Annales de l’institut Fourier

Jean-Pierre Roth

Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues

Annales de l’institut Fourier, tome 26, nº 4 (1976), p. 1-97
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 4 (1976), 1-97.

OPÉRATEURS DISSIPATIFS ET SEMI-GROUPES DANS LES ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES

par Jean-Pierre ROTH

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étudier quelques aspects de la théorie des opérateurs dissipatifs et des semi-groupes à contraction dans $\mathscr{C}^0(X)$, où X est un espace localement compact. Nos préoccupations vont essentiellement dans quatre directions :

— décrire la forme des opérateurs dissipatifs, soit en les approchant par des opérateurs dissipatifs d'un type particulièrement simple comme dans le chapitre I, soit en donnant une formule de représentation comme dans le chapitre III;

— établir un lien entre les opérateurs dissipatifs et les formes de Dirichlet ce qui nous a amené à l'introduction des opérateurs carrés du champ;

— étudier la relation entre les opérateurs dissipatifs et les semi-groupes. C'est le problème de la génération des semi-groupes. Il est abordé dans le chapitre II, pour le cas invariant, et dans le chapitre IV, pour la technique de restriction dans le cas d'un opérateur local;

— résoudre en un sens faible certains problèmes d'évolution, ce qui est fait dans les chapitres IV et V.

Nous allons donner un aperçu par chapitre des résultats obtenus.

Chapitre I : Nous montrons que tout opérateur dissipatif de domaine dense dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ est limite simple d'opérateurs de la forme $a(R - I)$, où a est un réel strictement positif et R un opérateur borné de norme $\leqslant 1$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

Par certains de ses aspects ce résultat rappelle le balayage. Il est à la base de plusieurs théorèmes des chapitres II et III.

Chapitre II : Pour donner une formule de représentation des opérateurs dissipatifs, invariants, de domaine dense dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, J. Faraut a eu l'idée de réduire les distributions dissipatives sur $\mathbf{R}^n$ à des laplaciens généralisés sur

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}([9]).$$

$X = G/K$ étant un espace homogène, nous utilisons cette idée du passage de X à $X \times \mathbf{T}$ pour associer à tout semi-groupe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ à contraction, invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, un semi-groupe $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ de Feller invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZP_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf),$$

où $\tilde{Q}_t$ est l'opérateur complexifié de Q_t et où, pour tout h dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, on note Zh la fonction de $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{C})$ définie par

$$\forall (x, z) \in X \times \mathbf{T}, \qquad Zh(x, z) = zh(x).$$

Il s'agit donc d'une généralisation du résultat de J. Faraut. Nos méthodes sont complètement différentes des siennes puisque nous n'avons plus de structure différentielle sur X.

Dans une seconde partie, nous utilisons l'idée de « double régularisation » déjà exploitée dans la première partie pour résoudre le problème de génération des semi-groupes invariants sur les espaces homogènes. Le théorème essentiel, obtenu avec la collaboration de F. Hirsch, est le suivant :

Tout opérateur dissipatif, de domaine dense et invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ se prolonge en le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

Ce théorème s'inscrit dans la ligne de nombreux travaux antérieurs menés par Hunt ([15]), Faraut ([8], [9]), Faraut et Harzallah ([10]), Hirsch ([11], [12], [13]), Hirsch et Roth ([13], [14]). Du point de vue de l'existence d'un semi-groupe associé à un opérateur dissipatif, notre théorème englobe et unifie tous les résultats particuliers mentionnés (cas où G est commutatif, compact, de Lie, etc...).

Par contre du point de vue de l'unicité de ce semi-groupe, notre théorème ne dit rien.

Chapitre III : Nous définissons la notion d'opérateur carré du champ. Soit V un sous-espace de $\mathcal{K}(X)$, dense dans $\mathcal{C}^0(X)$, tel que

$$\forall f \in V, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \qquad (\varphi(0) = 0) \Longrightarrow \varphi \circ f \in V.$$

B est un opérateur carré du champ si B est une application bilinéaire symétrique de $V \times V$ dans $\mathcal{C}^0(X)$ vérifiant,

a) $\forall f, g \in V$, (g contraction de f) $\Longrightarrow B(g, g) \leqslant B(f, f)$.

b) $\forall f, g \in V$, $\forall x \in X$,

$$(f(x) = \operatorname{Sup} f \geqslant 0,\ g(x) = \operatorname{Sup} g \geqslant 0) \Longrightarrow B(f, g)(x) \geqslant 0.$$

La motivation de cette définition réside dans le fait que la notion d'opérateur carré du champ établit un intermédiaire entre les opérateurs vérifiant le principe du maximum positif et les formes de Dirichlet.

De façon précise,

— si A est un opérateur satisfaisant au principe du maximum positif et de domaine D(A) assez riche dans $\mathcal{C}^0(X)$, l'opérateur B, défini par

$$B(f, g) = A(fg) - fA(g) - gA(f),$$

est un opérateur carré du champ,

— si B est un opérateur carré du champ et si ν est une mesure de Radon positive bornée sur X, la forme Q, définie par

$$Q(f, g) = \int B(f, g)\, d\nu,$$

est, à peu de choses près, une forme de Dirichlet au sens de ([1]).

Le problème inverse du passage de Q à B, puis de B à A, n'a pas été abordé.

Par ailleurs, nous donnons une formule de représentation des opérateurs carrés du champ, de laquelle nous pouvons déduire, d'une part la formule de Lévy-Khinchine pour A, d'autre part la formule de représentation de Q qui correspond à celle que donne Allain dans ([1]).

Chapitre IV : Si $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $\mathscr{C}^0(X)$ dont le générateur infinitésimal A est local et de domaine assez riche, et si Ω est un ouvert régulier de X, nous montrons qu'il existe un semi-groupe de Feller $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$, appelé « semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$ tangent à $(P_t)_{t \geqslant 0}$ », tel que, $\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$, $\forall K$ compact $\subset \Omega$,

$$\|P_s(\tilde{f}) - Q_s(f)\|_K = o(s),$$

où $\tilde{f}$ est la fonction prolongée de f par 0 sur X.

Par ailleurs nous montrons que le générateur infinitésimal de $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ est, en un certain sens, la restriction de A à Ω.

Dans ce but nous résolvons en un sens faible le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au \quad \text{sur} \quad \Omega \times]0, +\infty[\\ \forall x \in \overline{\Omega},\ u(x, 0) = f(x) \\ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \geqslant 0,\ u(x, t) = f(x) \end{cases}$$

où f est une fonction donnée continue sur $\overline{\Omega}$.

Nous terminons ce chapitre par la résolution en un sens faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Ag = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \forall x \in \partial\Omega,\ g(x) = f(x) \end{cases}$$

où f est une fonction donnée continue sur $\partial\Omega$.

Chapitre V : Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction $(P_t)_{t \geqslant 0}$ sur $\mathscr{C}^0(X)$ et φ une application de $\mathscr{C}^0(X)$ dans $\mathscr{C}_{b^+}(X)$. On suppose qu'il existe trois réels strictement positifs a, b, c tels que

$$\begin{cases} \forall f \in \mathscr{C}^0(X), \quad a \leqslant \varphi(f) \leqslant b, \\ \forall f, g \in \mathscr{C}^0(X), \quad \|\varphi(f) - \varphi(g)\| \leqslant c\|f - g\|. \end{cases}$$

Pour tout f dans $\mathscr{C}^0(X)$, $\varphi(f)\,A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe noté $(P_{\varphi(f), t})_{t \geqslant 0}$.

Nous démontrons le théorème suivant :

Pour tout f *dans* D(A), *il existe* $t_0 > 0$ *et une unique fonction continue* u *de* $[0, t_0[$ *dans* $\mathscr{C}^0(X)$, *telle que*

$$\begin{cases} u(0) = f \\ \forall t \in [0, t_0[, \ \|u(t+s) - P_{\varphi(u(t)),s}(u(t))\| = o(s). \end{cases}$$

Il s'agit d'une nouvelle notion de solution pour le problème d'évolution non linéaire suivant :

$$\begin{cases} u(0) = f \\ \dfrac{du}{dt}(t) = \varphi(u(t))A(u(t)). \end{cases}$$

L'étude détaillée d'un exemple montre, qu'en général, on ne peut pas obtenir une fonction u définie sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

J'exprime à Messieurs J. Deny et F. Hirsch ma profonde reconnaissance pour la part qu'ils ont apportée dans ma formation mathématique et pour leur soutien dans mon travail de recherche.

Je remercie aussi Messieurs G. Choquet et P. A. Meyer qui ont accepté de participer au jury de thèse auquel les résultats de ce travail ont été soumis.

TABLE DES MATIERES

I. — OPÉRATEURS DISSIPATIFS SUR $\mathscr{C}^0(X)$ 7

1. Notations et définitions 7
2. Approximation des opérateurs dissipatifs 9
3. Approximation des opérateurs dissipatifs invariants sur un espace homogène 15

II. — SEMI-GROUPES INVARIANTS SUR $\mathscr{C}^0(X)$ 19

1. Passage des mesures complexes sur X à des mesures positives sur $X \times \mathbf{T}$ 19
2. Passage d'un semi-groupe à contraction invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ à un semi-groupe de Feller invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ 22
3. Générateurs infinitésimaux des semi-groupes invariants sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ 30

III. — OPÉRATEURS CARRÉS DU CHAMP ET FORMULE DE LÉVY-KHINCHINE SUR LES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS........... 36

1. Définition et représentation des opérateurs carrés du champ . 36
2. Formule de Lévy-Khinchine sur les espaces localement compacts 51

IV. — RESTRICTION A UN OUVERT D'UN GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL LOCAL.. 54

1. Préliminaire 54
2. Le problème de Cauchy 57
3. Semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$, tangent à $(P_t)_{t\geqslant 0}$ 67
4. Le problème de Dirichlet 73

V. — UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRE 77

1. Perturbations multiplicatives d'un générateur infinitésimal .. 77
2. Étude d'une équation d'évolution non linéaire 80
3. Étude d'un contre-exemple 92

BIBLIOGRAPHIE 96

CHAPITRE PREMIER

APPROXIMATION SUR DES OPÉRATEURS DISSIPATIFS SUR $\mathscr{C}^0(X)$

Dans ce chapitre nous montrons essentiellement un théorème d'approximation des opérateurs dissipatifs de domaine dense sur $\mathscr{C}^0(X)$. Nous les mettons sous la forme d'une limite d'opérateurs du type $a(T - I)$, où a est un réel strictement positif et T un opérateur de norme $\leqslant 1$ sur $\mathscr{C}^0(X)$.

1. Notations et définitions.

X est un espace localement compact et Λ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

$\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$, $\mathscr{C}(X, \Lambda)$, $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, $\mathcal{K}(X, \Lambda)$ désignent l'ensemble des fonctions de X dans Λ respectivement bornées, continues, continues et tendant vers 0 à l'infini si X n'est pas compact, continues à support compact.

On note $\mathcal{K}_+(X, \Lambda)$, $\mathscr{C}^0_+(X, \Lambda)$, $\mathscr{F}_{b+}(X, \Lambda)$ les sous-cônes de fonctions positives de $\mathcal{K}(X, \Lambda)$, $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, $\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$.

Lorsque f est un élément de $\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$ on note

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$$

la norme habituelle.

$\mathfrak{M}(X, \Lambda)$ (resp. $\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$) désigne l'ensemble des mesures de Radon (resp. bornées) sur X à valeurs dans Λ.

On note Supp le support d'une fonction ou d'une mesure.

$\mathbf{T}$ désigne le tore, c'est-à-dire le groupe des nombres complexes de module 1.

E étant un espace vectoriel sur Λ, on dit que A est un opérateur de domaine $D(A)$ dans E, si A est une application linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E à valeurs dans E.

$(P_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe à contraction sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (on omettra de dire fortement continu) si,

— $\forall t \geqslant 0$, P_t est un opérateur borné sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et $\|P_t\| \leqslant 1$;
— $\forall t, s \geqslant 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s$;
— $P_0 = I$;
— $\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, $P_t(f) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

$(P_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller si, de plus, pour tout $t \geqslant 0$, P_t est un opérateur positif.

Pour les notions de familles résolvantes, L_0 et L_∞-familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, etc..., on se réfère à ([11]).

I.1.1. Définition et proposition. — A *étant un opérateur de domaine* D(A) *dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *considérons les trois propriétés suivantes :*

(i) $\forall \lambda > 0$, $\forall f \in D(A)$, $\|\lambda f - A(f)\| \geqslant \|\lambda f\|$,

(ii) $\forall f \in D(A)$, $\exists x \in X$, $|f(x)| = \|f\|$ et $\mathrm{Re}[\overline{f(x)}A(f)(x)] \leqslant 0$

(iii) $\forall f \in D(A)$, $\forall x \in X$, $(|f(x)| = \|f\|)$
$$\Longrightarrow (\mathrm{Re}[\overline{f(x)}A(f)(x)] \leqslant 0).$$

Les propriétés (i) *et* (ii) *sont équivalentes et si* A *vérifie l'une d'entre elles il est dit dissipatif.*

Les trois propriétés sont équivalentes si D(A) *est dense dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

I.1.2. Définition et proposition. — A *étant un opérateur de domaine* D(A) *dans* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$ *on dit qu'il vérifie le principe du maximum positif faible si,*

$$\forall f \in D(A),\ (Sup\, f > 0) \Longrightarrow (\exists x \in X,\ f(x) = Sup\, f \text{ et } A(f)(x) \leqslant 0).$$

Lorsque D(A) *est dense dans* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$ *cette propriété est équivalente à celle qui suit, appelée principe du maximum positif,*

$$\forall f \in D(A), \quad \forall x \in X, \quad (f(x) = \mathrm{Sup}\, f \geqslant 0) \Longrightarrow (A(f)(x) \leqslant 0).$$

I.1.3. Définition et proposition. — V *étant un opérateur de domaine* D(V) *dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes,*

(i) $\forall \lambda > 0,\ \forall f \in D(V),\ \|f + \lambda V(f)\| \geqslant \|\lambda V(f)\|$

(ii) $\forall f \in D(V),\ \exists x \in X,\ |V(f)(x)| = \|V(f)\|$

et $\operatorname{Re}[\overline{f(x)}V(f)(x)] \geqslant 0.$

Si V *vérifie l'une des deux propriétés il est dit codissipatif.*

I.1.4. Définition. — V *étant un opérateur de domaine* D(V) *dans* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$, *on dit qu'il satisfait au coprincipe du maximum positif s'il vérifie la propriété suivante,*

$$\forall f \in D(V),\quad \forall x \in \Omega,\quad (V(f)(x) = \operatorname{Sup} V(f) \geqslant 0) \Longrightarrow (f(x) \geqslant 0).$$

On dit qu'il satisfait au coprincipe du maximum positif faible si

$$\forall f \in D(V),\quad (\operatorname{Sup} V(f) > 0) \Longrightarrow (\exists x \in X,\quad V(f)(x) = \operatorname{Sup} V(f) \quad \textit{et} \quad f(x) \geqslant 0).$$

Pour toutes ces définitions et pour l'essentiel des démonstrations on peut consulter ([11]).

Remarque. — Dans le cas où D(A) est dense, l'équivalence de (ii) et (iii) de I.1.1 et l'équivalence entre principe du maximum positif et principe du maximum positif faible de I.1.2 sont des corollaires de I.2.3.

2. Approximation des opérateurs dissipatifs [17].

I.2.1. Proposition. — *Si* A *est un opérateur dissipatif sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (*resp. vérifiant le principe du maximum positif faible sur* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$), *alors, pour tout point* e *de* X, *il existe une famille* $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ *de mesures de Radon* (*resp. positives*) *sur* X, *telles que* :

(i) $\forall \lambda > 0,\ \|\varepsilon_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$

(ii) $\forall f \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ f(e) = \displaystyle\int [\lambda f(x) - A(f)(x)]\, d\varepsilon_\lambda(x).$

Démonstration. — Il s'agit d'une simple application du théorème de Hahn-Banach. Faisons-le dans le cas où A vérifie le principe du maximum positif faible sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$.

Soit p la forme positivement sous-linéaire définie sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$ par $p(g) = (\text{Sup } g)^+ = \text{Max}(0, \text{Sup } g)$. λ étant fixé dans $]0, +\infty[$ et e dans X, considérons l'application $\lambda f - A(f) \longmapsto f(e)$ définie sur l'image de $\lambda I - A$ (notée $\text{Im}(\lambda I - A)$) à valeurs dans $\mathbf{R}$. Cette application est définie sans ambiguïté, car si $\lambda f - Af = \lambda g - Ag$ alors

$$\|\lambda(f - g)\| \leqslant \|\lambda(f - g) - A(f - g)\| = 0$$

d'où $f = g$.

Par ailleurs cette forme linéaire $\lambda f - A(f) \longmapsto f(e)$ définie sur $\text{Im}(\lambda I - A)$ est majorée par $\frac{p}{\lambda}$, en effet, soit $f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$,

ou bien $\text{Sup } f > 0$. Il existe x dans X tel que

$$f(x) = \text{Sup } f \qquad \text{et} \qquad A(f)(x) \leqslant 0.$$

On a donc

$$\lambda f(e) \leqslant \lambda \text{ Sup } f = \lambda f(x) \leqslant \lambda f(x) - A(f)(x) \leqslant \text{Sup}(\lambda f - A(f)).$$

D'où
$$f(e) \leqslant \frac{1}{\lambda}\, p(\lambda f - A(f)),$$

ou bien $\text{Sup } f \leqslant 0$. L'inégalité est alors triviale.

D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une forme linéaire ε_λ sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$ qui prolonge la forme linéaire précédente et qui est majorée par $\frac{p}{\lambda}$. On a donc

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbf{R}), \qquad \varepsilon_\lambda(\lambda f - A(f)) = f(e)$$
$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbf{R}), \qquad \lambda\varepsilon_\lambda(f) \leqslant (\text{Sup } f)^+.$$

La seconde relation montre que $\lambda\varepsilon_\lambda$ est une mesure positive de masse $\leqslant 1$ sur X.

On a une proposition analogue dans le cas codissipatif.

I.2.2. Proposition. — *Si* V *est un opérateur codissipatif sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (*resp. vérifiant le coprincipe du maximum positif faible sur* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$), *alors, pour tout point* e *de* X *il existe une famille* $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda > 0}$ *de mesures de Radon* (*resp. positives*) *sur* X *telles que*,

(i) $\forall\lambda > 0,\ \|\varepsilon_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$

(ii) $\forall f \in D(V),\ \forall\lambda > 0,\ V(f)(e) = \int [f(x) + \lambda V(f)(x)]\, d\varepsilon_\lambda(x).$

I.2.3. Proposition. — *Si* A *est un opérateur dissipatif sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (*resp. vérifiant le principe du maximum positif faible sur* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$) *et si* D(A) *est dense dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *alors il existe une suite* $(T_n)_{n\geqslant 0}$ *d'applications linéaires continues* (*resp. positives*) *de* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *à valeurs dans* $\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$ *telles que*

(i) $\forall n \in \mathbf{N},\ \|T_n\| \leqslant 1,$

(ii) $\forall f \in D(A),\ A(f) = \lim\limits_{n\to\infty} n(T_n(f) - f)$

où la limite est prise au sens de la norme dans $\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$.

Démonstration. — A tout λ dans $]0, +\infty[$ et à tout e dans X on associe une mesure $\varepsilon_{\lambda, e}$ comme dans la proposition I.2.1.

Pour f dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, x dans X et n dans $\mathbf{N}$ on pose

$$T_n(f)(x) = n \int f(y)\, d\varepsilon_{n, x}(y).$$

On a $|T_n(f)(x)| \leqslant \|f\|$, donc, d'une part, $T_n(f)$ est dans $\mathscr{F}_b(X, \Lambda)$ et d'autre part, $\|T_n\| \leqslant 1$.
On a la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall f \in D(A), \quad nf = nT_n(f) - T_n(A(f)).$$

En divisant par n on en déduit

$$\forall f \in D(A), \qquad f = \lim_{n\to\infty} T_n(f) \quad \text{dans} \quad \mathscr{F}_b(X, \Lambda).$$

Or la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue et D(A) est dense dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, par suite

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda),\ f = \lim_{n\to\infty} T_n(f).$$

En particulier, si $f \in D(A)$, $A(f) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(A(f))$.

Donc $$A(f) = \lim_{n\to\infty} n(T_n(f) - f).$$

I.2.4. Lemme. — *Il existe un ensemble* J, *un filtre* $\mathcal{G}$ *sur* J *et une famille* $(U_j)_{j \in J}$ *d'applications linéaires continues de normes* $\leqslant 1$ *de* $\mathcal{F}_b(X, \Lambda)$ *dans* $\mathcal{C}^0(X, \Lambda)$, *tels que,*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(X, \Lambda), \qquad f = \lim_{\mathcal{G}} U_j(f).$$

Si $\Lambda = \mathbf{R}$ *on peut avoir des* U_j *positifs.*

Démonstration. — Soit $\hat{X}$ le compactifié d'Alexandroff de X. Notons ω le point à l'infini.

Notons J le filtre des entourages de la structure uniforme de $\hat{X}$.

Soit $\mathcal{G}$ le filtre sur J dont une base est formée des parties de la forme

$$G_j = \{k \in J / k \subset j\},$$

où j parcourt J.

Soit j un élément de J. C'est un entourage. On recouvre $\hat{X}$ par un nombre fini d'ouverts $O_{j,1}, \ldots, O_{j,n(j)}$ « de diamètres inférieurs à j ». Soit $\varphi_{j,1}, \ldots, \varphi_{j,n(j)}$ une partition de l'unité sur $\hat{X}$ surbordonnée à ce recouvrement.

Dans chaque ouvert $O_{j,l}$ choisissons un point $x_{j,l}$. Si $O_{j,l}$ contient ω on prend $x_{j,l} = \omega$.

Pour tout f dans $\mathcal{F}_b(X, \Lambda)$ on pose

$$U_j(f) = \sum_{l=1}^{n(j)} f(x_{j,l})\varphi_{j,l}$$

(par convention on pose $f(\omega) = 0$ dans cette formule). $U_j(f)$ est bien dans $\mathcal{C}^0(X, \Lambda)$ et la propriété

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(X, \Lambda), \qquad f = \lim_{\mathcal{G}} U_j(f)$$

résulte de la continuité uniforme de f.

Enfin $U_j(f)$ est positive si f est positive.

I.2.5. Théorème. — *Soit* A *un opérateur dissipatif sur* $\mathcal{C}^0(X, \Lambda)$ (*resp. vérifiant le principe du maximum positif sur* $\mathcal{C}^0(X, \Lambda)$) *et de domaine* D(A) *dense dans* $\mathcal{C}^0(X, \Lambda)$. *Il existe un ensemble* I, *un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* I, *une famille* $(a_i)_{i \in I}$ *de réels strictement positifs et* $(R_i)_{i \in I}$ *une famille* *d'opérateurs continus (resp. positifs) de normes* $\leqslant 1$ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \Lambda)$ *tels que* $\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{A}),\ \mathrm{A}(f) = \lim_{\mathscr{F}} a_i(\mathrm{R}_i(f) - f)$.

Démonstration. — On pose $\mathrm{I} = \mathbf{N} \times \mathrm{J}$ où J a été introduit dans le lemme précédent. Pour $i = (m, j)$ on prend $\mathrm{R}_i = \mathrm{U}_j \circ \mathrm{T}_m$ et $a_i = m$. Soit $\mathscr{F}$ le filtre sur I dont une base est constituée des parties $\mathrm{F}_{f_1, \ldots, f_k; n}$ de I définies par

$$\mathrm{F}_{f_1, \ldots, f_k; n} = \{(m, j)/n < m \quad \text{et} \quad \|\mathrm{U}_j(f_l) - f_l\| \leqslant \frac{1}{m^2} \quad \text{pour } l = 1, \ldots, k\}$$

n et k parcourant $\mathbf{N}, f_1, \ldots, f_k$ parcourant $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \Lambda)$.

Soit f dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \Lambda)$

$$\begin{aligned} a_i(\mathrm{R}_i(f) - f) - \mathrm{A}(f) &= m(\mathrm{U}_j \circ \mathrm{T}_m(f) - f) - \mathrm{A}(f) \\ &= \mathrm{U}_j[m(\mathrm{T}_m(f) - f) - \mathrm{A}(f)] + m(\mathrm{U}_j(f) - f) \\ &\quad + [\mathrm{U}_j(\mathrm{A}(f)) - \mathrm{A}(f)] \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad (p \leqslant m) \Longrightarrow \|m(\mathrm{T}_m(f) - f) - \mathrm{A}(f)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit n un entier vérifiant $p \leqslant n$ et $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. On obtient alors :

$$\forall i \in \mathrm{F}_{f, \mathrm{A}(f); n}, \qquad \|a_i(\mathrm{R}_i(f) - f) - \mathrm{A}(f)\| \leqslant 3\varepsilon.$$

I.2.6. Proposition. — *Si* A *est un opérateur dissipatif (resp. vérifiant le principe du maximum positif) partout défini sur* $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbf{R})$, *alors il existe un réel* a *positif et un opérateur borné (resp. positif)* T *sur* $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ *de norme* $\leqslant 1$ *tels que*

$$\mathrm{A} = a(\mathrm{T} - \mathrm{I}),$$

où I *est l'identité dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbf{R})$.

Ce résultat tombe en défaut sur $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbf{C})$.

Démonstration. — Supposons A dissipatif non nul. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{I} + \frac{\mathrm{A}}{\|\mathrm{A}\|}$ et montrons $\|\mathrm{T}\| \leqslant 1$.

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ et $x \in \mathrm{X}$.

