ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD REYNAUD

Quelques résultats sur les solutions de systèmes d'inéquations de type parabolique

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 1 (1977), p. 167-230

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_1_167_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 1 (1977), 167-230

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES SOLUTIONS DE SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DE TYPE PARABOLIQUE

par Gérard REYNAUD

NOTATIONS ET HYPOTHESES

Soient, Ω un ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, T un réel positif, S le cylindre $\Omega \times [0, T]$. Nous noterons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et t un élément de $[0, T]$.

La boule ouverte, de centre l'origine de rayon ρ dans $\mathbf{R}^n$ sera notée B_ρ,

S_ρ sera la sphère de centre l'origine, de rayon ρ, dans $\mathbf{R}^n$.

Nous noterons par :

ω_ρ l'ensemble $B_\rho \cap \Omega$

σ_ρ l'ensemble $S_\rho \cap \Omega$

Γ la frontière de Ω.

Si f est une fonction différentiable, définie dans S, nous noterons par :

$D_i f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i,

$D_t f$ la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t.

Soient $u = (u_1, \ldots, u_N)$ et $v = (v_1, \ldots, v_N)$ des applications définies dans S à valeur dans $\mathbf{R}^N$, nous noterons par :

$u \,.\, v$ la fonction définie par :

$$u \,.\, v = u_1 v_1 + \cdots + u_p v_p + \cdots + u_N v_N ,$$

$D_i u$ l'application, définie dans S à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, définie par :

$$D_i u = (D_i u_1 \ ; D_i u_2 \ ; \dots ; D_i u_N)$$

$D_t u$ l'application, définie dans S à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, définie par :

$$D_t u = (D_t u_1 \ ; D_t u_2 \ ; \dots ; D_t u_N)$$

Nous considèrerons l'opérateur suivant :

$$Lu = \left\{ \sum_{i=1}^{n} D_i[\mathcal{R}_{i,p}(u)] - \sum_{k=1}^{N} D_t[\alpha_{p,k} u_k] \right\} = A(u) - D_t Bu$$

où, u est une application de S dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant certaines propriétés, $\mathcal{R}_{i,p}(u)$ sont des opérateurs du premier ordre vérifiant certaines propriétés et $\alpha_{p,k}$ sont des fonctions définies dans S.

Nous noterons toujours par i et j deux indices qui varieront de 1 à n et par p et k deux indices qui varieront de 1 à N.

Pour simplifier, nous écrirons $\sum\limits_i , \sum\limits_{i,j} , \sum\limits_p , \dots$

au lieu de $\sum\limits_{i=1}^{n} , \sum\limits_{i,j=1}^{n} , \sum\limits_{p=1}^{N} , \dots$

Nous utiliserons des fonctions poids que nous noterons par Φ et ψ. Elles seront définies, en général, dans $\mathbf{R}_+ \times [a, b]$, où $[a, b]$ représente un segment de $\mathbf{R}$.

Nous leur associerons de nouvelles fonctions que nous noterons toujours par Φ et ψ définies dans $\mathbf{R}^n \times [a, b]$ par :

$$(x, t) \to \Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$$

où x appartient à $\mathbf{R}^n$ et t appartient à $[a, b]$; de même pour ψ.

Pour simplifier, nous noterons par,

$$\Phi_{|x|}, \Phi_i, \Phi_t \dots \text{ les fonctions } D_{|x|}\Phi \ ; D_i\Phi \ ; D_t\Phi \dots$$

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous avons cherché à obtenir des théorèmes relatifs aux solutions d'inéquation du type :

$$\text{a)} \quad \int_{\omega_r} (\mathrm{L}v)^2 \, dx \leqslant \int_{\omega_r} \left[\mathrm{C}_1 v^2 + c_2 \sum_i (\mathrm{D}_i v)^2 \right] dx \, ,$$

où L est un opérateur du type parabolique, ω_r défini dans les Notations p. 1.

Si L est linéaire, elliptique ou hyperbolique, on sait que a) peut être considérée comme une inéquation du type Calderon donnant lieu à des théorèmes d'unicité du problème de Cauchy (séminaire de Schwartz 1960).

Ceci n'est plus valable dans le cas où L est parabolique : pour l'équation de la chaleur par exemple, il n'y a pas unicité si on n'impose pas un ordre de croissance aux solutions [5].

On connaît d'autre part dans le cas où L est parabolique certains résultats donnant lieu à des théorèmes d'unicité rétrograde (voir par exemple [1], [6], [7], [8]).

Nous nous sommes intéressés principalement aux problèmes d'unicité directe étudiés entre autres par M. Nicolescu et C. Foias [10], P. Mustata [9] et J. Chabrowsky [3].

L'idée de ce travail nous a été suggérée à la lecture des travaux de D.E. Edmunds et Valérie Williams [4].

Bien que nous ne traitions pas du même sujet, notre lemme 0,3 permet d'améliorer les résultats obtenus par ces auteurs.

En effet, ils considèrent un ensemble Ω inclus dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Ω est le complémentaire d'un borné de $\mathbf{R}^n$,

2) On peut utiliser la formule de Green à l'ensemble ω_r.

En utilisant le lemme 0,3 leurs théorèmes restent valables quand Ω est un ouvert quelconque.

Sur les conseils de Monsieur H. Morel, nous avons introduit dans la formulation du problème et les démonstrations, des fonctions poids permettant ainsi d'obtenir des théorèmes d'unicité dans des classes de fonctions non bornées.

D'autre part, sur l'avis de Monsieur J. Leray, nous n'avons pas cherché uniquement à obtenir des théorèmes d'unicité, mais des théorèmes plus généraux qui peuvent être considérés comme des résultats d'estimation a priori.

Dans le chapitre I, nous traitons le cas où L est non linéaire. Pour généraliser, nous considérons un système de N équations

$$Lu = \left\{ \sum_{i=1}^{n} D_i[\mathcal{P}_{i,p}(u)] - \sum_{k=1}^{n} D_t[\alpha_{p,k}\, u_k] \right\}$$

et nous étudions les solutions de l'inéquation suivante :

$$\text{b)} \int_{\omega_r} - 2u\, Lu\, dx \leqslant \int_{\omega_r} \left[C_1\, u^2 + \mu \sum_{i,p} \mathcal{P}_{i,p}(u)\, D_i u_p\right] dx$$

où μ est une constante positive inférieure à 2.

A notre connaissance, les auteurs ayant étudié certains problèmes sur les solutions de a), ont considéré le cas où L est linéaire et vérifie la condition d'ellipticité uniforme suivante :

$$\sum_{i,j,p,k} a_{ijk}^{p}\, D_i u_p\, D_j u_k \geqslant \alpha \sum_{i,p} (D_i u_p)^2$$

où α est un nombre strictement positif et

$$\sum_{j,k} a_{ijk}^{p}\, D_j\, u_k = \mathcal{P}_{i,p}(u)$$

Dans ce cas particulier b) est plus générale que a). Or, dans ce travail, nous n'imposons pas la condition d'ellipticité uniforme, mais la condition plus faible suivante :

$$\sum_{i,p} \mathcal{P}_{i,p}(u)\, D_i u_p \geqslant 0$$

Ce qui nous a amené à étudier les solutions de b).

Nous obtenons comme résultat principal dans ce chapitre que, sous certaines conditions que doit vérifier la fonction poids Φ, la fonction $t \to \int_{\Omega} \Phi^2 v^2\, dx$ est décroissante.

Dans le paragraphe 2 (chap. I), nous nous intéressons au cas où N = 1, et nous obtenons ainsi des résultats semblables à ceux du paragraphe précédent mais ne portant que sur la partie positive ou la partie négative des solutions.

Dans le chapitre II (cas linéaire), nous avons cherché principalement à déterminer des fonctions poids Φ, vérifiant les conditions demandées dans le chapitre I, pour le cas particulier où on connaît un ordre de croissance des coefficients intervenant dans b). Nous en déduisons alors des théorèmes analogues aux précédents et dont nous nous servons dans le chapitre III pour obtenir des théorèmes d'unicité.

Nous insistons plus particulièrement sur le paragraphe 2 (chap.III) où nous obtenons (cas $N = 1$) des théorèmes d'unicité en n'imposant une restriction de croissance qu'à la partie négative de la solution. Les résultats obtenus sont plus forts que ceux de J. Chabrowsky [3] qui, déjà, généralise ceux de [9] [10].

Rappelons brièvement ses hypothèses et son théorème :

Il considère une équation parabolique de la forme :

$$\text{c)}\quad Lu = \sum_{i,j} a_{ij} D_i[D_j u] + \sum_i b_i D_i u + cu - D_t u = 0$$

$a_{ij} = a_{ji}$.

I Si les coefficients de l'équation sont holdériens par rapport aux variables (x, t) dans $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ et de classe $C^2(\mathbf{R}^n \times [0, T])$ par rapport aux variables spatiales $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

II s'il existe une constante positive K telle que :

$$\begin{cases} |a_{ij}(x,t)| \leqslant K \; ; \; |D_i a_{ij}(x,t)| \, , \; |b_i(x,t)| \leqslant K(1 + |x|) \\ |D_i[D_j a_{ij}(x,t)]| \, , \; |D_i b_i(x,t)| \, , \; |c(x,t)| \leqslant K(1 + |x|)^2 , \end{cases}$$

III si la forme quadratique

$$A(\xi) = \sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j$$

est uniformément elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$A(\xi) \geqslant \alpha |\xi|^2 ,$$

si u est une solution de b) vérifiant :

$$\begin{cases} u, D_t u, D_i u, D_i[D_j u] \text{ continues dans } \mathbf{R}^n \times [0, T] \\ \int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} u_-(x,t) \exp(-m |x|^2)\, dx < +\infty \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{où } m \text{ est une constante positive et } u_-(x,t) = \max[0, -u(x,t)],\\ u(x,0) = 0\end{array}\right.$$

alors $u(x,t) \geqslant 0$ dans $\mathbf{R}^n \times [0,T]$.

En se référant à notre paragraphe 2 (chap. III), si les coefficients vérifient I, II′ (ou II″), III :

$$\text{II}' \left\{\begin{array}{l} |a_{ij}(x,t)| \leqslant K(1+|x|)^{\lambda} ;\\ |b_i(x,t)|^2,\ |D_i a_{ij}(x,t)|^2,\ |c| \leqslant K(1+|x|)^{2-\lambda}\\ \lambda \text{ constante vérifiant } 0 \leqslant \lambda < 2\end{array}\right.$$

$$\text{II}'' \left\{\begin{array}{l} |a_{ij}(x,t)| \leqslant K(1+|x|)^2\,[\mathrm{Log}(2+|x|]^2\\ |b_i(x,t)|\ ,\ |D_i a_{ij}(x,t)|^2,\ |c| \leqslant K[\mathrm{Log}(2+|x|)]^{2-\nu}\\ \nu \text{ constante vérifiant } 0 \leqslant \nu \leqslant 1\end{array}\right.$$

et si u est solution de b) vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} u,\ D_t u,\ D_i u,\ D_i[D_j u] \text{ continues dans } \mathbf{R}^n \times [0,T]\\ \displaystyle\int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} u_-\ (x,t) \exp(-m\,|x|^{2-\lambda})\,dx\\ \text{dans le cas de la condition II}'\\ \text{ou}\\ \displaystyle\int_0^T dt \int_{\mathbf{R}^n} u_-(x,t) \exp[-m[\mathrm{Log}(2+|x|)]^{2-\nu}]\,dx\\ \text{dans le cas de la condition II}''\\ u(x,0) \geqslant 0\end{array}\right.$$

alors, en utilisant les théorèmes 3.2.1, 3.2.2, nous obtenons

$$u(x,t) \geqslant 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n \times [0,T]\,.$$

En utilisant le théorème de G. Aronson et P. Besala [2], il obtient :

$$u(x,t) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n \times [0,T]\,.$$

Dans le cas II′, avec des conditions plus faibles nous pouvons, nous aussi, utiliser le résultat de [2] et obtenir que si

$$u(x,0) = 0 \text{ alors } u(x,t) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n \times [0,T]\,.$$

Dans le paragraphe 3 (chap. III), nous donnons des exemples montrant que, dans un certain sens, nous ne pouvons pas améliorer les résultats précédents.

Dans le chapitre IV, nous démontrons un théorème relatif aux fonctions poids, éliminant la possibilité d'obtenir, dans un certain sens, de nouvelles fonctions poids donnant de meilleurs résultats que ceux du chapitre II.

Enfin, nous montrons sur quelques cas particuliers, que la méthode utilisée est applicable à la recherche de théorèmes d'unicité dans des cas non linéaires.

CHAPITRE 0

RESULTATS ET LEMMES DE REFERENCE

LEMME 0.1. – *Si f est une fonction définie sur le segment $[a, b]$ décroissante, continue, positive. Si g est une fonction intégrable sur $[a, b]$ alors il existe X vérifiant $a \leqslant X \leqslant b$ tel que*

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(a) \int_a^X g(t)\, dt .$$

Démonstration. – C'est une conséquence directe du deuxième théorème de la moyenne. Il suffit d'approcher dans $L^1[a, b]$ la fonction g par des fonctions continues.

DEFINITION 0.1. – *Soit u une application définie dans $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, nous noterons par $\hat{u}$ l'application définie dans $\mathbf{R}^n \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ par :*

$\hat{u}(x, t) = u(x, t)$ pour tout (x, t) appartenant à $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$

$\hat{u}(x, t) = 0$ pour tout (x, t) appartenant à $(\mathbf{R}^n - \bar{\Omega}) \times [t_1, t_2]$.

