettent de l'obtenir [8].

1. Préliminaires.

1. Si ω est un ouvert de $\mathbf{R}^m$, on note $W^2(\omega)$ l'espace de Hilbert des $f \in \mathbf{L}^2(\omega)$ dont le gradient f' au sens des distributions appartient à $\mathbf{L}^2(\omega)$, muni de la norme donnée par :

$$\| f \|^2 = \int_\omega [f^2 + f'^2] \, d\tau$$

où τ est la mesure de Lebesgue.

$W_0^2(\omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $W^2(\omega)$ $W_{loc}^2(\omega)$ se définit de manière évidente, et W_{loc}^2 désigne le faisceau $\omega \rightsquigarrow W_{loc}^2(\omega)$.

On notera $\mathcal{W}_{loc}^2(\omega)$ l'ensemble des représentants quasi-continus des éléments de $W_{loc}^2(\omega)$ (cf. [3]). On sait que si $f \in \mathcal{W}_{loc}^2(\omega)$, alors quasi tout point de ω est un point de Lebesgue de f, ce qui permet de montrer que $\omega \rightsquigarrow \mathcal{W}_{loc}^2(\omega)$est un faisceau. On définit de même $\mathcal{W}^2(\omega)$ et $\mathcal{W}_0^2(\omega)$.

2. Si ω est un ouvert borné à frontière $\partial\omega$ lipschitzienne de dimension $m-1$ (cf. [5]) et si σ est la mesure Riemannienne de $\partial\omega$, on note $f \rightsquigarrow T_r f$ l'application-trace bien connue qui envoie $W^2(\omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\partial\omega)$.

On sait aussi que si $g \in \mathcal{W}^2(\alpha)$, α ouvert $\supset \bar{\omega}$ tel que g soit un représentant de f dans ω, alors la restriction de g à $\partial\omega$ appartient à $\mathcal{L}^2(\partial\omega)$ et est un représentant de $T_r f$.

De plus, $W_0^2(\omega)$ est l'ensemble des $f \in W^2(\omega)$ dont la trace est nulle.

3. On considère un opérateur différentiel défini dans $\mathbf{R}^m$ sous la forme

$$Lf = \operatorname{div}(Af' + fX) - (Y, f) - cf$$

où la matrice carré A, les champs X et Y et la fonction c sont dans $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}^m)$.

L'opérateur L est supposé localement uniformément elliptique, c'est-à-dire que pour tout compact K, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'on ait.

$$(A\zeta, \zeta) \geqslant \epsilon \, |\zeta|^2$$

pour tout champ ζ sur K.

Une sursolution locale faible de L dans un ouvert U est une $f \in W_{loc}^2(U)$ vérifiant

$$B_U(f, \varphi) = \int_U [(Af', \varphi') + f(X, \varphi') + \varphi(Y, f') + c\varphi f] \, d\tau \geqslant 0$$

pour toute $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

On désignera par $\mathcal{S}$ le faisceau des sursolutions locales faibles de L.

D'après [10] tout point possède un voisinage V tel que pour ω ouvert borné, $\bar{\omega} \subset V$, la restriction de $\mathcal{B}_\omega$ à $W_0^2(\omega) \times W_0^2(\omega)$ soit coercitive. Plus précisément il existe une constante $\alpha > 0$ ne dépendant que de V et telle que l'on ait

$$B_\omega(f, f) \geqslant \alpha \, \| f \|^2 \, W^2_{(\omega)}$$

pour toute $f \in W_0^2(\omega)$.

Tout ouvert borné inclus dans un tel V sera appelé ouvert coercitif. D'après [10], pour tout ω coercitif et pour tout K convexe fermé inclus dans $W^2(\omega)$ tel que $u, v \in K$ entraîne $u - v \in W_0^2(\omega)$, il existe $u \in K$, u unique vérifiant

$$B_\omega(u, v - u) \geqslant 0$$

pour tout $v \in K$. u sera appelée la pseudo-projection de 0 sur K;

Si $\varphi \in W^2(\omega)$, R_φ^ω désigne la réduite variationnelle de φ, obtenue par pseudo-projection, c'est aussi le plus petit élément de

$$W^2(\omega) \cap \mathcal{S}(\omega)$$

qui majore φ.

4. Lemme Fondamental. — *Soit $(f_i)_{i \in I}$ un ensemble de sursolutions locales dans un ouvert* U, $f_i \in \mathcal{S}(U)$. *On suppose les* $f_i \geqslant 0$ *et majorés par un* $g \in W^2_{\text{loc}}(U)$. *Alors l'ensemble des f_i est borné dans* $W^2_{\text{loc}}(U)$.

Démonstration. — Soit ω une boule coercitive, on peut supposer $g \in \mathcal{S}(\omega) \cap W^2(\omega)$

Si α est une boule concentrique à ω, $\bar{\alpha} \subset \omega$ posons :

$f_i^* = R^\omega_{\varphi f i}$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ sur α *et* $g^* = R^\omega_{\varphi g}$. Les f_i^* sont dans $W_0^2(\omega) \cap \mathcal{S}(\omega)$ et sont majorés par g^* : ils forment alors un ensemble borné dans $W_0^2(\omega)$.