Si $\quad f(x) = 0, \ |T(f)(x)| = \left|\frac{A(f)(x)}{\|A\|}\right| \leqslant \|f\|.$

Si $\quad f(x) > 0,$ posons $\varphi = \inf\left(\|f\|, \frac{\|f\|}{f(x)} f^+\right) - f^+$

φ est une fonction de $\mathscr{C}^0_+(X, \mathbf{R})$ qui vérifie

$$\varphi(x) = \|\varphi\| = \operatorname{Sup} \varphi$$

et $(\varphi + f)(x) = \|f\| = \|\varphi + f\|$

A étant dissipatif, $\frac{A}{\|A\|}(\varphi + f)(x) \leqslant 0$. Par suite

$$\frac{A}{\|A\|}(\varphi + f)(x) + (\varphi + f)(x) \leqslant (\varphi + f)(x) = \|f\|$$

$$\frac{A}{\|A\|}(\varphi)(x) + \varphi(x) + T(f)(x) \leqslant \|f\|.$$

Or $\quad \frac{A}{\|A\|}(\varphi)(x) + \varphi(x) = \frac{A}{\|A\|}(\varphi)(x) + \|\varphi\| \geqslant 0.$

Donc $\quad T(f)(x) \leqslant \|f\|.$

D'autre part

$$-T(f)(x) = -f(x) - \frac{A}{\|A\|}(f)(x) \leqslant -\frac{A}{\|A\|}(f)(x) \leqslant \|f\|.$$

Si $f(x) < 0$, en changeant f en $-f$ on montre

$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|.$$

Finalement $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$, donc $\|T\| \leqslant 1$.

Si l'on suppose que A vérifie le principe du maximum positif alors on peut montrer que T, ainsi défini, est positif :

Soit f dans $\mathscr{C}^0_+(X, \mathbf{R})$ et x un point de X.

Posons $\psi = \operatorname{Inf}(f, f(x))$. ψ est une fonction de $\mathscr{C}^0_+(X, \mathbf{R})$ qui vérifie

$$\psi(x) = \|\psi\| = f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) - \psi(x) = \operatorname{Inf}(f - \psi) = 0.$$

On a $A(f - \psi)(x) \geqslant 0$.

Donc $\quad \frac{A}{\|A\|}(f)(x) \geqslant \frac{A}{\|A\|}(\psi)(x) \geqslant -\|\psi\| = -f(x).$

D'où $T(f)(x) \geqslant 0$.

Contre-exemple dans le cas $\mathscr{C}^0(X, \mathscr{C})$. — Soit A l'opérateur défini sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{C})$ par $\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbf{C})$, $A(f) = if$. A est dissipatif.

Supposons que A se mette sous la forme

$$A = a(T - I)$$

avec $a > 0$ et $\|T\| \leqslant 1$.

On a $\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \mathscr{C})$, $T(f) = \left(1 + \frac{i}{a}\right)(f)$. Par suite

$$\|T(f)\| = \left|1 + \frac{i}{a}\right| \|f\|.$$

Or $\left|1 + \frac{i}{a}\right| > 1$ ce qui contredit $\|T\| \leqslant 1$.

3. Approximation des opérateurs dissipatifs invariants sur un espace homogène.

I.3.1. *Notations.* — Soit G un groupe localement compact, d'élément neutre e. On note $\tau_g f$ (resp. $\sigma_g f$) la translatée à gauche (resp. à droite) d'une fonction f de $\mathscr{C}^0(G, \Lambda)$ par un élément g de G :

$$\forall x \in G, \qquad \tau_g f(x) = f(g^{-1}x)$$
$$\forall x \in G, \qquad \sigma_g f(x) = f(xg^{-1})$$

μ étant un élément de $\mathfrak{M}_b(G, \Lambda)$ on introduit de même $\tau_g \mu$ et $\sigma_g \mu$ définis par les relations suivantes :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda), \qquad \tau_g \mu(f) = \mu(\tau_{g^{-1}} f)$$
$$\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda), \qquad \sigma_g \mu(f) = \mu(\sigma_{g^{-1}} f),$$

μ et ν étant deux mesures de Radon bornées sur G, on définit leur convolée $\mu * \nu$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda), \quad \mu * \nu(f) = \iint f(gg')\, d\mu(g)\, d\nu(g').$$

Si $n \in \mathbf{N}$, on note μ^n la $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution de μ.

Si K est un sous-groupe compact de G on note ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G, \Lambda)$ l'ensemble des mesures μ de $\mathfrak{M}_b(G, \Lambda)$ telles que

$$\forall k \in K, \ \tau_k \mu = \sigma_k \mu = \mu.$$

Si μ et ν sont deux telles mesures biinvariantes par K on vérifie que $\mu * \nu$ est aussi biinvariante par K.

Notons X l'espace homogène G/K et π la surjection canonique de G sur X. π est propre, en particulier, si f est dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, alors $f \circ \pi$ est dans $\mathscr{C}^0(G, \Lambda)$.

Si g est un élément de G on note $\pi(g) = \dot{g} = gK$. G opère à gauche sur X. On note gx le résultat de l'action d'un élément g de G sur un élément x de X.

Pour f dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et g dans G on note $\tau_g f$ la fonction de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ définie par $\tau_g f(x) = f(g^{-1}x)$ pour tout x de X.

Pour μ dans $\mathfrak{M}(X, \Lambda)$ et g dans G on note $\tau_g\mu$ la mesure sur X définie par $\tau_g\mu(f) = \mu(\tau_{g^{-1}}f)$ pour tout f de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

${}^\natural\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$ désigne l'ensemble des éléments μ de $\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$ tels que

$$\forall k \in K, \qquad \tau_k\mu = \mu.$$

Si A est un opérateur de domaine $D(A)$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, on dit qu'il est invariant sous l'action de G si

$$\forall f \in D(A), \quad \forall g \in G, \quad \tau_g f \in D(A) \quad \text{et} \quad A(\tau_g f) = \tau_g A(f).$$

$\mathscr{L}(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$ désigne l'ensemble des opérateurs partout définis et bornés dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

On note $\mathscr{L}_i(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$ l'ensemble des opérateurs de $\mathscr{L}(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$ invariants sous l'action de G. (On dit simplement invariant lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Une famille $(A_\lambda)_\lambda$ d'opérateurs sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ est dite invariante si chaque A_λ est invariant.

I.3.2. Proposition. — *L'application qui, à tout élément* T *de* $\mathscr{L}_i(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$, *associe la mesure* $\dot{\mu}$ *sur* X, *définie par*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \dot{\mu}(f) = T(f)(\dot{e}),$$

est une bijection de $\mathscr{L}_i(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$ *sur* ${}^\natural\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$.

L'application qui, à tout élément μ *de* ${}^\natural\mathfrak{M}_b^\natural(G, \Lambda)$, *associe la mesure* $\dot{\mu}$ *sur* X, *définie par*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \dot{\mu}(f) = \mu(f \circ \pi),$$

est une bijection de ${}^\natural\mathfrak{M}_b^\natural(G, \Lambda)$ *sur* ${}^\natural\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$.

On a donc une bijection $\mu \longmapsto T_\mu$ *de* ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G, \Lambda)$ *sur* $\mathscr{L}_i(\mathscr{C}^0(X, \Lambda))$. *Elle vérifie les propriétés suivantes*

$$\forall \mu, \nu \in {}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}(G, \Lambda), \qquad \forall a, b \in \mathbf{R},$$
$$T_\mu \circ T_\nu = T_{\mu * \nu},$$
$$T_{a\mu + b\nu} = aT_\mu + bT_\nu,$$
$$\|\mu\| = \|T_\mu\|.$$

Démonstration. — Pour montrer que les deux applications considérées sont des bijections il suffit de donner leurs inverses.

T est donné en fonction de $\dot{\mu}$ par la relation

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \forall g \in G, \qquad T(f)(\dot{g}) = \int f(gx)\, d\dot{\mu}(x)$$

$T(f)$ est dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

μ est donné en fonction de $\dot{\mu}$ par la relation

$$\forall F \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda), \ \mu(F) = \dot{\mu}(f)$$

où f est la fonction de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ définie à partir de F par la propriété

$$\forall g \in G, \qquad f(\dot{g}) = \int_K F(gk)\, dk$$

dk étant la mesure de Haar normalisée de K.

Les propriétés de la bijection $\mu \longmapsto T_\mu$ sont immédiates.

I.3.3. Proposition. — *Soit* A *un opérateur dissipatif sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (*resp. vérifiant le principe du maximum positif sur* $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$) *invariant et de domaine* D(A) *dense dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. *Il existe une suite* $(T_n)_{n \geqslant 0}$ *d'opérateurs bornés* (*resp. positifs*), *de normes* $\leqslant 1$, *invariants sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *tels que*

$$\forall f \in D(A), \qquad A(f) = \lim_{n \to \infty} n(T_n(f) - f).$$

Démonstration. — D'après la proposition I.2.1 il existe des mesures ε_λ de $\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$ telles que

a) $\forall \lambda > 0, \ \|\varepsilon_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$,

b) $\forall f \in D(A), \ \forall \lambda > 0, \ f(\dot{e}) = \int [\lambda f(x) - A(f)(x)]\, d\varepsilon_\lambda(x)$.

Soit $\dot{\varepsilon}_\lambda$ la mesure sur X définie à partir de ε_λ de la façon suivante

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \dot{\varepsilon}_\lambda(f) = \int_X \int_K f(kx)\, dk\, d\varepsilon_\lambda(x).$$

$\dot{\varepsilon}_\lambda$ est dans ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b(\mathrm{X}, \Lambda)$ et vérifie

$a')$ $\forall \lambda > 0,\ \|\dot{\varepsilon}_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda},$

$b')$ $\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{A}),\ \forall \lambda > 0,\ f(\dot{e}) = \int_{\mathrm{X}} [\lambda f(x) - \mathrm{A}(f)(x)]\, d\dot{\varepsilon}_\lambda(x).$

Soit T_n défini par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \Lambda), \quad \forall g \in \mathrm{G}, \quad \mathrm{T}_n(f)(\dot{g}) = n \int f(gx)\, d\dot{\varepsilon}_n(x),$$

T_n est un opérateur borné, invariant et de norme $\leqslant 1$ sur $\mathscr{C}^0(\mathrm{X}, \Lambda)$.

La relation $b')$ et l'invariance de A entraînent

$$\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{A}), \qquad \mathrm{T}_n(nf - \mathrm{A}(f)) = nf.$$

On termine la démonstration comme celle de I.2.3.

Remarque. — Cette proposition sera beaucoup améliorée dans le chapitre II (II.3.1).

CHAPITRE II

SEMI-GROUPES INVARIANTS SUR $\mathscr{C}^0(X)$

Dans une première partie, X étant un espace homogène, nous associons à tout semi-groupe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ à contraction, invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, un semi-groupe $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ de Feller, invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZP_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf),$$

où, pour toute fonction h de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, on note Zh la fonction de $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{C})$ définie par

$$\forall (x, z) \in X \times \mathbf{T}, \qquad (Zh)(x, z) = zh(x),$$

et où $\tilde{Q}_t$ est le complexifié de l'opérateur Q_t.

Dans une seconde partie, nous utilisons les idées de la première partie pour résoudre le problème de génération des semi-groupes à contraction invariants sur les espaces homogènes.

Ce chapitre est le développement d'une note antérieure ([18]).

1. Passage des mesures complexes sur X à des mesures positives sur $X \times \mathbf{T}$.

II.1.1. Proposition. — *Soit μ un élément de $\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$ où X est un espace localement compact. Il existe un élément ν de $\mathfrak{M}_b(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ tel que*

(i) ν *est positive,*

(ii) $\|\nu\| = \|\mu\|$,

(iii) $\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, $\int_X f\, d\mu = \int_{X \times \mathbf{T}} Zf\, d\nu$,

(iv) $pr_1(\operatorname{Supp} \nu) = \operatorname{Supp} \mu$, *où* pr_1 *désigne la projection de* $X \times \mathbf{T}$ *sur* X.

Remarque. — Les conditions (i), (ii) et (iii) déterminent ν de manière unique.

Démonstration. — D'après une conséquence du théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction borélienne α de X dans $\mathbf{T}$ telle que $\mu = \alpha|\mu|$.

On définit ν, mesure sur $X \times \mathbf{T}$ de la façon suivante :

$$\forall g \in \mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R}), \int_{X\times \mathbf{T}} g(x, z)\, d\nu(x, z) = \int_X g(x, \alpha(x))\, d|\mu|(x).$$

ν est un élément de $\mathfrak{M}_b(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$. On vérifie aisément que ν satisfait à (i), (ii), (iii) et (iv).

Nous allons en donner un premier exemple d'application dans la proposition suivante qui généralise au cas complexe un lemme de Choquet-Deny ([4]).

II.1.2. Proposition. — *Soit* G *un groupe commutatif localement compact et* μ *un élément de* $\mathfrak{M}_b(G, \mathbf{C})$ *de masse* $\leqslant 1$.

Si f *est une fonction complexe uniformément continue et bornée sur* G *vérifiant*

$$\forall x \in G, \qquad \int f(xy^{-1})\, d\mu(y) = f(x),$$

alors,

$$\forall y \in \operatorname{Supp} \mu, \qquad \exists c \in \mathbf{T}, \qquad \tau_y f = cf.$$

On dit que y *est une pseudo-période de* f.

Démonstration. — Soit ν la mesure positive sur $X \times \mathbf{T}$ associée à μ par la proposition II.1.1.

On a la propriété

$$\forall x \in G, \qquad f(x) = \int z f(xy^{-1})\, d\nu(y, z).$$

Soit h la fonction définie sur $G \times \mathbf{T}$ par

$$\forall (x, u) \in G \times \mathbf{T}, \qquad h(x, u) = u^{-1} f(x).$$

h est une fonction uniformément continue et bornée sur le groupe commutatif $G \times \mathbf{T}$ et elle vérifie

$$\forall (x, u) \in G \times \mathbf{T}, \qquad h(x, u) = \int h(xy^{-1}, uz^{-1})\, d\nu(y, z).$$

ν étant une mesure positive et de masse $\leqslant 1$, on est dans les conditions d'application du lemme de Choquet-Deny ([4]).

On a donc

$$\forall (y, \alpha) \in \operatorname{Supp}(\nu), \quad \forall (x, z) \in G \times \mathbf{T}, \quad h(x, z) = h(xy^{-1}, z\alpha^{-1})$$

c'est-à-dire $\alpha^{-1}f(x) = f(xy^{-1})$.

On conclut en utilisant la propriété $pr_1(\operatorname{Supp} \nu) = \operatorname{Supp} \mu$.

La proposition suivante a été démontrée par Hirsch ([12]) par une méthode de balayage. Ici nous allons l'obtenir comme une conséquence des propositions I.2.2 et II.1.2. Ceci montre que pour un certain nombre de problèmes l'approximation des opérateurs dissipatifs ou codissipatifs remplace avantageusement le balayage.

II.1.3. Proposition. — *Soit* V *un opérateur codissipatif invariant et de domaine* D(V) *dense dans* $\mathscr{C}^0(G, \Lambda)$, *où* G *est un groupe commutatif localement compact.*

Si Im(V) *n'est pas dense dans* $\mathscr{C}^0(G, \Lambda)$, *alors*

$$\exists (y, c) \in (G \setminus \{e\}) \times \mathbf{T}, \quad \forall f \in D(V), \quad \tau_y V(f) = cV(f).$$

Démonstration. — D'après I.2.2 et l'invariance de V on a, en reprenant les notations de I.2.2.

$$(1) \quad \forall f \in D(V), \quad \forall g \in G, \qquad V(f)(g) = \int [f(gx) + \lambda V(f)(gx)]\, d\varepsilon_\lambda(x).$$

Comme $\overline{\operatorname{Im}(V)} \neq \mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ on peut trouver σ dans $\mathfrak{M}_b(G, \Lambda)$, non nulle et orthogonale à Im (V).

Par suite, d'après (1),

$$\forall f \in D(V), \quad \int_G \Big(\int_G f(gx)\, d\sigma(g)\Big)\, d\varepsilon_\lambda(x) = 0.$$

Soit μ une valeur d'adhérence faible de la suite de mesures $(n\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $(\forall n \in \mathbf{N}, \|n\varepsilon_n\| \leqslant 1)$. Si $\mu = \delta_e$, où δ_e est la mesure de Dirac au point e, on a

$$\forall f \in D(V), \quad \int_G f(g)\, d\sigma(g) = 0,$$

ce qui est impossible car $\sigma \neq 0$ et $\overline{D(V)} = \mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. Par suite $\mu \neq \delta_e$.

D'après (1) on a

$$\forall f \in D(V), \quad \forall g \in G, \quad V(f)(g) = \int V(f)(gx)\, d\mu(x),$$

ce qui permet de conclure d'après II.1.2.

II.1.4. *Remarque.* — Soit G un groupe localement compact et K un sous-groupe compact de G.

Dans la proposition II.1.1, si μ est pris dans ${}^\natural\mathfrak{M}^\natural(G, \Lambda)$, on peut trouver la mesure ν dans ${}^\natural\mathfrak{M}_b^\natural(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, cette notation désignant l'ensemble des mesures réelles, bornées sur $G \times \mathbf{T}$, invariantes sous l'action du sous-groupe compact $K \times \{1\}$.

Démonstration. — Partant de α comme dans II.1.1, on définit ν par

$$\forall g \in \mathscr{C}^0(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R}), \quad \int_{G\times T} g(x, z)\, d\nu(x, z) = \iint_{K\times K} \int_G g(k_1xk_2, \alpha(x))\, d|\mu|(x)\, dk_1\, dk_2.$$

La mesure ν convient.

2. Passage d'un semi-groupe à contraction invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ à un semi-groupe de Feller invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$.

X est un espace homogène G/K. On reprend les notations de I.3.

II.2.1. — T étant un opérateur de domaine D(T) dans $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, soit $\tilde{T}$ le prolongement canonique de T dans $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{C})$ défini par

$$D(\tilde{T}) = \{f + ig/f, g \in D(T)\}$$
$$\tilde{T}(f + ig) = T(f) + iT(g).$$

Si T et S sont deux opérateurs de domaines D(T) et D(S) dans $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ et λ et μ deux nombres réels, on a

$$\widetilde{(\lambda T + \mu S)} = \lambda\tilde{T} + \mu\tilde{S} \quad \text{et} \quad \widetilde{(T \circ S)} = \tilde{T} \circ \tilde{S}.$$

Si T est un opérateur partout défini et borné sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ alors $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

II.2.2. — Les lemmes qui suivent sont utiles pour la suite du paragraphe. Les démonstrations sont faciles.

LEMME 1. — *Soient* μ_1 *et* μ_2 *dans* ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G, \Lambda)$ *et* ν_1 *et* ν_2 *dans* ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ *tels que* $\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda)$,

$$\mu_i(f) = \nu_i(Zf) \quad pour \quad i = 1,2.$$

Alors $\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda)$, $\mu_1 * \mu_2(f) = \nu_1 * \nu_2(Zf)$.

LEMME 2. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un filtre sur un ensemble* I *et* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *une famille de mesures de Radon positives, bornées de masse* $\leqslant 1$, *sur un groupe localement compact* G. *On suppose*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \beta_n = \lim_{\mathscr{F}} \text{vague } \alpha_i^n \textit{ existe},$$

Alors, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\beta_1^n \leqslant \beta_n$.

LEMME 3. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un filtre sur un ensemble* I *et* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *une famille de mesures de Radon positives sur un groupe localement compact* G. *S'il existe une mesure positive bornée* γ *sur* G *qui majore tous les* α_i *et si* $\alpha = \lim_{\mathscr{F}}$ *vague* α_i *existe, alors, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{\mathscr{F}} \text{vague } \alpha_i^n$ *existe et vaut* α^n.

II.2.3. THÉORÈME. — *Soit* $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ *une famille résolvante à contraction sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *invariante sous l'action de* G. *Il existe* $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ *une famille résolvante sous-markovienne sur* $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, *invariante sous l'action de* $G \times \mathbf{T}$, *telle que*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \forall \lambda > 0, \qquad ZR_\lambda(f) = \tilde{U}_\lambda(Zf).$$

Si, de plus, $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ *est une* L_∞*-famille résolvante alors* $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ *est une* L_∞*-famille résolvante.*

Démonstration. — D'après I.3.2, pour tout $\lambda > 0$, soit $\varepsilon_\lambda \in {}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}(G, \Lambda)$ la mesure associée à l'opérateur invariant R_λ.

La famille $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda > 0}$ vérifie

(i) $\forall \lambda, \mu > 0, \quad \varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu = (\mu - \lambda)\varepsilon_\lambda * \varepsilon_\mu,$

(ii) $\forall \lambda > 0, \quad \|\lambda \varepsilon_\lambda\| \leqslant 1.$

Par suite

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu) \Longrightarrow \varepsilon_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \varepsilon_\mu^{(i+1)},$$

la série convergeant au sens de la norme des mesures.

Pour tout $\lambda > 0$, il existe, d'après II.1.4, une mesure de ${}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}_{b+}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, notée $\gamma_{\lambda,\lambda}$, telle que

$$\|\lambda \gamma_{\lambda,\lambda}\| \leqslant 1,$$

et

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda), \quad \int_G f\, d\varepsilon_\lambda = \int_{G\times T} Zf\, d\gamma_{\lambda,\lambda}.$$

La démonstration se déroule en plusieurs étapes au cours desquelles on régularise progressivement la famille $(\gamma_{\lambda,\lambda})_{\lambda>0}$ jusqu'à obtenir finalement des mesures associées à une famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda>0}$.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout λ, $0 < \lambda \leqslant n$, on construit une mesure $\gamma_{n,\lambda}$:

$$\gamma_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}.$$

Cette série est normalement convergente car $\|n\gamma_{n,n}\| \leqslant 1$. Les mesures $\gamma_{n,\lambda}$ vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\gamma_{n,\lambda} \in {}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}_{b+}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$

(2) $\|\lambda\gamma_{n,\lambda}\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \lambda \|\gamma_{n,n}\|^{i+1} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{(n-\lambda)^i \lambda}{n^{i+1}} = 1,$

(3) $\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda)$, $\gamma_{n,\lambda}(Zf) = \varepsilon_\lambda(f)$.

Cette propriété résulte du lemme 1 :

$$\gamma_{n,\lambda}(Zf) = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}(Zf) = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \varepsilon_n^{i+1}(f) = \varepsilon_\lambda(f).$$

(4) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $(0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant n)$

$$\Longrightarrow \gamma_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \gamma_{n,\mu}^{i+1}.$$

C'est une conséquence de la relation

$$\gamma_{n,\lambda} - \gamma_{n,\mu} = (\mu - \lambda)\gamma_{n,\lambda} * \gamma_{n,\mu}$$

qui s'obtient à partir de la définition des $\gamma_{n,\lambda}$.

b) Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$ convergeant vers l'infini. Pour tout $\lambda > 0$ on pose $\gamma_\lambda = \lim\limits_{\mathscr{U}} \text{faible}\ \gamma_{n,\lambda}$.

Cette limite existe car, pour λ fixé, tous les $\gamma_{n,\lambda} (n \geqslant \lambda)$

sont dans la boule de rayon $\frac{1}{\lambda}$ de $\mathcal{M}_b(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ qui est faiblement relativement compacte.

Les mesures γ_λ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1') \qquad && \gamma_\lambda \in {}^\natural\mathcal{M}_{b+}^\natural(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),\\
&(2') && \|\lambda\gamma_\lambda\| \leqslant 1,\\
&(3') && \forall f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{G}, \Lambda), \qquad \gamma_\lambda(\mathrm{Z}f) = \varepsilon_\lambda(f),\\
&(4') && \forall\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu) \Longrightarrow \gamma_\lambda \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \gamma_\mu^{i+1}.
\end{aligned}$$

Montrons cette dernière propriété.

D'après (4) on a

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad \sum_{i=0}^{m} (\mu - \lambda)^i \gamma_{n,\mu}^{i+1} \leqslant \gamma_{n,\lambda}.$$

On passe à la limite vague et on utilise le lemme 2. Il vient

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad \sum_{i=0}^{m} (\mu - \lambda)^i \gamma_\mu^{i+1} \leqslant \gamma_\lambda.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout λ, $0 < \lambda \leqslant n$, on construit une mesure $\beta_{n,\lambda}$

$$\beta_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \gamma_n^{i+1}.$$

Les mesures $\beta_{n,\lambda}$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1'') \quad && \beta_{n,\lambda} \in {}^\natural\mathcal{M}_{b+}^\natural(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),\\
&(2'') && \|\lambda\beta_{n,\lambda}\| \leqslant 1,\\
&(3'') && \forall f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{G}, \Lambda), \ \beta_{n,\lambda}(\mathrm{Z}f) = \varepsilon_\lambda(f),\\
&(4'') && \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant n)\\
& && \qquad\qquad \Longrightarrow \beta_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_{n,\mu}^{i+1}\\
&(5'') && \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall\lambda \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant n) \Longrightarrow \beta_{n,\lambda} \leqslant \gamma_\lambda.
\end{aligned}$$

Cette dernière propriété est une conséquence de (4′).

d) On passe à nouveau à la limite suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. Pour tout $\lambda > 0$ on pose

$$\beta_\lambda = \lim_{\mathcal{U}} \text{faible}\ \beta_{n,\lambda}.$$

Les mesures β_λ vérifient les propriétés suivantes :

(1''') $\beta_\lambda \in {}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}_{b+}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$,

(2''') $\|\lambda\beta_\lambda\| \leqslant 1$,

(3''') $\forall f \in \mathscr{C}^0(G, \Lambda),\ \beta_\lambda(Zf) = \varepsilon_\lambda(f)$,

(4''') $\forall\lambda, \mu \in \mathbf{R},\ (0 < \lambda \leqslant \mu) \Longrightarrow \beta_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_\mu^{i+1}$.

Démontrons cette dernière propriété.

Soit $g \in \mathscr{C}^0(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$. D'après (4'') on a

$$\forall n,\quad (0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant n) \Longrightarrow \beta_{n,\lambda}(g) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_{n,\mu}^{i+1}(g).$$

Or d'après (5''),

$$\forall i \in \mathbf{N},\quad \forall n,\quad (\mu \leqslant n) \Longrightarrow |\beta_{n,\mu}^{i+1}(g)| \leqslant \gamma_\mu^{i+1}(|g|),$$

et, d'après (2'), la série $\sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \gamma_\mu^{i+1}(|g|)$ est convergente, il s'ensuit donc que la série $\sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_{n,\mu}^{i+1}(g)$ est uniformément convergente par rapport à n. On peut donc passer à la limite terme à terme selon le filtre $\mathscr{U}$. D'après (5'') et le lemme 3 on obtient

$$\beta_\lambda(g) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_\mu^{i+1}(g).$$

La propriété (4''') entraîne

(6''') $\forall\lambda, \mu \in]0, \infty[,\quad \beta_\lambda - \beta_\mu = (\mu - \lambda)\beta_\lambda * \beta_\mu$.

e) Pour tout $\lambda > 0$, soit U_λ l'opérateur invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ associé à la mesure $\beta_\lambda \in {}^{\natural}\mathfrak{M}^{\natural}_{b+}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$.