LEMME 0.2. – *Si u est lipschitzienne dans tout borné de $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$; si u est nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$,*

alors $\hat{u}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbf{R}^n \times [t_1, t_2]$ et on a :

$D_i u = D_i \hat{u}$ presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$

$D_i \hat{u} = 0$ presque partout dans $(\mathbf{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$.

Démonstration. – Pour démontrer que $\hat{u}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbf{R}^n \times [t_1, t_2]$ il suffit de démontrer que :

$$\left| \frac{\hat{u}_p(M_1) - \hat{u}_p(M_2)}{|M_1 M_2|} \right| \leqslant K_p ,$$

où M_1 et M_2 sont deux points d'un borné B de $\mathbf{R}^n \times [t_1, t_2]$ et K_p sont les constantes de lipschitz sur $B \cap \bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$ des fonctions u_p ($K_p = 0$ si $B \cap \bar{\Omega} \times [t_1, t_2] = \phi$).

Cette inégalité est évidente si on étudie les trois cas possibles :

M_1 et M_2 appartenant à $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$

M_1 et M_2 appartenant à $(\mathbf{R}^n - \Omega) \times [t_1, t_2]$

M_1 appartenant à $\Omega \times [t_1, t_2]$ et M_2 appartenant à $(\mathbf{R}^n - \overline{\Omega}) \times$ $\times [t_1, t_2]$.

Les résultats sur les dérivées de $\hat{u}$ sont évidents dans le cas où la mesure de Γ dans $\mathbf{R}^n$ est nulle. Dans le cas où la mesure de Γ dans $\mathbf{R}^n$ n'est pas nulle, il suffit alors d'utiliser le théorème de densité de Lebesgue.

Remarque 0.1. – L'intervalle $[t_1, t_2]$ n'intervient pas effectivement dans la démonstration et on a pour tout $t \in [t_1, t_2]$.

$D_i u = D_i \hat{u}$ presque partout dans $\Omega \times \{t\}$,

$D_i \hat{u} = 0$ presque partout dans $(\mathbf{R}^n - \Omega) \times \{t\}$ où le presque partout est pris dans le sens de la mesure de $\mathbf{R}^n$.

LEMME 0.3. – *Soit f une fonction définie dans $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$, lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$ nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$, admettant une dérivée $D_i f$ continue sur $\overline{\Omega} \times [t_1, t_2]$; alors nous avons pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$*

$$\int_{\omega_r} D_i f\, dx = \int_{B_r} D_i \hat{f}\, dx = \int_{S_r} \hat{f} \frac{x_i}{r}\, dS = \int_{\sigma_r} f \frac{x_i}{r}\, dS\,.$$

Démonstration. – D'après la remarque précédente, on a bien :

$$\int_{\omega_r} D_i f\, dx = \int_{B_r} D_i \hat{f}\, dx\,.$$

Comme $\hat{f}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathbf{R}^n \times \{t\}$, elle est absolument continue sur toutes parallèles aux axes ; si on utilise le théorème de Fubini et si on intègre d'abord par rapport à la variable x_i, on obtient :

$$\int_{B_r} D_i \hat{f}\, dx = \int_{S_r} \hat{f} n_i\, dS = \int_{\sigma_r} f n_i\, dS$$

où dS est l'élément d'aire de S_r, $n = (n_i)$ est la normale extérieure à $S_r \left(n_i = \dfrac{x_i}{r}\right)$. Ce qui démontre le lemme.

DÉFINITION 0.2. – *Soit f une fonction définie dans $B \subset \mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ nous définissons deux nouvelles fonctions notées f_+ et f_- définies dans B par :*

$$f_+(x) = \max[0, f(x)], \ x \in B$$
$$f_-(x) = \max[0, -f(x)], \ x \in B .$$

LEMME 0.4. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction appartenant à $C^1(\overline{\Omega})$. On a les résultats suivants :*

1) *la fonction f_+ admet presque partout dans Ω des dérivées partielles et, si on appelle Ω_1 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) > 0$ et Ω_2 l'ensemble des points x de Ω où $f(x) \leqslant 0$, on a :*

les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et de $D_i f$ sont égales,

la restriction à Ω_2 de $D_i f_+$ est nulle presque partout ;

2) *la fonction f_+ est lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega}$.*

Démonstration. – L'ensemble Ω_1 est un ouvert. Nous avons donc :

les restrictions à Ω_1 des fonctions f_+ et f sont égales, et les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et $D_i f$ sont, elles aussi, égales.

Montrons que sur Ω_2, f_+ admet presque partout des dérivées partielles qui sont nulles.

Soit P_0 de composantes $(x_1, \dots, x_n)$ un point de Ω_2 et considérons la droite $\Delta(P_0, i)$ passant par P_0 et parallèle à l'axe des x_i. Notons par :

$$\begin{array}{lll} \Omega(P_0, i) & \text{l'ensemble} & \Omega \cap \Delta(P_0, i) \\ \Omega_1(P_0, i) & \text{l'ensemble} & \Omega_1 \cap \Delta(P_0, i) \\ \Omega_2(P_0, i) & \text{l'ensemble} & \Omega_2 \cap \Delta(P_0, i) . \end{array}$$

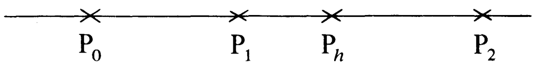
Soit P_h un point de $\Omega(P_0, i)$ de composantes $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$ et étudions le rapport :

$$\frac{f_+(P_h) - f_+(P_0)}{h}$$

Si P_h appartient à $\Omega_2(P_0, i)$ le rapport précédent est nul (numérateur nul).

Si P_h appartient à $\Omega_1(P_0, i)$, on a : $\Omega_1(P_0, i)$ est un ouvert de $\Omega(P_0, i)$.

Soit (P_1, P_2) le plus grand intervalle ouvert contenant P_h et contenu dans $\Omega_1(P_0, i)$. On supposera que P_1 se trouve entre P_0 et P_h :



Comme f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$, on a :

$|f(P_h) - f(P_1)| \leqslant M\,|P_h - P_0|$ où M est un majorant de $|D_i f|$ quand on se limite à un borné de $\bar{\Omega}$, ce borné contenant les points P_1 et P_h. Comme $\Omega(P_0, i)$ est un ouvert, on pourra toujours prendre P_h suffisamment proche de P_0, de telle sorte que le segment $[P_0, P_h]$ soit inclus dans Ω, c'est-à-dire que P_1 n'appartienne pas à la frontière de Ω. On a donc, pour tout point P_0 appartenant à Ω_2, et pour P_h appartenant à $\Omega_1(P_0, i)$

$$\left|\frac{f_+(P_h) - f_+(P_0)}{h}\right| = \left|\frac{f_+(P_h) - f_+(P_1)}{h}\right| = \left|\frac{f(P_h) - f(P_1)}{h}\right| \leqslant M \left|\frac{P_h - P_1}{|h|}\right|$$

car $f_+(P_0) = f_+(P_1) = 0 = f(P_1)$.

Si P_0 est un point de densité de $\Omega_2(P_0, i)$, nous savons que ce rapport tend vers zéro quand $|h|$ tend vers zéro. En conclusion, si P_0 est un point de densité de $\Omega_2(P_0, i)$, alors $D_i f_+$ existe et on a $D_i f_+ = 0$ en P_0.

D'après le théorème de densité de Lebesgue, presque tous les points de $\Omega_2(P_0, i)$ sont points de densité. Donc en presque tout point de $\Omega_2(P_0, i)$ $D_i f_+ = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que, en presque tout point de Ω_2, $D_i f_+ = 0$; ce qui démontre la première partie du lemme (le presque partout est pris dans le sens de la mesure de **R**).

La deuxième partie du lemme est évidente, il suffit pour cela de remarquer que pour tous x, y appartenant à $\bar{\Omega}$, on a :

$$|f_+(x) - f_+(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

et que, de plus, comme f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$, alors f est lipschitzienne sur tout borné de $\bar{\Omega}$.

DÉFINITION 0.3. – *Nous dirons que l'application u définie dans* S *à valeurs dans* $\mathbf{R}^N$, *appartient à* $[C^{1,2}(S)]^N$ *si u appartient à* $[C^1(S)]^N$ *et si pour tout couple* (i,j), $D_i[D_j u]$ *est une application continue dans* S.

LEMME 0.5. – *Soit* $F_{j,p,k}$ *des fonctions appartenant à* $C^1(\bar{\Omega} \times [t_1, t_2])$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T)$ *vérifiant la propriété suivante :* $F_{j,k,p} = F_{j,p,k}$.

Soit v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, *v nulle sur* $\Gamma \times [0, T]$.

Si $\sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{j,p,k} v_p v_k$ *et* $\sum_{j,p,k} v_p v_k D_j(F_{jpk})$ *appartiennent à* $L^1(\bar{\Omega} \times [t_1, t_2])$,

alors, pour tous τ_1, τ_2 *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, *pour toute constante positive* R *donnée, il existe une suite* r_m *tendant vers l'infini, telle que :*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{j,p,k} 2 F_{jpk} v_p D_j v_k \, dS \, dt \leqslant R .$$

Démonstration. – Soit,

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,p,k} 2 F_{jpk} v_p D_j v_k \, dx \, dt .$$

D'après la propriété que $F_{jpk} = F_{jkp}$ on a :

$$\sum_{p,k} 2 F_{jpk} v_p D_j v_k = \sum_{p,k} D_j [F_{jpk} v_p v_k] - \sum_{p,k} v_p v_k D_j [F_{jpk}]$$

On a donc :

$$I(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,k,p} D_j [F_{jkp} v_p v_k] \, dx \, dt - \\ - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_{j,k,p} v_p v_k D_j (F_{jpk}) \, dx \, dt .$$

D'après les hypothèses faites sur F_{jpk}, les fonctions $F_{jpk} v_p v_k$ sont lipschitziennes sur tout borné de $\bar{\Omega}$; de plus, elles sont nulles sur la frontière de Ω ; on peut donc utiliser le lemme 0.3. De plus, par hypothèse, la dernière intégrale est convergente quand ρ tend vers l'infini, on a donc :

$$\mathrm{I}(\rho) \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{\rho} \mathrm{F}_{jpk} v_p v_k \, d\mathrm{S} \, dt + \mathrm{R}_1 ,$$

où R_1 est une constante indépendante de ρ.

Posons :

$$\mathrm{J}(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \sum_{j,k,p} \frac{x_j}{\rho} \mathrm{F}_{jpk} v_p v_k \, d\mathrm{S} \, dt.$$

On a :

$$\mathrm{J}(\rho) \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \left| \sum_{jkp} \frac{x_j}{\rho} \mathrm{F}_{jkp} v_p v_k \right| d\mathrm{S} \, dt = \mathrm{J}_1(\rho) .$$

D'après les hypothèses du lemme, on sait que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \left| \sum_{j,k,p} \frac{x_j}{|x|} \mathrm{F}_{jpk} v_p v_k \right| dx \, dt = \int_0^\rho \mathrm{J}_1(u) \, du$$

est convergente quand ρ tend vers l'infini. La fonction $\mathrm{J}_1(u)$ étant positive, l'ensemble des u tel que $\mathrm{J}_1(u) > \mathrm{R}_2 > 0$ (R_2 constante fixée), est de mesure finie dans $[0 + \infty[$.

Donc il existe une suite réelle croissante $(\rho_m)_{m \in \mathrm{N}}$ tendant vers l'infini telle que :

$$\mathrm{J}_1(\rho_m) \leqslant \mathrm{R}_2$$

D'où :

$$\mathrm{I}(\rho_m) \leqslant \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 .$$

Mais :

$$\mathrm{I}(\rho_m) = \int_0^{\rho_m} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \sum_{j,p,k} 2\,\mathrm{F}_{jpk} v_p \mathrm{D}_j v_k \, d\mathrm{S} \, dt \, d\rho = \int_0^{\rho_m} \mathrm{I}_1(\rho) \, d\rho.$$

Montrons que, pour tout ρ_m, il existe r_m supérieur ou égal à ρ_m tel que :

$$\mathrm{I}_1(r_m) \leqslant \mathrm{R}$$

(R constante positive donnée).

En effet, supposons que :

$$\mathrm{I}_1(\rho) > \mathrm{R} \text{ pour tout } \rho \text{ supérieur ou égal à } \rho_m .$$

Alors, pour tout m' supérieur à m, on aurait :

$$\mathrm{I}(\rho_{m'}) = \mathrm{I}(\rho_m) + \int_{\rho_m}^{\rho_{m'}} \mathrm{I}_1(s)\,d\mathrm{S} \geqslant \mathrm{I}(\rho_m) + (\rho_{m'} - \rho_m)\,\mathrm{R}\,.$$

Comme $\rho_{m'}$ tend vers l'infini quand m' tend vers l'infini, alors $\mathrm{I}(\rho_{m'})$ tend vers l'infini, ce qui est contraire à :

$$\mathrm{I}(\rho_m) \leqslant \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 \text{ pour tout } m.$$

Donc, quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite monotone $(r_m)_{m \in \mathbf{N}}$ tendant vers l'infini telle que :

$$\mathrm{I}_1(r_m) \leqslant \mathrm{R}, \text{ ce qui démontre le lemme.}$$

LEMME 0.6. – *Soient* F_j *des fonctions appartenant à* $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$ *où* $t_1\, t_2$ *vérifient* $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \mathrm{T}$.