(cf. [5], appendice 3) — On voit alors que les f_i qui valent f_i^* sur α sont bornés dans $W^2(\alpha)$

c.q.f.d.

Remarque. – Si les f_i forment un ensemble filtrant croissant ou décroissant, il en est de même des f_i^* et l'on sait alors (cf. [5]) que les f_i^* convergent dans $W_0^2(\omega)$. Ainsi les f_i convergent dans $W_{loc}^2(U)$.

5. PRINCIPE du MINIMUM.

6. PROPOSITION. – *Soit $\mathcal{B}$ une base constituée d'ouverts ω coercitifs, à frontière $\partial\omega$ lipschitzienne. Si* U *est ouvert, si $f \in \mathfrak{F}(U)$ et si $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$, on a $T_r f \geqslant 0$ sur $\partial\omega$ entraîne $f \geqslant 0$ sur ω* (cf. [5]).

On dira que le faisceau $\mathfrak{F}$ vérifie le principe du minimum relativement à la base $\mathcal{B}$.

7. THEOREME. – *Soit $\mathfrak{G}$ un préfaisceau de cônes convexes tel que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G} \subset W_{loc}^2$. On suppose que $\mathfrak{G}$ vérifie le principe du minimum ci-dessus relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Autrement dit, $\mathfrak{F}$ est un préfaisceau maximal inclus dans W_{loc}^2 pour ce principe du minimum.*

Remarque. – Ceci est valable quelle que soit la base $\mathcal{B}$ choisie comme au 6.

8. COROLLAIRES (cf. [5]).

a) Soient U ouvert et $f \in W_{loc}^2(U)$

Alors $f \in \mathfrak{F}(U)$ si et seulement si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$, on a

$$f \geqslant H_f^{\partial\omega} \quad \text{dans} \quad \omega$$

où $H_f^{\partial\omega}$ désigne la pseudo-projection de 0 sur l'ensemble des g telles que $f - g \in W_0^2(\omega)$

b) Soient U ouvert et $f \in W_{loc}^2(U)$. Alors $f \in \mathfrak{F}(U)$ si et seulement si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$ et $g \in \mathfrak{F}(\alpha)$ $\alpha \supset \bar{\omega}$

on a

$$T_r(f+g) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \quad \text{entraîne} \quad f+g \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \omega$$

9. THEOREME (cf. [5]). – *Soit pour tout ouvert* U *de* $\mathbf{R}^m$ *l'application* i_{U} *qui à toute* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *associe la fonction* s.c.i. $> -\infty$, $\hat{f}$ *définie par*

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Lim\,ess\,inf}_{y \to x} f(y)$$

Alors les applications i_{U} *sont linéaires et définissent un isomorphisme du faisceau* $\mathfrak{F}$ *sur un faisceau* $\hat{\mathfrak{F}}$ *de cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$. *De plus,* $\hat{\mathfrak{F}}$ *est un faisceau vérifiant le principe du minimum* (cf. [4] *et* [5]) *par rapport aux mêmes ouverts que* $\mathfrak{F}$, *et pour toute* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$, $\hat{f}$ *est un représentant de* f, *et* $\hat{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{W}^2_{\mathrm{loc}}$.

10. THEOREME.

a) Soit $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un ensemble filtrant croissant, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$, U ouvert, et $0 \leqslant f_i \leqslant g \in \mathrm{W}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U})$.

Alors l'enveloppe essentielle supérieure f de f_i appartient à $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$, et l'on a

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Sup}_i \hat{f}_i(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \mathrm{U}$$

b) (Cartan-Brelot) : les hypothèses sont les mêmes mais l'ensemble est filtrant décroissant. Soit f l'enveloppe essentielle inférieure : elle appartient à $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$, et l'on a :

$$\hat{f}(x) = \operatorname{Inf} \hat{f}_i(x) \qquad \text{pour quasi-tout} \qquad x \in \mathrm{U}$$

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Lim\,inf}_{y \to x} [\operatorname{Inf} \hat{f}_i(y)]$$

Démonstration.

a) D'après le lemme 4, $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ (les f_i convergent dans $\mathrm{W}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U})$). D'après [5], théorème 12, c

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Sup}_\omega \mathrm{H}_f^{\partial\omega}(x) = \operatorname*{Sup}_\omega \operatorname*{Sup}_i \mathrm{H}_{f_i}^{\partial\omega}(x) = \operatorname*{Sup}_i \operatorname*{Sup}_\omega \mathrm{H}_{f_i}^{\partial\omega} = \operatorname*{Sup}_i \hat{f}_i(x)$$

où les ω sont des boules coercitives centrées en x.

b) D'après le lemme 4), $f \in \mathfrak{F}$ et les f_i convergent vers f dans $\mathrm{W}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U})$. Il existe une suite i_n telle que f_{i_n} converge vers f. On peut supposer que $\hat{f}_{i_n}$ converge quasi-partout vers $\hat{f}$. D'où l'on déduit :

$$\hat{f}(x) = \operatorname*{Inf}_i \hat{f}_i(x) \qquad \text{pour quasi-tout} \qquad x \in \mathrm{U}.$$

On obtient la deuxième égalité en remarquant que pour φ continue dans U, on a :

$$\varphi \leqslant \hat{f} \Leftrightarrow \varphi \leqslant f \quad \text{presque partout} \quad \Leftrightarrow \leqslant \hat{f}_i \, , \forall \, i$$

c.q.f.d.