On déduit de (6''') et de I.3.2 la relation

$$\forall\lambda, \mu \in]0, \infty[,\qquad U_\lambda - U_\mu = (\mu - \lambda)U_\lambda \circ U_\mu.$$

$(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est donc une famille résolvante invariante sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$. D'après (1''') et (2''') cette famille résolvante est sous-markovienne. U_λ est lié à β_λ par la relation

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),\quad \forall\lambda > 0,\quad U_\lambda(f)(\dot{e}, 1) = \int_{G\times\mathbf{T}} f(\dot{g}, z)\, d\beta_\lambda(g, z).$$

Par suite

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{C}), \quad \forall \lambda > 0, \quad \tilde{U}_\lambda(f)(\dot{e}, 1) = \int_{G \times \mathbf{T}} f(\dot{g}, z)\, d\beta_\lambda(g, z).$$

D'après (3'''), si f est dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et $\lambda > 0$, on a

$$\tilde{U}_\lambda(Zf)(\dot{e}, 1) = \int_{G \times \mathbf{T}} zf(\dot{g})\, d\beta_\lambda(g, z) = \beta_\lambda(Z(f \circ \pi)) = \varepsilon_\lambda(f \circ \pi) = R_\lambda(f)(\dot{e}) = ZR_\lambda(f)(\dot{e}, 1).$$

$\tilde{U}_\lambda$ et R_λ étant invariants par translation, il vient

$$\tilde{U}_\lambda(Zf) = ZR_\lambda(f).$$

f) Plaçons-nous maintenant dans le cas où $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une L_∞-famille résolvante, c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda(f) \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}^0(X, \Lambda).$$

D'après I.3.2 soient $\dot{\varepsilon}_\lambda$ et $\dot{\beta}_\lambda$ les mesures sur X et sur $X \times \mathbf{T}$, associées à ε_λ et β_λ. On a

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad \forall \lambda > 0, \quad R_\lambda(f)(\dot{e}) = \int f(x)\, d\dot{\varepsilon}_\lambda(x)$$

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad \forall \lambda > 0, \quad \tilde{U}_\lambda(Zf)(\dot{e}, 1) = \int zf(x)\, d\dot{\beta}_\lambda(x, z).$$

D'où

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad \forall \lambda > 0, \quad \dot{\varepsilon}_\lambda(f) = \dot{\beta}_\lambda(Zf).$$

D'autre part

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad f(\dot{e}) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int f(x)\, d\dot{\varepsilon}_\lambda(x).$$

$\lambda\dot{\varepsilon}_\lambda$ converge faiblement vers $\delta_{\dot{e}}$ lorsque $\lambda \to \infty$.

Montrons que $\lambda\dot{\beta}_\lambda$ converge faiblement vers $\delta_{(\dot{e}, 1)}$ lorsque $\lambda \to \infty$. On a

$$\forall \lambda > 0, \quad \|\lambda\dot{\beta}_\lambda\| \leqslant 1.$$

Soit ξ une valeur d'adhérence faible de $\lambda\dot{\beta}_\lambda$ lorsque $\lambda \to \infty$. On a

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad f(\dot{e}) = \xi(Zf).$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$, $f \geqslant 0$, $f(\dot{e}) = \|f\| = 1$.
On a

$$0 = \mathbf{R}e[\xi(Zf) - 1] = \xi(\mathbf{R}e(Zf)) - 1 \leqslant \xi(\mathbf{R}e(Zf) - 1) \leqslant 0.$$

Donc $\mathbf{R}e(Zf) = 1$ sur $\operatorname{Supp} \xi$. D'où

$$\operatorname{Supp} \xi \subset \{(x, z) \in X \times \mathbf{T} / (\mathbf{R}e\, z) f(x) = 1\}$$
$$\operatorname{Supp} \xi \subset \{x \in X / f(x) = 1\} \times \{1\}.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction f de $\mathscr{C}^0_+(X, \mathbf{R})$ telle que $f(\dot{e}) = \|f\| = 1$, on a donc

$$\operatorname{Supp} \xi \subset \{(\dot{e}, 1)\}.$$

Il existe donc $a \in \mathbf{R}$ tel que $\xi = a\, \delta_{(\dot{e}, 1)}$.

La relation $\xi(Zf) = 1$ entraîne $a = 1$. Donc $\lambda \dot{\beta}_\lambda$ converge faiblement vers $\delta_{(\dot{e},1)}$ lorsque $\lambda \to \infty$. Les mesures $\lambda \dot{\beta}_\lambda$ étant de masse $\leqslant 1$, la convergence est étroite.

Une démonstration classique montre que les opérateurs λU_λ associés satisfont alors à la condition

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R}), \qquad f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda U_\lambda(f) \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R}).$$

La famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ est donc L_∞.

II.2.4. Corollaire. — *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *alors il existe* B, *générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller invariant sur* $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, *tel que*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad f \in D(A) \Longleftrightarrow Zf \in D(\tilde{B})$$

et $ZA(f) = \tilde{B}(Zf)$.

Remarque. — Ce résultat a été démontré par Faraut ([9]) dans le cas $X = \mathbf{R}^n$.

Démonstration. — D'après le théorème de Hille-Yosida et un théorème de Hirsch ([11]; page 109) il y a identité entre les générateurs infinitésimaux de semi-groupes à contraction et les générateurs de L_∞-familles résolvantes à contraction.

Soit A le générateur d'une L_∞-famille résolvante $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ à contraction et invariante sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. D'après II.2.3, il existe une L_∞-famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ sous-markovienne et invariante sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZR_\lambda(f) = \tilde{U}_\lambda(Zf).$$

Notons B le générateur de $(U_\lambda)_{\lambda>0}$.

B est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$.

On a d'autre part

$$\begin{aligned} f \in D(A) &\Longleftrightarrow \exists g \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad g = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda R_\lambda - I)(f), \\ &\Longleftrightarrow \exists g \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad Zg = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda \tilde{U}_\lambda - I)(Zf), \\ &\Longleftrightarrow Zf \in D(\tilde{B}), \end{aligned}$$

et on a alors $Zg = ZA(f) = \tilde{B}(Zf)$.

II.2.5. Corollaire. — *Soit* $(P_t)_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe à contraction invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. *Il existe un semi-groupe de Feller* $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ *invariant sur* $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ *tel que*

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZP_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf).$$

Démonstration. — Soit A le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t \geqslant 0}$. D'après II.2.4, il existe B, générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, tel que

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad f \in D(A) \Longleftrightarrow Zf \in D(\tilde{B}),$$

et $ZA(f) = \tilde{B}(Zf)$.

Pour f dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et $t \geqslant 0$ on définit $S_t(f)$, élément de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, par

$$S_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf)(., 1).$$

On a donc

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad ZS_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf).$$

Soient s et $t \geqslant 0$ et f dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$,

$$ZS_{t+s}(f) = \tilde{Q}_{t+s}(Zf) = \tilde{Q}_t(\tilde{Q}_s(Zf)) = \tilde{Q}_t(ZS_s(f)) = ZS_t(S_s(f)).$$

Par suite $S_{t+s} = S_t \circ S_s$.

On a d'autre part

$$S_0 = I \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \quad f = \lim_{t \to 0} S_t(f).$$

$(S_t)_{t \geqslant 0}$ est donc un semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. Si C est son générateur infinitésimal on voit immédiatement

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad f \in D(C) \Longleftrightarrow Zf \in D(\tilde{B}) \quad \text{et} \quad ZC(f) = \tilde{B}(Zf).$$

Donc $A = C$, ce qui entraîne l'égalité des deux semi-groupes $(P_t)_{t\geqslant 0}$ et $(S_t)_{t\geqslant 0}$. Finalement :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZP_t(f) = \tilde{Q}_t(Zf).$$

3. Générateurs infinitésimaux des semi-groupes invariants sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

II.3.1. Théorème. — *Si A est un opérateur dissipatif (resp. vérifiant le principe du maximum positif), de domaine dense et invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, alors A se prolonge en le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction (resp. de Feller) invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.*

Remarque. — Ce théorème ne dit pas que le semi-groupe est unique. Cette question reste ouverte dans le cas d'un espace homogène quelconque.

Démonstration. — Supposons A dissipatif.

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $\varepsilon_n \in {}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G, \Lambda)$ la mesure associée par I.3.2 à la mesure $\dot{\varepsilon}_n \in {}^{\natural}\mathfrak{M}_b(X, \Lambda)$, introduite dans la démonstration de I.3.3.

ε_n vérifie

(i) $$\|n\varepsilon_n\| \leqslant 1$$

(ii) $$\forall f \in D(A), \quad f(\dot{e}) = \int_G [nf(\dot{g}) - A(f)(\dot{g})]\, d\varepsilon_n(g).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe, d'après II.1.4, une mesure de ${}^{\natural}\mathfrak{M}_{b^+}^{\natural}(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$, notée $\gamma_{n,n}$, telle que

(i′) $$\|n\gamma_{n,n}\| \leqslant 1$$

(ii′) $$\forall f \in D(A), \quad f(\dot{e}) = \int_{G\times \mathbf{T}} z[nf(\dot{g}) - A(f)(\dot{g})]\, d\gamma_{n,n}(g, z).$$

On poursuit alors la démonstration comme celle du théorème II.2.3.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout λ, $0 < \lambda \leqslant n$, on construit une mesure $\gamma_{n,\lambda}$,

$$\gamma_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}.$$

Les mesures $\gamma_{n,\lambda}$ vérifient les propriétés suivantes,

(1) $$\gamma_{n,\lambda} \in {}^{\natural}\mathfrak{M}_{b+}^{\natural}(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),$$

(2) $$\|\lambda\gamma_{n,\lambda}\| \leqslant 1,$$

(3) $$\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{A}), \quad f(\dot{e}) = \int_{\mathrm{G}\times\mathbf{T}} z[\lambda f(\dot{g}) - \mathrm{A}(f)(\dot{g})]\, d\gamma_{n,\lambda}(g, z),$$

en effet,

$$\begin{aligned}
&\int z[\lambda f(\dot{g}) - \mathrm{A}(f)(\dot{g})]\, d\gamma_{n,\lambda}(g, z)\\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} (n-\lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}\,[\mathrm{Z}(\lambda f \circ \pi - \mathrm{A}(f) \circ \pi)]\\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} (n-\lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}\,[\mathrm{Z}(nf \circ \pi - \mathrm{A}(f) \circ \pi]\\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (n-\lambda)^i \gamma_{n,n}^{i+1}\,[(\lambda - n)\mathrm{Z}(f \circ \pi)]\\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} (n-\lambda)^i \gamma_{n,n}^{i}(\mathrm{Z}(f \circ \pi)) - \sum_{i=0}^{\infty} (n-\lambda)^{i+1} \gamma_{n,n}^{i+1}\,(\mathrm{Z}(f \circ \pi))\\
&\quad = \delta_{(e,1)}(\mathrm{Z}(f \circ \pi)) = f(\dot{e}).
\end{aligned}$$

(4) $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant n) \Longrightarrow \gamma_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \gamma_{n,\mu}^{i+1}.$$

b) Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$ convergeant vers l'infini. Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$\gamma_\lambda = \lim_{\mathscr{U}} \text{faible}\ \gamma_{n,\lambda}.$$

Cette limite existe car, pour λ fixé, tous les $\gamma_{n,\lambda} (n \geqslant \lambda)$ sont dans la boule de rayon $\dfrac{1}{\lambda}$ dans $\mathfrak{M}_b(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$.

Les mesures γ_λ vérifient les propriétés suivantes,

(1′) $$\gamma_\lambda \in {}^{\natural}\mathfrak{M}_{b+}^{\natural}(\mathrm{G} \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),$$

(2′) $$\|\lambda\gamma_\lambda\| \leqslant 1,$$

(3′) $$\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{A}), \quad f(\dot{e}) = \int_{\mathrm{G}\times\mathbf{T}} z[\lambda f(\dot{g}) - \mathrm{A}(f)(\dot{g})]\, d\gamma_\lambda(g, z),$$

(4′) $$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, (0 < \lambda \leqslant \mu) \Longrightarrow \gamma_\lambda \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \gamma_\mu^{i+1}.$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout λ, $0 < \lambda \leqslant n$, on construit une mesure $\beta_{n,\lambda}$,

$$\beta_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (n - \lambda)^i \gamma_n^{i+1}.$$

Les mesures $\beta_{n,\lambda}$ vérifient les propriétés suivantes,

$$(1'') \qquad \beta_{n,\lambda} \in {}^\natural\mathfrak{M}_{b+}^\natural(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),$$

$$(2'') \qquad \|\lambda\beta_{n,\lambda}\| \leqslant 1,$$

$$(3'') \quad \forall f \in D(A), \quad f(\dot{e}) = \int_{G\times\mathbf{T}} z[\lambda f(\dot{g}) - A(f)(\dot{g})]\, d\beta_{n,\lambda}(g, z),$$

$$(4'') \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant n) \Longrightarrow \beta_{n,\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_{n,\mu}^{i+1},$$

$$(5'') \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant n) \Longrightarrow \beta_{n,\lambda} \leqslant \gamma_\lambda.$$

d) On passe à la limite suivant $\mathcal{U}$. Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$\beta_\lambda = \lim_{\mathcal{U}} \text{faible}\ \beta_{n,\lambda}.$$

Les mesures β_λ vérifient les propriétés suivantes,

$$(1''') \qquad \beta_\lambda \in {}^\natural\mathfrak{M}_{b+}^\natural(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R}),$$

$$(2''') \qquad \|\lambda\beta_\lambda\| \leqslant 1,$$

$$(3''') \quad \forall f \in D(A), \quad f(\dot{e}) = \int z[\lambda f(\dot{g}) - A(f)(\dot{g})]\, d\beta_\lambda(g, z),$$

$$(4''') \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (0 < \lambda \leqslant \mu) \Longrightarrow \beta_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^i \beta_\mu^{i+1}.$$

La propriété $(4''')$ entraîne

$$(6''') \quad \forall \lambda, \mu \in]0, +\infty[, \qquad \beta_\lambda - \beta_\mu = (\mu - \lambda)\beta_\lambda * \beta_\mu.$$

e) Pour tout $\lambda > 0$, soit U_λ l'opérateur invariant sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$ associé à la mesure $\beta_\lambda \in {}^\natural\mathfrak{M}_{b+}^\natural(G \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$. D'après $(6''')$ on a

$$\forall \lambda, \mu \in]0, +\infty[, \ U_\lambda - U_\mu = (\mu - \lambda) U_\lambda \circ U_\mu.$$

$(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est donc une famille résolvante invariante sur $\mathscr{C}^0(X \times \mathbf{T}, \mathbf{R})$. D'après $(1''')$ et $(2''')$ cette famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ est sous-markovienne et, d'après $(3''')$, elle vérifie

$$\forall f \in D(A), \qquad Zf = \tilde{U}_\lambda(Z[\lambda f - A(f)]).$$

f) On définit l'opérateur R_λ sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad R_\lambda(f) = \tilde{U}_\lambda(Zf)(., 1).$$

Par suite

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad ZR_\lambda(f) = \tilde{U}_\lambda(Zf),$$

$(R_\lambda)_{\lambda>0}$ vérifie l'équation résolvante, en effet, pour

$$f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda),$$

on a

$$\begin{aligned} ZR_\lambda(f) - ZR_\mu(f) &= \tilde{U}_\lambda(Zf) - \tilde{U}_\mu(Zf) = (\mu - \lambda)\tilde{U}_\lambda \circ \tilde{U}_\mu(Zf) \\ &= (\mu - \lambda)\tilde{U}_\lambda(ZR_\mu(f)) = (\mu - \lambda)ZR_\lambda \circ R_\mu(f). \end{aligned}$$

D'autre part $\|\lambda R_\lambda\| \leqslant \|\lambda \tilde{U}_\lambda\| = \|\lambda U_\lambda\| \leqslant 1$.

$(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est donc une famille résolvante à contraction invariante sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et elle vérifie

$$(*) \qquad \forall f \in D(A), \qquad f = R_\lambda(\lambda f - A(f)).$$

On en déduit

$$\forall f \in D(A), \qquad f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda(f).$$

La famille $(\lambda R_\lambda)_{\lambda>0}$ étant équicontinue, il s'ensuit

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad f = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda(f),$$

$(R_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ est donc une L_∞-famille résolvante.

Soit B son générateur.

D'une part B est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. D'autre part, d'après ($*$), B prolonge A, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Si A vérifie le principe du maximum positif, alors les mesures ε_n de la démonstration précédente sont positives et l'on peut raisonner sur X au lieu de $X \times \mathbf{T}$. On obtient alors une famille résolvante $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ sous-markovienne invariante sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$, donc, à la fin, un semi-groupe de Feller invariant sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$.

On peut donner un théorème analogue à II.3.1 dans le cas d'un opérateur codissipatif.

II.3.2. Théorème. — *Si* V *est un opérateur codissipatif (resp. vérifiant le coprincipe du maximum positif faible), de domaine dense et invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, *alors* V *se prolonge en le cogénérateur d'une* L_0*-famille résolvante à contraction (resp. sous-markovienne) invariante sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

Démonstration. — A partir des mesures ε_λ de I.2.2, on refait une construction analogue à celle de la démonstration de II.3.1. On obtient alors une famille résolvante $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ à contraction (resp. sous-markovienne) invariante sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ telle que

$$(\,*\,) \qquad \forall f \in D(V), \qquad V(f) = R_\lambda(f + \lambda V(f)).$$

Par suite

$$\forall f \in D(V), \qquad \lim_{\lambda \to 0} \lambda R_\lambda(f) = 0.$$

Ce qui donne, compte tenu de l'équicontinuité de la famille $(\lambda R_\lambda)_{\lambda>0}$,

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \lim_{\lambda \to 0} \lambda R_\lambda(f) = 0,$$

$(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est donc une L_0-famille résolvante.

Soit W son cogénérateur.

La relation $(\,*\,)$ montre que W prolonge V.

Remarque. — Le défaut des théorèmes II.3.1 et II.3.2 réside dans le fait qu'ils ne disent pas si le semi-groupe (resp. la famille résolvante) associé à A (resp. à V) est unique. Les deux théorèmes suivants montrent que, dans de nombreux cas, A est un prégénérateur de semi-groupe et V est un précogénérateur de L_0-famille résolvante. Dans ce cas le problème d'unicité est *a fortiori* résolu.

II.3.3. Théorème. — *Soit* A *un opérateur dissipatif, de domaine dense et invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. *On considère les trois propriétés suivantes :*

(i) X *est compact,*

(ii) *la convolution est commutative sur* ${}^{\natural}\mathfrak{M}_b^{\natural}(G, \Lambda)$,

(iii) $\forall f \in D(A), \qquad \forall x \in X, \qquad \sigma_x f \in D(A),$

où $\sigma_x f$ *est la fonction de* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *définie par*

$$\forall g \in G, \qquad \sigma_x f(\dot{g}) = \int_K f(gkx)\, dk.$$

Si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors A *préengendre un semi-groupe à contraction invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

Remarque. — La propriété (ii) est vérifiée en particulier si X est un espace riemannien symétrique. La propriété (iii) est vérifiée en particulier si G est un groupe de Lie et D(A) est l'ensemble $\mathscr{D}(X)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur X et à supports compacts.

Le cas (i) a été démontré par Faraut ([8]), le cas (ii) par Hirsch et Roth ([13], [14]) et le cas (iii) par Hirsch ([12], [13]).

On peut noter à ce propos les travaux antérieurs de Hunt ([15]), de Faraut ([9]), de Faraut et Harzallah ([10]), de Hirsch ([11]) et aussi un travail récent de Duflo ([6]) utilisant les distributions sur un groupe localement compact quelconque.

II.3.4. THÉORÈME. — *Soit* V *un opérateur codissipatif, de domaine dense et invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. *Si l'une des deux propriétés* (i) *et* (ii) *introduites dans l'énoncé* II.3.3 *est vérifiée, alors* V *précoengendre une* L_0*-famille résolvante à contraction invariante sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

La démonstration du théorème II.3.4 et celle du théorème II.3.3 dans les cas (i) et (ii) reposent sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si* B *est un opérateur fermé, injectif, de domaine dense et invariant sur* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *et si* X *vérifie* (i) *ou* (ii), *alors* B *est d'image dense.*

On applique ce lemme à $I - \hat{A}$ et à $I + \hat{V}$, où $\hat{A}$ et $\hat{V}$ sont les fermetures des opérateurs préfermés A et V.

CHAPITRE III

OPÉRATEURS CARRÉS DU CHAMP ET FORMULE DE LEVY-KHINCHINE SUR LES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

Nous introduisons la notion d'opérateurs carrés du champ, pour lesquels nous démontrons une formule de représentation. Nous en déduisons une formule de Lévy-Khinchine pour les opérateurs vérifiant le principe du maximum positif sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$.

Dans tout ce chapitre : $\Lambda = \mathbf{R}$.

Ces résultats ont été annoncés dans ([19]).

1. Définition et représentation des opérateurs carrés du champ.

III.1.1. *Préliminaire.* — C désigne l'ensemble des fonctions T de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, vérifiant $T(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \qquad |T(x) - T(y)| \leqslant |x - y|.$$

C_∞ désigne l'ensemble des fonctions de C qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Si f et g appartiennent à $\mathscr{C}^0(X)$ on dit que g est une contraction (resp. contraction $\mathscr{C}^\infty$) de f s'il existe T dans C (resp. C_∞) tel que $g = T \circ f$. Il est facile de voir que « g est une contraction de f » est équivalent à

$$\forall x, y \in X, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant |f(x)|.$$

Soit A un opérateur de domaine D(A) dense dans $\mathscr{C}^0(X)$ vérifiant le principe du maximum positif. On suppose de plus que D(A) est stable pour la multiplication :

$$\forall f, g \in D(A), \qquad fg \in D(A).$$

Pour f et g dans $D(A)$ on pose

$$B(f, g) = A(fg) - fA(g) - gA(f).$$

III.1.2. Proposition. — B *ainsi défini vérifie les trois propriétés suivantes,*

1) B *est une application bilinéaire symétrique de* $D(A) \times D(A)$ *dans* $\mathscr{C}^0(X)$,

2) $\forall f, g \in D(A)$, (g *contraction de* f) $\Longrightarrow B(g, g) \leqslant B(f, f)$,

3) $\forall f, g \in D(A)$, $\forall x \in X$,

$(f(x) = \operatorname{Sup} f \geqslant 0$ *et* $g(x) = \operatorname{Sup} g \geqslant 0) \Longrightarrow B(f, g)(x) \geqslant 0.$

Démonstration. — Soit x un point de X. D'après I.2.3. il existe des mesures ε_n sur X positives, de masse $\leqslant \dfrac{1}{n}$ et vérifiant

$$\forall f \in D(A), \qquad A(f)(x) = \lim_{n\to\infty} n\Big[n \int f(y)\, d\varepsilon_n(y) - f(x)\Big].$$

Nous allons calculer $B(f, g)(x)$ à l'aide de cette expression de $A(f)(x)$. Soient f et g dans $D(A)$.

$$\begin{aligned} B(f, g)(x) &= A(fg)(x) - f(x)A(g)(x) - g(x)A(f)(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\Big[n \int f(y)g(y)\, d\varepsilon_n(y) - f(x)g(x) - n \int f(x)g(y)\, d\varepsilon_n(y) \\ &\quad + f(x)g(x) - n \int g(x)f(y)\, d\varepsilon_n(y) + f(x)g(x)\Big]. \end{aligned}$$

$$B(f, g)(x) = \lim_{n\to\infty} n\Big[n \int (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\, d\varepsilon_n(y) + (1 - \|n\varepsilon_n\|)f(x)g(x)\Big].$$

Sous cette forme on voit que 3) est vérifié.

D'autre part, si f est dans $D(A)$,

$$B(f, f)(x) = \lim_{n\to\infty} n\Big[n \int |f(y) - f(x)|^2\, d\varepsilon_n(y) + (1 - \|n\varepsilon_n\|)|f(x)|^2\Big],$$

ce qui donne 2) compte tenu de la définition des contractions.

Nous sommes ainsi conduits à poser la définition suivante :

III.1.3. Définition. — *Soit* $V \subset \mathscr{K}(X)$ *un sous-espace dense de* $\mathscr{C}^0(X)$ *tel que*

$$\forall f \in V, \qquad \forall T \in C_\infty, \qquad T \circ f \in V.$$

En particulier V *est stable par multiplication.* B *est un opérateur carré du champ défini sur* V, *si*

(1) $B : V \times V \to \mathscr{C}(X)$ *est une application bilinéaire symétrique,*

(2) $\forall f, g \in V$, (g *contraction de* f) $\Longrightarrow B(g, g) \leqslant B(f, f)$,

(3) $\forall f, g \in V$, $\forall x \in X$,

$$(f(x) = \operatorname{Sup} f \geqslant 0 \quad et \quad g(x) = \operatorname{Sup} g \geqslant 0) \Longrightarrow B(f, g)(x) \geqslant 0.$$

B vérifiant (3) on dit qu'il satisfait au principe du maximum positif.

On utilisera aussi la propriété suivante :

(2 *bis*) $\forall f, g \in V$, (g *contraction* $\mathscr{C}^\infty$ *de* f)
$$\Longrightarrow B(g, g) \leqslant B(f, f).$$

Le théorème suivant est une formule de représentation des opérateurs carrés du champ. Elle ressemble à celle donnée par Allain dans ([1]) pour les formes de Dirichlet.