Si pour tout v *appartenant à* $\mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{S})$, v_+ *nulle sur* $\Gamma \times [0, \mathrm{T}]$, *on a :*

$\sum_j \frac{x_j}{|x|} \mathrm{F}_j v_+^2$ *et* $\sum_j v_+^2 \mathrm{D}_j[\mathrm{F}_j]$ *appartiennent à* $\mathrm{L}^1(\Omega \times [t_1, t_2])$, *alors pour tout* $\tau_1\, \tau_2$ *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, *pour toute constante positive* R *donnée, il existe une suite* $(r_m)_{m \in \mathbf{N}}$ *tendant vers l'infini, telle que :*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_j 2\,\mathrm{F}_j\, v_+ \mathrm{D}_j\, v\, d\mathrm{S}\, dt \leqslant \mathrm{R}\,.$$

Démonstration. – Comme v appartient à $\mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{S})$, on peut utiliser le lemme 0.4 et on a :

$$2\, v_+ \mathrm{D}_j\, v = \mathrm{D}_j\, v_+^2 \text{ presque partout dans S.}$$

- De plus v_+ est lipschitzienne sur tout borné de S.

Soit :

$$\mathrm{I}(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_j 2\,\mathrm{F}_j\, v_+ \mathrm{D}_j\, v\, dx\, dt$$

On a :

$$\mathrm{I}(\rho) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} \sum_j \mathrm{D}_j(\mathrm{F}_j\, v_+^2)\, dx\, dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_\rho} v_+^2\, \mathrm{D}_j(\mathrm{F}_j)\, dx\, dt\,.$$

Comme $v(x, t) \leqslant 0$ pour (x, t) appartenant à $\Gamma \times [0, T]$, on peut appliquer le lemme 0.3 à la fonction $F_j v_+^2$ qui est lipschitzienne dans tout borné de S et qui est nulle sur $\Gamma \times [0, T]$. De plus, la dernière intégrale est convergente. On a donc :

$$I(\rho) \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_\rho} \frac{x_j}{\rho} F_j v_+^2 \, dS dt + R_1 ,$$

où R_1 est une constante positive indépendante de ρ. La suite de la démonstration est identique à la démonstration du lemme 0.5.

CHAPITRE PREMIER

DEUX THEOREMES DONNANT LIEU A DES MAJORATIONS A PRIORI

1. Cas général.

Hypothèses 1.1.1. (Hypothèses sur l'opérateur L).

i) Les opérateurs $\mathcal{P}_{i,p}$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre.

ii) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, $\mathcal{P}_{i,p}(u)$ et $D_i[\mathcal{P}_{i,p}(u)]$ sont des fonctions définies, continues dans S.

iii) Si on note $P_{i,p}(u, D_j u_k) = \mathcal{P}_{i,p}(u)$, il existe une fonction F positive définie dans S, telle que pour tout $\xi = (\xi_i^p)$, $\beta = (\beta_i^p)$ appartenant à $\mathbf{R}^{n \times N}$, pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, pour tout λ réel strictement positif, on ait :

$$\sum_{i,p} \xi_i^p P_{i,p}(u, \beta_j^k) \leqslant \lambda F \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} \beta_i^p P_{i,p}(u, \beta_j^k)$$

iv) Les coefficients $\alpha_{p,k}$ sont des fonctions définies localement lipschitziennes dans S admettant une dérivée $D_t \alpha_{p,k}$ continue dans S.

v) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, il existe deux fonctions continues positives G et H définies dans S, telles que

$$\sum_{p,k} \alpha_{p,k} u_k u_p \geqslant G u^2 \; ; \; \sum_{p,k} u_k u_p D_t \alpha_{p,k} \geqslant - H u^2 .$$

vi) $\alpha_{p,k} = \alpha_{k,p}$.

THEOREME 1.1. – *On suppose que l'opérateur* L *vérifie les hypothèses* 1.1.1.

– *Soit v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, vérifiant $v(x, t) = 0$ pour (x, t) appartenant à $\Gamma \times [0, T]$), v solution de l'inéquation suivante,*

1.1.1) *Pour tout $r \geqslant r_0$ (r_0 constante positive donnée), pour tout $t \in [0, T]$ il existe une constante μ ($0 \leqslant \mu < 2$) et une fonction C_1 appartenant à $C(S)$ telle que :*

$$\int_{\omega_r} - 2v\mathrm{L}\, v dx \leqslant \int_{\omega_r} [\mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} \mathrm{D}_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)]\, dx$$

– *Soit* Φ *une fonction définie dans* $\mathbf{R}_+ \times [t_1, t_2]$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}_+^*$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \mathrm{T})$ *vérifiant :*

1.1.2) Φ *et* $\mathrm{D}_t \Phi$ *sont continues dans* S.

1.1.3) $\Phi(|x|, t) = \Phi(r_0, t)$ *pour tout* $|x| \leqslant r_0$.

1.1.4) *Les fonctions* $t \to \Phi(|x|, t)$ *et* $|x| \to \Phi(|x|, t)$ *sont décroissantes.*

1.1.5) Φ *est solution presque partout de l'inéquation suivante :*

$$- \Phi\Phi_t \mathrm{G} - \Phi^2[\mathrm{H} + \mathrm{C}_1] - \frac{32}{2-\mu} \Phi^2_{|x|} \mathrm{F} \geqslant 0$$

si Φ *et* v *vérifient la condition suivante :*

1.1.6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } (\tau_1, \tau_2) \text{ vérifiant } t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2, \text{ il existe} \\ \text{une suite } r_m \text{ tendant vers l'infini et une suite } \mathrm{R}_m \text{ tendant} \\ \text{vers zéro, telles que :} \\ \displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \sum_{i,p} \mathrm{D}_i [2\, \Phi^2 v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)]\, dx\, dt \leqslant \mathrm{R}_m, \end{array} \right.$

alors,

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par*

$$t \to \int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k\, dx$$

est décroissante pour $t \in [t_1, t_2]$,

2) *si il existe* t_3 appartenant à $[t_1, t_2]$ *tel que,*

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k\, dx \text{ soit fini pour } t = t_3, \text{ alors,}$$

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k\, dx < + \infty \text{ pour tout } t \text{ appartenant à } [t_3, t_2]$$

et $\displaystyle\int_{t_3}^{t_2} \int_\Omega [- \Phi\Phi_t \mathrm{G} v^2 + \Phi^2 \sum_{i,p} \mathrm{D}_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)]\, dx\, dt < + \infty.$

Remarque 1.1.1. – Le théorème précédent est valable sans la condition v mais la fonction Φ doit vérifier la condition 1.1.5′ qui remplace la condition 1.1.5.

1.1.5′) Pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ on a :

$$\sum_{p,k} [-2\,\Phi\Phi_t \alpha_{p,k} + \Phi^2 D_t(\alpha_{p,k})]\, u_k u_p - \left(\Phi^2 C_1 + \frac{32}{2-\mu}\, \Phi^2_{|x|} F\right) u^2 \geqslant -\, \Phi\Phi_t G u^2$$

où G est une fonction continue, positive, définie dans S.

Démonstration du théorème 1.1.1. – Soit Φ une fonction définie dans $\mathbf{R}_+ \times [t_1, t_2]$ où $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, vérifiant les propriétés 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4. Nous lui associons la fonction, que nous noterons encore par Φ, définie dans $\mathbf{R}^n \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$(x, t) \to \Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)\,.$$

Soit v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ et considérons l'identité suivante :

1.1.7) $\quad -2\,\Phi^2 v L v \equiv -\, 2\,\Phi^2 v A(v) + 2\,\Phi^2 v D_t \alpha v$

En utilisant les hypothèses 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, nous obtenons l'inégalité suivante :

1.1.8) $$-\,2\,\Phi^2 v L v \geqslant -\sum_{i,p} D_i [2\,\Phi^2 v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)] + \sum_{p,k} D_t[\Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k] + [-2\,\Phi\Phi_t G - \Phi^2 H - 4\lambda' \Phi^2_{|x|} F]\, v^2 + 2\,\Phi^2 \left[1 - \frac{2}{\lambda'}\right] \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)\,.$$

Soit v solution de 1.1.1. Considérons la quantité pour $t \in [t_1, t_2]$

$$I = \int_{\omega_r} \Phi^2 [C_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v) + 2\,v L v]\, dx = \int_0^r \int_{\sigma_\rho} \Phi^2 [C_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v) + 2 v L v]\, dS\, d\rho\,,$$

où dS est l'élément d'aire de σ_ρ.

D'après les propriétés de Φ (la fonction Φ ne dépend que de r et de t, et est indépendante de $|x|$ pour $|x| \leqslant r_0$) on a :

$$I = \Phi^2(r_0, t) \int_0^{r_0} J_\rho \, d\rho + \int_{r_0}^{r} \Phi^2 J_\rho \, d\rho$$

où $$J_r = \int_{\sigma_r} [C_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v) + 2 v L v] \, dS .$$

En utilisant le Lemme 0.1, on obtient :

$$I = \Phi(r_0, t) \int_0^{r'} J_\rho \, d\rho \geqslant 0 \text{ où } r' \text{ vérifie } r_0 \leqslant r' \leqslant r ,$$

on en déduit donc que si v est solution de 1.1.1, alors v est solution de :

$$\int_{\omega_r} - 2 \Phi^2 v L v \, dx \leqslant \int_{\omega_r} \Phi^2 [C_1 v^2 + \mu \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)] \, dx .$$

Soit v solution de 1.1.1 et $\lambda' = \dfrac{8}{2-\mu}$. Si on intègre l'inégalité 1.1.8 sur $\omega_r \times [\tau_1, \tau_2]$, où $r \geqslant r_0$ et $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, on obtient :

$$1.1.9) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} . [- 2 \Phi \Phi_t G - \Phi^2 (H + C_1) -$$

$$- \frac{32}{2-\mu} \Phi^2_{|x|} F] v^2 \, dx \, dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \frac{2-\mu}{2} \Phi^2 \sum_{i,p} D_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v) \, dx \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{i,p} D_i [2 \Phi^2 v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)] \, dx \, dt -$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{p,k} D_t [\Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k] \, dx \, dt .$$

D'après les hypothèses faites sur v, Φ, $\alpha_{p,k}$ on peut assurer que la fonction $\sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k$ est absolument continue sur tout segment parallèle à l'axe des t contenus dans $\Omega \times [t_1, t_2]$. De plus, Φ vérifie la propriété 1.1.5 et (Φ, v) vérifie la propriété 1.1.6. Si dans 1.1.9 on fait $r = r_m$ (r_m qui intervient dans la propriété 1.1.6), on obtient :

$$\text{1.1.10)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} [-\Phi\Phi_t G v^2 + $$

$$+ \frac{2-\mu}{2} \Phi^2 \sum_{i,p} \mathrm{D}_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)]\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{R}_m + \left[\int_{\omega_{r_m}} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_1} -$$

$$- \left[\int_{\omega_{r_m}} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_2} .$$

D'après l'hypothèse 1.1.1 (ii) nous déduisons que :

$\sum_{i,p} \beta_i^p \mathrm{P}_{i,p}(u, \beta_j^k) \geqslant 0$ pour tout u appartenant à $[\mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{S})]^{\mathrm{N}}$.

De plus, $\Phi\Phi_t \leqslant 0$ et $\mu < 2$, nous pouvons donc faire tendre r_m vers l'infini et on obtient :

$$0 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[-\Phi\Phi_t G v^2 + \frac{2-\mu}{2} \Phi^2 \sum_{i,p} \mathrm{D}_i v_p \mathcal{R}_{i,p}(v)\right] dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_2}$$

Donc, pour tout (τ_1, τ_2) tel que $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2 \leqslant \mathrm{T}$, on a :

$$\left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_1} \geqslant \left[\int_{\Omega} \sum_{p,k} \Phi^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx\right]_{t=\tau_2}$$

ce qui démontre la première partie du théorème. La deuxième partie du théorème est une conséquence de la première partie.

COROLLAIRE. — — *Si en plus des hypothèses précédentes* L *vérifie : les* $\mathcal{R}_{i,p}(u)$ *sont localement lipschitziennes dans* S *pour tout* $u \in [\mathrm{C}^{1,2}(\mathrm{S})]^{\mathrm{N}}$.

— *Si en plus des hypothèses précédentes* Φ *est localement lipschitzienne dans* $\mathbf{R}_+ \times [t_1, t_2]$.

Alors le théorème précédent reste valable si on remplace la condition 1.1.6 par 1.1.6' :

1.1.6') Pour tout (τ_1, τ_2) $(t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2)$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,p} 2\Phi^2 \frac{x_i}{r_m} v_p \mathcal{R}_{i,p}(v) dS\, dt \leqslant R_m .$$

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de montrer qu'avec les nouvelles hypothèses, 1.1.6 entraîne 1.1.6' (résultat du lemme 0.3).

2. Cas particulier N = 1.

Dans ce paragraphe, nous étudions les parties positives et négatives des solutions d'inéquation du type 1.1.1.

THEOREME 1.2. – *On suppose que l'opérateur* L *vérifie les hypothèses* 1.1.1.