11. PROPOSITION. – *Soit ω ouvert borné coercitif, $\varphi \geqslant 0$, φ majorée par un élément de $\hat{\mathfrak{F}}(\omega)$.*

Alors posons :

$$f_1 = \operatorname{Inf} \{f \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega) \, , f \geqslant \varphi \text{ sur } \omega\}$$

$$f_2 = \operatorname{Inf} \{f \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega) \, , f \geqslant \varphi \quad \textit{quasi-partout sur } \omega\}$$

Alors $f_2 \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$, $f_2 = f_1$ quasi-partout.

Si de plus φ appartient à $\mathfrak{W}^2(\omega)$, alors $f_2 = \hat{R}_\varphi^\omega$ où R_φ^ω est la réduite variationnelle de φ.

Démonstration. – Soit H l'ensemble filtrant décroissant des $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$ vérifiant $f \geqslant \varphi$ quasi-partout.

Soit g l'enveloppe inférieure essentielle de H.

D'après le théorème 10), on sait que $\hat{g} \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$, de plus il existe une suite décroissante $f_n \in$ H qui converge quasi-partout vers $\hat{g}$, d'où $\hat{g} \geqslant \varphi$ quasi-partout $\hat{g}$ est alors le plus petit élément de H d'où l'on tire

$$f_2 = \hat{g} \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$$

Enfin, on a évidemment $f_2 \leqslant f_1$ – Soit $p \geqslant 0$, $p \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$, p valant $+\infty$ sur l'ensemble polaire où l'on a $f_2 < \varphi$. La fonction $f_2 + \epsilon p$ majore φ partout, et majore donc f_1. D'où $f_2 \geqslant f_1$ quasi-partout, c'est-à-dire $f_2 = f_1$ quasi-partout.

Supposons maintenant $\varphi \in \mathfrak{W}^2(\omega)$. On a bien sûr $f_2 \leqslant \hat{R}_\varphi^\omega$. Soit α ouvert à frontière lipschitzienne, tel que $\bar{\alpha} \subset \omega$. Si $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\omega)$ et majore φ quasi-partout dans ω, alors f majore $\hat{R}_\varphi^\alpha$ dans α (cf. 3). On en déduit que f majore $\hat{R}_\varphi^\omega$, puis que f_2 majore $\hat{R}_\varphi^\omega$.

c.q.f.d.

12. PROPOSITION. – *Soit ω ouvert, $\bar{\omega}$ inclus dans $\tilde{\omega}$ ouvert borné coercitif. Le cône $\hat{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}) \cap \mathcal{W}^2(\tilde{\omega})$ sépare linéairement les points de $\bar{\omega}$.*

Démonstration. – Soient x et y deux points distincts de $\bar{\omega}$, tels que l'on ait $f(x) = k f(y)$ pour toute $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}) \cap \mathcal{W}^2(\tilde{\omega})$ (cas de non séparation linéaire). Soient α_1 et α_2 deux boules fermées disjointes centrées en x et y, contenues dans $\tilde{\omega}$ et assez petites pour qu'il existe des L-solutions > 0 au voisinage (cf. [5], lemme 10).

Posons

$$\begin{cases} \lambda_1(\varphi) = H_\varphi^{\partial\alpha_1}(x) \\ \lambda_2(\varphi) = H_\varphi^{\partial\alpha_2}(y) \end{cases} \quad \text{pour toute } \varphi \in W^2(\tilde{\omega})$$

Soit $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}) \cap \mathcal{W}^2(\tilde{\omega})$ – Posons :

$$g = \begin{cases} H_f^{\partial\alpha_1} & \text{dans } \alpha_1 \\ H_f^{\partial\alpha_2} & \text{dans } \alpha_2 \\ f & \text{dans } \tilde{\omega} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2) \end{cases}$$

On a $g \in \mathfrak{F}(\tilde{\omega}) \cap W^2(\tilde{\omega})$ (cf. [5], appendice 4) et par suite :

$$\lambda_1(f) = \lambda_1(g) = \hat{g}(x) = k\hat{g}(y) = k\lambda_2(g) = k\lambda_2(f)$$

Les deux formes linéaires λ_1 et $k\lambda_2$ sont égales sur $W^2(\tilde{\omega}) \cap \mathfrak{F}(\tilde{\omega})$ donc sur $W^2(\tilde{\omega})$ tout entier (cf. [5]). Comme $\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2 = \phi$ elles sont nulles toutes les deux ce qui contredit l'existence de L-solutions > 0 au voisinage de $\bar{\alpha}_1$.

2. Existence d'un plus grand faisceau $\mathfrak{F}^*$ de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ contenant $\hat{\mathfrak{F}}$.

On utilisera systématiquement la proposition suivante, probablement connue, mais pour laquelle nous n'avons pas de référence.