III.1.4. Théorème. — *Soit* B *un opérateur carré du champ. Il existe :*

(i) *une famille* $\{\mu(x, .)\}_{x \in X}$ *de mesures de Radon positives sur* $X \setminus \{x\}$, *telles que, pour tout* f *dans* V,

$$x \longmapsto \int_{X \setminus \{x\}} (f(y) - f(x))^2 \mu(x, dy)$$

est une fonction semi-continue inférieurement et finie sur X;

(ii) *une fonction* $x \longmapsto a(x)$ *semi-continue supérieurement et positive sur* X;

(iii) *une application bilinéaire symétrique* G *de* $V \times V$ *dans* $\mathfrak{M}$ *(où* $\mathfrak{M}$ *est le sous-espace de* $\mathscr{F}(X)$ *engendré par les fonctions s.c.i.),* G *vérifiant* (2 *bis*), (3) *et* G *étant local, c'est-à-dire* $\forall f, g \in V$, $\forall x \in X$, (f *constante au voisinage de* x) $\Longrightarrow G(f, g)(x) = 0$,

tels que

$$\forall f, g \in V, \quad B(f, g) = afg + \int (f(.) - f(y))(g(.) - g(y))\mu(., dy) + G(f, g).$$

De plus $\{\mu(x, .)\}_{x \in X}$, a et G *sont uniques.*

Démonstration. — Elle va se faire en plusieurs étapes. Le début s'inspire largement de la méthode classique utilisée pour les formes de Dirichlet ([1], [2]).

a) LEMME 1. — *Soit* Ω *un ouvert et* K *un compact contenu dans* Ω. *Il existe* γ *dans* V *tel que* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $\gamma = 1$ *sur* K, $\operatorname{Supp} \gamma \subset \Omega$.

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathscr{K}(X)$ tel que

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 4, \qquad \alpha = 4 \quad \text{sur} \quad K, \qquad \operatorname{Supp} \alpha \subset \Omega.$$

D'après la densité de V dans $\mathscr{C}^0(X)$, il existe β dans V tel que $\|\beta - \alpha\| \leqslant 1$. On a donc

$$\beta \geqslant 3 \quad \text{sur} \quad K \qquad \text{et} \qquad \beta \leqslant 1 \quad \text{sur} \quad \complement\, \Omega.$$

Soit $T \in C_\infty$ vérifiant

$$0 \leqslant T \leqslant 1, \qquad T = 0 \quad \text{sur} \quad]-\infty, 1]$$

et

$$T = 1 \quad \text{sur} \quad [3, +\infty[.$$

La fonction $\gamma = T \circ \beta$ convient.

Pour tout ouvert ω de X on note $V(\omega)$ l'ensemble des fonctions de V à support dans ω et on pose

$$V_+(\omega) = V(\omega) \cap \mathscr{K}_+(X).$$

On a la propriété suivante :

LEMME 2. — *Pour tout ouvert* ω *de* X, $V_+(\omega)$ *engendre* $V(\omega)$ *et* $V_+(\omega)$ *est riche dans* $\mathscr{K}_+(\omega)$, *c'est-à-dire que, pour tout* f *dans* $\mathscr{K}_+(\omega)$, *il existe un compact* K *de* ω *et une suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *de fonctions de* $V_+(\omega)$ *qui converge uniformément vers* f *et dont chaque élément a son support dans* K.

Démonstration. — Soit $f \in V(\omega)$. Considérons d'après le lemme 1 une fonction γ de $V_+(\omega)$ valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$. f s'écrit $f = f_1 - f_2$ avec $f_1 = \|f\|\gamma$ et $f_2 = \|f\|\gamma - f$. f_1 et f_2 sont dans $V_+(\omega)$ donc $V_+(\omega)$ engendre $V(\omega)$.

Soit $f \in \mathscr{K}_+(\omega)$. Posons $K = \operatorname{Supp} f$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $g_n \in V$ tel que $\|f - g_n\| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soit $T_n \in C_\infty$ tel que $T_n = 0$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right]$, T_n positive et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad |T_n(x) - x| \leqslant \frac{2}{n}.$$

La suite des fonctions $f_n = T_n \circ g_n$ convient.

Lemme 3. — *Soient* ω_1 *et* ω_2 *deux ouverts de* X *et* φ *une forme bilinéaire sur* $V(\omega_1) \times V(\omega_2)$. *On suppose que* φ *est positive, c'est-à-dire*

$$\forall (f, g) \in V_+(\omega_1) \times V_+(\omega_2), \qquad \varphi(f, g) \geqslant 0.$$

Il existe une mesure de Radon positive unique σ *sur* $\omega_1 \times \omega_2$ *telle que*

$$\forall (f, g) \in V(\omega_1) \times V(\omega_2), \qquad \varphi(f, g) = \int f \otimes g \, d\sigma.$$

Démonstration. — D'après le lemme 2 on peut prolonger φ en une forme bilinéaire positive sur $\mathcal{K}(\omega_1) \times \mathcal{K}(\omega_2)$. On applique alors un résultat connu sur la représentation des formes bilinéaires positives sur $\mathcal{K}(\omega_1) \times \mathcal{K}(\omega_2)$.

b) $\quad \forall f, g \in V_+, \ (\inf(f, g) = 0) \Longrightarrow (B(f, g) \leqslant 0).$

Démonstration. — $f + g = |f - g|$. Ceci montre que $f + g$ est une contraction de $f - g$. On a donc

$$B(f + g, f + g) \leqslant B(f - g, f - g),$$

ce qui donne, en développant et en utilisant la symétrie de B,

$$B(f, g) \leqslant 0.$$

c) $\forall f, \alpha \in V_+, \ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ et } \alpha = 1 \text{ sur } \operatorname{Supp} f)$
$\Longrightarrow B(f, \alpha) \geqslant 0.$

Démonstration. — Soit $T \in C$ défini par

$$T = 0 \text{ sur }]-\infty, 0], \qquad T = 1 \text{ sur } [1, +\infty[$$

et $T(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $T(\varepsilon f + \alpha) = \alpha$, donc

$$B(\alpha, \alpha) \leqslant B(\varepsilon f + \alpha, \varepsilon f + \alpha).$$

Par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad 0 \leqslant \varepsilon B(f, f) + 2B(f, \alpha).$$

Finalement $B(f, \alpha) \geqslant 0$.

d) Construction des mesures $\mu(x, .)$:

Fixons e dans X.

D'après la propriété *b*), pour tout couple (f, g) de fonctions de V_+ à supports disjoints $B(f, g)(e)$ est négatif. Pour tout couple (ω_1, ω_2) d'ouverts disjoints de X, il existe donc, d'après le lemme 3, une mesure de Radon positive, unique, $\sigma_{\omega_1, \omega_2}$ sur $\omega_1 \times \omega_2$, telle que

$$\forall (f, g) \in V(\omega_1) \times V(\omega_2), \qquad B(f, g)(e) = -\int f \otimes g \, d\sigma_{\omega_1, \omega_2}.$$

Les ouverts $\omega_1 \times \omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des ouverts disjoints de X, forment un recouvrement de $X^2 \setminus \Delta$ (Δ désigne la diagonale de X^2).

D'autre part les mesures $\sigma_{\omega_1, \omega_2}$ satisfont, d'après l'unicité, la condition de recollement.

Par recollement des mesures $\sigma_{\omega_1, \omega_2}$ on obtient une mesure de Radon positive σ_1 sur $X^2 \setminus \Delta$, telle que

$$\forall f, g \in V, \qquad (\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \varnothing) \Longrightarrow B(f, g)(e) = -\int f(x) g(y) \, d\sigma_1(x, y).$$

B étant symétrique, σ_1 est une mesure symétrique.

Pour tout couple (f, g) de fonctions de $V_+(X \setminus \{e\})$, on a $B(f, g)(e) \geqslant 0$.

Cette propriété découle de la condition (3) dans la définition de l'opérateur carré du champ. D'après le lemme 3, il existe une mesure de Radon positive, unique, σ_2 sur $(X \setminus \{e\})^2$ telle que

$$\forall f, g \in V(X \setminus \{e\}), \qquad B(f, g)(e) = \int f(x) g(y) \, d\sigma_2(x, y).$$

Pour tout couple (f, g) de fonctions de $V_+(X \setminus \{e\})$ à supports disjoints, on a

$$B(f, g)(e) = -\int f(x) g(y) \, d\sigma_1(x, y) = \int f(x) g(y) \, d\sigma_2(x, y).$$

Donc $B(f, g)(e) = 0$.

Par suite

$$\operatorname{Supp} \sigma_1 \subset (\{e\} \times X) \cup (X \times \{e\}) \setminus \{(e, e)\}$$

et $\operatorname{Supp} \sigma_2 \subset \Delta \setminus \{(e, e)\}$.

Il existe donc deux mesures de Radon positives sur $X \setminus \{e\}$, ν et ξ, telles que

$$\forall h \in \mathscr{K}(X^2 \setminus \Delta), \qquad \int h(x, y)\, d\sigma_1(x, y) = \int h(e, y)\, d\nu(y) + \int h(x, e)\, d\nu(x)$$

$$\forall h \in \mathscr{K}((X \setminus \{e\})^2), \qquad \int h(x, y)\, d\sigma_2(x, y) = \int h(x, x)\, d\xi(x).$$

Soit (f, g) un couple de fonctions de V tel que $(\operatorname{Supp} f \times \operatorname{Supp} g) \not\ni (e, e)$.

Par exemple $e \notin \operatorname{Supp} f$.

D'après le lemme 1, on peut trouver une fonction γ dans V_+ telle que

$\gamma \leqslant 1$, $\gamma = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{Supp} f$

et

$\gamma = 0$ dans un voisinage de e.

Posons $g_1 = \gamma g$ et $g_2 = g - g_1 = g(1 - \gamma)$.

Les fonctions g_1 et g_2 sont dans V. D'autre part :

$$e \notin \operatorname{Supp} g_1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g_2 = \varnothing.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} B(f, g)(e) &= B(f, g_1)(e) + B(f, g_2)(e) \\ &= \int f(x) g_1(x)\, d\xi(x) - \int [g_2(e) f(x) + f(e) g_2(x)]\, d\nu(x). \end{aligned}$$

D'où

$$B(f, g)(e) = \int f(x) g(x)\, d\xi(x) - \int [g(e) f(x) + f(e) g(x)]\, d\nu(x)$$

car $g = g_1$ sur $\operatorname{Supp} f$, $g(e) = g_2(e)$ et $f(e) = 0$.

Soit (f, g) un couple de fonctions de V_+ tel que $f = 0$ sur un voisinage de e, $0 \leqslant g \leqslant 1$ et $g = 1$ sur

$$(\operatorname{Supp} f) \cup \{e\}.$$

D'après *c*), $B(f, g)(e) \geqslant 0$.

D'autre part, comme B vérifie le principe du maximum positif, $B(f, g)(e) \leqslant 0$. On a donc $B(f, g)(e) = 0$.

Or $B(f, g)(e) = \int f\, d\xi - \int f\, d\nu$. Par suite :

$$\forall f \in V_+(X \setminus \{e\}), \qquad \int f\, d\xi = \int f\, d\nu.$$

Comme $V_+(X \setminus \{e\})$ est riche dans $\mathscr{K}_+(X \setminus \{e\})$, il s'ensuit $\xi = \nu$.

On pose $\mu(e, .) = \xi = \nu$.

C'est une mesure de Radon positive sur $X \setminus \{e\}$, telle que

$$\forall (f, g) \in V^2, \ (\operatorname{Supp} f \times \operatorname{Supp} g \not\ni (e, e))$$
$$\Longrightarrow B(f, g)(e) = \int (f(x) - f(e))(g(x) - g(e))\mu(e, dx).$$

e) Construction de $a(e)$.

Soit $f \in V_+$. Notons E_f l'ensemble des fonctions de V_+, inférieures à 1 et valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$. La famille

$$(B(f, \alpha)(e))_{\alpha \in E_f}$$

est filtrante décroissante d'après *b*) et minorée par 0 d'après *c*). On note $\lambda(f)$ sa limite . λ est défini sur V_+ et se prolonge en une mesure positive, encore notée λ, sur X.

Soit $f \in V_+$ telle que $f(e) = 0$. Comme B satisfait au principe du maximum positif, on a $\lambda(f) = 0$.

λ est donc de la forme $a(e)\,\delta_e$, où $a(e)$ est un réel positif et δ_e la mesure de Dirac au point e.

Soit $f \in V_+$, constante dans un voisinage U de e.

Soient $g \in V_+$ et $\alpha \in E_g \cap E_f$.

D'après *d*) on a la relation

$$B(f - f(e)\alpha, g)(e) = \int (f(x) - f(e)\alpha(x))(g(x) - g(e))\mu(e, dx).$$

Soit β une fonction continue sur X, comprise entre 0 et 1, valant 1 sur $\complement U$ et 0 sur un voisinage de e.

$$B(f - f(e)\alpha, g)(e) = \int \beta(x)(f(x) - f(e)\alpha(x))(g(x) - g(e))\mu(e, dx).$$

Par suite,

$$B(f, g)(e) - f(e)B(\alpha, g)(e) = \int \beta(x)f(x)(g(x) - g(e))\mu(e, dx)$$
$$+ f(e)g(e)\int \beta(x)\alpha(x)\mu(e, dx) - f(e)\int \beta(x)g(x)\mu(e, dx).$$

Passons à la limite dans les deux membres selon le filtre des sections de $E_f \cap E_g$. On obtient

$$\mathrm{B}(f, g)(e) - a(e)f(e)g(e) = \int \beta(x)f(x)(g(x) - g(e))\mu(e, dx)$$
$$+ f(e)g(e) \int \beta(x)\mu(e, dx) - f(e) \int \beta(x)g(x)\mu(e, dx).$$

On remarque en particulier que la fonction β est $\mu(e, .)$-intégrable.

Finalement on a

$$\mathrm{B}(f, g)(e) = a(e)f(e)g(e) + \int (f(x) - f(e))(g(x) - g(e))\mu(e, dx).$$

Cette formule s'étend aisément au cas de deux fonctions f et g de V dont l'une est constante au voisinage de e.

La fonction a ainsi définie sur X est semi-continue supérieurement. En effet, soit U un ouvert relativement compact et f une fonction de V_+ valant 1 sur U.

Pour tout x de U on a

$$a(x) = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{B}(f, \alpha)(x)/\alpha \in E_f\}.$$

La restriction de a à U est donc s.c.s. comme enveloppe inférieure de fonctions continues sur U.

f) Définition de G.

Montrons d'abord que pour toute fonction f de V

$$\int (f(x) - f(e))^2\mu(e, dx) \quad \text{est fini.}$$

Soit f une fonction de V.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère une suite $(\varphi_{\varepsilon,n})_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions croissantes, de classe $\mathscr{C}^\infty$, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout n dans $\mathbf{N}$,

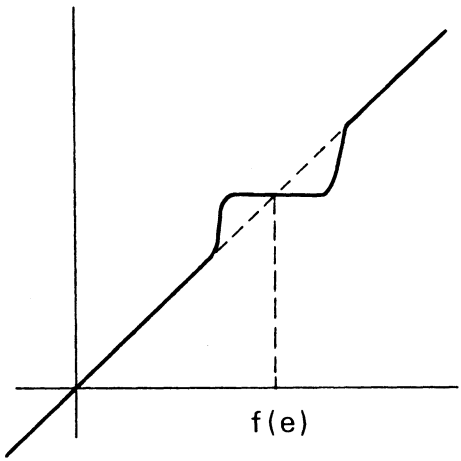
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \left(|x - f(e)| \geqslant \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \varphi_{\varepsilon,n}(x) = x,$$

$\varphi_{\varepsilon,n} = f(e)$ dans un voisinage de $f(e)$

$$\|\varphi'_{\varepsilon,n}\| \leqslant 1 + \varepsilon$$
$$\varphi_{\varepsilon,n}(0) = 0$$

et telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (x \leqslant f(e)) \Longrightarrow (\varphi_{\varepsilon, n+1}(x) \leqslant \varphi_{\varepsilon, n}(x))$$
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (x \geqslant f(e)) \Longrightarrow (\varphi_{\varepsilon, n+1}(x) \geqslant \varphi_{\varepsilon, n}(x))$$



Fonction $\varphi_{\varepsilon, n}$.

La fonction $g = \dfrac{\varphi_{\varepsilon, n} \circ f}{1 + \varepsilon}$ est une contraction de f.

Comme g est une constante au voisinage de e on a, d'après e) :

$$B(g, g)(e) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\Big[a(e)(f(e))^2 + \int (\varphi_{\varepsilon, n} \circ f(x) - f(e))^2 \mu(e, dx)\Big].$$

D'autre part $B(g, g)(e) \leqslant B(f, f)(e)$.

D'après les hypothèses faites sur la suite $(\varphi_{\varepsilon, n})_{n \in \mathbf{N}}$, les fonctions $(\varphi_{\varepsilon, n} \circ f - f(e))^2$ convergent en croissant vers la fonction $(f - f(e))^2$ lorsque n tend vers l'infini.

Par application du théorème de convergence croissante, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a(e)(f(e))^2 + \int (f(x) - f(e))^2 \mu(e, dx) \leqslant (1 + \varepsilon)^2 B(f, f)(e).$$

Par suite,

$$\forall f \in V, \quad a(e)(f(e))^2 + \int (f(x) - f(e))^2 \mu(e, dx) \leqslant B(f, f)(e).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction

$$e \longmapsto \int (\varphi_{\varepsilon, n} \circ f(x) - f(e))^2 \mu(e, dx)$$

est une fonction Φ_n semi-continue inférieurement. (D'après e) Φ_n est la différence d'une fonction continue et d'une fonction s.c.s.).

Or Φ_n converge en croissant vers la fonction Φ définie par

$$\Phi(e) = \int (f(x) - f(e))^2 \mu(e, dx),$$

Φ est donc une fonction s.c.i. finie.

Pour tout couple (f, g) de fonctions de V on pose

$$\begin{aligned} G(f, g)(e) = B(f, g)(e) &- a(e)f(e)g(e) \\ &- \int (f(x) - f(e))(g(x) - g(e)) \mu(e, dx). \end{aligned}$$

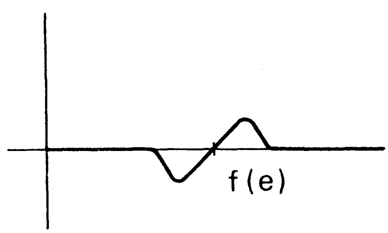
D'après ce qui précède G est bien définie, elle est bilinéaire, symétrique, locale et elle prend ses valeurs dans le sous-espace de $\mathscr{F}(X)$ engendré par les fonctions s.c.i.

Pour obtenir les autres propriétés de G nous allons établir deux formules d'approximation.

Soient $f \in V$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de C_∞ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \left(|x - f(e)| \geqslant \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

et $\varphi_n(x) = x - f(e)$ pour tout x dans un voisinage de $f(e)$.



Fonction φ_n.

G étant locale on a

$$G(f, f)(e) = G(\varphi_n \circ f, \varphi_n \circ f)(e)$$
$$G(f, f)(e) = B(\varphi_n \circ f, \varphi_n \circ f)(e) - \int (\varphi_n \circ f(x))^2 \mu(e, dx).$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n \circ f(x))^2 \mu(e, dx) = 0,$$

donc

$$G(f, f)(e) = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n \circ f, \varphi_n \circ f)(e).$$

Soit (f, g) un couple de fonctions de V. On reprend la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie ci-dessus.

G étant locale on a

$$G(f, g)(e) = G(\varphi_n \circ f, g)(e)$$

$$G(f, g)(e) = B(\varphi_n \circ f, g)(e) - \int \varphi_n \circ f(x)(g(x) - g(e))\mu(e, dx).$$

D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \circ f(x)(g(x) - g(e))\mu(e, dx) = 0.$$

Par suite

$$G(f, g)(e) = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n \circ f, g)(e).$$

Montrons que G vérifie le principe du maximum positif.

Soit (f, g) un couple de fonctions de V telles que

$$f(e) = \operatorname{Sup} f \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(e) = \operatorname{Sup} g \geqslant 0.$$

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi_n \circ f(e) = \operatorname{Sup} (\varphi_n \circ f) = 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad B(\varphi_n \circ f, g)(e) \geqslant 0.$$

Par passage à la limite on obtient

$$G(f, g)(e) \geqslant 0.$$

Montrons pour conclure que les contractions $\mathscr{C}^\infty$ opèrent sur G.

Soient $f \in V$ et $T \in C_\infty$.

Posons

$$T_1(r) = T(r + f(e)) - T(f(e)).$$

$T_1 \in C_\infty$ et on a

$$T_1 \circ \varphi_n \circ f = T \circ f - T(f(e)) \quad \text{au voisinage de } e.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}G(T \circ f, T \circ f)(e) &= G(T_1 \circ \varphi_n \circ f, T_1 \circ \varphi_n \circ f)(e)\\ &= \lim_{n\to\infty} B(T_1 \circ \varphi_n \circ f, T_1 \circ \varphi_n \circ f)(e)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n \circ f, \varphi_n \circ f)(e).\end{aligned}$$

Donc

$$G(T \circ f, T \circ f)(e) \leqslant G(f, f)(e).$$

La démonstration de l'unicité de la décomposition est immédiate.

Nous allons maintenant montrer que G a des propriétés qui l'apparentent à un carré de gradient.

III.1.5. Théorème. — *Soit* G *une application de* $V \times V$ *dans* $\mathfrak{M}$, *bilinéaire, symétrique, locale, vérifiant* (2 *bis*) *et* (3). *Alors* G *satisfait aux relations suivantes :*

(i) $\forall f, g, h \in V, \quad G(h, fg) = fG(h, g) + gG(h, f),$

(ii) $\forall f, g \in V, \quad \forall \theta, \psi \in C_\infty,$
$$G(\theta \circ f, \psi \circ g) = (\theta' \circ f) \times (\psi' \circ g) \times G(f, g).$$

Démonstration. — Nous allons d'abord établir la propriété suivante :

$$\forall f \in V, \qquad (f(e) = 0) \Longrightarrow G(f^2, f^2)(e) = 0.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $\varphi_n \in C_\infty$ tel que

$$\varphi_n = 0 \qquad \text{en dehors de} \qquad \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right],$$
$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = x \quad \text{au voisinage de} \quad 0.$$
$$f^2 = (\varphi_n \circ f)^2 \quad \text{au voisinage de} \quad e.$$

La fonction $\frac{1}{n}(\varphi_n \circ f)$ prend ses valeurs dans l'intervalle

$$\left[-\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2}\right].$$

Or la fonction $t \to n^2t^2$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en 0, dont le module de la dérivée est majoré par 1 sur

$$\left[-\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2}\right].$$

La fonction $(\varphi_n \circ f)^2$ est donc une contraction $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction $\frac{1}{n}(\varphi_n \circ f)$.

Par suite

$$G(f^2, f^2)(e) = G((\varphi_n \circ f)^2, (\varphi_n \circ f)^2)(e) \leqslant \frac{1}{n^2} G((\varphi_n \circ f), (\varphi_n \circ f))(e).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$G(f^2, f^2)(e) \leqslant \frac{1}{n^2} G(f, f)(e).$$

Par passage à la limite on obtient $G(f^2, f^2)(e) = 0$.

On en déduit, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall f, g \in V, \quad (f(e) = 0) \Longrightarrow G(f^2, g)(e) = 0.$$

Il s'ensuit, d'après la relation $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$,

$$\forall f, g, h \in V, \quad (f(e) = g(e) = 0) \Longrightarrow G(fg, h)(e) = 0.$$

Nous sommes en mesure de montrer la propriété (i).

Soient f, g, h des fonctions de V. Soit α une fonction de V valant 1 au voisinage de e. On a la relation :

$$G((f - f(e)\alpha)(g - g(e)\alpha), h)(e) = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} G(fg, h)(e) = {} & G(f(e)\alpha g, h)(e) \\ & + G(g(e)\alpha f, h)(e) - G(f(e)g(e)\alpha^2, h)(e), \end{aligned}$$

ce qui donne (i), compte tenu du caractère local de G.

Soient f et g dans V et θ et ψ dans C_∞.

Posons $a = f(e)$ et $b = g(e)$. Il existe des fonctions θ_1 et ψ_1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telles que

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbf{R}, \quad \theta(y) &= \theta(a) + \theta'(a)(y-a) + \theta_1(y)(y-a)^2 \\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad \psi(y) &= \psi(b) + \psi'(b)(y-b) + \psi_1(y)(y-b)^2. \end{aligned}$$

Soit α une fonction de V valant 1 au voisinage de e.

Les deux fonctions suivantes sont constantes dans un voisinage de e :

$$\theta \circ f - \theta'(a)f - (\theta_1 \circ f)(f - f(e)\alpha)^2$$

et

$$\psi \circ g - \psi'(b)g - (\psi_1 \circ g)(g - g(e)\alpha)^2.$$

Comme G est local, il s'ensuit,

$$G(\theta \circ f, \psi \circ g)(e) = G(\theta'(a)f - (\theta_1 \circ f)(f - f(e)\alpha)^2, \psi'(b)g - (\psi_1 \circ g)(g - g(e)\alpha)^2)(e).$$

D'après (i), on a donc,

$$G(\theta \circ f, \psi \circ g)(e) = \theta'(f(e))\psi'(g(e))G(f, g)(e).$$

III.1.6. *Remarque.* — Supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout n-uple $(f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions de V et pour toute fonction θ, de classe $\mathscr{C}^\infty$, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, telle que $\theta(0, \ldots, 0) = 0$, on ait $\theta(f_1, \ldots, f_n) \in V$. On montrerait comme dans la démonstration de (ii) de III.1.5 que l'on a la propriété suivante :

$$\begin{gathered} \forall (f_1, \ldots, f_n) \in V^n, \\ \forall \theta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty, \theta(0, \ldots, 0) = 0, \\ \forall (g_1, \ldots, g_n) \in V^m, \\ \forall \psi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty, \psi(0, \ldots, 0) = 0, \end{gathered}$$

$$G(\theta(f_1, \ldots, f_n), \psi(g_1, \ldots, g_m)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\theta}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n) \frac{\partial\psi}{\partial y_j}(g_1, \ldots, g_m) G(f_i, g_j).$$

Comme cas particulier on obtient la représentation des opérateurs carrés du champ dans le cas où X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et V est l'ensemble $\mathscr{D}(X)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur X.

Corollaire. — *Soit* X *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* G *une application de* $\mathscr{D}(X) \times \mathscr{D}(X)$ *dans* $\mathfrak{M}$, *bilinéaire, symétrique, locale, vérifiant* (2 *bis*) *et* (3).