– *Soit* v *appartenant à* $C^{1,2}(S)$, *vérifiant* $v_+(x, t) = 0$ *pour* (x, t) *appartenant à* $\Gamma \times [0, T]$, v *solution de l'inéquation suivante :*

1.2.1) $-2vLv \leqslant C_1 v^2 + \mu \sum_i D_i v \mathcal{R}_{i,1}(v)$ *pour tout* (x, t) *appartenant à* $\Omega \times [0, T]$ *où* C_1 *appartient à* $C(S)$ *et* μ *est une constante positive inférieure à* 2.

Soit Φ *une fonction définie dans* $\mathbf{R}_+ \times [t_1, t_2]$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}_+$, *où* (t_1, t_2) *vérifie* $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, *vérifiant* 1.1.2, 1.1.4, 1.1.5.

Si Φ *et* v *vérifient la condition suivante : pour tout* (τ_1, τ_2) *vérifiant* $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, *il existe une suite* r_m *tendant vers l'infini et une suite* R_m *tendant vers zéro, telles que :*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_{r_m}} \sum_i D_i [\Phi^2 v_+ \mathcal{R}_{i,1}(v)]\, dx\, dt \leqslant R_m ,$$

alors,

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par*

$t \to \int_\Omega \Phi^2 \alpha_{1,1} v_+^2\, dx$, *est décroissante pour* $t \in [t_1, t_2]$

2) *Si il existe* t_3 *appartenant à* $[t_1, t_2]$ *tel que,*

$$\int_\Omega \Phi^2 \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx < +\infty \text{ pour } t = t_3, \text{ alors,}$$

$$\int_\Omega \Phi^2 \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx \text{ est fini pour tout } t \text{ appartenant à } [t_3, t_2]$$

et

$$\int_{t_3}^{t_2} \int_\Omega [-\Phi\Phi_t G v_+^2 + \Phi^2 \sum_i D_i v_+ \mathcal{R}_{i,1}(v)] \, dx \, dt < +\infty$$

Remarque. – Nous pouvons faire la même remarque que la remarque 1.1.1.

Démonstration. – Utilisons l'inégalité 1.1.8 et l'hypothèse que v est solution de 1.2.1, on a :

$$\text{1.2.3)} \left\{ \begin{aligned} & [-2\Phi\Phi_t G - \Phi^2 H - \Phi^2 C_1 - 4\lambda' \Phi_{|x|}^2 F] v^2 + \\ & + 2\Phi^2 \left[1 - \frac{2}{\lambda'} - \mu\right] \sum_i D_i v \mathcal{R}_{i,1}(v) \leqslant \\ & \leqslant \sum_i D_i [2\Phi^2 v \mathcal{R}_{i,1}(v)] - D_t[\Phi^2 \alpha_{1,1} v^2] . \end{aligned} \right.$$

Posons $\lambda' = \dfrac{8}{2-\mu}$. Comme Φ vérifie 1.1.5 nous obtenons :

$$\text{1.2.4)} \left\{ \begin{aligned} & -\Phi\Phi_t G v^2 + \frac{2-\mu}{2} \Phi^2 \sum_i D_i v \mathcal{R}_{i,1}(v) \leqslant \\ & \leqslant \sum_i D_i [2\Phi^2 v \mathcal{R}_{i,1}(v)] - D_t[\Phi^2 \alpha_{1,1} v^2] . \end{aligned} \right.$$

Montrons que presque partout dans $\Omega \times [t_1, t_2]$ nous avons

$$\text{1.2.5)} \left\{ \begin{aligned} & -\Phi\Phi_t G v_+^2 + \frac{2-\mu}{2} \Phi^2 \sum_i D_i v_+ \mathcal{R}_{i,1}(v) \leqslant \\ & \leqslant \sum_i D_i [2\Phi^2 v_+ \mathcal{R}_{i,1}(v)] - D_t[\Phi^2 \alpha_{1,1} v_+^2] . \end{aligned} \right.$$

Les quantités qui interviennent dans 1.2.5 sont définies en presque tout point de $\Omega \times [t_1, t_2]$ (on utilise le lemme 0.4). De plus, si on note par S_1 l'ensemble des (x, t) appartenant à $\Omega \times [t_1, t_2]$ tel que $v(x, t) > 0$ alors 1.2.5 n'est autre que 1.2.4 pour les $(x, t) \in S_1$. Si on note S_2 l'ensemble des (x, t) appartenant à $\Omega \times [t_1, t_2]$ tel que $v(x, t) \leqslant 0$, alors sur S_2 (1.2.5) est vraie presque partout car les deux membres de l'inégalité sont nuls presque partout. Intégrons 1.2.5 sur $\omega_{r_m} \times [\tau_1, \tau_2]$ ($t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$, r_m étant la suite qui intervient dans la condition 1.2.2).

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 1.1.

COROLLAIRE 1.2. – *Si en plus des hypothèses précédentes* L *vérifie : les* $\mathcal{R}_{i,1}(u)$ *sont localement lipschitziennes dans* S *pour tout* $u \in C^{1,2}(S)$. *Si en plus des hypothèses précédentes* Φ *est localement lipschitzienne dans* $\mathbf{R}_+ \times [t_1, t_2]$.

Alors le théorème 1.2 reste valable si on remplace la condition 1.2.2 par :

1.2.2') Pour tout τ_1, $\tau_2 (t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2)$, il existe une suite r_m tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_i 2\,\Phi^2 \frac{x_i}{r_m}\, v_+ \mathcal{R}_{i,1}(v)\, dS\, dt \leqslant R_m .$$

Démonstration identique à celle du corollaire 1.1.

CHAPITRE II

CAS LINEAIRE

Dans ce chapitre, nous étudions le cas particulier d'un opérateur linéaire :

$$L_1 u = \left\{ \sum_{i,j,k} D_i \left[a_{ijk}^p D_j u_k \right] - \sum_k D_t \left[\alpha_{p,k} u_k \right] \right.$$

Ici, les opérateurs $\mathcal{R}_{i,p}$ sont définis par :
pour tout u appartenant à $[C^1(S)]^N$, nous avons

$$\mathcal{R}_{i,p}(u) = \sum_{j,k} a_{ijk}^p D_j u_k \,,$$

où a_{ijk}^p appartient à $C^1(S)$.

Suivant l'ordre de croissance des coefficients qui interviennent dans L_1, nous déterminerons des fonctions poids qui vérifieront les propriétés demandées dans le théorème 1.1. De plus, nous déterminerons un ensemble K, de telle sorte que, si nous cherchons les solutions de l'inéquation dans K, nous serons assurés que la condition 1.1.6′ est bien vérifiée.

Hypothèses sur les coefficients :

a) a_{ijk}^p appartient à $C^1(S)$;

b) Il existe une fonction F positive, telle que, pour tous $\xi = (\xi_i^p)$, $\beta = (\beta_i^p)$ appartenant à $\mathbf{R}^{n \times N}$, pour tout u appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, pour tout λ réel strictement positif, on ait :

$$\sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^p \xi_i^p \beta_j^k \leqslant \lambda F \sum_{i,p} (\xi_i^p)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,p} a_{ijk}^p \beta_i^p \beta_j^k$$

c) $|D_j a_{ijk}^p| \leqslant F_1$ où F_1 appartient à $C(S)$:

d) pour tout i, j, p, k on a :

$$a_{ijp}^{k} = a_{ijk}^{p}$$

e) $\alpha_{p,k}$ vérifie les hypothèses iv, v, vi

f) pour tout v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, on a :

$$\sum_{p,k} \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k \leqslant G_1\, v^2 ,$$

où G_1 appartient à $C(S)$.

1. Définition.

Soit Ψ une fonction définie dans $\mathbf{R}^n \times [0,T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$; on appelle K_Ψ l'ensemble des applications v appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, vérifiant les propriétés suivantes :

1) $v(x,t) = 0$ pour (x,t) appartenant à $\Gamma \times [0,T]$,

2) Ψv_p appartient à $L^2(S)$ pour tout p.

Remarque. – La fonction Ψ peut être définie aussi dans S seul.

Dans ce qui suit, nous étudierons trois cas particuliers suivant l'ordre de croissance des coefficients.

Nous dirons que v est solution du problème A, si v vérifie :

$$\mathrm{A}\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } r \text{ supérieur ou égal à } r_0 \ (r_0 \text{ constante positive donnée})\\ \text{et pour tout } t \text{ appartenant à } [0,T] :\\ \displaystyle\int_{\omega_r} -\,2v\,L_1 v\,dx \leqslant \int_{\omega_r} [C_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^{p}\, D_i v_p\, D_j v_k]\,dx\\ \text{où, } C_1 \text{ appartient à } C(S) \text{ et } \mu \text{ est une constante positive ou nulle,}\\ \text{inférieure à 2.}\end{array}\right.$$

THEOREME 2.1.1. – *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant :*

$$G_1(x,t) \leqslant K_1 [\exp m_0 \,|x|^{2-\lambda}] \;; \frac{F(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1 (1 + |x|)^{\lambda}$$

$$\frac{H(x,t)+C_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1(1+|x|)^{2-\lambda} \ ;$$

$$\frac{F_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1 \exp[m_0(1+|x|)^{2-\lambda}]$$

où m_0 *et* K_1 *sont des constantes positives et* λ *une constante positive ou nulle, inférieure à* 2.

Soit la fonction Ψ *de* $\mathbf{R}^{n+1}$ *dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par :*

$$(x,t) \to \Psi(x,t) = \exp - m_1 |x|^{2-\lambda} \ (m_1 \text{ constante positive}).$$

Soit v *appartenant à* K_Ψ, v *solution du problème* A.

Soit la fonction $\Phi_{m,\beta,\tau}$ *de* $\mathbf{R}^n \times \left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right]$ *dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par*

$$(x,t) \to \Phi_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp - \frac{m(1+|y|)^{2-\lambda}}{\beta-(t-\tau)} ,$$

où $|y| = \max(r_0, |x|)$, m *et* β ($\beta < 1$) *constantes positives.*

Alors il existe deux constantes positives β_1 *et* β_2 *indépendantes de* τ *telles que, si* $m < \beta_1$ *et* $\frac{m}{\beta} > \beta_2$, *on ait :*

1) *la fonction, à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par :*

$t \to \int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,\tau} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx$ *décroissante pour tout* t *appartenant à* $\left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ *et ceci pour tout* τ

2) $\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1)\, \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx < +\infty$ *pour tout* t *appartenant à* $]0, T]$ *et tout* τ_1 *vérifiant*

$$0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$$

3) $\Phi^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i v_p D_j v_k$ *appartenant à*

$$L^1(\Omega \times [\tau_2, T]) \quad \text{où} \quad \tau_2 > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2} \cdot$$

Démonstration. – Nous allons démontrer que les hypothèses du corollaire 1.1 sont vérifiées. D'après les hypothèses faites sur les coefficients a^p_{ijk}, $\alpha_{p,k}$, l'opérateur L_1 vérifie les hypothèses 1.1.1, de plus, $\mathcal{B}_{i,p}(v)\ \left(= \sum\limits_{j,k} a^p_{ijk} D_j v_k\right)$ est localement lipschitzienne dans S pour tout $v \in [C^{1,2}(S)]^N$. D'après la définition de $\Phi_{m,\beta,\tau}$, les propriétés 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 sont vérifiées et de plus $\Phi_{m,\beta,\tau}$ est localement lipschitzienne dans $\mathbf{R}^n \times \left[\tau, \tau + \dfrac{\beta}{2}\right]$. On vérifie facilement que si $\dfrac{m}{\beta^2} \geqslant 4 K_1$ et $m \leqslant \dfrac{2-\mu}{64 K_1 (2-\lambda)^2} = \beta_1$, alors $\Phi_{m,\beta,\tau}$ est solution de 1.1.5. Il reste à démontrer 1.1.6'. Pour cela nous utiliserons le lemme 0.5.

Posons : $F_{jpk} = \Phi^2_{m,\beta,\tau} \sum\limits_i x_i a^p_{ijk}$

On a bien $F_{jpk} = F_{jkp}$.

De plus, d'après l'hypothèse b), on a :

$$0 \leqslant \sum_{ijkp} a^p_{ijk} \xi^p_i \xi^k_j \leqslant 4 F \sum_{i,p} (\xi^p_i)^2$$

Donc, si on pose, $\xi^p_l = x_l v_p$, on a :

$$0 \leqslant \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{jpk} v_p v_k = \Phi^2_{m,\beta,\tau} \sum_{i,j,p,k} \frac{1}{|x|} a^p_{ijk} x_i v_p x_j v_k \leqslant$$
$$\leqslant 4 F\, |x|\, \Phi^2_{m,\beta,\tau} v^2 .$$

D'après la définition de $\Phi_{m,\beta,\tau}$ et les hypothèses faites sur les coefficients de L_1, on a :

$$0 \leqslant \sum_{j,p,k} \frac{x_j}{|x|} F_{jpk} v_p v_k \leqslant$$
$$\leqslant 4 K_1^2\, |x|\, (1 + |x|)^\lambda \exp. \left[\left(-\frac{2m}{\beta} + m_0\right) (1 + |y|)^{2-\lambda}\right] v^2.$$

De plus,

$$\sum_{j,p,k} v_p v_k \mathrm{D}_j(\mathrm{F}_{jpk}) = \sum_{i,j,p,k} v_p v_k \mathrm{D}_j(x_i a^p_{ijk} \Phi^2_{m,\beta,\tau}) =$$

$$= \sum_{i,j,p,k} v_p v_k \delta_{ij} a^p_{ijk} \Phi^2_{m,\beta,\tau} + \sum_{i,j,p,k} v_p v_k x_i \mathrm{D}_j(a^p_{ijk}) \Phi^2_{m,\beta,\tau} +$$

$$+ \sum_{i,j,p,k} v_p v_k x_i a^p_{ijk} \mathrm{D}_j [\Phi^2_{m,\beta,\tau}] .$$

En majorant chaque terme du $2^{\text{ème}}$ membre, on obtient :

$$\left| \sum_{j,p,k} v_p v_k \mathrm{D}_j \mathrm{F}_{jpk} \right| \leqslant [4n\mathrm{K}_1^2(1 + |x|)^\lambda + n^2 \mathrm{N}^2 \mathrm{K}_1^2 |x| +$$

$$+ \frac{8m}{\beta} \mathrm{K}_1^2 |x| (1 + |y|)] \exp . \left[\left(-\frac{2m}{\beta} + 2m_0\right)(1 + |y|)^{2-\lambda}\right].$$

Nous remarquons que si $\dfrac{2m}{\beta} > 2m_0 + m_1$, alors les F_{jkp} vérifient les hypothèses demandées dans le lemme 0.5.