13. PROPOSITION. – Soient ω un ouvert borné coercitif et μ une mesure $\geqslant 0$ sur ω.

On a (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) :

a) $\varphi \rightsquigarrow \int \varphi \, d\mu$ est continue sur $\mathcal{D}(\omega)$ muni de la topologie de $W_0^2(\omega)$

b) $\hat{\mathcal{S}}(\omega) \cap \mathcal{W}_0^2(\omega) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$

c) Il existe une forme linéaire $\lambda \geq 0$ unique sur $W_0^2(\omega)$ telle que $\lambda(f) = \int \hat{f} \, d\mu$ pour $f \in \mathcal{S}(\omega) \cap W_0^2(\omega)$. De plus, dans ces conditions, on a $\mathcal{W}_0^2(\omega) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\lambda(\widetilde{\varphi}) = \int \varphi \, d\mu \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathcal{W}_0^2(\omega)$$

et $\widetilde{\varphi}$ étant la classe de φ dans $W_0^2(\omega)$ (cf. [3]).

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b) : Il existe une forme linéaire $\lambda \geq 0$ sur $W_0^2(\omega)$ qui coïncide avec μ sur $\mathcal{D}(\omega)$.

Si $f \in \hat{\mathcal{S}}(\omega) \cap \mathcal{W}_0^2(\omega)$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(\omega)$ telle que φ_n tende en croissant vers f – (on sait que $f \geq 0$).

On a alors :

$$\int f \, d\mu = \operatorname*{Sup}_n \int \varphi_n \, d\mu = \operatorname*{Sup}_n \lambda(\varphi_n) \leq \lambda(f) < +\infty$$

Donc $$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

b) $\Rightarrow$ c) : Soit E le sous-espace vectoriel de $W_0^2(\omega)$ engendré par $\mathcal{S}(\omega) \cap W_0^2(\omega)$ – La forme linéaire $\varphi \rightsquigarrow \mu(\varphi)$ qui est positive sur E se prolonge en forme linéaire positive λ sur $W_0^2(\omega)$ (cf. [2]) car tout $\varphi \in W_0^2(\omega)$ est majoré par un élément de $\mathcal{S}(\omega) \cap W_0^2(\omega)$ (cf. [5], lemme 6). L'unicité de λ résulte de sa continuité et de ce que E est partout dense dans $W_0^2(\omega)$.

c) $\Rightarrow$ a) = évident.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{W}_0^2(\omega)$. Il existe une suite φ_n, telle que $\widetilde{\varphi}_n \in E$, et telle que $\widetilde{\varphi} = \sum_{n \geq 0} \varphi_n$ où la série converge normalement dans $\mathcal{W}_0^2(\omega)$.

On a alors :

$$\sum \mu(|\varphi_n|) \leq \sum \mu(\hat{R}^{\omega}_{|\varphi_n|}) = \sum \lambda(R^{\omega}_{|\varphi_n|}) < +\infty$$

car la série $\sum R^{\omega}_{|\varphi_n|}$ converge aussi normalement dans $W_0^2(\omega)$. Ceci prouve que $\sum_{n \geq 0} |\varphi_n|$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, donc aussi φ.

On a alors $\varphi = \sum \varphi_n$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, d'où $\lambda(\widetilde{\varphi}) = \int \varphi \, d\mu$ par continuité.

14. *Remarque.* – L'équivalence a) $\Rightarrow$ b) montre que les mesures μ ne dépendent pas de L pourvu que ω soit L-coercitif. Il s'ensuit que les mesures μ ne sont autres que les mesures d'énergie finie classique dans ω.

15. Lemme. – Soit ω borné coercitif, à frontière $\partial\omega$ lipchitzienne.

Si μ est une mesure $\geqslant 0$ à support compact dans ω, il existe une et une seule mesure ν sur $\partial\omega$, balayée de μ par rapport à $\hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega})$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\int f \, d\nu \leqslant \int f \, d\mu$$

pour toute $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega})$.

De plus, ν est d'énergie finie dans $\mathbf{R}^m$.

Démonstration. – L'existence de ν résulte du principe du minimun. Montrons qu'une telle ν est d'énergie finie : soit ω_1 ouvert $\partial\omega_1$ lipschitzienne, tel que : $\operatorname{Supp}\mu \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$ et soit $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega})$.

Soit $g = \begin{cases} H_f^{\partial\omega_1} & \text{dans } \omega_1 \\ f & \text{ailleurs} \end{cases}$, la fonction $\hat{g}$ est dans $\hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega})$

et l'on a :

$$\int f \, d\nu = \int \hat{g} \, d\nu \leqslant \int \hat{g} \, d\mu = \int H_f^{\partial\omega_1} \, d\mu < +\infty$$

Donc ν est d'énergie finie dans $\mathbf{R}^m$ d'après la proposition 13.

Voyons l'unicité : soit λ la forme linéaire sur $W^2_{\text{loc}}(\bar{\omega})$ définie par $\lambda(f) = \int \hat{f} \, d\nu$ pour $f \in \mathfrak{F}(\bar{\omega})$.

Soit α ouvert borné coercitif, $\alpha \supset \bar{\omega}$, et soit ω_n une suite décroissante d'ouverts à frontières lipschitziennes, vérifiant : $\bar{\omega}_n \subset \alpha$.

$$\bigcap_n \omega_n = \bar{\omega}$$

Si $\varphi \in W^2_{\text{loc}}(\bar{\omega})$, la suite $\psi_n = \begin{cases} H_\varphi^{\partial\omega_n} & \text{dans } \omega_n \\ \varphi & \text{dans } \alpha \backslash \omega_n \end{cases}$

est bornée dans $W^2(\alpha)$ et y converge faiblement vers une $h \in W^2(\alpha)$ ayant même trace que φ sur $\partial\omega$, et valant donc $H_\varphi^{\partial\omega}$ dans ω.