Alors il existe une famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *de fonctions réelles sur* X *telles que*

(i) $\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \forall (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n, \ \sum_i \sum_j a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$

(ii) $\forall \theta, \psi \in \mathscr{D}(X), \quad G(\theta, \psi) = \sum_i \sum_j a_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}.$

On définit a_{ij} de la manière suivante :

Soit $e \in X$ et α une fonction de V valant 1 au voisinage de e. On pose $a_{ij}(e) = G(x_i\alpha, x_j\alpha)(e)$ où x_i désigne la fonction ième projection de $\mathbf{R}^n$.

2. Formule de Lévy-Khinchine sur les espaces localement compacts.

III.2.1. Soit A un opérateur de domaine D(A) dense dans $\mathscr{C}^0(X)$ et vérifiant le principe du maximum positif. On suppose que D(A) est contenu dans $\mathscr{K}(X)$ et qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall f \in D(A), \qquad \forall T \in C_\infty, \qquad T \circ f \in D(A).$$

Si e est un point de X et n un entier, on note $\mathscr{I}_n(e)$ l'idéal de D(A) engendré par les fonctions g^n, où g est un élément de D(A) s'annulant au point e.

On vérifie facilement la propriété suivante,

$$\forall f \in \mathscr{I}_n(e), \qquad \forall T \in C_\infty, \qquad T \circ f \in \mathscr{I}_n(e).$$

III.2.2. Théorème. — *Avec les notations précédentes, il existe :*

(i) *une mesure de Radon positive* μ_e *sur* $X \setminus \{e\}$, *telle que*

$$\forall f \in \mathscr{I}_2(e), \qquad \int |f| \, d\mu_e < +\infty,$$

(ii) *une forme linéaire* T_e *sur* $\mathscr{I}_2(e)$

— *locale, portée par* $\{e\}$ $(\forall f \in \mathscr{I}_2(e),\ e \notin \operatorname{Supp} f \Longrightarrow T_e(f) = 0)$,
— *vérifiant le P.M.P.* $(\forall f \in \mathscr{I}_2(e),\ f \geqslant 0 \Longrightarrow T_e(f) \geqslant 0)$,
— *d'ordre* 2 $(\forall f \in \mathscr{I}_3(e),\ T_e(f) = 0)$,

telles que

$$\forall f \in \mathscr{I}_2(e), \qquad A(f)(e) = T_e(f) + \int f(x)\mu_e(dx).$$

Démonstration. — Elle peut se faire directement mais nous allons la déduire de ce qui précède.

Pour f et g dans D(A), on pose

$$(*) \qquad B(f, g) = A(fg) - fA(g) - gA(f).$$

La proposition III.1.2 prouve que B est un opérateur carré du champ. Nous pouvons donc, en utilisant les notations du théorème III.1.4, écrire B sous la forme

$$(**) \quad B(f, g) = G(f, g) + afg + \int (f(x) - f(.))(g(x) - g(.))\mu(., dx).$$

On pose $\mu_e = \mu(e, .)$. C'est une mesure de Radon positive sur $X \setminus \{e\}$ et, d'après III.1.4 on a bien

$$\forall f \in \mathcal{S}_2(e), \qquad \int |f| \, d\mu_e < +\infty.$$

Pour $f \in \mathcal{S}_2(e)$, posons $T_e(f) = A(f)(e) - \int f(x)\, d\mu_e(x)$. T_e est une forme linéaire sur $\mathcal{S}_2(e)$.

Soient g et φ dans $D(A)$ et supposons $g(e) = 0$. D'après $(*)$ et $(**)$ on a

$$B(g, \varphi g)(e) = A(\varphi g^2)(e) = G(g, \varphi g)(e) + \int \varphi g^2 \, d\mu_e.$$

Il s'ensuit,

$$\forall g, \varphi \in D(A), \quad (g(e) = 0) \Longrightarrow T_e(\varphi g^2) = G(g, \varphi g)(e).$$

Cette expression va nous permettre de trouver les propriétés de T_e.

a) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i g_i^3$ un élément de $\mathcal{S}_3(e)$, avec

$$\forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \varphi_i \in D(A), \quad g_i \in D(A), \quad g_i(e) = 0$$
$$T_e(f) = \sum_{i=1}^{n} T_e(\varphi_i g_i^3) = \sum_{i=1}^{n} G(g_i, \varphi g_i^2)(e) = 0.$$

b) Soit f dans $D(A)$ avec $\operatorname{Supp} f \not\ni e$.

Il existe une fonction α de $D(A)$ valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$ et 0 au voisinage de e.

On a $f = f\alpha^3$, donc f est dans $\mathcal{S}_3(e)$, d'après *a*), $T_e(f) = 0$.

c) Montrons que T_e vérifie le P.M.P.

Soit f une fonction positive de $\mathcal{S}_2(e)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit φ_n une fonction de C_∞ telle que $\varphi_n(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, $\|\varphi_n\| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\varphi_n(x) = x$ au voisinage de 0.

On a

$$\varphi_n \circ f = f \quad \text{au voisinage de} \quad e.$$

Par suite,

$$T_e(f) = T_e(\varphi_n \circ f) = A(\varphi_n \circ f)(e) - \int \varphi_n \circ f \, d\mu_e.$$

Or, d'une part, $A(\varphi_n \circ f)(e) \geqslant 0$, car

$$-\varphi_n \circ f(e) = \operatorname{Sup}(-\varphi_n \circ f) = 0$$

et, d'autre part, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \circ f \, d\mu_e = 0.$$

Finalement

$$T_e(f) \geqslant 0.$$

Dans le cas où X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $D(A) = \mathscr{D}(X)$, le théorème III.2.2 permet de retrouver une formule de représentation donnée par Courrège ([3]).

CHAPITRE IV

RESTRICTION A UN OUVERT D'UN GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL LOCAL

Si A est un prégénérateur local d'un semi-groupe de Feller sur $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{R})$ et si Ω est un ouvert de X, nous définissons la restriction de A à l'ouvert Ω — c'est un opérateur dans $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{R})$ — et nous cherchons à quelle condition sur Ω cette restriction est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{R})$.

Pour cela nous résolvons en un sens faible le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{Au} \quad \text{sur} \quad \Omega \times]0, +\infty[, \\ \forall x \in \overline{\Omega}, \quad u(x, 0) = f(x), \\ \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \geqslant 0, \quad u(x, t) = f(x), \end{cases}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\overline{\Omega}$.

Nous terminons ce chapitre par la résolution en un sens faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{A}g = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \\ \forall x \in \partial\Omega, \quad g(x) = f(x), \end{cases}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\partial\Omega$.

Dans tout ce chapitre, X est un espace localement compact et $\Lambda = \mathbf{R}$. Les résultats de ce chapitre ont été annoncés dans une note antérieure ([20]).

1. Préliminaire.

IV.1.1. — On note $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ s'annulant en 0.

On se donne, pour tout ce chapitre, un opérateur A de domaine D(A) dense dans $\mathscr{C}^0(X)$ et on suppose que A vérifie les propriétés suivantes :

(i) A est un opérateur local, c'est-à-dire

$$\forall U \text{ ouvert} \subset X, \qquad \forall f \in D(A),$$
$$(f = 0 \text{ sur } U) \Longrightarrow (A(f) = 0 \text{ sur } U),$$

(ii) $\quad \forall f \in D(A), \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad \varphi \circ f \in D(A),$

(iii) A est un opérateur préfermé et il préengendre un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathscr{C}^0(X)$.

Remarque. — Si l'on note $\overline{A}$ *la fermeture de* A *dans* $\mathscr{C}^0(X)$, $\overline{A}$ *est le générateur infinitésimal de* $(P_t)_{t\geqslant 0}$, *c'est un opérateur local et il vérifie le principe du maximum local positif, c'est-à-dire,* $\forall f \in D(\overline{A})$, $\forall x \in X$,

(f *admet un maximum local positif au point* x) $\Longrightarrow \overline{A}(f)(x) \leqslant 0$.

Démonstration. — Soient f dans $D(\overline{A})$, U un ouvert de X et x un point de U tels que

$$f(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in U} f(y) \geqslant 0.$$

Supposons $\overline{A}(f)(x) = a > 0$.

Il existe un ouvert relativement compact V de X tel que

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U \quad \text{et} \quad \overline{A}(f) \geqslant \frac{a}{2} \quad \text{sur} \quad V.$$

Soit φ une fonction de D(A) vérifiant

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi(x), \quad \operatorname{Supp} \varphi \subset V, \quad \|A(\varphi)\| \leqslant \frac{a}{4}, \quad \varphi(x) > 0.$$

Une telle fonction φ existe, d'après le lemme 1 de III.1.4.

Il existe une suite f_n de fonctions de D(A), telles que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{uniformément sur} \quad X$$

et

$$A(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{A}(f) \quad \text{uniformément sur} \quad X.$$

Soit ψ une fonction de D(A) vérifiant

$$0 \leqslant \psi \leqslant 1, \quad \operatorname{Supp} \psi \subset U, \quad \psi = 1 \quad \text{sur} \quad \overline{V}.$$

Pour n assez grand, la fonction $\psi f_n + \varphi$ atteint son maximum positif en un point x_n de V. On a donc

$$A(\psi f_n + \varphi)(x_n) \leqslant 0.$$

Par suite

$$A(f_n)(x_n) = A(\psi f_n)(x_n) \leqslant -A(\varphi)(x_n) \leqslant \|A(\varphi)\| \leqslant \frac{a}{4},$$

ce qui contredit le fait que $A(f_n)$ converge uniformément vers $A(f)$ qui est supérieur à $\frac{a}{2}$ sur V. On a donc

$$\overline{A}(f)(x) \leqslant 0.$$

$\overline{A}$ vérifie donc le principe du maximum local positif.

On en déduit immédiatement que $\overline{A}$ est local.

IV.1.2. Si U est un ouvert de X on définit un opérateur A_U de domaine $D(A_U)$ sur $\mathscr{C}(U)$ de la manière suivante :

$D(A_U)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}(U)$ qui coïncident localement avec des fonctions de $D(A)$, et

$$\forall f \in D(A_U), \quad \forall x \in U, \quad A_U(f)(x) = A(g_x)(x),$$

où g_x est une fonction de $D(A)$ qui coïncide avec f dans un voisinage de x.

Le caractère local de A assure que $A_U(f)(x)$ est défini sans ambiguïté.

Lorsque f est un élément de $D(A_U)$ on notera fréquemment $A(f)$ au lieu de $A_U(f)$.

A partir de l'opérateur local $\overline{A}$ on définit de la même manière un opérateur $\overline{A}_U$ de domaine $D(\overline{A}_U)$.

IV.1.3. Lemme. — *Pour toute fonction f de $D(A_U)$ et pour tout compact K de U, il existe une fonction g de $D(A)$ qui coïncide avec f sur K.*

Démonstration. — D'après le lemme 1 de III.1.4, on peut faire des partitions de l'unité avec des fonctions de $D(A)$.

f étant donnée dans $D(A_U)$, pour tout x de K il existe un ouvert V_x contenant x et une fonction g_x de $D(A)$ qui coïncide avec f sur V_x.

On recouvre K par un nombre fini de V_{x_i} et on considère $(\varphi_i)_i$, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_{x_i})_i$, les φ_i étant dans D(A). On prend alors $g = \sum_i \varphi_i g_{x_i}$.

IV.1.4. — Nous allons utiliser la notion classique de barrière (cf. par exemple ([7])). Nous en donnons la définition suivante :

Soit Ω un ouvert de X et x un point de $\partial\Omega$, où $\partial\Omega$ désigne la frontière topologique de Ω. Une barrière de Ω au point x est la donnée d'un ouvert U_x contenant x et d'une fonction continue φ_x sur U_x, tels que

— $\varphi_x(x) = 0$,
— $\forall y \in U_x \cap \overline{\Omega}$, $(y \neq x) \Longrightarrow \varphi_x(y) > 0$,
— $\varphi_{x/U_x \cap \Omega} \in D(A_{U_x \cap \Omega})$ et $A(\varphi_x) \leqslant 0$ sur $U_x \cap \Omega$.

IV.1.5. — On dit qu'un ouvert Ω vérifie l'hypothèse de régularité $\mathscr{R}$ si

— Ω est un ouvert K_σ relativement compact,
— Ω admet une barrière en tout point de $\partial\Omega$,
— il existe deux fonctions ψ et θ dans $D(A_U)$, où U est un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$, strictement positives sur U et vérifiant

$$A(\psi) < 0 \quad \text{sur} \quad U \quad \text{et} \quad A(\theta) > 0 \quad \text{sur} \quad U.$$

2. Le problème de Cauchy.

IV.2.1. Pour tout ouvert Ω de X et pour tout intervalle ouvert I de $]0, +\infty[$, on note $\Lambda(\Omega, I)$ l'ensemble des fonctions u réelles, continues sur $\Omega \times I$, telles que, pour tout ouvert Ω', $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, pour tout intervalle ouvert borné J, $\overline{J} \subset I$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions réelles, continues sur $\Omega' \times J$, telles que,

— $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall t \in J$, $u_n(.\,, t) \in D(\overline{A}_{\Omega'})$,
— $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \Omega'$, $u_n(x, .)$ est dérivable sur J,
— $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall (x, t) \in \Omega' \times J$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \overline{A}(u_n(.\,, t))(x)$,
— u_n converge uniformément vers u sur $\Omega' \times J$ lorsque n tend vers l'infini.

IV.2.2. Proposition.

(i) $\Lambda(\Omega, \mathrm{I})$ *est un espace vectoriel stable par limite uniforme.*

(ii) *Soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^0(\mathrm{X})$, *nulle sur* Ω *et* t_0 *un réel positif.*

Pour tout x *dans* Ω, *on pose*

$$u(x, t) = 0 \quad si \quad t \leqslant t_0,$$

et

$$u(x, t) = \mathrm{P}_{t-t_0}(f)(x) \qquad si \qquad t \geqslant t_0.$$

Alors u, *ainsi définie, est dans* $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$.

Démonstration de (ii). — On se place d'abord dans le cas où f est dans $\mathrm{D(A)}$. Le résultat est alors évident, car on a, d'après les propriétés des semi-groupes et le caractère local de $\overline{\mathrm{A}}$,

$$\forall (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \overline{\mathrm{A}}(u(., t))(x).$$

Pour passer au cas général il suffit de montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathrm{D(A)}$, nulles sur Ω et convergeant uniformément vers f. Les fonctions u_n de $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$ construites à partir des fonctions g_n convergent uniformément vers u, car le semi-groupe $(\mathrm{P}_t)_{t \geqslant 0}$ est à contraction. On applique alors (i).

Montrons l'existence de la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

D'après la densité de $\mathrm{D(A)}$ dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{X})$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $h_n \in \mathrm{D(A)}$ tel que

$$\|f - h_n\| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Soit φ_n une fonction de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nulle sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ et telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |\varphi_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Les fonctions $g_n = \varphi_n \circ h_n$ sont dans $\mathrm{D(A)}$, nulles sur Ω et vérifient

$$\|f - g_n\| \leqslant \frac{3}{2n}.$$

IV.2.3. Proposition (*principe du maximum pour les fonctions de* $\Lambda(\Omega, \mathrm{I})$). — *Soit* Ω *un ouvert relativement compact de* X.

Supposons qu'il existe une fonction ψ *de* $\mathrm{D}(\mathrm{A}_\Omega)$, *vérifiant* $\mathrm{A}(\psi) < 0$ *sur* Ω. *Alors, si* $\mathrm{I} =]ab[$ *avec* $b \leqslant +\infty$, *on a*

$$\forall u \in \Lambda(\Omega, \mathrm{I}), \left(\sup_{\Omega\times\mathrm{I}} u > 0\right) \Longrightarrow \sup_{\Omega\times\mathrm{I}} u = \sup_{(x,t)\in(\partial\Omega\times\bar{\mathrm{I}})\cup(\Omega\times\{a\})} \left\{ \overline{\lim_{(y,s)\to(x,t)}}\, u(y, s)\right\}.$$

Démonstration. — Soit $\mathrm{J} =]cd[$ avec $[cd] \subset]ab[$, et Ω' ouvert, avec $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, tels que

$$\sup_{\overline{\Omega}'\times\bar{\mathrm{J}}} u > 0.$$

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues sur un voisinage de $\overline{\Omega}' \times \bar{\mathrm{J}}$, convergeant uniformément vers u et vérifiant

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \overline{\mathrm{A}} u_n$$

sur ce voisinage de $\overline{\Omega}' \times \bar{\mathrm{J}}$. Fixons n dans $\mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon\|\psi/\overline{\Omega}'\| < \sup_{\overline{\Omega}'\times\mathrm{J}} u_n$.

La fonction $(u_n - \varepsilon\psi)/\overline{\Omega}' \times \bar{\mathrm{J}}$ atteint son maximum en un point (x_1, t_1) de $\overline{\Omega}' \times \bar{\mathrm{J}}$. Ce maximum est strictement positif.

Supposons $(x_1, t_1) \in \Omega' \times]cd]$.

La fonction $(u_n(\,.\,, t_1) - \varepsilon\psi)/\Omega'$ est dans $\mathrm{D}(\overline{\mathrm{A}}_{\Omega'})$ et elle admet un maximum positif dans Ω'.

Comme $\overline{\mathrm{A}}$ vérifie le principe du maximum local positif, on a

$$\overline{\mathrm{A}}(u_n(\,.\,, t_1) - \varepsilon\psi)(x_1) \leqslant 0.$$

Par suite

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x_1, t_1) = \overline{\mathrm{A}}(u_n(\,.\,, t_1))(x_1) \leqslant \varepsilon\mathrm{A}(\psi)(x_1) < 0.$$

Il existe donc un réel t_2, $c < t_2 < t_1$, tel que

$$u_n(x_1, t_2) > u_n(x_1, t_1).$$

On obtient,

$$(u_n + \varepsilon\psi)(x_1, t_2) > (u_n + \varepsilon\psi)(x_1, t_1),$$

ce qui est impossible.

La fonction $(u_n - \varepsilon\psi)/\overline{\Omega}' \times \overline{\mathrm{J}}$ atteint donc son maximum sur $(\overline{\Omega}' \times \{c\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{J}})$. Ceci reste vrai lorsque ε tend vers 0, puis lorsque n tend vers l'infini. La fonction $u/\overline{\Omega}' \times \overline{\mathrm{J}}$ atteint donc son maximum sur $(\overline{\Omega}' \times \{c\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{J}})$.

Plaçons-nous dans le cas où l'intervalle I est borné. Notons F l'ensemble des couples (Ω', J) où Ω' est un ouvert de X, avec $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, et J un intervalle ouvert, avec $\overline{\mathrm{J}} \subset \mathrm{I}$. F est ordonné par la relation

$$(\Omega_1, \mathrm{J}_1) \leqslant (\Omega_2, \mathrm{J}_2) \quad \text{si} \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}_2.$$

D'après ce que l'on vient de voir, pour tout élément (Ω', J) de F il existe un point $(x_{(\Omega', \mathrm{J})}, t_{(\Omega', \mathrm{J})})$ de

$$(\overline{\Omega}' \times \{c\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{J}})$$

tel que
$$\operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}' \times \overline{\mathrm{J}}} u = u(x_{(\Omega', \mathrm{J})}, t_{(\Omega', \mathrm{J})}).$$

Soit (x_0, t_0) une valeur d'adhérence de $(x_{(\Omega', \mathrm{J})}, t_{(\Omega', \mathrm{J})})$ selon le filtre $\mathscr{F}$ des sections croissantes de F.

D'une part $(x_0, t_0) \in (\overline{\Omega}' \times \{a\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{I}})$, et d'autre part,

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega \times \mathrm{I}} u = \lim_{\mathscr{F}} \Big(\operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}' \times \overline{\mathrm{J}}} u\Big) = \lim_{\mathscr{F}} u(x_{(\Omega', \mathrm{J})}, t_{(\Omega', \mathrm{J})}) \leqslant \varlimsup_{(y, s) \to (x_0, t_0)} u(y, s).$$

On a donc l'inégalité

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega \times \mathrm{I}} u \leqslant \operatorname*{Sup}_{(x, t) \in (\overline{\Omega} \times \{a\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{I}})} \Big\{ \varlimsup_{(y, s) \to (x_0, t_0)} u(y, s) \Big\}.$$

L'inégalité inverse est triviale.

Si l'intervalle I n'est pas borné, alors, pour tout λ, $\lambda < \operatorname*{Sup}_{\Omega \times \mathrm{I}} u$, il existe un intervalle ouvert borné I′

$$(\mathrm{I}' =]ab'[) \qquad \text{tel que} \qquad \lambda \leqslant \operatorname*{Sup}_{\Omega \times \mathrm{I}'} u.$$

Par suite

$$\lambda \leqslant \operatorname*{Sup}_{(x, t) \in (\overline{\Omega} \times \{a\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{\mathrm{I}})} \Big\{ \varlimsup_{(y, s) \to (x_0, t_0)} u(y, s) \Big\}$$

On obtient l'inégalité voulue en faisant tendre λ vers $\operatorname*{Sup}_{\Omega \times \mathrm{I}} u$.

IV.2.4. Théorème. — *Si* Ω *est un ouvert vérifiant l'hypothèse de régularité* $\mathcal{R}$, *alors, pour toute fonction* f *continue sur* $\overline{\Omega}$, *il existe une et une seule fonction* u *continue sur*

$$\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$$

telle que

— $u/\Omega \times]0, +\infty[\in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$,
— $\forall x \in \Omega,\ u(x, 0) = f(x)$,
— $\forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ u(x, t) = f(x)$.

Remarque. — Si, pour tout $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_t(1_{\Omega\setminus K_n})\|_\infty = 0,$$

où $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω, alors on peut résoudre le problème précédent avec une donnée à la frontière continue et dépendante du temps.

Démonstration du théorème. — Soit f une fonction de $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$. On la prolonge en une fonction de $\mathscr{K}(X)$ que l'on note encore f.

A l'aide des hypothèses de régularité faites sur Ω on va construire une suite décroissante $(\Sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathscr{K}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $$\forall n \in \mathbf{N},\quad \Sigma_n \geqslant f,$$

(ii) $$\forall n \in \mathbf{N},\quad \forall x \in \partial\Omega,\quad \Sigma_n(x) \leqslant f(x) + \frac{1}{n},$$

(iii) $$\forall n \in \mathbf{N},\quad \forall K \text{ compact} \subset \Omega,\ \exists\eta > 0,\ \forall t,\ (0 \leqslant t \leqslant \eta) \Longrightarrow (P_t(\Sigma_n))_{/K} \leqslant \Sigma_{n/K}.$$

On utilise les notations de IV.1.4 et IV.1.5.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un réel $a > 0$ tel que $f < a\psi$ sur $\overline{\Omega}$. Pour tout x de $\partial\Omega$, il existe une fonction continue σ_x sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$\sigma_{x/\Omega} \in D(A_\Omega), \qquad A(\sigma_x) < 0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \qquad \sigma_x(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} :$$

on prend pour σ_x une fonction de la forme $\lambda\psi - \mu\theta$ où λ et μ sont des réels positifs non tous deux nuls. Soient V_x et V'_x des ouverts contenant x tels que

$$V_x \subset \overline{V}_x \subset V'_x \subset \overline{V}'_x \subset U_x$$

(où U_x est l'ouvert de la barrière de Ω au point x) et

$$\forall y \in \overline{V}'_x \cap \overline{\Omega}, \qquad f(y) \leqslant \sigma_x(y).$$

Il existe un réel b_x strictement positif tel que

$$\forall y \in (\overline{V}'_x \setminus V_x) \cap \overline{\Omega}, \qquad b_x\varphi_x(y) + \sigma_x(y) > a\psi(y),$$

car φ_x est minorée par un nombre strictement positif sur le compact $(\overline{V}'_x \setminus V_x) \cap \overline{\Omega}$.

Posons

$$\begin{cases} \tau_x(y) = \inf\{a\psi(y), \quad b_x\varphi_x(y) + \sigma_x(y)\} & \text{si} \quad y \in V'_x \cap \overline{\Omega}, \\ \tau_x(y) = a\psi(y) \quad \text{si} \quad y \in \overline{\Omega} \setminus \overline{V}_x. \end{cases}$$

Les deux définitions coïncident sur $(V'_x \setminus \overline{V}_x) \cap \overline{\Omega}$ et d'autre part $\tau_{x/V'_x \cap \overline{\Omega}}$ et $\tau_{x/\overline{\Omega}\setminus\overline{V}_x}$ sont des fonctions continues.

Par suite τ_x est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. τ_x vérifie

$$f \leqslant \tau_x \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad \tau_x(x) \leqslant f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe W_x, voisinage ouvert de x, tel que

$$\forall y \in W_x \cap \overline{\Omega}, \qquad \tau_x(y) \leqslant f(y) + \varepsilon.$$

Soient $W_{x_1}, \ldots, W_{x_n}$ recouvrant $\partial\Omega$.

On pose

$$\zeta_\varepsilon = \inf(\tau_{x_1}, \ldots, \tau_{x_n})$$

et on prolonge ζ_ε sur tout X en une fonction de $\mathcal{K}(X)$, majorant f sur X. On appelle encore ζ_ε cette fonction.

On a $\zeta_\varepsilon(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$ en tout point x de $\partial\Omega$.

Montrons que, pour tout compact K de Ω, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t, \quad (0 \leqslant t \leqslant \eta) \Longrightarrow (P_t(\zeta_\varepsilon))_{/K} \leqslant \zeta_{\varepsilon/K}.$$

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme. — *Soit g une fonction de $\mathcal{K}(X)$ et U et V deux ouverts relativement compacts de X tels que $\overline{V} \subset U$. Supposons $g/_U \in D(A_U)$. Il existe alors une fonction h de D(A) majorant g et coïncidant avec g sur V.*

Démonstration. — Soit α une fonction de $D(A)$ valant 1 sur un voisinage de $\overline{V}$ et à support dans U. La fonction $g - g\alpha$ est nulle sur un voisinage de $\overline{V}$. On peut alors trouver une fonction l de $D(A)$ valant 0 sur $\overline{V}$ et majorant $g - g\alpha$. On prend $h = g\alpha + l$.

Nous revenons à la démonstration du théorème 1.

Soit K un compact de Ω.