Donc :

Pour tout τ_1, τ_2 vérifiant

$$t_1 = \max(0, \tau) \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2 = \min\left(\mathrm{T}, \tau + \frac{\beta}{2}\right),$$

il existe une suite $(r_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tendant vers l'infini et une suite $(\mathrm{R}_m)_{m\in\mathbf{N}}$ $\left(\mathrm{R}_m = \dfrac{\mathrm{R}}{r_m}\right)$ tendant vers zéro, telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{i,j,k,p} 2\Phi^2_{m,\beta,\tau} \frac{x_i}{r_m} a^p_{ijk} v_p \mathrm{D}_j v_k dSdt \leqslant \mathrm{R}_m .$$

On peut donc utiliser le corollaire 1.1. pour $m < \beta_1$ et $\dfrac{m}{\beta} > \beta_2 = \max\left(4\mathrm{K}_1, \dfrac{2m_0 + m_1}{2}\right)$, ce qui démontre la première conclusion du théorème.

Supposons que :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1)\, \alpha_{p,k} v_p v_k dx + \infty \quad \text{pour} \quad t = t_3$$

appartenant à $]0,T]$ et pour τ_1 appartenant à $\left]\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right]$.

On en déduit que :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,t_3-\tau_1+\tau}\, \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k\, dx = +\infty \quad \text{pour} \quad t = t_3$$

Donc, d'après ce qui vient d'être démontré :

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,t_3-\tau_1+\tau} \cdot \alpha_{p,k}\, v_p\, v_k\, dx = +\infty \quad \text{pour tout } t \text{ tel que :}$$

$\max(0, t_3 - \tau_1 + \tau) \leqslant t \leqslant t_3$. Ce qui entraîne, d'après le choix des paramètres, que v n'appartient pas à K_Ψ, contraire à l'hypothèse ; d'où la conclusion 2 du théorème.

Soient τ et τ_1 donnés, vérifiant $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$. Soient t_3 et $t_4 \in]0,T]$ vérifiant $t_4 - t_3 = \tau_1 - \tau$, on a (résultat du corollaire 1.1).

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_\Omega \Phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1} \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i v_p\, D_j v_k\, dx\, dt < +\infty$$

Comme pour tout t appartenant au segment $[t_3\, t_4]$ on a :

$$\Phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t) \geqslant \Phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) \geqslant 0 \text{ on a :}$$

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_\Omega \Phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i v_p\, D_j v_k\, dx\, dt < +\infty$$

Comme $\Phi_{m,\beta,\tau+t_4-\tau_1}(x, t_4) = \Phi_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1)$, on a pour tout t_3, t_4 appartenant à $]0,T]$ vérifiant $t_4 - t_3 = \tau_1 - \tau$.

$$\int_{t_3}^{t_4} \int_\Omega \Phi_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\, D_i v_p\, D_j v_k\, dx\, dt < +\infty .$$

Pour démontrer la partie 3 du théorème, il suffit de recouvrir l'intervalle $[\tau_2, T]$ par des intervalles d'amplitude $\tau_1 - \tau$.

THEOREME 2.1.2. – *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant :*

$$G_1(x, t) \leqslant K_1 \exp. [m_0(\mathrm{Log}(2 + |x|))^{2-\nu}] ;$$

$$\frac{F(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1(1+|x|)^2\,[\operatorname{Log}(2+|x|)]^{\nu}\ ;$$

$$\frac{H(x,t)+C_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1[\operatorname{Log}(2+|x|)]^{2-\nu}\ ;$$

$$\frac{F_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1 \exp[m_0(\operatorname{Log}(2+|x|))^{2-\nu}]\ ;$$

où m_0 *et* K_1 *sont des constantes positives,* ν *un réel vérifiant* $0 \leqslant \nu \leqslant 1$.

Soit la fonction ψ', *de* $\mathbf{R}^{n+1}$ *dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par :*

$$(x,t) \to \Psi'(x,t) = \exp.\,[-m_1(\operatorname{Log}(2+|x|))^{2-\nu}]\,,$$

où m_1 *est une constante positive.*

Soit v *appartenant à* $K_{\Psi'}$, v *solution du problème* A.

Soit la fonction $\Phi'_{m,\beta,\tau}$, *de* $\mathbf{R}^n \times \left[\tau, \tau+\frac{\beta}{2}\right]$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *définie par :*

$$(x,t) \to \Phi'_{m,\beta,\tau}(x,t) = \exp.-\frac{m[\operatorname{Log}(2+|y|)]^{2-\nu}}{\beta-(t-\tau)}$$

où $|y| = \max(r_0, |x|)$, m *et* β $(\beta \leqslant 1)$ *des constantes positives.*

Alors il existe deux constantes positives β_1 *et* β_2 *indépendantes de* τ *telles que si* $m < \beta_1$ *et* $\frac{m}{\beta} > \beta_2$ *on ait :*

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *définie par :*

$t \to \int_\Omega \sum_{p,k} \Phi'^2_{m,\beta,\tau}\,\alpha_{p,k}\,v_p\,v_k\,dx$ *décroissante pour* t *appartenant à* $\left[\tau, \tau+\frac{\beta}{2}\right] \cap [0,T]$ *et ceci pour tout* τ,

2) $\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi'^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1)\,\alpha_{p,k}\,v_p\,v_k\,dx < +\infty$ *pour tout* t *appartenant à* $]0,T]$ *et tout* τ_1 *fixé* $\left(0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}\right)$.

3) $\Phi'^2_{m,\beta,\tau}(x,\tau_1) \sum_{i,j,k,p} a^p_{ijk}\,D_i v_p\,D_j v_k$ *appartenant à* $L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$ *où* $\tau_2 > 0$ *et* $0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}$.

Démonstration. – Elle est identique à celle du Théorème 2.1.1, on obtient ici :

$$\beta_1 = \frac{2-\mu}{64\,K_1(2-\nu)^2} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \max\left(4\,K_1\,, \frac{2\,m_0 + m_1 + 3}{2}\right).$$

THEOREME 2.1.3. – *Soient* H, C_1, G *vérifiant* $\dfrac{C_1(x,t) + H(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1$ (K_1 *constante positive*). *Soit la fonction* ψ'', *de* S *dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par :*

$$(x,t) \to \Psi''(x,t) = \sqrt{|x|\,.\,\max[F(x,t)\,, G_1(x,t)\,, F_1(x,t)]}\,.$$

Soit v *appartenant à* $K_{\Psi''}$, v *solution du problème* A.

Soit la fonction Φ_m, *de* $\mathbf{R}^n \times [0,T]$ *dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par :*

$$(x,t) \to \Phi_m(x,t) = e^{-mt}$$

Alors il existe une constante positive β_1, *telle que, si* $m > \beta_1$ *on ait :*

1) *la fonction, à valeurs dans* $\mathbf{R}_+$, *définie par :*

$$t \to \int_\Omega \sum_{p,k} \phi_m^2 \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx \text{ décroissante pour tout } t \in [0,T].$$

2) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{p,k} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx < +\infty$ *pour tout t appartenant à* $]0,T]$.

3) $\displaystyle\sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^p D_i v_p D_j v_k$ *appartenant à* $L^1(\Omega \times [\tau_1, T])$ *où* $\tau_1 > 0$.

Démonstration. – Comme pour le théorème 2.1.1, on montre que si $m > \beta_1 = 2\,K_1$ le corollaire 1.1 est applicable. On en déduit alors facilement le théorème.

2. Cas particulier : N = 1.

DEFINITION. – *Soit* Ψ *une fonction définie dans* $\mathbf{R}^n \times [0,T]$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}_+$, *on appelle* $K_{+\Psi}$ (*respectivement* $K_{-\Psi}$) *l'ensemble des applications appartenant à* $C^{1,2}(S)$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $v_+(x, t) = 0$ (*respectivement* $v_-(x, t) = 0$) *pour* (x, t) *appartenant à* $\Gamma \times [0, T]$.

ii) Ψv_+ (*respectivement* Ψv_-) *appartient à* $L^2(S)$.

Remarque. – La fonction ψ peut aussi n'être définie que dans S.

Nous dirons que v est solution du problème B si v vérifie :

$$\text{B} \left\{ \begin{array}{l} -2v L_1 v \leqslant C_1 v^2 + \mu \sum_{i,j} a^1_{ij1} D_i v D_j v \quad \text{pour tout } (x, t) \text{ apparte-} \\ \text{nant à } \Omega \times [0, T], \\ \text{où } C_1 \text{ appartient à } C(S) \text{ et } \mu \text{ est une constante positive ou nulle,} \\ \text{inférieure à 2.} \end{array} \right.$$

THEOREME 2.2.1. – (ψ et $\Phi_{m,\beta,\tau}$ sont les fonctions définies dans le Théorème 2.1.1, $r_0 = 0$).

Soient F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que pour le théorème* 2.1.1.

Soit v *appartenant à* $K_{+\psi}$, v *solution du problème* B.

Alors il existe deux constantes positives β_1 *et* β_2 *indépendantes de* τ *telles que si* $m < \beta_1$ *et* $\dfrac{m}{\beta} \geqslant \beta_2$ *on ait :*

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par :*

$$t \to \int_\Omega \Phi^2_{m,\beta,\tau} \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx$$

décroissante pour $t \in \left[\tau, \tau + \dfrac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ *et ceci pour tout* τ.

2) $\displaystyle\int_\Omega \Phi^2_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx < +\infty$ *pour tout* $t \in]0, T]$ *et tout* τ_1 $\left(0 < \tau_1 - \tau < \dfrac{\beta}{2}\right)$.

3) $\displaystyle\Phi^2_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_{i,j} a^1_{ij1} D_i v_+ D_j v_+ \in L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$

où $\tau_2 > 0$ *et* $0 < \tau_1 - \tau < \dfrac{\beta}{2}$.

Démonstration. – On montre que les hypothèses du corollaire 1.2 sont vérifiées et pour cela, on utilise le Lemme 0.6. La démonstration est du même type que celle du théorème 2.1.1.

THEOREME 2.2.2. – (ψ' et $\Phi'_{m,\beta,\tau}$ sont les fonctions définies dans le théorème 2.1.2, $r_0 = 0$).

Soient F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.2.

Soit v appartenant à $K_{+\psi'}$, *v solution du problème* B.

Alors il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de τ telles que si $m < \beta_1$ et $\frac{m}{\beta} > \beta_2$ on ait :

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par :*

$$t \to \int_{\Omega}^{\bullet} \Phi'_{m,\beta,\tau}\alpha_{1,1}\, v_+^2\, dx$$

décroissante pour $t \in \left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ *et ceci pour tout* τ.

2) $\int_{\Omega}^{\bullet} \Phi'^2_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1)\, \alpha_{1,1}\, v_+^2(x, t)\, dx < +\infty$ *pour tout* $t \in]0, T]$ *et tout* $\tau_1 \left(0 < \tau_1 - \tau < \frac{\beta}{2}\right)$.

3) $\Phi'^2_{m,\beta,\tau}(x, \tau_1) \sum_{i,j} a^1_{ij1}\, D_i v_+\, D_j v_+ \in L_1(\Omega \times [\tau_2, T]$

où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$.

Démonstration. – Elle est identique à celle du théorème 2.2.1.

THEOREME 2.2.3. – (ψ'' *et* Φ_m *sont les fonctions définies dans le théorème* 2.1.3).

Soient G, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que pour le théorème* 2.1.3. *Soit v appartenant à* $K_{+\psi''}$, *v solution du problème* B.

Alors il existe une constante positive β_1, telle que si $m > \beta_1$ on ait :

1) *la fonction à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie par :*

$$t \to \int_\Omega \Phi_m^2 \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx \text{ décroissante pour } t \in [0, T]$$

2) $\int_\Omega \alpha_{1,1} v_+^2 \, dx < +\infty$ *pour tout* $t \in]0, T]$

3) $\sum_{i,j} a_{ij1}^1 \mathrm{D}_i v_+ \mathrm{D}_j v_+ \in \mathrm{L}^1(\Omega \times [\tau, T])$ *où* $0 < \tau < T$.

Démonstration. – Elle est identique à celle du théorème 2.2.1.

Remarque. – On peut démontrer des théorèmes analogues à ceux de ce paragraphe pour la partie négative v_-.

CHAPITRE III

APPLICATIONS

Nous allons utiliser les résultats du chapitre II, pour résoudre des problèmes d'unicité. Nous donnerons ensuite des contre-exemples, montrant qu'il est impossible dans un certain sens d'améliorer ces résultats.