Calculons alors $\lambda(\varphi)$, on a :

$$\lambda(\varphi) = \lambda(h) = \lambda(H_\varphi^{\partial\omega}) = \operatorname*{Lim}_n \lambda(\psi_n) = \operatorname*{Lim}_n \int H_\varphi^{\partial\omega_n}\, d\nu = \\ = \operatorname*{Lim}_n \int H_\varphi^{\partial\omega_n}\, d\mu$$

soit

$$\lambda(\varphi) = \operatorname*{Lim}_n \int H_\varphi^{\partial\omega_n}\, d\mu = \int H_\varphi^{\partial\omega}\, d\mu$$

car $H_\varphi^{\partial\omega_n}$ converge vers $H_\varphi^{\partial\omega}$ uniformément sur tout compact de ω (théorème du graphe fermé).

Donc $\int \varphi\, d\nu = \int H_\varphi^{\partial\omega}\, d\mu$ pour toute φ lipschitzienne sur $\bar{\omega}$, et même pour toute $\varphi \in \mathcal{W}^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\omega})$.

16. THEOREME. – *Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts ω bornés coercitifs, à frontières lipschitziennes. Il existe un unique préfaisceau $\mathfrak{F}^*$ de cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$ *ayant les propriétés suivantes :*

a) *$\mathfrak{F}^*$ contient $\hat{\mathfrak{F}}$*

b) *$\mathfrak{F}^*$ est maximal vérifiant le principe du minimum sur $\mathcal{B}$* (cf. [4]).

De plus $\mathfrak{F}^*$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ ci-dessus et $\mathfrak{F}^*$ est un faisceau, et $\mathfrak{F}^*$ vérifie le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}_0$ de tous les ouverts bornés coercitifs à frontière quelconque.

Enfin, pour tout ouvert U, et toute f s.c.i. $> -\infty$ dans U on a :

$f \in \mathfrak{F}^*(U) \Leftrightarrow$ pour tout $x \in U$, il existe une base de voisinages ω de x, $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$ telle que l'on ait :

$$f(x) \geqslant \int f\, d\rho_x^\omega$$

où ρ_x^ω est l'unique mesure balayée de ϵ_x sur $\partial\omega$ par rapport à $\hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega})$.

La démonstration va résulter du lemme suivant :

17. LEMME. – *Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau contenant $\hat{\mathfrak{F}}$ et vérifiant le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}$ du théorème.*

Soit ω_0 un ouvert borné coercitif n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{B}$, et à frontière quelconque. Alors $\partial \omega_0$ est un compact de Silov de $\mathcal{G}(\overline{\omega})$.

Démonstration. – Soit ν une mesure minimale pour le balayage sur $\overline{\omega}_0$ défini par le cône $\mathcal{G}(\overline{\omega}_0)$ (séparation linéaire).

Soit $\alpha \in \mathcal{B}$, $\overline{\alpha} \subset \omega_0$ et posons :

$$\hat{\nu}(\varphi) = \operatorname{Inf} \{\nu(f) / f \in \mathcal{G}(\overline{\omega}_0), f \geqslant \varphi \text{ sur } \overline{\omega} \backslash \alpha\}$$

pour toute φ continue sur $\overline{\omega}$. Soit $k \geqslant \| \varphi \|$.

On a : $\hat{\nu}(\varphi) \leqslant \hat{\nu}(k) \leqslant \hat{\nu}(R_k^{\widetilde{\omega}})$ ou $\widetilde{\omega}$ est un ouvert borné coercitif contenant $\overline{\omega}_0$, d'où :

$$\hat{\nu}(\varphi) \leqslant \hat{\nu}(R_k^{\widetilde{\omega}}) = \nu(R_k^{\widetilde{\omega}}) < +\infty$$

D'autre part, on a $\hat{\nu}(0) = 0$ par le principe du minimum sur $\mathcal{B}$, d'où l'on déduit que $\hat{\nu}$ est sous-linéaire sur $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit ν' une forme linéaire majorée par $\hat{\nu}$. Par des raisonnements classiques, on voit que ν' est une mesure positive balayée de ν par rapport à $\mathcal{G}(\overline{\omega})$, donc $\nu = \nu'$ par minimalité de ν et séparation linéaire. L'ouvert α est ν-négligeable, comme les α forment une base de ω, ω_0 est ν-négligeable.

c.q.f.d.

Démonstration du théorème. – Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau contenant $\hat{\mathcal{F}}$ et vérifiant le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}$. Soit $\omega \in \mathcal{B}$ et soit $x \in \omega$.

Toute mesure balayée minimale de ϵ_x par rapport à $\mathcal{G}(\overline{\omega})$ est portée par $\partial \omega$ (principe du minimum et séparation linéaire : proposition 8). D'après le lemme 15 ci-dessus elle est unique et vaut donc ρ_x^ω.