D'après la construction de ζ_ε, pour tout x de K, il existe W_x, voisinage ouvert de x et $\gamma_x^1, \ldots, \gamma_x^{p(x)}$ des fonctions de $D(A_{W_x})$ telles que

$$A(\gamma_x^i) < 0 \quad \text{sur} \quad W_x$$

et

$$\zeta_\varepsilon = \inf_i \gamma_x^i \quad \text{dans} \quad W_x.$$

Soit H_x un voisinage compact de x contenu dans W_x. D'après le lemme, il existe des fonctions $\hat{\gamma}_x^i$ de $D(A)$ telles que

$$\zeta_\varepsilon \leqslant \hat{\gamma}_x^i \quad \text{sur} \quad X$$

et $\qquad \gamma_x^i = \hat{\gamma}_x^i$ dans un voisinage de H_x.

On a donc,

$$A(\hat{\gamma}_x^i) < 0 \quad \text{sur} \quad H_x.$$

Comme $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est fortement continu, il existe un réel $\eta_{x,i} > 0$ tel que

$$\forall t, \quad (0 \leqslant t \leqslant \eta_{x,i}) \Longrightarrow P_t(A(\hat{\gamma}_x^i)) < 0 \quad \text{sur} \quad H_x.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\hat{\gamma}_x^i)(y) = P_t(A(\hat{\gamma}_x^i))(y) < 0$$

pour tout y dans H_x et tout t dans $[0, \eta_{x,i}]$.

On en déduit,

$$\forall t \in [0, \eta_{x,i}], \quad \forall y \in H_x, \quad P_t(\hat{\gamma}_x^i)(y) \leqslant \hat{\gamma}_x^i(y).$$

Posons $\eta_x = \inf_i \eta_{x,i}$. On a

$$\forall t \in [0, \eta_x], \quad \forall i, \quad P_t(\hat{\gamma}_x^i) \leqslant \hat{\gamma}_x^i \quad \text{sur} \quad H_x.$$

Par suite,

$$\forall t \in [0, \eta_x], \quad P_t(\zeta_\varepsilon) \leqslant \zeta_\varepsilon \quad \text{sur} \quad H_x.$$

On recouvre K par un nombre fini de H_x, soient $H_{x_1} \ldots H_{x_k}$.

On pose $\eta = \inf \{\eta_{x_1}, \ldots, \eta_{x_k}\}$.

On obtient

$$\forall t, \quad (0 \leqslant t \leqslant \eta) \Longrightarrow (P_t(\zeta_\varepsilon) \leqslant \zeta_\varepsilon \text{ sur } K).$$

On pose finalement

$$\Sigma_n = \inf (\zeta_1, \zeta_{1/2}, \ldots, \zeta_{1/n}).$$

On montre facilement que Σ_n satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) annoncées.

On construit de même une suite croissante $(\Pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathscr{K}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i′) $\qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \Pi_n \leqslant f,$

(ii′) $\qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \Pi_n(x) \geqslant f(x) - \dfrac{1}{n},$

(iii′) $\qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall K \text{ compact} \subset \Omega, \ \exists \eta > 0, \ \forall t,$
$$(0 \leqslant t \leqslant \eta) \Longrightarrow (P_t(\Pi_n))_{/K} \geqslant \Pi_{n/K}.$$

Ω est un ouvert K_σ. Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère η_n un nombre réel strictement positif qui convient à Σ_n et Π_n pour les propriétés (iii) et (iii′) sur le compact K_n.

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, on construit une fonction u_n sur $X \times [0, +\infty[$ de la façon suivante :

Pour $t \in [0 \eta_n]$ et $x \in X$, on pose

$$u_n(x, t) = \operatorname{Sup} [\Pi_n(x), \operatorname{Inf} (\Sigma_n(x), P_t(f)(x))].$$

Supposons u_n construit sur $X \times [0, i\eta_n]$ pour un certain entier i.

Pour $t \in [i\eta_n, (i+1)\eta_n]$ et $x \in X$, on pose

$$u_n(x, t) = \operatorname{Sup} [\Pi_n(x), \operatorname{Inf} (\Sigma_n(x), P_{t-i\eta_n}(u_n(\cdot, i\eta_n))(x))].$$

La fonction u_n vérifie les propriétés suivantes :

— u_n est continue sur $X \times [0, +\infty[$,
— $\forall (x, t) \in X \times [0, +\infty[$, $\Pi_n(x) \leqslant u_n(x, t) \leqslant \Sigma_n(x)$,
— $\forall x \in X$, $u_n(x, 0) = f(x)$.

n étant fixé dans $\mathbf{N}$, nous allons montrer qu'il existe une suite $(g_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathscr{C}^0(X)$, nulles sur K_n, telles que

$$\forall x \in K_n, \quad \forall t \in [i\eta_n, (i+1)\eta_n],$$
$$u_n(x, t) = \sum_{p=1}^{i} P_{t-p\eta_n}(g_p)(x) + P_t(f)(x).$$

D'après le choix de η_n la propriété est vraie pour $i = 0$, en effet

$$\forall x \in K_n, \quad \forall t \in [0, \eta_n],$$
$$\Pi_n(x) \leqslant P_t(\Pi_n)(x) \leqslant P_t(f)(x) \leqslant P_t(\Sigma_n)(x) \leqslant \Sigma_n(x)$$

donc $u_n(x, t) = P_t(f)(x)$ sur $K_n \times [0 \eta_n]$.

Supposons la propriété vraie pour i, on a donc

$$\forall x \in K_n,$$
$$u_n(x, (i+1)\eta_n) = \sum_{p=1}^{i} P_{(i+1-p)\eta_n}(g_p)(x) + P_{(i+1)\eta_n}(f)(x).$$

Il existe donc une fonction g_{i+1} dans $\mathscr{C}^0(X)$, nulle sur K_n et vérifiant,

$$\forall x \in X, \qquad u_n(x, (i+1)\eta_n)$$
$$= \sum_{p=1}^{i} P_{(i+1-p)\eta_n}(g_p)(x) + g_{i+1}(x) + P_{(i+1)\eta_n}(f)(x).$$

Par ailleurs on sait que $\Pi_n \leqslant u_n(.,(i+1)\eta_n) \leqslant \Sigma_n$.

D'après le choix de η_n on a donc,

$$\forall x \in K_n, \qquad \forall t \in [(i+1)\eta_n, (i+2)\eta_n],$$
$$\Pi_n(x) \leqslant P_{t-(i+1)\eta_n}(u_n(.,(i+1)\eta_n))(x) \leqslant \Sigma_n(x).$$

Par suite, pour x dans K_n et t dans $[(i+1)\eta_n, (i+2)\eta_n]$,

$$u_n(x, t) = P_{t-(i+1)\eta_n}(u_n(.,(i+1)\eta_n))(x)$$
$$u_n(x, t) = \sum_{p=1}^{i+1} P_{t-p\eta_n}(g_p)(x) + P_t(f)(x).$$

Cette écriture de $u_n(x, t)$ montre, d'après la proposition IV.2.2 que $u_{n/\mathring{K}_n\times]0,+\infty[}$ est un élément de $\Lambda(\mathring{K}_n,]0, +\infty[)$.

Nous allons montrer que $(u_{n/\overline{\Omega}\times[0,+\infty[})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}_b(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[)$.

Soit n et m dans $\mathbf{N}$, avec $n \leqslant m$.

La fonction $(u_m - u_n)_{/\mathring{K}_n\times]0,+\infty[}$ est dans $\Lambda(\mathring{K}_n,]0, +\infty[)$.

D'après le principe du maximum (IV.2.3) on a

$$\operatorname*{Sup}_{K_n\times[0,+\infty[} |u_m - u_n| \leqslant \operatorname*{Sup}_{(\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_n)\times[0,+\infty[} |u_m - u_n|.$$

D'où

$$\operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\times[0,+\infty[} |u_m - u_n| \leqslant \operatorname*{Sup}_{(\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_n)\times[0,+\infty[} |u_m - u_n|.$$

Par suite

$$\operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\times[0,+\infty[} |u_m - u_n| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_n} |\Sigma_n - \Pi_n|.$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, soit n_0 tel que

$$\forall x \in \partial\Omega, \qquad |\Sigma_{n_0}(x) - \Pi_{n_0}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 > n_0$, tel que

$$\operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_{n_1}} |\Sigma_{n_0} - \Pi_{n_0}| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout m et tout n, tels que $n_1 < n \leqslant m$, on a

$$\|u_m - u_n\|_{\overline{\Omega}\times[0,+\infty[} \leqslant \operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_n} |\Sigma_n - \Pi_n| \leqslant \operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}\setminus\mathring{K}_{n_1}} |\Sigma_{n_0} - \Pi_{n_0}|$$

d'où,

$$\|u_m - u_n\|_{\overline{\Omega}\times[0,+\infty[} \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(u_{n/\overline{\Omega}\times[0,+\infty[})_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc uniformément sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$ vers une fonction u qui, d'après les propriétés de u_n, vérifie

— u est continue sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$,
— $u_{/\Omega\times]0,+\infty[} \in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$,
— $\forall x \in \overline{\Omega}$, $u(x, 0) = f(x)$.

De plus, pour tout x dans $\partial\Omega$ et pour tout t dans $[0, +\infty[$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \Pi_n(x) \leqslant u_n(x, t) \leqslant \Sigma_n(x).$$

Par passage à la limite on obtient

$$u(x, t) = f(x).$$

L'unicité de u est une conséquence immédiate du principe du maximum IV.2.3.

3. Semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$ tangent à $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

Ω est un ouvert de X.

Si f est une fonction de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ on note $\tilde{f}$ la prolongée de f par 0 sur X.

IV.3.1. — Introduisons les deux opérateurs suivants sur $\mathscr{C}^0(X)$.

$A_{\Omega,1}$ dont le domaine est l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^0(\Omega)$, pour lesquelles il existe une fonction g de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ qui soit limite uniforme sur tout compact de Ω de $\dfrac{P_t(\tilde{f})-\tilde{f}}{t}$ lorsque t tend vers 0.

On pose alors $A_{\Omega,1}(f) = g$.

$A_{\Omega,2}$, dont le domaine est $D(A_\Omega) \cap \mathscr{K}(\Omega)$.

On pose $A_{\Omega,2}(f) = A_\Omega(f)$.

D'après IV.1.3 et le lemme 1 de III.1.4, le domaine de $A_{\Omega,2}$ est égal à l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{K}(\Omega)$, telles que $\tilde{f}$ soit dans $D(A)$. Ceci montre en particulier que $A_{\Omega,1}$ prolonge $A_{\Omega,2}$.

IV.3.2. Théorème. — *Soit Ω un ouvert vérifiant l'hypothèse de régularité $\mathscr{R}$. On a les trois propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un et un seul semi-groupe de Feller $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$ tel que*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega), \qquad \forall K \text{ compact} \subset \Omega, \qquad \|P_s(\tilde{f}) - Q_s(f)\|_K = o(s).$$

$(Q_t)_{t\geqslant 0}$ est dit semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$ tangent à $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

(ii) *Si B est le générateur infinitésimal de $(Q_t)_{t\geqslant 0}$, on a*

$$B = A_{\Omega,1} = \overline{A}_{\Omega,1} = \overline{A}_{\Omega,2}$$

où les fermetures sont prises dans $\mathscr{C}^0(\Omega) \times \mathscr{C}^0(\Omega)$, le premier étant muni de la convergence uniforme et le second de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

(iii) *Il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega), \qquad \|Q_t(f)\| \leqslant C_1 e^{-C_2 t}\|f\|.$$

Démonstration de (i). — Soit f une fonction de $\mathscr{C}^0(\Omega)$.

D'après le théorème IV.2.4 il existe une et une seule fonction u continue sur $\Omega \times [0, +\infty[$ telle que

— $u_{/\Omega \times]0,+\infty[} \in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$,
— $u(.,0) = f$,
— $\forall t \geqslant 0$, $u(.,t) \in \mathscr{C}^0(\Omega)$.

On pose $Q_t(f) = u(.,t)$.

$\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$ étant un espace vectoriel, Q_t est un opérateur linéaire dans $\mathscr{C}^0(\Omega)$. $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ vérifie la propriété

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega), \qquad \lim_{t\to 0} \|Q_t(f) - f\| = 0.$$

Le principe du maximum pour les fonctions de $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$ entraîne que Q_t est sous-markovien.

Enfin, $\forall s, t \geqslant 0$, $Q_{t+s} = Q_t \circ Q_s$.

C'est une conséquence de la propriété évidente suivante de $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$,

$$\forall u \in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[), \qquad \forall s > 0,$$
$$u(., s + .) \in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$$

$(Q_t)_{t\geqslant 0}$ est donc un semi-groupe de Feller sur $\mathscr{C}^0(\Omega)$.

Soient f une fonction de $\mathscr{C}^0_+(\Omega)$ et K un compact de Ω.

Soit φ une fonction de $D(A) \cap \mathscr{K}_+(X)$, valant 1 sur $\partial\Omega$ et de support disjoint de K.

Il existe $\eta > 0$, tel que, pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant \eta$, $P_s(\tilde{f} - \varphi)$ soit une fonction négative sur $\partial\Omega$.

Pour tout x de $\overline{\Omega}$ et tout t de $[0, +\infty[$ on pose,

$$\begin{cases} u(x,t) = Q_t(f)(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega, \qquad 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial\Omega \\ v(x,t) = P_t(\tilde{f})(x) \\ w(x,t) = P_t(\varphi)(x) \end{cases}$$

u, v et w sont dans $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$.

On a la double inégalité,

$$v - w \leqslant u \leqslant v \qquad \text{sur} \qquad (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, \eta]).$$

D'après le principe du maximum IV.2.3 on a

$$v - w \leqslant u \leqslant v \qquad \text{sur} \qquad \overline{\Omega} \times [0\eta].$$

On a donc

$$\forall s \in [0\eta], \quad P_s(\tilde{f}) - P_s(\varphi) \leqslant Q_s(f) \leqslant P_s(\tilde{f}) \quad \text{sur} \quad \Omega$$
$$\forall s \in [0\eta], \quad |P_s(\tilde{f}) - Q_s(f)| \leqslant P_s(\varphi) \quad \text{sur} \quad \Omega$$
$$\forall s \in [0\eta], \quad \|P_s(\tilde{f}) - Q_s(f)\|_K \leqslant \|P_s(\varphi)\|_K.$$

Or,

$$\left\|\frac{P_s(\varphi)}{s}\right\|_K = \left\|\frac{P_s(\varphi) - \varphi}{s} - A(\varphi)\right\|_K \leqslant \left\|\frac{P_s(\varphi) - \varphi}{s} - A(\varphi)\right\|_X$$

ce qui montre que $\lim\limits_{s \to 0} \left\|\frac{P_s(\varphi)}{s}\right\|_K = 0.$

L'unicité de (Q_t) provient de la caractérisation de son générateur infinitésimal (voir (ii)).

Démonstration de (ii). — Soit $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller sur $\mathscr{C}^0(X)$ vérifiant

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega), \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega, \quad \|P_s(\tilde{f}) - Q_s(f)\|_K = o(s).$$

On note B le générateur infinitésimal de $(Q_t)_{t \geqslant 0}$. Soit B′ l'opérateur dans $\mathscr{C}^0(\Omega)$ défini de la manière suivante :

D(B′) est l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ pour lesquelles il existe une fonction g de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ qui soit limite uniforme sur tout compact de Ω de $\frac{Q_t(f) - f}{t}$ lorsque t tend vers 0, et alors, $B'(f) = g$.

B′ vérifie le principe du maximum positif et prolonge B. Or B est maximal parmi les opérateurs de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ vérifiant le principe du maximum positif, donc $B = B'$.

Or il est équivalent de dire que g est limite uniforme sur tout compact de Ω de $\frac{Q_t(f) - f}{t}$ et de dire que g est limite uniforme sur tout compact de Ω de $\frac{P_t(\tilde{f}) - \tilde{f}}{t}$. C'est une conséquence du fait que $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ est tangent à $(P_t)_{t \geqslant 0}$. On a donc $B' = A_{\Omega,1}$, d'où $B = A_{\Omega,1}$. D'autre part on sait déjà $A_{\Omega,2} \subset A_{\Omega,1}$.

Nous allons montrer que B est fermé dans $\mathscr{C}^0(\Omega) \times \mathscr{C}^0(\Omega)$, le premier étant muni de la topologie de la convergence uniforme et le second de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω.

Soit $(h_n, B(h_n))_{n\in N}$ une suite d'éléments du graphe de B convergeant, au sens indiqué ci-dessus, vers

$$(h, l) \in \mathscr{C}^0(\Omega) \times \mathscr{C}^0(\Omega).$$

Soit x_0 un point de Ω tel que

$$h(x_0) = \text{Sup}\, h \geqslant 0.$$

On va montrer par l'absurde que $l(x_0)$ est négatif.

Supposons donc $l(x_0) > 0$.

Il existe un réel $a > 0$ et un ouvert U, $x_0 \in U \subset \overline{U} \subset \Omega$, tels que

$$l > a \quad \text{sur} \quad U.$$

Soit φ une fonction dans $D(A_\Omega) \cap \mathscr{K}_+(\Omega)$, valant 1 au point x_0 et à support contenu dans U.

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda\|B(\varphi)\| < \dfrac{a}{2}$.

Pour n assez grand, la fonction $h_n + \lambda\varphi$ atteint son maximum en un point y_n de U et, pour n assez grand, ce maximum est positif.

On a donc

$$B(h_n + \lambda\varphi)(y_n) \leqslant 0.$$

Par suite

$$B(h_n)(y_n) \leqslant -\lambda B(\varphi)(y_n) < \frac{a}{2},$$

ce qui contredit le fait que $B(h_n)$ converge uniformément sur U vers l qui est strictement plus grande que a sur U. Donc $l(x_0) \leqslant 0$.

Ce résultat montre d'abord que B est préfermé. En effet, si $h = 0$, on doit avoir $l = 0$. Si l'on note $\overline{B}$ la fermeture de B dans $\mathscr{C}^0(\Omega) \times \mathscr{C}^0(\Omega)$ pour les topologies indiquées, le résultat précédent montre de plus que B vérifie le principe du maximum positif.

Or B, en tant que générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller est maximal parmi les opérateurs vérifiant le principe du maximum positif. On a donc

$$B = \overline{B}.$$

Il reste à montrer $\overline{A}_{\Omega,2} = B$.

D'après ce qui précède on a évidemment $\overline{A}_{\Omega,2} \subset B$.

Montrons la réciproque.

Soit f une fonction de $D(B)$. La fonction $n\int_0^{1/n} P_t(\tilde{f})\,dt$ est dans $D(\overline{A})$, et on a

$$\overline{A}\left(n\int_0^{1/n} P_t(\tilde{f})\,dt\right) = n[P_{1/n}(\tilde{f}) - \tilde{f}].$$

On peut alors trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $D(A)$ telles que

$$\left\|f_n - n\int_0^{1/n} P_t(\tilde{f})\,dt\right\|_X \leqslant \frac{1}{n}$$

et

$$\|A(f_n) - n[P_{1/n}(\tilde{f}) - \tilde{f}]\|_X \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $D(A_\Omega)$, comprises entre 0 et 1, valant 1 sur K_n et de supports contenus dans $\mathring{K}_{n+1}$, où $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω.

On a

$$\|\varphi_n f_n - f\|_\Omega \leqslant \|\varphi_n(f_n - f)\|_\Omega + \|\varphi_n f - f\|_\Omega \leqslant \|f_n - \tilde{f}\|_X + \|f\|_{\Omega\setminus K_n}.$$

La suite $(\varphi_n f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $D(A_{\Omega,2})$ converge donc vers f uniformément sur Ω.

D'autre part

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad A_{\Omega,2}(\varphi_n f_n) = A(f_n) \quad \text{sur} \quad \mathring{K}_n.$$

Or la fonction $n(P_{1/n}(\tilde{f}) - \tilde{f})$, donc aussi $A(f_n)$, converge vers $B(f)$ uniformément sur tout compact de Ω. La suite $A_{\Omega,2}(\varphi_n f_n)$ converge donc vers $B(f)$ uniformément sur tout compact de Ω.

Finalement f est dans $D(\overline{A}_{\Omega,2})$ et $\overline{A}_{\Omega,2}(f) = B(f)$.

Démonstration de (iii). — Ω vérifie l'hypothèse $\mathcal{R}$. Il existe donc une fonction ψ dans $D(A_U)$, où U est un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$, avec $A(\psi) < 0$ sur U et $\psi > 0$ sur U. Soit $\hat{\psi}$ une fonction positive de $D(A)$ qui coïncide avec ψ sur un voisinage de $\overline{\Omega}$.

Posons $-\varepsilon = \operatorname*{Sup}_{x\in\overline{\Omega}} A(\hat{\psi})(x)$.

Pour tout (x, t) dans $X \times [0, +\infty[$, posons

$$\alpha(x, t) = P_t(\hat{\psi})(x).$$

On a, $\forall (x, t) \in X \times [0, +\infty[$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) = P_t(A(\hat{\psi}))(x)$.
$(P_t)_{t \geqslant 0}$ étant fortement continu, il existe $\eta > 0$, tel que, pour tout t dans $[0\eta]$, on ait

$$\|P_t(A(\hat{\psi})) - A(\hat{\psi})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite,

$$\forall t \in [0\eta], \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) \leqslant A(\hat{\psi})(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il s'ensuit

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \alpha(x, \eta) \leqslant \alpha(x, 0) - \frac{\varepsilon}{2}\eta.$$

Or il existe $\gamma, 0 < \gamma < 1$, tel que $\gamma \|\hat{\psi}\|_X \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\eta$. On a donc,

$$\forall x \in \Omega, \quad \alpha(x, \eta) \leqslant \alpha(x, 0) - \gamma\hat{\psi}(x) = (1 - \gamma)\alpha(x, 0).$$

Posons $\xi = \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}} \hat{\psi}(x)$.

Soit f une fonction non nulle dans $\mathscr{C}^0_+(\Omega)$ et posons $\beta(x, t) = Q_t\left(\dfrac{\xi}{\|f\|} f\right)(x)$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[$.

α et β sont dans $\Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$. On a alors,

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[, \qquad \beta(x, t) \leqslant \alpha(x, t).$$

C'est une conséquence du principe du maximum IV.2.3 appliqué à $\beta - \alpha$. En particulier,

$$\forall x \in \Omega, \qquad \beta(x, \eta) \leqslant \alpha(x, \eta) \leqslant (1 - \gamma)\alpha(x, 0).$$

Par un raisonnement analogue, en appliquant le principe du maximum IV.2.3 à la fonction

$$(x, t) \longmapsto \beta(x, \eta + t) - (1 - \gamma)\alpha(x, t)$$

on obtient,

$$\forall x \in \Omega, \quad \beta(x, 2\eta) \leqslant (1 - \gamma)\alpha(x, \eta) \leqslant (1 - \gamma)^2\alpha(x, 0).$$

De proche en proche on montre,

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \beta(x, p\eta) \leqslant (1-\gamma)^p \alpha(x, 0).$$

Par suite,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \|Q_{p\eta}(f)\| \leqslant \frac{\|\hat{\psi}\|}{\xi} \|f\| (1-\gamma)^p.$$

Finalement,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \|Q_t(f)\| \leqslant \left\|Q_{\left[\frac{t}{\eta}\right]\eta}(f)\right\| \leqslant \frac{\|\hat{\psi}\|}{\xi} \|f\| (1-\gamma)^{\frac{t}{\eta}-1}.$$

Si f est dans $\mathscr{C}^0(\Omega)$, on la décompose en partie positive et partie négative, d'où

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\Omega), \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$
$$\|Q_t(f)\| \leqslant \frac{2\|\hat{\psi}\|}{\xi} (1-\gamma)^{\frac{t}{\eta}-1} \|f\|.$$

4. Le problème de Dirichlet.

IV.4.1. — Pour tout ouvert Ω de X, on note $\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des fonctions g, continues sur Ω, pour lesquelles il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $D(A)$ telles que g_n converge vers g uniformément sur tout compact de Ω et $A(g_n)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de Ω.

IV.4.2. Proposition (*Principe du maximum pour les fonctions de* $\Gamma(\Omega)$). — *Soit* Ω *un ouvert relativement compact de* X.

Supposons qu'il existe une fonction ψ *de* $D(A_\Omega)$ *telle que* $A(\psi) < 0$ *sur* Ω. *Si* g *est une fonction de* $\Gamma(\Omega)$ *et si*

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega} g > 0,$$

alors

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega} g = \operatorname*{Sup}_{x \in \partial\Omega} \left\{ \overline{\lim_{y \to x}}\, g(y) \right\}.$$

Démonstration. — Soit Ω' un ouvert de X tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ et $\operatorname*{Sup}_{\Omega'} g > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre assez petit pour que l'on ait

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g - \varepsilon\psi) > 0.$$

Supposons $\operatorname*{Sup}_{\partial\Omega'}(g - \varepsilon\psi) < \operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g - \varepsilon\psi)$.

En prenant la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de IV.4.1, il existe alors un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$,

$$\operatorname*{Sup}_{\partial\Omega'}(g_n - \varepsilon\psi) < \operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g_n - \varepsilon\psi) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g_n - \varepsilon\psi) > 0.$$

Comme A vérifie le principe du maximum local positif, on a donc

$$A(g_n - \varepsilon\psi)(x_n) \leqslant 0,$$

où x_n est un point de Ω', en lequel $g_n - \varepsilon\psi$ atteint son maximum sur Ω'. Par suite,

$$A(g_n)(x_n) \leqslant \varepsilon A(\psi)(x_n) \leqslant \varepsilon \operatorname*{Sup}_{\overline{\Omega}'} A(\psi) < 0,$$

ce qui contredit le fait que $A(g_n)$ converge vers 0 uniformément sur Ω'. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\Omega'(\overline{\Omega}' \subset \Omega)$ on a donc

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g - \varepsilon\psi) = \operatorname*{Sup}_{\partial\Omega'}(g - \varepsilon\psi),$$

dès que $\operatorname*{Sup}_{\Omega'}(g - \varepsilon\psi) > 0$.

Par passage à la limite lorsque ε tend vers 0, puis lorsque Ω' croît vers Ω on obtient le résultat.