1. Unicité.

Position du problème : soit le système du type suivant :

$$L_2 v = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i,j,k} D_i [a_{ijk}^p D_j v_k] - \sum_k D_t [\alpha_{p,k} v_k] + \sum_{i,k} b_{i,k}^p D_i v_k + \\ \hfill \displaystyle + \sum_k c_k^p v_k \end{array} \right.$$

$$\equiv L_1 v + Bv + cv ,$$

où l'opérateur L_1 vérifie les propriétés demandées dans le Chapitre II, b_{ik}^p et C_k^p appartenant à C(S).

On dira que v est solution du problème C, si

$$C \left\{ \begin{array}{l} v(x,0) = 0 \\ v(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0,T] \\ L_2 v = 0 \end{array} \right.$$

Montrons que, sous certaines conditions, si v est solution du problème C, alors v est aussi solution du problème A.

En effet, comme $L_2 v = 0$, on a :

$$L_1 v = - Bv - cv$$

$$- 2v\mathrm{L}_1 v = \sum_{ikp} 2v_p b_{ik}^p \mathrm{D}_i v_k + \sum_{k,p} 2c_k^p v_p v_k \, .$$

Si les hypothèses faites sur les coefficients nous permettent d'affirmer que :

$$\sum_{i,p,k} 2v_p b_{ik}^p \mathrm{D}_i v_k + \sum_{k,p} 2c_k^p v_p v_k \leqslant \mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^p \mathrm{D}_i v_p \mathrm{D}_j v_k \, ,$$

ou, plus généralement, s'il existe r_0 tel que, pour tout $r \geqslant r_0$ et pour tout t appartenant à $[0,\mathrm{T}]$

$$\int_{\omega_r} \left[\sum_{i,k,p} 2v_p b_{ik}^p \mathrm{D}_i v_k + \sum_{k,p} c_k^p v_p v_k\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\omega_r} \left[\mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^p \mathrm{D}_i v_p \mathrm{D}_j v_k\right] dx \, , \qquad (3.1.2)$$

où C_1 appartient à C(S) et μ est une constante positive ou nulle inférieure à 2, alors les solutions du problème C sont aussi solutions de (3.1.3) :

pour tout $r \geqslant r_0$ et pour tout t appartenant à $[0,\mathrm{T}]$

$$\int_{\omega_r} - 2v\mathrm{L}_1 v \, dx \leqslant \int_{\omega_r} \left[\mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^p \mathrm{D}_i v_p \mathrm{D}_j v_k\right] dx \, . \quad (3.1.3)$$

Dans toute la suite, nous supposerons que les coefficients de $\mathrm{L}_2 v$ vérifient la condition (3.1.2).

THEOREME 3.1.1. – (ψ étant la fonction définie dans le théorème 2.1.1).

Soient F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.1.

Si v appartient à K_ψ, *si v est solution du problème* C, *alors v est identiquement nulle dans* S.

Démonstration. – Comme v est solution du problème C (on a vu que v était solution de l'inéquation 3.1.3), vues les hypothèses faites, on peut utiliser les résultats du théorème 2.1.1, où la fonction $\Phi_{m,\beta,\tau}$ déjà définie, vérifie :

$$m < \beta_1 \quad \text{et} \quad \frac{m}{\beta} > \beta_2 .$$

On obtient en particulier :

$0 \leqslant \int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,\tau} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx$ fonction décroissante de t pour t appartenant à $\left[\tau, \tau + \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ et ceci pour tout τ.

Si $\tau = 0$, par hypothèse comme $v(x, 0) = 0$, alors, pour $t = \tau = 0$, l'intégrale,

$$\int_\Omega \sum_{p,k} \phi^2_{m,\beta,0} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx$$

est nulle. On en déduit donc :

$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,0} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx = 0$ pour tout t appartenant à $\left[0, \frac{\beta}{2}\right]$.

Si on recouvre l'intervalle $[0, T]$ par des intervalles d'amplitude $\frac{\beta}{2}$, on obtient :

$\int_\Omega \sum_{p,k} \Phi^2_{m,\beta,\, l\frac{\beta}{2}} \alpha_{p,k} v_p v_k \, dx = 0$ pour tout t appartenant à $\left[l \frac{\beta}{2}, (l+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$, où l est un entier. Mais comme,

$$\sum_{p,k} \alpha_{p,k} v_p v_k \geqslant G(x) v^2 ,$$

on a donc : $\int_\Omega G(x) \Phi^2_{m,\beta,\, l\frac{\beta}{2}} v^2 \, dx = 0$ pour t appartenant à $\left[l \frac{\beta}{2}, (l+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$.

Comme $G(x)$ est différent de zéro, on en déduit que $v = 0$ pour t appartenant à $\left[l \frac{\beta}{2}, (l+1) \frac{\beta}{2}\right] \cap [0, T]$ et ceci pour tout l, donc v est identiquement nul dans S.

THÉORÈME 3.1.2. — (ψ' *est la fonction définie dans le théorème* 2.1.2). *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.2.

Si v *appartient à* $K_{\psi'}$, *si* v *est solution du problème* C, *alors* v *est identiquement nulle dans* S.

Démonstration. — Elle est identique à la démonstration du théorème 3.1.1, mais nous utiliserons le théorème 2.1.2 au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1.

THÉORÈME 3.1.3. — (ψ'' est la fonction définie dans le théorème 2.1.3). *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.3. *Si* v *appartient à* $K_{\psi''}$, *si* v *est solution du problème* C, *alors* v *est identiquement nulle dans* S.

Démonstration. — Elle est identique à la démonstration du théorème 3.1.1, mais nous utiliserons le théorème 2.1.3 au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1.

2. Cas particulier : N = 1.

Nous démontrons ici des théorèmes semblables aux théorèmes 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, mais les résultats ne porteront que sur les parties positives ou négatives des solutions.

Position du problème : soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$L_2 v = \sum_{i,j} D_i [a_{ij} D_j v] - D_t [\alpha v] + \sum_i b_i D_i v + cv \qquad (3.2.1)$$

$$\equiv L_1 v + Bv + cv ,$$

où L_1 vérifie les mêmes propriétés que celles demandées dans le chapitre II, b_i et c appartenant à C(S).

On dira que v est solution du problème C_1 si

$$C_1 \begin{cases} v_+(x,0) = 0 \\ v_+(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0,T] \\ L_2 v = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons que les coefficients b_i et c vérifient

$$\sum_i 2 v b_i \mathrm{D}_i v + 2cv^2 \leqslant \mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij} \mathrm{D}_i v \mathrm{D}_j v$$

où C_1 appartient à C(S) et μ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.

Alors, comme précédemment, on démontre que les solutions du problème C_1 sont aussi solutions de 3.2.2.

$$- 2 v \mathrm{L}_1 v \leqslant \mathrm{C}_1 v^2 + \mu \sum_{i,j} a_{ij} \mathrm{D}_i v \mathrm{D}_j v \qquad (3.2.2)$$

THEOREME 3.2.1. – (*ψ est la fonction définie dans le théorème* 2.1.1). *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.1.

Si v appartient à $\mathrm{K}_{+\psi}$, *si v est solution du problème* C_1, *alors v est négative ou nulle dans* S.

Démonstration. – Elle est identique à celle du théorème 3.1.1 mais au lieu d'utiliser le théorème 2.1.1, on utilisera le théorème 2.2.1.

THEOREME 3.2.2. – (*ψ' est la fonction définie dans le théorème* 2.1.2). *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.2.

Si v appartient à $\mathrm{K}_{+\psi'}$, *si v est solution du problème* C_1, *alors v est négative ou nulle dans* S.

Démonstration. – On utilise le théorème 2.2.2.

THEOREME 3.2.3. – (*ψ'' est la fonction définie dans le théorème* 2.1.3). *Soient* F, F_1, G, G_1, H, C_1 *vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 2.1.3.

Si v appartient à $\mathrm{K}_{+\psi''}$, *si v est solution du problème* C_1, *alors v est négative ou nulle dans* S.

Démonstration. – On utilise le théorème 2.2.3.

Remarque. – On peut démontrer des théorèmes analogues à ceux de ce paragraphe pour la partie négative de v_-.

3. Contre-exemples.

Cas du théorème 3.1.1.

Nous avons montré, théorème 3.1.1, l'unicité du problème mixte et en particulier du problème de Cauchy ($\Omega = \mathbf{R}^n$), dans la famille des applications appartenant à K_ψ.

Nous allons montrer ici, qu'il n'est pas possible d'améliorer ces résultats dans un certain sens.

Le problème, que nous nous posons, est la détermination d'une solution non identiquement nulle appartenant à $C^{1,2}(\mathbf{R} \times [0,T])$, de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} A(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \times [0,T] \\ u(x,0) = 0 , \end{cases}$$

où $A(x)$ est déterminée par :

$A(x)$ appartenant à $C^1(\mathbf{R})$,

$A(x)$ vérifiant :

$$A(x) \geqslant (1 + |x|)^\lambda$$

$$A(x) = (1 + |x|)^\lambda \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1$$

$$\left| \frac{d\,A(x)}{dx} \right| \leqslant M(1 + |x|)^{\lambda-1}, \text{ M constante positive,}$$

λ une constante positive ou nulle, inférieure à 2.

Nous remarquons facilement qu'une telle fonction $A(x)$ existe.

De plus, si ψ_ϵ représente la fonction définie dans $\mathbf{R} \times [0,T]$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, par :

$$(x,t) \to \psi_\epsilon(x,t) = \exp - |x|^{2-\lambda+\epsilon} ,$$

ϵ étant un nombre positif quelconque, la solution cherchée, devra vérifier,

$\psi_\epsilon \, |u(x,t)| \leqslant$ K, K constante positive, c'est-à-dire que u appartiendra à $K_{\psi_{2\epsilon}}$.

Montrons d'abord qu'une telle solution est aussi solution du problème C.

En effet, on a :

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dA(x)}{dx}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = L_2 u\,.$$

Il faut vérifier que les coefficients de L_2 vérifient la condition 3.1.2.

On doit avoir :

$$-\,2u\frac{dA(x)}{dx}\,\frac{\partial u}{\partial x} \leqslant C_1 u^2 + \mu A(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

D'après les hypothèses précédentes, nous avons :

$$-\,2u\frac{dA(x)}{dx}\,\frac{\partial u}{\partial x} \leqslant M^2(1+|x|)^{\lambda-2}u^2 + (1+|x|)^{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

Comme λ est inférieur à 2, on a :

$$-\,2u\frac{dA(x)}{dx}\,\frac{\partial u}{\partial x} \leqslant M^2 u^2 + A(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

Donc les coefficients vérifient bien la condition 3.2.2 avec $\mu = 1$, et $C_1 = M^2$.

Dans ce cas particulier, nous avons aussi :

$$F = 2^{\lambda}(1+|x|)^{\lambda}$$

$G_1 = G = 1$; $F_1 \leqslant M(1+|x|)^{\lambda-1}$; $H = 0$; $C_1 = M^2$; donc, F, F_1, G, G_1, H, C_1 vérifient les hypothèses demandées dans le théorème 3.1.1.

Recherche de la solution : Nous cherchons une solution $W(x,t)$ sous forme de série. Formellement, nous posons :

$$W(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)\,,$$

où $a_m(x)$ sont des fonctions de x et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

Identifions, nous avons :

$$A(x) \sum_{m=0}^{+\infty} a''_m(x)\, f^{(m)}(t) - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m+1)}(t) = 0$$

D'où : $\qquad a''_0 = 0\,, \quad A(x)\, a''_{m+1} = a_m\,.$

Nous déterminons les fonctions a_m par la récurrence suivante : $a_0(x) = \alpha x$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)}\, du \right] d\rho\,,$$

où α est une constante positive.

Nous allons montrer que la série formelle : $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$, converge absolument et que sa somme est une fonction appartenant à $C^{1,2}(\mathbf{R} \times [0,T])$, pourvu que $f^{(m)}(t)$ vérifie une certaine condition.

Pour cela, nous allons majorer a_m ainsi que ses dérivées premières et secondes. On a :

$$a''_0 = 0 \quad ; \quad a'_0 = \alpha \quad ; \quad |a_0| = \alpha\, |x|$$

D'après la récurrence, on a :

$$a''_1(x) = \frac{\alpha x}{A(x)}$$

Donc :

$$|a''_1(x)| \leqslant \alpha\, |x|^{1-\lambda} \quad \text{et} \quad |a''_1(x)| \leqslant \alpha\, |x| \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant 1$$

$$a'_1(x) = \int_0^x \frac{\alpha\rho}{A(\rho)}\, d\rho; \quad a'_1(x) \leqslant \frac{\alpha}{2-\lambda}\, |x|^{2-\lambda}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a'_1(\rho)\, d\rho; \quad |a_1(x)| \leqslant \frac{\alpha}{(2-\lambda)(3-\lambda)}\, |x|^{3-\lambda}$$

Montrons par récurrence, que nous avons :

$$
\mathrm{I}\left\{
\begin{aligned}
&|a_m(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{m(2-\lambda)+1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\,m\,!\;\Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}\\
&|a'_m(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{m(2-\lambda)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-1}\,m\,!\;\Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)}\\
&|a''_m(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{(m-1)(2-\lambda)+1-\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-2}(m-1)\,!\;\Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)}\\
&\text{et}\\
&|a''_m(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{(m-1)(2-\lambda)+1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m-2}(m-1)\,!\;\Gamma\left(m-1+\frac{1}{2-\lambda}\right)} \quad \text{pour } |x| \leqslant 1
\end{aligned}
\right.
$$

où Γ est la fonction eulérienne.