Considérons alors le préfaisceau $\mathcal{F}^*$ défini par

$$f \in \mathcal{F}^*(U) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ s.c.i.} > -\infty \text{ dans } U \\ \text{et} \\ x \in \omega \subset \overline{\omega} \subset U, \omega \in \mathcal{B} \Rightarrow f(x) \geqslant \int f \, d\rho_x^\omega \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{G}$ est inclus dans $\mathcal{F}^*$. Donc $\mathcal{F}^*$ est le plus grand de tous ces préfaisceaux.

c.q.f.d.

D'après le lemme 17, $\mathfrak{F}^*$ vérifie en fait le principe du minimum sur $\mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B}_0'$ la base formée des ouverts $\omega \in \mathcal{B}_0$ pour lesquels il existe $h \in \hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega}) \cap (-\hat{\mathfrak{F}}(\bar{\omega}))$ $h > 0$ sur $\bar{\omega}$. Soit $\mathcal{G}$ maximal contenant $\mathfrak{F}^*$ et vérifiant le principe du minimum sur $\mathcal{B}_0' \cap \mathcal{B}$. On sait d'après [4], remarque 37.2 que $\mathcal{G}$ est un faisceau. Montrons que $\mathcal{G} = \mathfrak{F}^*$: $\mathcal{G}$ vérifie le principe du minimum sur $\mathcal{B}$ d'après le lemme 17 donc $\mathcal{G}$ vaut $\mathfrak{F}^*$.

Le critère d'appartenance à $\mathfrak{F}^*(\mathrm{U})$ résulte de théorème 35 de [5].

18. Corollaire. – *Soit $\mathcal{H}^*$ le faisceau des fonctions* L-*hyperharmoniques de* [9] : *on a* $\mathcal{H}^* = \mathfrak{F}^*$.

Démonstration. – Il suffit de vérifier que $\mathcal{H}^*$ possède les propriétés du théorème 16 par rapport à une base $\mathcal{B}$: On peut prendre la base $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0'$ de la démonstration : ils sont réguliers au sens de [1].

19. *Remarque.* – On voit ainsi que l'on peut définir $\mathcal{H}^* = \mathfrak{F}^*$ sans faire appel à la régularité des ouverts lipschitziens et sans utiliser la propriété de Harnack.

3. Normalité de $\mathfrak{F}^*$ (cf. [4] ch. V).

Rappelons que $\mathfrak{F}^*$ est dit régulier s'il vérifie la condition suivante : (cf. [4], définition 49) – pour tout ouvert U, tout $f \in \mathfrak{F}^*(\mathrm{U})$, tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ et toute fonction φ continue sur K, $\varphi < f$ sur K, il existe une fonction finie continue u sur K, $u \in \mathfrak{F}^*(\mathrm{K})$ vérifiant :

$$\varphi \leqslant u < f \quad \text{sur } \mathrm{K}.$$

Nous allons d'abord montrer que $\mathfrak{F}^*$ est localement régulier, c'est-à-dire régulier sur les ouverts d'un recouvrement.

20. Theoreme. – *$\mathfrak{F}^*$ est localement régulier.*

Démonstration. – Soient ω une boule coercitive et soient

$$f \in \mathfrak{F}^*(\bar{\omega}),$$

et φ lipschitzienne sur $\overline{\omega}$, $\varphi < f$. On va montrer que $\hat{R}_\varphi^\omega$ est majorée par f.

D'abord R_φ^ω appartient à $W^2(\omega)$. Soit g un représentant quasi-continu sur $\overline{\omega}$ de R_φ^ω, on peut supposer $g = \hat{R}_\varphi^\omega$ dans ω. Soit β l'ouvert de ω où l'on a $g > \varphi$. Soit $a \in \beta$: considérons une suite croissante d'ouverts β_n à frontières lipschitziennes, de réunion β et telle que :

$$a \in \beta_n \subset \overline{\beta}_n \subset \beta$$

Soit $\rho_a^{\partial\beta_n}$ l'unique balayée de ϵ_a par rapport à $\mathfrak{F}^*(\overline{\beta}_n)$ portée par $\partial \beta_n$. On a $f(a) \geqslant \int f\, d\rho_a^{\beta_n}$.

La suite $\rho_a^{\partial\beta_n}$ est vaguement bornée sur $\overline{\omega}$, elle est aussi bornée dans le dual de $W^2(\omega)$, converge aux deux sens vers une mesure μ d'énergie finie dans $\mathbf{R}^m$. Il est clair que μ est portée par $\partial \beta$, et l'on a :

$$f(a) \geqslant \int f\, d\mu \geqslant \int \varphi\, d\mu = \int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g\, d\rho_a^{\partial\beta_n} = g(a)$$

car $g = \varphi$ quasi-partout sur $\partial\beta$ et car on sait que g est une L-solution dans l'ouvert β.

c.q.f.d.

21. THEOREME. – *Soit* $f \in \mathfrak{F}^*(\mathrm{U})$, *$f$ majorée presque partout par un élément de* $\mathcal{W}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{U})$. *Alors* $f \in \hat{\mathfrak{F}}(\mathrm{U})$.

Démonstration. – Soit ω une boule coercitive, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$. D'après le théorème 20, il existe une suite $f_n \in \mathfrak{F}(\omega)$, telle que f_n converge en croissant vers f. Le lemme 4 montre que f_n converge dans $W^2_{\mathrm{loc}}(\omega)$. Le théorème 10 montre alors que f est dans $\hat{\mathfrak{F}}(\omega)$.