IV.4.3. Proposition. — *Soit g une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, où Ω est un ouvert relativement compact de X. On suppose qu'il existe un prolongement $\tilde{g}$ de g tel que $\tilde{g} \in \mathscr{K}(X)$ et $\dfrac{P_t(\tilde{g}) - \tilde{g}}{t}$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de Ω lorsque t tend vers 0.*

Alors $g/_{\Omega}$ est un élément de $\Gamma(\Omega)$.

Démonstration. — La fonction $n\int_0^{\frac{1}{n}} P_t(\tilde{g})\,dt$ est dans $D(\overline{A})$ et

$$\overline{A}\left(n\int_0^{\frac{1}{n}} P_t(\tilde{g})\,dt\right) = n(P_{1/n}(\tilde{g}) - \tilde{g}).$$

Il existe donc une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de D(A) telles que

$$\left\| g_n - n \int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{P}_t(\tilde{g})\, dt \right\| \leqslant \frac{1}{n}$$

et
$$\|\mathrm{A}(g_n) - n(\mathrm{P}_{1/n}(\tilde{g}) - \tilde{g})\| \leqslant \frac{1}{n}$$

g_n converge vers $\tilde{g}$ uniformément sur X et $\mathrm{A}(g_n)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de Ω.

IV.4.4. Théorème. — *Soit Ω un ouvert de X vérifiant l'hypothèse de régularité $\mathcal{R}$.*

Pour toute fonction f définie et continue sur $\partial\Omega$, il existe une et une seule fonction g continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $g/_{\partial\Omega} = f$ et $g/_{\Omega} \in \Gamma(\Omega)$.

Démonstration. — Nous allons montrer que cette fonction g est la limite uniforme sur $\overline{\Omega}$, lorsque t tend vers l'infini, de la solution $u(.,t)$ du problème de Cauchy traité dans IV.2.4.

On prolonge f en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. On note encore f ce prolongement.

Soit u la fonction sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$ associée à f par IV.2.4.

La famille de fonctions $\{u(.,t)\}_t$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de l'infini, en effet, si $t < s$, on a

$$u(.,s) - u(.,t) = \mathrm{Q}_t(u(.,s-t) - f),$$

donc, d'après la propriété (iii) de IV.3.2,

$$\|u(.,s) - u(.,t)\| \leqslant 2\mathrm{C}_1\|f\|e^{-\mathrm{C}_2 t}.$$

$u(.,t)$ converge donc uniformément sur $\overline{\Omega}$ vers une fonction g lorsque t tend vers l'infini. g est continue sur $\overline{\Omega}$ et on a $g/_{\partial\Omega} = f/_{\partial\Omega}$.

Pour (x,t) dans $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$ on pose $\varphi(x,t) = g(x)$.

On a $\varphi_{/\Omega\times]0,+\infty[} \in \Lambda(\Omega,]0, +\infty[)$, en effet, φ est la limite uniforme sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_n(x,t) = u(x, t+n)$. La limite est uniforme car

$$\|u_n - u_m\| \leqslant 2C_1\|f\| e^{-C_2 \inf(n, m)}.$$

Soit $\tilde{g}$ un prolongement de g sur X avec $\tilde{g} \in \mathcal{K}(X)$. Montrons, pour conclure, que $\dfrac{P_t(\tilde{g}) - \tilde{g}}{t}$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de Ω quand t tend vers 0.

Soit K un compact de Ω et h une fonction de

$$\mathcal{K}^+(X) \cap D(A)$$

nulle sur un voisinage de K et valant 1 sur $\partial\Omega$.

$(P_t)_{t \geqslant 0}$ étant continu, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \eta], \qquad \forall x \in \partial\Omega, \qquad P_t(\tilde{g} - h)(x) \leqslant g(x) \leqslant P_t(\tilde{g} + h)(x).$$

Par suite,

$$\forall (x, t) \in (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, \eta]),$$
$$P_t(\tilde{g} - h)(x) \leqslant \varphi(x, t) \leqslant P_t(\tilde{g} + h)(x).$$

D'après le principe du maximum IV.2.3 on obtient,

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \forall t \in [0, \eta], \qquad P_t(\tilde{g} - h)(x) \leqslant \varphi(x, t) \leqslant P_t(\tilde{g} + h)(x).$$

Par suite,

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \forall t \in [0, \eta],$$
$$P_t(\tilde{g})(x) - P_t(h)(x) \leqslant g(x) \leqslant P_t(\tilde{g})(x) + P_t(h)(x).$$

h étant nul sur K, on a donc $\forall x \in K$, $\forall t \in [0, \eta]$:

$$-\frac{P_t(h)(x) - h(x)}{t} \leqslant \frac{P_t(\tilde{g})(x) - \tilde{g}(x)}{t} \leqslant \frac{P_t(h)(x) - h(x)}{t}.$$

Comme $A(h)$ est nul sur K, $\dfrac{P_t(h) - h}{t}$ converge uniformément vers 0 sur K lorsque t tend vers 0. Il en est donc de même pour $\dfrac{P_t(\tilde{g}) - \tilde{g}}{t}$.

D'après IV.4.3, $g/_\Omega$ est un élément de $\Gamma(\Omega)$.

L'unicité de la solution g résulte du principe du maximum pour les fonctions de $\Gamma(\Omega)$ (IV.4.2).

CHAPITRE V

UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRE

Nous introduisons une nouvelle notion de solution pour un problème d'évolution non linéaire particulier. En utilisant une méthode d'approximation par des semi-groupes linéaires nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité des solutions. Enfin, l'étude d'un contre-exemple montre que le résultat ne peut pas être amélioré dans le cas général.

1. Perturbations multiplicatives d'un générateur infinitésimal.

V.1.1. — Soient ε et M deux réels tels que $0 < \varepsilon < M$.

On note $\mathscr{L}(\varepsilon, M)$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathscr{C}_{b_+}(X, \mathbf{R})$ vérifiant la condition

$$\varepsilon \leqslant \operatorname{Inf} \psi \leqslant \operatorname{Sup} \psi \leqslant M,$$

et on pose $\mathscr{L} = \bigcup_{0<\varepsilon<M} \mathscr{L}(\varepsilon, M)$.

Si ψ est dans $\mathscr{L}$, on note M_ψ l'opérateur de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ défini par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad M_\psi(f) = \psi f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda).$$

Pour tout ψ de $\mathscr{L}$, M_ψ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et on a $(M_\psi)^{-1} = M_{\frac{1}{\psi}}$: c'est une conséquence du fait que $\mathscr{L}$ est stable par passage à l'inverse.

Si T est un opérateur de domaine $D(T)$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ on écrira souvent ψT au lieu de $M_\psi \circ T$.

Dans tout ce chapitre on fixe un semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ à contraction dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, de générateur infinitésimal A. D'après un résultat de Dorroh ([5]) on sait que, pour tout ψ dans $\mathscr{L}$, ψA est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$. On note $(P_{\psi,t})_{t\geqslant 0}$ ce semi-groupe et $(R_{\psi,\lambda})_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée à ce semi-groupe.

On a donc

$$R_{\psi,\lambda} = (\lambda I - \psi A)^{-1}$$

et $$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad R_{\psi,\lambda}(f) = \int_0^\infty P_{\psi,t}(f)e^{-\lambda t}\,dt.$$

V.1.2. — Soit $\theta \in \mathscr{L}$. La relation $\theta I - A = M_\theta\left(I - \frac{1}{\theta}A\right)$ montre, puisque $\left(I - \frac{1}{\theta}A\right)^{-1}$ existe ainsi que $(M_\theta)^{-1}$, que l'on peut définir l'opérateur $(\theta I - A)^{-1}$.

On pose $S_\theta = (\theta I - A)^{-1}$.

On a $S_\theta = R_{\frac{1}{\theta},1} \circ M_{\frac{1}{\theta}}$.

S_θ est donc un opérateur borné sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et

$$\|S_\theta \circ M_\theta\| \leqslant 1.$$

Montrons la relation suivante

$$\forall \theta, \psi \in \mathscr{L}, \qquad S_\psi - S_\theta = S_\psi \circ M_{\theta-\psi} \circ S_\theta \quad (*)$$

$$\begin{aligned} S_\psi - S_\theta &= S_\psi(I - (\psi I - A)S_\theta) \\ &= S_\psi(I - (\theta I - A)S_\theta + (\theta - \psi)S_\theta) \\ &= S_\psi \circ M_{\theta-\psi} \circ S_\theta. \end{aligned}$$

$(S_\theta)_{\theta\in\mathscr{L}}$ est donc une généralisation de la famille résolvante de l'opérateur A. Ces équations résolvantes généralisées ont été étudiées en détail et utilisées dans un cadre différent par Neveu ([16]).

V.1.3. Proposition. — *Avec les notations ci-dessus on a la majoration suivante*

$$\forall \psi, \theta \in \mathscr{L}, \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad \forall g \in D(A),$$

$$\|P_{\psi,t}(g) - P_{\theta,t}(g)\| \leqslant t\left\|\frac{\psi - \theta}{\theta}\right\| \|\theta A(g)\|.$$

Démonstration. — Soient $\psi \in \mathscr{L}$ et $\lambda > 0$

$$R_{\psi,\lambda} = (\lambda I - \psi A)^{-1} = \left[M_\psi\left(\frac{\lambda}{\psi} I - A\right)\right]^{-1} = S_{\frac{\lambda}{\psi}} \circ M_{\frac{1}{\psi}}.$$

On a donc $$S_{\frac{\lambda}{\psi}} = R_{\psi,\lambda} \circ M_\psi.$$

La relation $(*)$ donne alors

$$R_{\psi,\lambda}M_\psi - R_{\theta,\lambda}M_\theta = R_{\psi,\lambda}M_\psi M_{\frac{\lambda}{\theta}-\frac{\lambda}{\psi}} R_{\theta,\lambda}M_\theta,$$

d'où

$$\forall\theta,\ \psi \in \mathscr{L}, \quad \forall\lambda > 0,$$
$$R_{\psi,\lambda}M_\psi - R_{\theta,\lambda}M_\theta = \lambda R_{\psi,\lambda}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}} R_{\theta,\lambda}M_\theta.$$

En tenant compte de l'expression de $R_{\psi,\lambda}$ en fonction de $(P_{\psi,t})_{t\geqslant 0}$, on obtient

$$\forall\theta,\ \psi \in \mathscr{L}, \quad \forall\lambda > 0, \quad \forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda),$$
$$\int_0^\infty [P_{\psi,t}M_\psi(f) - P_{\theta,t}M_\theta(f)]e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \lambda \int_0^\infty dv \int_0^\infty du \Big[e^{-\lambda(v+u)}P_{\psi,v}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}P_{\theta,u}M_\theta(f)\Big]. \qquad (*\,*)$$

Or la fonction $(v, u) \longmapsto e^{-\lambda(v+u)}P_{\psi,v}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}P_{\theta,u}M_\theta(f)$ est fortement mesurable de $([0, +\infty[)^2$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ (elle est séparément continue) et sa norme est intégrable. Elle est donc intégrable et, d'après le théorème de Fubini, le second membre de $(*\,*)$ vaut

$$\lambda \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(u+v)}P_{\psi,v}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}P_{\theta,u}M_\theta(f)\,du\,dv.$$

On fait le changement de variable $u + v = t$ et $v = s$. On obtient

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t P_{\psi,s}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}P_{\theta,t-s}M_\theta(f)\,ds\Big]\,dt.$$

Supposons maintenant que θf soit dans $D(A)$.

Le second membre de $(*\,*)$ vaut

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t P_{\psi,s}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}\Big(\theta f + \int_0^{t-s} P_{\theta,r}(\theta A(\theta f))\,dr\Big)\,ds\Big]\,dt.$$

Or une intégration par parties montre que

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t P_{\psi,s}M_{\psi-\theta}(f)\,ds\Big]\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_{\psi,t}M_{\psi-\theta}(f)\,dt.$$

La relation $(*\,*)$ devient alors

$$\int_0^\infty [P_{\psi,t}M_\theta(f) - P_{\theta,t}M_\theta(f)]e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t P_{\psi,s}M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}}\Big(\int_0^{t-s} P_{\theta,r}(\theta A(\theta f))\,dr\Big)\,ds\Big]\,dt.$$

On pose $g = \theta f \in D(A)$ et on applique le théorème de Fubini

$$\int_0^\infty [P_{\psi,t}(g) - P_{\theta,t}(g)]e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\iint_{D_t} P_{\psi,s} M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}} P_{\theta,r}(\theta A(g))\, dr\, ds\right] dt$$

avec $D_t = \{(s, r)/0 \leqslant s \leqslant t,\ \ 0 \leqslant r \leqslant t - s\}$.

On fait dans l'intégrale double le changement de variable $s + r = u$ et $s = v$. On a

$$\int_0^\infty [P_{\psi,t}(g) - P_{\theta,t}(g)]e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^t \left(\int_0^u P_{\psi,v} M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}} P_{\theta,u-v}(\theta A(g))\, dv\right) du\right] dt.$$

Par intégration par partie le second membre devient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^t P_{\psi,v} M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}} P_{\theta,t-v}(\theta A(g))\, dv\right] dt.$$

L'égalité est vraie pour tout $\lambda > 0$. D'après l'injectivité de la transformation de Laplace on a donc

$$\forall \psi, \theta \in \mathscr{L}, \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad \forall g \in D(A),$$
$$P_{\psi,t}(g) - P_{\theta,t}(g) = \int_0^t P_{\psi,v} M_{\frac{\psi-\theta}{\theta}} P_{\theta,t-v}(\theta A(g))\, dv.$$

Ce qui donne en particulier la majoration annoncée.

V.1.4. — Pour $m \in]0, +\infty[$ on définit D_m comme l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ pour lesquelles il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $D(A)$ telles que

i) $\qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \|A(g_n)\| \leqslant m,$

ii) $\qquad f = \lim\limits_{n\to\infty} g_n \quad$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

D'après V.1.3 on a encore la majoration suivante

$$\forall f \in D_m, \qquad \forall \psi, \theta \in \mathscr{L}, \qquad \forall t \geqslant 0,$$
$$\|P_{\psi,t}(f) - P_{\theta,t}(f)\| \leqslant t\left\|\frac{\psi - \theta}{\theta}\right\| \|\theta\| m.$$

2. Étude d'une équation d'évolution non linéaire.

V.2.1. — Soient a, b, c trois nombres strictement positifs, avec $a < b$. Soit φ une application de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ dans

$\mathscr{L}(a, b)$, lipschitzienne de rapport c, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \|\varphi(f) - \varphi(g)\| \leqslant c\|f - g\|.$$

On pose $K = \dfrac{a}{2bc}$.

Théorème. — *Pour tout* $m \in]0, +\infty[$ *et pour tout* f *dans* D_m *il existe une et une seule fonction* u *continue de* $\left[0, \dfrac{K}{m}\right]$ *dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *telle que*

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} u(0) = f \\ \forall t \in \left[0, \dfrac{K}{m}\right[, \qquad \|u(t+s) - P_{\varphi(u(t)), s}(u(t))\| = o(s) \\ \textit{pour } s \textit{ positif assez petit.} \end{cases}$$

Remarque. — Soit u une fonction continue de $[0\eta]$ dans $D(A)$ telle que

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u(0) = f \\ u \text{ est dérivable sur } [0\eta[\text{ et } \dfrac{du}{dt}(t) = \varphi(u(t))A(u(t)). \end{cases}$$

La fonction u, solution du problème II, est solution du problème I. I est donc une généralisation de l'équation d'évolution non linéaire II.

La démonstration du théorème va se faire par une succession de lemmes. On va construire u par approximation.

f étant une fonction de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ et α un nombre strictement positif, on définit $u_n(t) \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0\alpha]$, de la façon suivante :

Si $t \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2^n}\right]$ on pose

$$u_n(t) = P_{\varphi(f), t}(f),$$

Si $t \in \left[\dfrac{i\alpha}{2^n}, \dfrac{(i+1)\alpha}{2^n}\right]$ on pose

$$u_n(t) = P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), t - \frac{i\alpha}{2^n}}\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right).$$

La fonction u_n, ainsi définie par récurrence sur i, $(0 \leqslant i < 2^n)$, est continue sur l'intervalle $[0\alpha]$.

Lemme 1. — *Si* $f \in D(A)$ *et si* $\alpha \leqslant \dfrac{a}{2c\|\varphi(f)A(f)\|}$ *on a*

$$\forall t \in [0\alpha], \qquad u_n(t) \in D(A)$$

et
$$\|\varphi(u_n(t))A(u_n(t))\| \leqslant 2\|\varphi(f)A(f)\|.$$

Démonstration. — $u_n(t) \in D(A)$ est vrai par construction de u_n. On pose $f_i = u_n\left(\dfrac{i\alpha}{2^n}\right)$ pour $0 \leqslant i \leqslant 2^n$.

On définit la suite $(K_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2^n}$ par récurrence :

$$\begin{cases} K_0 = \|\varphi(f_0)A(f_0)\| \\ K_{i+1} = \left(1 + \dfrac{c}{a}\dfrac{\alpha}{2^n}K_i\right)K_i. \end{cases}$$

On va montrer par récurrence sur $i\,(0 \leqslant i \leqslant 2^n)$ la propriété suivante :

$$\|\varphi(f_i)A(f_i)\| \leqslant K_i \qquad \text{et} \qquad \|f_i - f_{i-1}\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}K_{i-1}.$$

Pour $i = 0$ on a $\|\varphi(f_0)A(f_0)\| = K_0$.

Supposons vraie la propriété pour i et vérifions-la pour $i+1$:

$$\|f_{i+1} - f_i\| = \left\|P_{\varphi(f_i),\frac{\alpha}{2^n}}(f_i) - f_i\right\| = \left\|\int_0^{\frac{\alpha}{2^n}} P_{\varphi(f_i),s}(\varphi(f_i)A(f_i))\,ds\right\|$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{2^n}\|\varphi(f_i)A(f_i)\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}K_i$$

$$\begin{aligned}\|\varphi(f_{i+1})A(f_{i+1})\| &= \left\|\frac{\varphi(f_{i+1})}{\varphi(f_i)}\varphi(f_i)AP_{\varphi(f_i),\frac{\alpha}{2^n}}(f_i)\right\| \\ &\leqslant \left\|1 - \frac{\varphi(f_i) - \varphi(f_{i+1})}{\varphi(f_i)}\right\|\|\varphi(f_i)A(f_i)\| \\ &\leqslant \left(1 + \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}K_i\right)K_i = K_{i+1}.\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à majorer les K_i

Soient

$$\gamma(x) = \left(1 + \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}x\right)x \qquad \text{et} \qquad \delta(x) = \frac{x}{1 - \dfrac{c}{a}\dfrac{\alpha}{2^n}x}.$$

Pour $0 \leqslant x < \dfrac{1}{\dfrac{c}{a}\dfrac{\alpha}{2^n}}$ on a $\gamma(x) \leqslant \delta(x)$ et les fonctions γ et δ sont croissantes sur cet intervalle.

On définit une suite $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant 2^n}$ par récurrence

$$H_0 = K_0 \qquad \text{et} \qquad H_{i+1} = \delta(H_i).$$

Explicitons les H_i

$$H_{i+1} = \frac{H_i}{1 - \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n} H_i} \quad \text{d'où} \quad H_{i+1} - \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n} H_i H_{i+1} = H_i$$

$$\frac{1}{H_i} - \frac{1}{H_{i+1}} = \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{H_0} - \frac{1}{H_i} = i\,\frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}.$$

On obtient $H_i = \dfrac{H_0}{1 - i\,\frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n} H_0}$.

Or, pour tout i compris entre 0 et 2^n on a

$$i\,\frac{c}{\alpha}\frac{\alpha}{2^n} H_0 \leqslant \frac{c}{a}\alpha K_0 \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{d'après le choix de} \quad \alpha.$$

Ceci montre $\forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant 2^n,\ H_0 = K_0 \leqslant H_i \leqslant 2H_0 = 2K_0$ en particulier tous les H_i sont dans $\left[0, \dfrac{1}{\frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}}\right]$ donc pour tout i, $K_i \leqslant H_i \leqslant 2K_0$.

Finalement pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$, on a

$$\|\varphi(f_i)A(f_i)\| \leqslant 2\|\varphi(f)A(f)\|.$$

Soit $t \in [0\alpha[$. Il existe i, $0 \leqslant i < 2^n$, tel que

$$\frac{i\alpha}{2^n} \leqslant t < \frac{(i+n)\alpha}{2^n}$$

$$\|u_n(t) - f_i\| = \left\|\int_0^{t-\frac{\alpha i}{2^n}} P_{\varphi(f_i),s}(\varphi(f_i)A(f_i))\,ds\right\|$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{2^n}\|\varphi(f_i)A(f_i)\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n} K_i$$

$$\|\varphi(u_n(t))A(u_n(t)\| = \left\|\frac{\varphi(u_n(t))}{\varphi(f_i)}\varphi(f_i)AP_{\varphi(f_i),\,t-\frac{i\alpha}{2^n}}(f_i)\right\|$$
$$\leqslant \left\|1 - \frac{\varphi(f_i) - \varphi(u_n(t))}{\varphi(f_i)}\right\| \|\varphi(f_i)A(f_i)\|$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}K_i\right)K_i = K_{i+1} \leqslant 2\|\varphi(f)A(f)\|.$$

LEMME 2. — *Si* $f \in D(A)$ *et si* $\alpha \leqslant \dfrac{a}{2c\|\varphi(f)A(f)\|}$ *alors il existe une constante* C_1 *telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in [0\alpha], \quad \|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leqslant \frac{C_1}{2^n}.$$

Démonstration. — On pose

$$f_i = u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant 2^n$$

et
$$g_j = u_{n+1}\left(\frac{j\alpha}{2^{n+1}}\right) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2^{n+1}.$$

On définit une suite $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2^n}$ par récurrence

$$\begin{cases} L_0 = 0 \\ L_{i+1} = \left(1 + 2\dfrac{\alpha}{2^n}\dfrac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|\right)L_i + \left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)^2 \dfrac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2. \end{cases}$$

On va montrer par récurrence sur $i (0 \leqslant i \leqslant 2^n)$ la majoration $\|f_i - g_{2i}\| \leqslant L_i$. C'est évident pour $i = 0$.

Supposons vraie la propriété pour i et vérifions-la pour $i + 1$. Nous allons en fait démontrer le résultat plus fort suivant

$$\forall t \in \left[\frac{i\alpha}{2^n}, \frac{(i+1)\alpha}{2^n}\right], \qquad \|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leqslant L_{i+1}.$$

Le raisonnement distingue deux cas :

1^{er} *cas* : $t \in \left[\dfrac{i\alpha}{2^n}, \dfrac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}\right]$. On pose $\beta = t - \dfrac{i\alpha}{2^n}$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| &= \|P_{\varphi(f_i),\beta}(f_i) - P_{\varphi(g_{2i}),\beta}(g_{2i})\| \\ &\leqslant \|P_{\varphi(f_i),\beta}(f_i) - P_{\varphi(f_i),\beta}(g_{2i})\| + \|P_{\varphi(f_i),\beta}(g_{2i}) - P_{\varphi(g_{2i}),\beta}(g_{2i})\| \\ &\leqslant \|f_i - g_{2i}\| + \beta\left\|\frac{\varphi(f_i) - \varphi(g_{2i})}{(g_{2i})}\right\|\|\varphi(g_{2i})A(g_{2i})\| \quad \text{(d'après V.1.3)} \\ &\leqslant L_i + 2\beta\frac{c}{a}L_i\|\varphi(f)A(f)\| \quad \text{(d'après le lemme 1).} \end{aligned}$$

D'où $\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leqslant L_{i+1}$.

On a aussi l'inégalité

$$\left\|u_n\left(\frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}\right) - g_{2i+1}\right\| \leqslant L_i + \frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|L_i.$$

Ceci nous sert dans le second cas.

2e *cas:* $t \in \left[\frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}, \frac{(i+1)\alpha}{2^n}\right]$. On pose

$$\beta = t - \frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| &= \left\|P_{\varphi(f_i),\beta}\left(u_n\left(\frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}\right)\right) - P_{\varphi(g_{2i+1}),\beta}(g_{2i+1})\right\| \\
&\leqslant \left\|P_{\varphi(f_i),\beta}\left(u_n\left(\frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}\right)\right) - P_{\varphi(f_i),\beta}(g_{2i+1})\right\| \\
&\quad + \|P_{\varphi(f_i),\beta}(g_{2i+1}) - P_{\varphi(g_{2i+1}),\beta}(g_{2i+1})\| \\
&\leqslant \left\|u_n\left(\frac{(2i+1)\alpha}{2^{n+1}}\right) - g_{2i+1}\right\| \\
&\quad + \beta\left\|\frac{\varphi(f_i) - \varphi(g_{2i+1})}{\varphi(g_{2i+1})}\right\| \|\varphi(g_{2i+1})A(g_{2i+1})\| \quad \text{(d'après V.1.3)} \\
&\leqslant L_i + \frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|L_i \\
&\qquad + \frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|\,\|f_i - g_{2i+1}\|.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\|f_i - g_{2i+1}\| &\leqslant \|f_i - g_{2i}\| + \|g_{2i} - g_{2i+1}\| \\
&\leqslant L_i + \left\|\int_0^{\frac{\alpha}{2^{n+1}}} P_{\varphi(g_{2i}),s}(\varphi(g_{2i})A(g_{2i}))\,ds\right\| \\
&\leqslant L_i + \frac{\alpha}{2^n}\|\varphi(f)A(f)\|.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| &\leqslant L_i\left(1 + 2\frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2.
\end{aligned}$$

Par suite $\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leqslant L_{i+1}$.