Supposons I vraie pour m, on a :

$$a''_{m+1}(x) = \frac{a_m(x)}{A(x)}$$

Donc,

$$|a''_{m+1}(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{m(2-\lambda)+1-\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\,m\,!\;\Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

et pour $|x| \leqslant 1$, on a :

$$|a''_{m+1}(x)| \leqslant \frac{\alpha\,|x|^{m(2-\lambda)+1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m}\,m\,!\;\Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

$$a'_{m+1}(x) = \int_0^x a''_{m+1}(\rho)\, d\rho \,,$$

$$|a'_{m+1}(x)| \leqslant \frac{\alpha |x|^{(m+1)(2-\lambda)}\, \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m+1}(m+1)!\ \Gamma\left(m+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x a'_{m+1}(\rho)\, d\rho$$

$$|a_{m+1}(x)| \leqslant \frac{\alpha |x|^{(m+1)(2-\lambda)+1}\, \Gamma\left(\frac{1}{2-\lambda}\right)}{(2-\lambda)^{2m+2}(m+1)!\ \Gamma\left(m+1+\frac{1}{2-\lambda}\right)}$$

Comme I est vraie pour $m = 1$, le théorème de récurrence prouve que I est vraie pour tout m.

Nous poserons $2 - \lambda = k$.

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie la condition suivante :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant (\epsilon_m)^m\, k^{2m}\, m!\ \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}$$

où ϵ_m tend vers zéro quand m tend vers l'infini, alors la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$$

converge uniformément sur tout borné de $\mathbf{R} \times [0, T]$. De plus, en dérivant chaque terme de la série, on obtient de nouvelles séries uniformément convergentes sur tout borné de $\mathbf{R} \times [0, T]$.

Ce qui prouve, en particulier, que si W est la somme de cette série, alors W appartient à $C^{1,2}(\mathbf{R} \times [0, T])$.

Nous voulons de plus que f ainsi que ses dérivées soient nulles pour $t = 0$, ce qui entraînera $W(x, 0) = 0$.

Voyons si une telle fonction f, non identiquement nulle, existe.

Soit p l'entier déterminé par :

$$p \leqslant \frac{1}{k} < p + 1 \ ,$$

On a :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant (\epsilon_m)^m \, k^{2m} \, m \, ! \ \frac{\Gamma(m + p + \mu)}{\Gamma(p + \mu)}$$

où μ est défini par $\frac{1}{k} = p + \mu$; μ est donc compris entre 0 et 1.

Utilisons la propriété de la fonction eulérienne suivante :

$$\begin{cases} \mu \text{ étant un réel compris entre 0 et 1,} \\ \lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\Gamma(\mu + n)}{n \, ! \, n^{\mu}} = 1 \end{cases}$$

et la formule de Stirling.

On a :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant \mathrm{M}(\epsilon_m)^m \, k^{2m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m+p}{e}\right)^{m+p} \sqrt{2\pi(m+p)} \, (m+p)$$

où M est une constante positive qui ne dépend pas de m.

Nous posons :

$$\epsilon_m = m^{\delta - 1} \qquad \text{où } \delta \text{ est un réel inférieur à 1.}$$

Dans ce cas particulier, on a :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant \mathrm{M}_1 \, m^{(1+\delta)m} \, m^{p+2}$$

où M_1 est une constante positive qui ne dépend pas de m.

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables, s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour $t = 0$, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles et vérifiant l'inégalité :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant \mathrm{M}_1 \, m^{(1+\delta)m} \quad . \text{ Voir [10]}$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W somme de la série : $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_m(x) \, f^{(m)}(t)$, non identiquement nulle, vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} A(x)\,\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\[2ex] W(x\,,0) = 0 \\[1ex] W \text{ appartenant à } C^{1,2}(\mathbf{R} \times [0\,,T])\,. \end{array}\right.$$

Nous remarquons aussi que la fonction W est solution du problème mixte où le domaine Ω est $\mathbf{R}_+$.

En effet, on a $W(0\,,t) = 0$.

De plus, la fonction W croît moins vite que

$$\exp |x|^{\frac{k}{1-\delta}} \qquad \text{voir [10]}$$

Donc, pour δ assez petit, vérifiant :

$\dfrac{k}{1-\delta} < k + \epsilon = 2 - \lambda + \epsilon$, la fonction W est une des solutions demandées.

Cas du théorème 3.1.2.

Comme précédemment, nous allons déterminer une solution non identiquement nulle, appartenant à $C^{1,2}(\mathbf{R} \times [0\,,T])$ de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} A(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathbf{R} \times [0\,,T] \\[2ex] u(x\,,0) = 0 \end{array}\right.$$

où $A(x)$ est déterminée par :

$A(x)$ appartenant à $C^1(\mathbf{R})$
$A(x)$ vérifiant :

$$A(x) \geqslant \max\,[(1 + |x|)^2\,[\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu\,, 1]$$

$$A(x) = (1 + x)^2\,[\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu \qquad \text{pour} \qquad |x| \geqslant 1$$

$$\left|\frac{dA(x)}{dx}\right| \leqslant \max\,[M(1 + |x|)\,(\mathrm{Log}\,(1 + |x|))^\nu\,, 1]$$

où M est une constante positive, ν un réel positif ou nul, inférieur à 1.

Nous traiterons ensuite le cas $\nu = 1$ où A(x) sera une nouvelle fonction.

Nous remarquons qu'une telle fonction A(x) existe. De plus, si ψ'_ϵ représente la fonction définie dans $\mathbf{R} \times [0, T]$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ par :

$$(x, t) \to \psi'_\epsilon(x, t) = \exp - [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^{2-\nu+\epsilon} .$$

la solution cherchée devra vérifier :

$$\psi'_\epsilon \, |u(x, t)| < \mathrm{K}, \qquad \mathrm{K} \text{ constante positive,}$$

c'est-à-dire u appartiendra à $\mathrm{K}_{\psi'_{2\epsilon}}$.

Comme précédemment, il faut d'abord montrer qu'une telle solution est aussi solution du problème C. Nous devons avoir ici :

$$- 2u \frac{d\mathrm{A}(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant \mathrm{C}_1 u^2 + \mu \, \mathrm{A}(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 .$$

D'après les hypothèses faites sur A(x), nous avons :

$$- 2u \frac{d\mathrm{A}(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant 2 \, |u| \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \max [\mathrm{M}(1 + |x|) [\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu , 1]$$

Si $\mathrm{M}(1 + |x|) [\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu \leqslant 1$, nous avons :

$$- 2u \frac{d\mathrm{A}(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \leqslant u^2 + \mu \, \mathrm{A}(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Si $\mathrm{M}(1 + |x|) \mathrm{Log} (1 + |x|)^\nu > 1$, nous avons :

$$- 2u \frac{d\mathrm{A}(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant \mathrm{M}^2 [\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu u^2 +$$

$$+ (1 + |x|)^2 (\mathrm{Log}(1 + |x|))^\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Donc, dans tous les cas, nous avons :

$$- 2u \frac{d\mathrm{A}(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant \mathrm{C}_1 u^2 + \mu \, \mathrm{A}(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

où μ est une constante positive, inférieure à 2 et

$$C_1(x, t) = \max[1, M^2[\mathrm{Log}(1 + |x|)]^\nu$$

Dans ce cas particulier, nous avons aussi :

$$F = K_1(1 + |x|)^2 [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^\nu$$

$$G_1 = G = 1$$

$$F_1 \leqslant K_1(1 + |x|) [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^\nu$$

$$H = 0$$

$$C_1 \leqslant K_1 [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^\nu$$

où K_1 est une constante positive.

Donc F, F_1, G, G_1, H, C_1 vérifient les hypothèses demandées dans le théorème 3.1.2.

Recherche de la solution :

Comme précédemment, nous cherchons une solution $W'(x, t)$ sous forme de série.

Formellement, nous posons :

$$W'(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) f^{(m)}(t)$$

où $a_m(x)$ sont des fonctions de x et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

En identifiant, nous avons :

$$\begin{cases} a_0'' = 0 \\ A(x)\, a_{m+1}'' = a_m . \end{cases}$$

Nous déterminerons les fonctions a_m par la récurrence suivante,

$$a_0(x) = x$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)}\, du \right] d\rho .$$

Nous allons montrer que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x) f^{(m)}(t)$ converge absolument et que sa somme est une fonction appartenant à

$$C^{1,2}(\mathrm{R} \times [0,\mathrm{T}]),$$

pourvu que $f^{(m)}(t)$ vérifie une certaine condition.

Pour cela, majorons a_m ainsi que ses dérivées premières et secondes. Nous avons :

$$a_0'' = 0$$

$$a_0' = 1$$

$$|a_0| \leqslant 1 + |x|.$$

D'après la récurrence, nous avons :

$$a_1'' = \frac{x}{\mathrm{A}(x)}.$$

Donc,

$$|a_1''(x)| \leqslant \frac{1}{(1 + |x|)[\mathrm{Log}(1 + |x|]^\nu} \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

et

$$|a_1''(x)| \leqslant (1 + |x|) \quad \text{pour} \quad |x| < 1 \;;$$

$$a_1' = \int_0^x a_1''(u)\,du$$

$$|a_1'(x)| \leqslant \frac{[\mathrm{Log}(1 + |x|)]^{1-\nu}}{1 - \nu}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a_1'(u)\,du$$

$$|a_1(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{1}{1-\nu} [\mathrm{Log}(1 + |u|)]^{1-\nu}\,du \right|$$

$$|a_1(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{[\mathrm{Log}(1 + |u|)]^{1-\nu}}{(1-\nu)(1 + |u|)} (1 + |u|)\,du \right|$$

$$|a_1(x)| \leqslant \frac{1}{(1-\nu)(2-\nu)} (1 + |x|)[\mathrm{Log}(1 + |x|)]^{2-\nu}.$$

Comme précédemment, nous montrons par récurrence que :

$$
\mathrm{I}'\left\{
\begin{aligned}
&|a_m(x)| \leqslant \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2-\nu}\right)(1+|x|)\,[\mathrm{Log}(1+|x|)]^{m(2-\nu)}}{(2-\nu)^{2m}\, m\,!\;\Gamma\left(m-\frac{1}{2-\nu}\right)}\\
&|a'_m(x)| \leqslant \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2-\nu}\right)[\mathrm{Log}(1+|x|)]^{m(2-\nu)-1}}{(2-\nu)^{2m-1}(m-1)\,!\;\Gamma\left(m-\frac{1}{2-\nu}\right)}\\
&|a''_m(x)| \leqslant \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2-\nu}\right)[\mathrm{Log}(1+|x|)]^{(m-1)(2-\nu)-\nu}}{(2-\nu)^{2m-2}(m-1)\,!\;\Gamma\left(m-1-\frac{1}{2-\nu}\right)(1+|x|)}\\
&\text{et}\\
&|a''_m(x)| \leqslant \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2-\nu}\right)(1+|x|)\,[\mathrm{Log}(1+|x|)]^{(m-1)(2-\nu)}}{(2-\nu)^{2m-2}(m-1)\,!\;\Gamma\left(m-1-\frac{1}{2-\nu}\right)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{pour}\quad |x| \leqslant 1\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie : $(2-\nu = \mathrm{K})$

$$
|f^{(m)}(t)| \leqslant (\epsilon_m)^m\, k^{2m}\, m\,!\; \frac{\Gamma\left(m-1+1-\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)}
$$

où, ϵ_m tend vers zéro quand m tend vers l'infini, alors la série $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}]$.

De plus, en dérivant chaque terme de la série, nous obtenons de nouvelles séries uniformément convergentes sur tout borné de $\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}]$.

Ce qui prouve en particulier que si W' est la somme de cette série, alors W' appartient à $\mathrm{C}^{1,2}(\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}])$. Nous voulons de plus que f, ainsi que ses dérivées soient nulles pour $t = 0$, ce qui entraînera $\mathrm{W}'(x,0) = 0$.

Voyons l'ordre de croissance de $f^{(m)}(t)$. Comme précédemment, on trouve :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_1 (\epsilon_m)^m \left(\frac{k}{e}\right)^{2m} m^{2m} m \ ,$$

où, M_1 est une constante qui ne dépend pas de m.

Posons, $\epsilon_m = m^{\delta - 1}$ où δ est un réel inférieur à 1, nous avons :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_1 \, m^{(1+\delta)m} \, m \ .$$

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour $t = 0$, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles, et vérifiant l'inégalité :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_1 \, m^{(1+\delta)m} \ .$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W', somme de la série : $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) f^{(m)}(t)$ non identiquement nulle vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \dfrac{\partial^2 W'}{\partial x^2} - \dfrac{\partial W'}{\partial t} = 0 \\ W'(x, 0) = 0 \\ W' \text{ appartient à } C^{1,2}(R \times [0, T]). \end{array} \right.$$

De plus, cette fonction W' croît moins vite que

$$\exp \left[m_0 [\mathrm{Log}(1 + |x|)]^{\frac{k}{1-\delta}} \right] .$$

C'est-à-dire que pour δ suffisamment petit, $\dfrac{2 - \nu}{1 - \delta} < 2 - \nu + \epsilon$ la fonction W' appartient à $K_{\psi'_{2\epsilon}}$.