22. COROLLAIRE. – $\hat{\mathfrak{F}}$ *est un préfaisceau maximal de cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$ *contenu dans* $\mathcal{W}^2_{\mathrm{loc}}$ *et vérifiant le principe du minimum sur une base* $\mathcal{B}$ *du théorème* 14.

23. COROLLAIRE. – *Si* $f \in \mathfrak{F}^*(\mathrm{U})$, *alors f est quasi-continue.*

Démonstration. – La propriété est locale, soit h une L-solution locale $h > 0$, alors $g = -h \exp(-f/h)$ est dans $\mathfrak{F}^*(\mathrm{U})$ et négative, donc g appartient à $\hat{\mathfrak{F}}(\mathrm{U})$ et est donc quasi-continue : f aussi.

24. *Remarque.* – Le même procédé permettrait de montrer le théorème 10 b), mais relatif cette fois à des fonctions de $\mathcal{F}^*$ (U).

25. COROLLAIRE. – *Soit* $f \in \mathcal{F}^*$ (U), U *ouvert connexe. Alors on a :* $f \equiv +\infty$ dans U ou bien f est finie quasi-partout dans U.

Démonstration. – Supposons d'abord que ω, $\bar{\omega} \subset$ U soit une boule telle qu'il existe $h \in \hat{\mathcal{F}}(\omega) \cap (-\hat{\mathcal{F}}(\omega))$, $1 \leqslant h \leqslant 2$ sur ω. On peut supposer $f \geqslant 0$ sur ω.

Alors, soit P l'ensemble des infinis de f dans ω, posons $u = \operatorname{Inf}_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} f$.

D'après la remarque 24, on a $u = \hat{u}$ quasi-partout dans U donc :

$$\hat{u} = \begin{cases} +\infty \text{ sur } P' \\ 0 \text{ sur } \omega \backslash P' \end{cases}$$

où P′ diffère de P par un ensemble polaire. Le corollaire 23 montre que

$$v = \begin{cases} h \text{ sur } P' \\ 0 \text{ sur } \omega \backslash P' \end{cases} \text{ appartient à } \hat{\mathcal{F}}(\omega) \subset \mathcal{W}^2_{\text{loc}}(\omega)$$

$$\text{La fonction } W = \frac{v}{h} = \begin{cases} 1 \text{ sur } P' \\ 0 \text{ sur } \omega \backslash P' \end{cases} \text{ appartient à } \mathcal{W}^2_{\text{loc}}(\omega)$$

$$\text{On a donc } W' = \begin{cases} 0 \text{ presque partout sur } P' \\ 0 \text{ presque partout sur } \omega \backslash P' \end{cases} \text{ (cf. [3])}$$

donc $W' = 0$ presque partout dans ω et $W =$ cste quasi-partout dans ω.

Si la constante est 1, on a $f \equiv +\infty$ dans ω, car $v = h$ partout et $u \geqslant \hat{u}$.

Si la constante est 0, P′ est polaire, P aussi et f est finie quasi-partout dans ω. Un raisonnement de connexité permet de passer à U tout entier.

26. COROLLAIRE. – *Soit* $f \in \mathcal{F}^*$ (U), $f \geqslant 0$ *sur* U *alors :* $f \equiv 0$ *ou bien* $f > 0$ *partout dans* U.

Démonstration. – On applique en effet le corollaire 25 à $g = \operatorname{Sup}_n n f \, (n \geqslant 0)$.

27. *Remarque.* – Ceci entraîne de façon bien connue que les mesures harmoniques ρ_x^α d'une boule coercitive par exemple sont absolument continues les unes par rapport aux autres.

28. THEOREME. – *Soit* $(h_i)_{i \in I}$ *un ensemble filtrant croissant localement borné uniformément,* $h_i \in \mathfrak{F}^* (U) \cap - \mathfrak{F}^* (U)$ (U *ouvert). Alors* $h = \operatorname{Sup}_i h_i$ *appartient à* $\mathfrak{F}^* (U) \cap - \mathfrak{F}^* (U)$.

Démonstration. – Toutes les h_i sont dans $\hat{\mathfrak{F}} (U) \cap - \hat{\mathfrak{F}} (U)$ à cause du théorème 20. De même, h appartient à $\hat{\mathfrak{F}} (U)$. On a d'une part $h(x) = \int h \, d\rho_x^\omega$ car $h = \operatorname{Sup}_i h_i$ pour toute boule

$$\omega \, , x \in \omega \subset \overline{\omega} \subset U$$

et d'autre part :

$$\int h \, d\rho_x^\omega = H_h^{\partial\omega} (x), \text{ car } h \in \hat{\mathfrak{F}} (U)$$

On a donc $h = H_h^{\partial\omega}$ dans ω, d'où le résultat.

29. COROLLAIRE – $\mathfrak{F}^*$ *est normal au sens de* [4] *définition* 88.

Démonstration. – D'après [4], théorème 96, il suffit de vérifier l'existence d'une base $\mathcal{C}$ d'ouverts relativement compacts δ pour lesquels l'application

$$x \rightsquigarrow \int \varphi \, d\rho_x^\delta$$

soit continue dans δ pour toute φ continue sur δ. Il suffit de prendre pour $\mathcal{C}$ une base formée de boules coercitives au voisinages desquelles il existe des solutions strictement positives (unicité de la balayée : lemme 17).