Nous allons calculer L_i.

$$\begin{aligned}
&L_{i+1} + \frac{\alpha}{2^{n+1}}\|\varphi(f)A(f)\| \\
&\qquad = \left(1 + 2\frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|\right)\left(L_i + \frac{\alpha}{2^{n+1}}\|\varphi(f)A(f)\|\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$L_i = \left[\left(1 + \frac{2\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\,\|\varphi(f)A(f)\|\right)^i - 1\right]\frac{\alpha}{2^{n+1}}\,\|\varphi(f)A(f)\|.$$

Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$,

$$L_i \leqslant \left[\left(1 + \frac{2\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\,\|\varphi(f)A(f)\|\right)2^n - 1\right]\|\varphi(f)A(f)\|\,\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

Or la suite $\left\{\left(1 + \frac{2\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\,\|\varphi(f)A(f)\|\right)2^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Elle est donc bornée. Il existe donc une constante C_1 telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \left[\left(1 + \frac{2\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\,\|\varphi(f)A(f)\|\right)2^n - 1\right]\|\varphi(f)A(f)\|\,\frac{\alpha}{2} \leqslant C_1.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \forall i,\quad 0 \leqslant i < 2^n,\quad \forall t \in \left[\frac{i\alpha}{2^n}, \frac{(i+1)\alpha}{2^n}\right],$$

$$\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leqslant L_{i+1} \leqslant \frac{C_1}{2^n}.$$

Corollaire. — *La suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément sur* $[0\alpha]$ *vers une fonction continue* u *de* $[0\alpha]$ *dans* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

Lemme 3. — *Soit* $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *qui converge uniformément vers* h. *Alors,*

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(X, \Lambda), \qquad \forall s \geqslant 0,$$
$$P_{\varphi(h_n),s}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{\varphi(h),s}(f) \quad \textit{dans} \quad \mathscr{C}^0(X, \Lambda).$$

Démonstration. — Soit $f \in D(A)$. D'après V.1.3 on a

$$\|P_{\varphi(h_n),s}(f) - P_{\varphi(h),s}(f)\| \leqslant s\,\frac{cb}{a}\,\|A(f)\|\,\|h - h_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme la famille $(P_{\varphi(h_n),s})_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue et $D(A)$ est dense dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, la limite est nulle pour toute fonction de $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

LEMME 4. — *Si* $f \in D(A)$ *et si* $\alpha \leqslant \dfrac{a}{2c\|\varphi(f)A(f)\|}$ *alors, pour tout entier* n, *pour tout entier* i, $0 \leqslant i < 2^n$, *et pour tout nombre réel* $s \geqslant 0$ *tel que* $\dfrac{i\alpha}{2^n} + s \leqslant \alpha$ *on a*

$$\left\| u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n} + s\right) - P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right)\right\| \leqslant \frac{4c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2 s^2.$$

Démonstration. — On fixe n et i, $0 \leqslant i < 2^n$.

Pour k entier, $k \geqslant i$ on note

$$f_k = u_n\left(\frac{k\alpha}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad g_k = P_{\varphi(f_i), \frac{(k-i)\alpha}{2^n}}(f_i).$$

Soit $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{(k_0 - 1)\alpha}{2^n} \leqslant s + \dfrac{i\alpha}{2^n} < \dfrac{k_0\alpha}{2^n}$.

Pour $k \in \mathbf{N}$, $i \leqslant k < k_0 - 1$ on a

$$\begin{aligned}\|f_{k+1} - g_{k+1}\| &= \left\|P_{\varphi(f_k), \frac{\alpha}{2^n}}(f_k) - P_{\varphi(f_i), \frac{\alpha}{2^n}}(g_k)\right\| \\ &\leqslant \left\|P_{\varphi(f_k), \frac{\alpha}{2^n}}(f_k) - P_{\varphi(f_i), \frac{\alpha}{2^n}}(f_k)\right\| + \left\|P_{\varphi(f_i), \frac{\alpha}{2^n}}(f_k - g_k)\right\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2^n}\frac{c}{a}\|f_k - f_i\|\,\|\varphi(f_k)A(f_k)\| + \|f_k - g_k\|.\end{aligned}$$

Or $\|\varphi(f_k)A(f_k)\| \leqslant 2\|\varphi(f)A(f)\|$ d'après le lemme 1

$$\begin{aligned}\text{et} \quad \|f_k - f_i\| &\leqslant \sum_{p=i}^{k-1}\|f_{p+1} - f_p\| \leqslant \sum_{p=i}^{k-1}\frac{\alpha}{2^n}\|\varphi(f_p)A(f_p)\| \\ &\leqslant (k-i)\frac{\alpha}{2^n}2\|\varphi(f)A(f)\| \leqslant 2s\|\varphi(f)A(f)\|.\end{aligned}$$

Par suite $\|f_{k+1} - g_{k+1}\| \leqslant \|f_k - g_k\| + \dfrac{c}{a}\dfrac{\alpha}{2^n}4\|\varphi(f)A(f)\|^2 s$.

De la même manière on montre

$$\begin{aligned}&\left\| u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n} + s\right) - P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right)\right\| \\ &\qquad \leqslant \|f_{k_0-1} - g_{k_0-1}\| + \frac{c}{a}\frac{\alpha}{2^n}4\|\varphi(f)A(f)\|^2 s.\end{aligned}$$

Finalement, compte tenu de $\|f_{i+1} - g_{i+1}\| = 0$ on a

$$\left\|u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n} + s\right) - P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right)\right\|$$
$$\leqslant \frac{(k_0 - i - 1)\alpha}{2^n}\, s\, \frac{4c}{a}\, \|\varphi(f)A(f)\|^2$$
$$\leqslant s^2\, \frac{4c}{a}\, \|\varphi(f)A(f)\|^2.$$

Lemme 5. — *Si* $f \in D(A)$ *et si* $\alpha \leqslant \dfrac{a}{2c\|\varphi(f)A(f)\|}$ *alors il existe une constante* $C_2 = \dfrac{4c}{a}\, \|\varphi(f)A(f)\|^2$ *telle que*

$$\forall t \in [0, \alpha[, \qquad \forall s > 0,$$
$$(s + t < \alpha) \Longrightarrow \|P_{\varphi(u(t)), s}(u(t)) - u(t+s)\| \leqslant C_2 s^2$$

où la fonction u *est celle introduite dans le corollaire du lemme* 2.

Avec ce lemme le théorème d'existence est démontré dans le cas où la donnée f est dans $D(A)$.

Démonstration. — Soit $t \in [0\alpha[$ et $s > 0$ avec $s + t < \alpha$. Il existe, pour tout $n \in \mathbf{N}$, un entier i tel que

$$\frac{i\alpha}{2^n} \leqslant t < \frac{(i+1)\alpha}{2^n}.$$

Posons $\beta = t - \dfrac{i\alpha}{2^n}$.

$$\|P_{\varphi(u_n(t)), s}(u_n(t)) - u_n(t+s)\|$$
$$\leqslant \left\|u_n(t+s) - P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}(u_n(t))\right\|$$
$$+ \left\|P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}(u_n(t)) - P_{\varphi(u_n(t)), s}(u_n(t))\right\|$$
$$\leqslant \left\|u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n} + \beta + s\right) - P_{\varphi\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), \beta+s}\left(u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right)\right\|$$
$$+ \left\|P_{\varphi\left(n_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right)\right), s}(u_n(t)) - P_{\varphi(u_n(t)), s}(u_n(t))\right\|.$$

On utilise le lemme 4 pour majorer le premier terme et V.1.3 pour majorer le second.

On obtient

$$\begin{aligned}\|u_n(t+s) - P_{\varphi(u_n(t)),s}(u_n(t))\| \\ &\leqslant \frac{4c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2(s+\beta)^2 \\ &+ s\frac{c}{a}\left\|u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right) - u_n(t)\right\| \|\varphi(u_n(t))A(u_n(t))\| \\ &\leqslant \frac{4c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2\left(s+\frac{\alpha}{2^n}\right)^2 + s\frac{c}{a}4\|\varphi(f)A(f)\|^2\frac{\alpha}{2^n}.\end{aligned}$$

On fait un passage à la limite dans cette inégalité lorsque n tend vers l'infini. On sait que $\|u_n(t+s) - u(t+s)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|P_{\varphi(u_n(t)),s}(u_n(t)) - P_{\varphi(u(t)),s}(u(t))\| \\ &\leqslant \|P_{\varphi(u_n(t)),s}(u_n(t) - u(t))\| + \|P_{\varphi(u_n(t)),s}(u(t)) - P_{\varphi(u(t)),s}(u(t))\| \\ &\leqslant \|u_n(t) - u(t)\| + \|P_{\varphi(u_n(t)),s}(u(t)) - P_{\varphi(u(t)),s}(u(t)\|\end{aligned}$$

d'après le lemme 3 cette quantité tend vers 0.

On obtient donc

$$\|u(t+s) - P_{\varphi(u(t)),s}(u(t))\| \leqslant \frac{4c}{a}\|\varphi(f)A(f)\|^2 s^2.$$

LEMME 6. — *Soient f et g deux fonctions de* D(A) *et* $\alpha \leqslant \operatorname{Inf}\left(\frac{K}{\|A(f)\|}, \frac{K}{\|A(g)\|}\right)$. *Par la construction précédente on associe à f et g deux fonctions u et v de $[0\alpha]$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ avec $u(0) = f$ et $v(0) = g$.*

On a l'inégalité

$$\operatorname*{Sup}_{t\in[0\alpha]}\|u(t) - v(t)\| \leqslant \|f - g\| e^{\frac{2c\alpha}{a}\|\varphi(f)A(f)\|}$$

Démonstration. — On va d'abord majorer $\|u_n(t) - v_n(t)\|$. Pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$, on pose

$$f_i = u_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad g_i = v_n\left(\frac{i\alpha}{2^n}\right).$$

Soit $t \in \left[\frac{i\alpha}{2^n}, \frac{(i+1)\alpha}{2^n}\right]$. On pose $\beta = t - \frac{i\alpha}{2^n}$.

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - v_n(t)\| &= \|P_{\varphi(f_i), \beta}(f_i) - P_{\varphi(g_i), \beta}(g_i)\| \\
&\leqslant \|P_{\varphi(f_i), \beta}(f_i) - P_{\varphi(g_i), \beta}(f_i)\| + \|P_{\varphi(g_i), \beta}(f_i - g_i)\| \\
&\leqslant \beta \frac{c}{a} \|f_i - g_i\| \, \|\varphi(f_i)A(f_i)\| + \|f_i - g_i\| \\
&\leqslant \|f_i - g_i\| \left(1 + 2 \frac{\alpha}{2^n} \frac{c}{a} \|\varphi(f)A(f)\|\right).
\end{aligned}$$

En particulier

$$\|f_{i+1} - g_{i+1}\| \leqslant \|f_i - g_i\| \left(1 + 2 \frac{\alpha}{2^n} \frac{c}{a} \|\varphi(f)A(f)\|\right).$$

Par suite

$$\forall i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant 2^n,$$

$$\|f_i - g_i\| \leqslant \|f - g\| \left(1 + \frac{\alpha}{2^n} \frac{c}{a} 2\|\varphi(f)A(f)\|\right)^i.$$

D'où

$$\forall t \in [0\alpha],$$

$$\|u_n(t) - v_n(t)\| \leqslant \|f - g\| \left(1 + \frac{\alpha}{2^n} \frac{c}{a} 2\|\varphi(f)A(f)\|\right)^{2^n}$$

$$\forall t \in [0\alpha], \quad \|u(t) - v(t)\| \leqslant \|f - g\| e^{\frac{2c\alpha}{a}\|\varphi(f)A(f)\|},$$

par passage à la limite.

Corollaire. — *Nous obtenons le théorème d'existence dans le cas général où* $f \in D_m$.

Démonstration. — Soit $m \in \,]0, +\infty[$ et $f \in D_m$.

Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $D(A)$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \|Af_n\| \leqslant m$$

et $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

On pose $\alpha = \frac{K}{m}$.

A toute fonction f de $D(A) \cap D_m$ on associe, par la construction précédente une fonction u de $[0\alpha]$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$, u étant une solution du problème (I) avec $u(0) = f$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit u^n la fonction de $[0\alpha]$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ associée à f_n.

D'après le lemme 6 on a l'inégalité

$$\forall n, p \in \mathbf{N}, \quad \sup_{t \in [0\alpha]} \|u^n(t) - u^p(t)\| \leqslant \|f_n - f_p\| e^{\frac{2bc\alpha m}{a}}$$

$(u^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}([0\alpha], \mathscr{C}^0(X, \Lambda))$. Elle converge donc vers une fonction continue u de $[0\alpha]$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$.

D'autre part l'inégalité du lemme 5 donne

$$\forall t \in [0, \alpha[, \quad \forall s > 0, \quad (s + t < \alpha), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$
$$\|P_{\varphi(u^n(t)), s}(u^n(t)) - u^n(t + s)\| \leqslant \frac{4c}{a} b^2 m^2 s^2.$$

Par passage à la limite, d'après le lemme 3, il vient

$$\|P_{\varphi(u(t)), s}(u(t)) - u(t + s)\| \leqslant \left(\frac{4c}{a} b^2 m^2\right) s^2.$$

De plus on a bien $u(0) = f$.

On a donc démontré le théorème d'existence.

L'unicité provient du lemme 7, compte tenu de la remarque suivante :

Remarque. — *Pour tout* f *de* D_m *et tout* t *dans* $\left[0 \frac{K}{m}\right]$ *on a* $u(t) \in D_{2\frac{b}{a}m}$, *où* u *est la solution de* (I) *associée à la fonction* f *par la construction précédente.*

C'est une conséquence du lemme 1.

LEMME 7. — *Soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ *et* u *et* v *deux solutions du problème* (I) *sur un intervalle* $[0\beta]$. *Supposons qu'il existe* $m \in]0 + \infty[$ *tel que*

$$\forall t \in [0\beta], \qquad u(t) \in D_m.$$

Alors $u = v$.

Démonstration. — Supposons $u \neq v$.

Soit $s = \inf \{t \in [0\beta]/u(t) \neq v(t)\}$.

On a $u(s) = v(s)$ et $s < \beta$.

Posons $\delta = \inf\left(\frac{a}{2bcm}, \beta - s\right)$; $\varepsilon > 0$ étant donné on considère

$$\eta = \operatorname{Sup} \{r \leqslant \delta/\forall t \in [0r], \|u(s + t) - v(s + t)\| \leqslant \varepsilon t\}.$$

On a en particulier $\|u(s+\eta)-v(s+\eta)\| \leqslant \varepsilon\eta$.
Supposons que l'on ait $\eta < \delta$.
Pour ξ assez petit on a

$$\|P_{\varphi(u(s+\eta)),\xi}(u(s+\eta)) - u(s+\eta+\xi)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\xi$$

et $$\|P_{\varphi(v(s+\eta)),\xi}(v(s+\eta)) - v(s+\eta+\xi)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\xi.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\|u(s+\eta+\xi) - v(s+\eta+\xi)\| \leqslant{}& \frac{\varepsilon}{2}\xi \\ &+ \|P_{\varphi(v(s+\eta)),\xi}(v(s+\eta) - u(s+\eta))\| \\ &+ \|P_{\varphi(v(s+\eta)),\xi}(u(s+\eta)) - P_{\varphi(u(s+\eta)),\xi}(u(s+\eta))\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u(s+\eta+\xi) - v(s+\eta+\xi)\| & \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\xi + \varepsilon\eta + \frac{cbm}{a}\varepsilon\eta\xi \quad \text{(d'après V.1.4)} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\xi + \varepsilon\eta + \frac{\varepsilon}{2}\xi = \varepsilon(\eta+\xi)\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de η. Par suite $\eta = \delta$, donc

$$\forall t \in [0\delta], \qquad \|u(s+t) - v(s+t)\| \leqslant \varepsilon t.$$

Ceci étant vrai pour tout ε, on a

$$\forall t \in [0\delta], \qquad u(s+t) = v(s+t)$$

ce qui contredit la définition de s.

3. Étude d'un contre exemple.

Nous allons montrer, à l'aide d'un contre exemple, qu'il existe des cas où la fonction u du théorème V.2.1 ne peut pas être prolongée sur tout l'intervalle $[0+\infty[$ en une solution de (I).

V.3.1. — On prend pour X l'intervalle $]-\infty, 3]$.
On définit un opérateur A sur $\mathscr{C}^0(]-\infty, 3], \mathbf{R})$ par $D(A) = \{f \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3])/f$ est dérivable et

$$f' \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3])\}$$
$$A(f) = -f'.$$

A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$

défini sur $\mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3]), \qquad \forall t \geqslant 0,$$
$$\forall x \in]-\infty, 3], \qquad P_t(f)(x) = f(x-t).$$

Soit θ une fonction continue de $]-\infty, 3]$ dans $[ab]$, avec $0 < a < b$. Si $g \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$, $t \geqslant 0$, $x \in]-\infty, 3]$ on pose

$$P_{\theta,t}(g)(x) = g(y)$$

où y est l'unique point de $]-\infty, 3]$ tel que $\displaystyle\int_y^x \frac{dr}{\theta(r)} = t.$

La famille $(P_{\theta,t})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe sur $\mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$ en effet,

(i) $$P_{\theta,0}(g) = g$$

(ii) $$P_{\theta,t}(P_{\theta,s}(g))(x) = P_{\theta,s}(g)(z) = g(y)$$

où z et y sont définis par $\displaystyle\int_y^x \frac{dr}{\theta(r)} = t$ et $\displaystyle\int_y^z \frac{dr}{\theta(r)} = s.$

Par suite $\displaystyle\int_y^x \frac{dr}{\theta(r)} = t + s$, on a donc bien

$$P_{\theta,t}(P_{\theta,s}(g))(x) = P_{\theta,t+s}(g)(x).$$

(iii) Si g est une fonction de $\mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \forall x \in]-\infty, 3],$$
$$[P_{\theta,t}(g) - g](x) = g(y) - g(x) \quad \text{avec} \quad \int_y^x \frac{dr}{\theta(r)} = t.$$

On a donc $|x-y| < bt$.

D'après l'uniforme continuité de g sur $]-\infty, 3]$ on obtient

$$\lim_{t\to 0} \|P_{\theta,t}(g) - g\| = 0.$$

Le semi-groupe $(P_{\theta,t})_{t\geqslant 0}$ admet l'opérateur θA pour générateur infinitésimal.

Soit $g \in D(A)$ et $x \in]-\infty, 3]$,

$$\begin{aligned}\frac{P_{\theta,t}(g)(x) - g(x)}{t} &= \frac{g(y) - g(x)}{t} \quad \text{avec} \quad \int_y^x \frac{dr}{\theta(r)} = t \\ &= \frac{y-x}{t} g'(z_1) \quad \text{avec} \quad z_1 \in [yx] \\ &= -\theta(z_2)g'(z_1) \quad \text{avec} \quad z_2 \in [yx] \\ &\to -\theta(x)g'(x) \quad \text{lorsque} \quad t \to 0.\end{aligned}$$

Par suite $\dfrac{P_{\theta,t}(g) - g}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \theta A(g) \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$ simplement.

Or le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction sur $\mathscr{C}^0(X, \Lambda)$ est un opérateur dissipatif maximal. Il peut donc être défini indifféremment par limite uniforme ou limite simple.

Donc θA est le générateur infinitésimal de $(P_{\theta,t})_{t \geqslant 0}$.

V.3.2. — Soit T la fonction de **R** dans **R** définie par

$$\begin{cases} T(x) = 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ T(x) = 2 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ T(x) = 1 & \text{si } 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Pour $g \in \mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$ on pose $\varphi(g) = T \circ g$.

On définit ainsi une fonction φ de $\mathscr{C}^0(]-\infty, 3])$ dans $\mathscr{L}(1, 2)$ lipschitzienne de rapport 1.

Soit f la fonction de $]-\infty, 3]$ dans **R** définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) = 1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

f est une fonction de D_1.

Soit u la fonction de $]-\infty, 3] \times [0 1[$ dans **R** définie par

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{si } x \leqslant 2t \\ u(x, t) = \dfrac{x - 2t}{1 - t} & \text{si } 2t \leqslant x \leqslant 1 + t \\ u(x, t) = 1 & \text{si } 1 + t \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Proposition. — *u vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $$u(.\,, 0) = f,$$

(ii) $$\forall t \in [0, 1[,\ u(.\,, t) \in D_{\frac{1}{1-t}}$$

(iii) $$\forall t \in [0, 1[,\ \| u_{t+s} - P_{\varphi(u_t), s}(u_t) \| = o(s),$$

où $$u_t = u(.\,, t),$$

(iv) *u n'a pas de limite au point* $(2, 1)$.

Cette proposition et le lemme 7 de V.2.1 montrent qu'il n'existe pas de solution du problème (I) avec condition initiale f et définie sur tout l'intervalle $[0\ \infty[$.

Démonstration. — Les propriétés (i), (ii) et (iv) sont immédiates. Montrons (iii).

Soit t fixé dans $[0, 1[$.

On pose $\theta = \varphi(u_t)$. On a donc

$$\begin{cases} \theta(x) = 2 & \text{si} \quad x \leqslant 2t \\ \theta(x) = \dfrac{2-x}{1-t} & \text{si} \quad 2t \leqslant x \leqslant 1+t \\ \theta(x) = 1 & \text{si} \quad 1+t \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Pour tout x dans $]-\infty, 3]$ et tout $s \geqslant 0$ notons $\alpha(x, s)$ l'élément y de $]-\infty, 3]$ défini par

$$\int_y^x \frac{1}{\theta(r)}\, dr = s.$$

On a $P_{\theta, s}(u_t)(x) = u(\alpha(x, s), t)$.

D'autre part on vérifie facilement la relation suivante

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \forall s, \quad 0 \leqslant s < 1 - t, \quad \forall x \in]-\infty, 3]$$

$$u(x, t+s) = u\left(\frac{x(t-1) + 2s}{t+s-1}, t\right)$$

où l'on prolonge u en posant $u(x, t) = 1$ si $t \in [0, 1[$ et $x \geqslant 3$. On a donc

$$\|u_{t+s} - P_{\varphi(u_t), s}(u_t)\| = \sup_{x \in]-\infty\, 3]} \left| u\left(\frac{x(t-1) + 2s}{t+s-1}, t\right) - u(\alpha(x, s), t)\right|.$$

Posons $\gamma(x, s) = \dfrac{x(t-1) + 2s}{t+s-1} - \alpha(x, s)$

γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 3] \times [0, \eta]$ pour η assez petit et on a

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(x, s) = \frac{(2-x)(t-1)}{(t+s-1)^2} + \theta(\alpha(x, s)).$$

D'où $\dfrac{\partial \gamma}{\partial s}(x, 0) = \dfrac{2-x}{t-1} + \theta(x)$.

Par suite $\dfrac{\partial \gamma}{\partial s}(x, 0) = 0$ pour $2t \leqslant x \leqslant 1 + t$.

D'autre part $\forall x \in]-\infty, +3]$, $\gamma(x, 0) = 0$.

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe donc $\xi_1 > 0$, tel que

$$\forall s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \xi_1, \quad \forall x,$$
$$2t - \xi_1 \leqslant x \leqslant 1 + t + \xi_1, \qquad |\gamma(x, s)| \leqslant \varepsilon s.$$

De plus il existe $\xi_2 > 0$ tel que, pour tout $s < \xi_2$,

$$u_{t+s}(x) = \mathrm{P}_{\varphi(u_t), s}(u_t)(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 2t - \xi_1$$

et $$u_{t+s}(x) = \mathrm{P}_{\varphi(u_t), s}(u_t)(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 1 + t + \xi_1.$$

En posant $\xi = \inf(\xi_1, \xi_2)$ on obtient, $\forall s \in [0, \xi]$,

$$\begin{aligned} \|u_{t+s} - \mathrm{P}_{\varphi(u_t), s}(u_t)\| &= \|u_{t+s} - \mathrm{P}_{\varphi(u_t), s}(u_t)\|_{[2t-\xi_1, 1+t+\xi_1]} \\ &\leqslant \mathrm{N} \sup_{x \in [2t-\xi_1, 1+t+\xi_1]} |\gamma(x, s)| \leqslant \mathrm{N}\varepsilon s \end{aligned}$$

où l'on a noté N le rapport de Lipschitz de la fonction lipschitzienne $u_t \left(\mathrm{N} = \dfrac{1}{1-t}\right)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Allain, Sur la représentation des formes de Dirichlet, Thèse de 3e cycle, Septembre 1973, Paris XI (Orsay), *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, Fasc. 3-4 (1975), 1-10.

[2] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet Spaces, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, 45 (1959), 208-215.

[3] Ph. Courrege, Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}^{\infty}$ dans $\mathscr{C}$ satisfaisant au principe du maximum, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Théorie du potentiel, 10e année (1965-1966).

[4] J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Théorie du potentiel, 4e année (1959-1960), No 5.

[5] J. R. Dorroh, Contraction semi-groups in a function space, *Pacific J. Math.*, 19 (1966), 35-38.

[6] M. Duflo, Semi-groups of complex measures on a locally compact group, (Preprint).

[7] E. B. Dynkin, Markov Processes, Springer-Verlag, 1965.

[8] J. Faraut, Semi-groups of invariant operators, (Preprint). Vancouver. Août 1974.

[9] J. Faraut, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 20, Fasc. 1 (1970), 235-301.

[10] J. Faraut et K. Harzallah, Semi-groupes d'opérateurs invariants et opérateurs dissipatifs invariants, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 22, Fasc. 2 (1972), 147-164.

[11] F. Hirsch, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 22, Fasc. 1 (1972), 89-210.

[12] F. Hirsch, Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants par translation sur les groupes localement compacts, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Théorie du potentiel, 14e année, (1970-1972), No 16.

[13] F. Hirsch et J. P. Roth, Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants sur un espace homogène, Théorie du potentiel et Analyse harmonique, *Lecture Notes* 404, Springer (1974), 229-245.

[14] F. Hirsch et J. P. Roth, Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants sur un espace homogène, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 274 (1972), Série A, 1791-1793.

[15] G. A. Hunt, Semi-groups of measures on Lies groups, *Trans. A.M.S.*, 81 (1956), 264-293.

[16] J. Neveu, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 22, Fasc. 2 (1972), 85-130.

[17] J. P. Roth, Approximation des opérateurs dissipatifs, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 276 (1973), Série A, 1285-1287.

[18] J. P. Roth, Sur les semi-groupes à contraction invariants sur un espace homogène, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 277 (1973), Série A, 1091-1094.

[19] J. P. Roth, Opérateurs carrés du champ et formule de Lévy-Khinchine sur les espaces localement compacts, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 278 (1974), Série A, 1103-1106.

[20] J. P. Roth, Restriction à un ouvert d'un générateur infinitésimal local, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 279 (1974), Série A, 363-366.

Manuscrit reçu le 30 juin 1975
Proposé par G. Choquet.

Jean-Pierre Roth,
E.N.S.E.T.
61, avenue du Président-Wilson
94230 Cachan.