30. COROLLAIRE. – *Soit* α *ouvert relativement compact et soit* φ *continue sur* α, *alors la fonction :* $g = \operatorname{Inf} \{ f \in \mathfrak{F}^* (U), f \geqslant \varphi \text{ sur } \alpha \}$ *est finie continue sur* α *g est continue d'après la proposition* 91 *de* [4] *elle est finie d'après la remarque* 27 *ci-dessus.*

31. COROLLAIRE. – $\mathfrak{F}^*$ *est régulier.*

Démonstration. – cf. théorème 92 de [4].

32. *Remarque* (principe de symétrie de Schwarz). – Soit H l'hyperplan $x_m = 0$;

Considérons l'opérateur :

$$Mf = \operatorname{div}(\widetilde{A}f' + f\widetilde{X}) - (\widetilde{Y}, f') - \widetilde{c}f$$

où $\widetilde{A}$ est la matrice de coefficients $\widetilde{a}_{ij}$

$\widetilde{X}$ est le vecteur de coefficients $\widetilde{X}_i$

$\widetilde{Y}$ est le vecteur de coefficients $\widetilde{Y}_i$

donnés par ($\widetilde{x}$ est le symétrique de x par rapport à H)

$$\widetilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) \text{ si } x_m \geqslant 0 \\ a_{ij}(\widetilde{x}) \text{ si } x_m < 0 \text{ et } i, j \leqslant m-1 \text{ ou } i = j = m \\ -a_{ij}(\widetilde{x}) \text{ si } x_m < 0 \text{ et } i = m, j \leqslant m-1 \\ \qquad\qquad \text{ou } i \leqslant m-1 \text{ et } j = m \end{cases}$$

$$\widetilde{X}_i(x) \text{ (resp. } \widetilde{Y}_i(x)) = \begin{cases} X_i(x) \text{ (resp. } Y_i(x)) \text{ si } x_m \geqslant 0 \\ X_i(\widetilde{x}) \text{ (resp. } Y_i(\widetilde{x})) \text{ si } x_m < 0 \text{ et } i \leqslant m-1 \\ -X_i(\widetilde{x}) \text{ (resp. } Y_i(\widetilde{x})) \text{ si } x_m < 0 \text{ et } i = m \end{cases}$$

$$\widetilde{c}(x) = \begin{cases} c(x) \text{ si } x_m \geqslant 0 \\ c(\widetilde{x}) \text{ si } x_m < 0 \end{cases}$$

L'opérateur M vérifie les mêmes hypothèses que L.

Soit $h \in \mathfrak{W}^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^m)$. On suppose que $h = 0$ quasi-partout sur H et que h est une L-solution dans le demi-espace $x_m > 0$.

Alors la fonction :

$$f(x) \begin{cases} h(x) \text{ pour } x_m \geqslant 0 \\ -h(\widetilde{x}) \text{ pour } x_m < 0 \end{cases}$$

est une M -solution dans $\mathbf{R}^m$.

On en déduit que h est quasi-partout égale à une fonction continue pour $x_m \geqslant 0$.

A l'aide du critère de Bouligand, on en déduit facilement que tout ouvert coercitif à frontière lipschitzienne est régulier pour le problème de Dirichlet.

33. Pour terminer indiquons que l'on pourrait toujours sans inégalité de Harnack montrer l'existence et l'unicité des potentiels à support ponctuel dans les mêmes conditions que [10], mais on peut aussi le faire dans des ouverts de Green plus généraux : c'est l'objet de [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Presse de l'Université de Montréal, 1966.

[2] G. CHOQUET, Le problème des moments, Séminaire d'initiation à l'analyse, Institut Henri Poincaré, Paris, 1ère année (1972).

[3] J. DENY et J.L. LIONS, Espaces du type de Beppo-Levi, *Ann. Inst. Fourier,* 5 (1953/1954), 305-370.

[4] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Principe du minimum et préfaisceaux maximaux, *Ann. Inst. Fourier,* 24,1 (1974), 1-121.

[5] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Faisceaux d'espaces de Sobolev et principes du minimum, *Ann. Inst. Fourier,* 25,1 (1975), 127-149.

[6] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Applications des principes du minimum et de la maximalité à l'étude d'un opérateur elliptique du second ordre, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, 278 (1974), 487.

[7] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Sur certains espaces de Dirichlet associés à une équation elliptique à coefficients discontinus, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, 281 (1975), 223.

[8] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Nouvelle démonstration de l'inégalité de Harnack pour un opérateur différentiel elliptique à coefficients discontinus, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, 281 (1975), 159.

[9] R.M. et M. HERVE, Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier,* 19,1 (1969), 305-359.

[10] G. STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations élliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier,* 15,1 (1965), 189-258.

Manuscrit reçu le 2 juin 1975
Proposé par M. Brelot.

D. FEYEL et A. de LA PRADELLE,
Equipe d'Analyse
E.R.A. au C.N.R.S. n° 294
Université Pierre et Marie Curie
(Université Paris VI)
4, Place Jussieu
Tour 46 – 4^e étage – 46/0
75230 – Paris-Cedex 05.