Nous traitons ici le cas $\nu = 1$ que nous avons exclus précédemment.

Nous définissons $A(x)$ par :

$A(x)$ appartenant à $C^1(R)$ et vérifiant :

$$A(x) \geqslant (e + |x|)^2 \, [\mathrm{Log}(e + |x|)]$$

$$A(x) = (e + |x|)^2 \, \mathrm{Log}(e + |x|) \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1$$

$$\frac{dA(x)}{dx} \leqslant M(e + |x|) \operatorname{Log}(e + |x|). \text{ (M constante positive).}$$

Nous montrons comme précédemment que nous avons :

$$- 2u \frac{dA(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \leqslant C_1 u^2 + A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

et que les hypothèses demandées dans le théorème 3.1.2 sont vérifiées.

Nous cherchons une solution sous forme de série.

Nous posons formellement :

$$W''(x, t) = \sum_{m=0}^{+} a_m(x) f^{(m)}(t) ,$$

où, $a_m(x)$ sont des fonctions de x, et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m d'une certaine fonction de t.

En identifiant, nous avons :

$$\begin{cases} a_0'' = 0 \\ A(x) a_{m+1}'' = a_m . \end{cases}$$

Nous déterminons les fonctions a_m par la récurrence suivante :

$$a_0(x) = x$$

$$a_{m+1}(x) = \int_0^x \left[\int_0^\rho \frac{a_m(u)}{A(u)} du\right] d\rho$$

Majorons a_m ainsi que ses dérivées première et seconde, nous avons :

$$|a_1''(x)| \leqslant \frac{1}{(e + |x|) \operatorname{Log}(e + |x|)}$$

$$|a_1'(x)| \leqslant \operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |x|)$$

$$|a_1(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |u|)}{(e + |u|) \operatorname{Log}(e + |u|)} (e + |u|) \operatorname{Log}(e + |u|) du \right|$$

$$|a_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} [\operatorname{Log} \operatorname{Log}(e + |x|)]^2 (e + |x|) \operatorname{Log}(e + |x|)$$

Comme précédemment, nous montrons par récurrence que :

$$|a_m(x)| \leqslant \frac{1}{2m\,!} \,[\mathrm{Log\,Log}(e + |x|)]^{2m}\,(e + |x|)\,[\mathrm{Log}(e + x)]^m$$

$$|a'_m(x)| \leqslant \frac{1}{(2m-1)\,!}\,[\mathrm{Log\,Log}(e + |x|)]^{2m-1}[\mathrm{Log}(e + |x|)]^m$$

$$|a''_m(x)| \leqslant \frac{1}{(2m-2)\,!}\,\frac{[\mathrm{Log\,Log}(e + |x|)]^{2m-2}\,[\mathrm{Log}(e + |x|)]^{m-2}}{(e + |x|)}$$

Si $f^{(m)}(t)$ vérifie :

$|f^{(m)}(t)| \leqslant (\epsilon_m)^m\, 2m\,!$, où ϵ_m tend vers zéro quand m tend vers l'infini, alors la série $\sum_{m=0}^{+} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}]$. De plus, sa somme $\mathrm{W}''(x,t)$ appartient à $\mathrm{C}^{1,2}(\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}])$.

Posons $\epsilon_m = m^{\delta-1}$ où δ est un réel inférieur à 1.

Nous connaissons l'existence de fonctions indéfiniment dérivables s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées pour $t = 0$, ces fonctions n'étant pas identiquement nulles et vérifiant l'inégalité :

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant \mathrm{M}_1\, m^{(1+\delta)m}\,.$$

Si f est une telle fonction, alors la fonction W'' somme de la série :

$\sum_{m=0}^{+} a_m(x)\, f^{(m)}(t)$ non identiquement nulle, vérifie :

$$\begin{cases} \mathrm{A}(x)\,\dfrac{\partial^2 \mathrm{W}''}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \mathrm{W}''}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{W}''(x,0) = 0 \\ \mathrm{W}'' \text{ appartenant à } \mathrm{C}^{1,2}(\mathbf{R} \times [0,\mathrm{T}]). \end{cases}$$

De plus, cette fonction W'', non identiquement nulle, croît moins vite que : $\exp\left[m_0(\mathrm{Log}(1 + |x|))^{\frac{1+2\epsilon'}{1-\delta}}\right]$ pour tout ϵ' positif.

En effet, ϵ' étant donné, on sait que :

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}(e + |x|) \leqslant K_1 [\operatorname{Log}(e + |x|)]^{\epsilon'}$$

où K_1 est une constante positive.

Nous avons donc :

$$|a_m(x)| \leqslant \frac{K_1}{2m!} (e + |x|) [\operatorname{Log}(e + |x|)]^{m(1+2\epsilon')}$$

et comme précédemment, nous trouvons que $W''(x, t)$ croît moins vite que :

$$\exp \left[m_0 [\operatorname{Log}(1 + |x|)]^{\frac{1+2\epsilon'}{1-\delta}} \right]$$

C'est-à-dire que pour δ et ϵ' suffisamment petits $\dfrac{1 + 2\epsilon'}{1 - \delta} < 1 + \epsilon$ la fonction W'' appartient à $K_{\psi'_{2\epsilon}}$.

CHAPITRE IV

REMARQUES GENERALES

Dans le chapitre II, nous avons montré que les fonctions $\Phi_{m,\beta,\tau}$, $\Phi'_{m,\beta,\tau}$, Φ_m vérifiaient les hypothèses demandées pour l'application du théorème 1.1.1 et 1.2.1, suivant l'ordre de croissance des coefficients.

Pour obtenir de telles fonctions, nous avons cherché à déterminer des solutions de :

B $\left\{\begin{array}{l} \Phi \text{ lipschitzienne dans } \mathbf{R}_+ \times [0, T] \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}_+, \text{ les fonctions} \\ t \to \Phi(|x|, t) \text{ et } |x| \to \Phi(|x|, t) \text{ sont décroissantes, } \Phi \text{ est solu-} \\ \text{tion de l'inéquation suivante :} \\ -\Phi\Phi_t G - \Phi^2(H + C_1) - \dfrac{32}{2-\mu}\Phi^2_{|x|} F \geqslant 0 \\ \text{sous forme exp. } -u(t) \,.\, v(x). \end{array}\right.$

Nous avons vu dans ce chapitre, l'intérêt d'obtenir des fonctions Φ qui décroissent le plus rapidement possible, car les théorèmes du chapitre II sont applicables dans les espaces K_ψ où ψ décroît d'une manière analogue à Φ (théorèmes 2.1.1, 2.1.2).

La question que l'on se pose ici est la suivante : est-il possible d'obtenir des solutions de B qui décroissent plus vite que les $\Phi_{m,\beta,\tau}$, $\Phi'_{m,\beta,\tau}$ obtenues ?

La réponse, dans un certain sens, à cette question est donnée par les théorèmes suivants :

THEOREME 4.1.1. – *Supposons qu'il existe r_0 tel que, pour tout $|x| \geqslant r_0$, on ait :*

$$\frac{F}{G} \geqslant K_1(1 + |x|)^\lambda$$

$$\frac{C_1}{G} \geqslant K_1(1 + |x|)^{2-\lambda}$$

où λ *et* K_1 *sont des constantes positives,* λ *inférieure à* 2. *Alors, il n'existe pas de solution* Φ *de* B *telle que :*

$\Phi = 0(\Psi_\epsilon)$ *quand* $|x|$ *tend vers l'infini, où la fonction* Ψ_ϵ *est déterminée par :*

$$\Psi_\epsilon(|x|, t) = \exp. - |x|^{2-\lambda+\epsilon} \text{ et ceci pour tout } \epsilon > 0.$$

THEOREME 4.1.2. – *Supposons qu'il existe* r_0 *tel que, pour tout* $|x| \geqslant r_0$ *on ait :*

$$\frac{F}{G} \geqslant K_1(1 + |x|)^2 [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^\nu ,$$

$$\frac{C_1}{G} \geqslant K_1 [\mathrm{Log}(2 + |x|)]^{2-\nu} ,$$

où ν *et* K_1 *sont des constantes positives,* $0 \leqslant \nu \leqslant 1$.

Alors, il n'existe pas de solution Φ *de* B *telle que :*

$\Phi = 0(\Psi'_\epsilon)$ *quand* $|x|$ *tend vers l'infini, où la fonction* Ψ'_ϵ *est déterminée par :*

$$\Psi'_\epsilon(|x|, t) = \exp. - [\mathrm{Log}(1 + |x|)]^{2-\nu+\epsilon}$$

et ceci pour tout $\epsilon > 0$.

Démonstration. – Supposons l'existence d'un ϵ_1 et d'une solution Φ_{ϵ_1} de B telle que :

$$\Phi_{\epsilon_1} = 0(\Psi_{\epsilon_1}) \text{ quand } |x| \text{ tend vers l'infini.}$$

Soit la fonction $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ définie dans $\mathbf{R}_+ \times \left[0, \frac{T}{\lambda'}\right]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, par :

$$\begin{aligned}(|x|, r) \to \Phi_{\epsilon_1,\lambda'}(|x|, t) &= \Phi_{\epsilon_1}(r_0, \lambda' t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant r_0 \\ &= \Phi_{\epsilon_1}(|x|, \lambda' t) \quad \text{pour} \quad |x| > r_0\end{aligned}$$

Montrons qu'il existe λ'_0 tel que, pour tout $\lambda' \geqslant \lambda'_0$, $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ soit solution de,

$$
\mathrm{B}' \left\{ \begin{array}{l} \Phi \text{ lipschitzienne dans } \mathbf{R}_+ \times \left[0\,,\dfrac{\mathrm{T}}{\lambda'}\right] \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}_+, \text{ les} \\ \text{fonctions } t \to \Phi(|x|,t) \text{ et } |x| \to \Phi(|x|,t) \text{ sont décroissantes,} \\ \phi \text{ est solution presque partout de l'inéquation suivante :} \\ -\Phi\Phi_t - \mathrm{M}_1(1+|x|)^{2-\lambda}\,\Phi^2 - \mathrm{M}_2(1+|x|)^{\lambda}\,\Phi^2_{|x|} \geqslant 0 \end{array} \right.
$$

où $\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2$ sont des constantes positives, λ_0 dépendant de $\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2$ et de r_0.

Il suffit de montrer que $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ est solution de l'inéquation.

Si $|x| > r_0$, nous devons avoir :

$$
-\lambda'\Phi_{\epsilon_1}\,\frac{\partial\Phi_{\epsilon_1}}{\partial t} - \mathrm{M}_1(1+|x|)^{2-\lambda}\,\Phi^2_{\epsilon_1} - \mathrm{M}_2(1+|x|)^{\lambda}\left[\frac{\partial\Phi_{\epsilon_1}}{\partial\,|x|}\right]^2 \geqslant 0 .
$$

Inégalité vraie si $\lambda' \geqslant \sup\left[\dfrac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{K}_1}\,,\dfrac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{K}_1}\right]$, car, par hypothèse, Φ_{ϵ_1} vérifie :

$$
-\Phi_{\epsilon_1}\,\frac{\partial\Phi_{\epsilon_1}}{\partial t} - \mathrm{K}_1(1+|x|)^{2-\lambda}\,\Phi^2_{\epsilon_1} - \mathrm{K}_1(1+|x|)^{\lambda}\left[\frac{\partial\Phi_{\epsilon_1}}{\partial\,|x|}\right]^2 \geqslant 0
$$

pour $|x| > r_0$.

Si $|x| \leqslant r_0$, nous devons avoir :

$$
-\lambda'\Phi_{\epsilon_1}(r_0\,,t)\,\frac{\partial\Phi_{\epsilon_1}(r_0\,,t)}{\partial t} - \mathrm{M}_1(1+|x|)^{2-\lambda}\,\Phi^2_{\epsilon_1}(r_0\,,t) \geqslant 0 .
$$

Inégalité vraie si $\lambda' \geqslant \dfrac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{K}_1}(1+r_0)^{2-\lambda}$.

D'où $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ sera solution de B' si $\lambda' \geqslant \lambda_0$, avec

$$
\lambda'_0 = \sup\left[\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{K}_1}\,,\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{K}_1}\,,\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{K}_1}(1+r_0)^{2-\lambda}\right].
$$

Considérons maintenant le contre-exemple du théorème 3.1.1. Nous avons déterminé une solution W non identiquement nulle vérifiant :

$$
\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}(x)\,\dfrac{\partial^2\mathrm{W}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial\mathrm{W}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{W}(x\,,0) = 0 \end{array} \right.
$$

où $A(x)$ vérifie : $A(x) \geqslant (1 + |x|)^{\lambda}$

$$A(x) = (1 + |x|)^{\lambda} \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1 .$$

De plus W vérifie :

$$|W(x,t)| \exp. - |x|^{2-\lambda+\frac{\epsilon_1}{2}} \leqslant K \quad \text{K constante positive.}$$

Montrons que si Φ_{ϵ_1} existe, alors on peut appliquer le corollaire 1.1 à W et à $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ pour λ' assez grand.

En effet, nous avons vu que W était solution de :

$$-2W\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{\partial W}{\partial t}\right] \leqslant C_1 W^2 + A(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 ,$$

où $C_1 = M_3(1 + |x|)^{2-\lambda}$, M_3 étant une constante positive.

De plus, la fonction $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ vérifie :

$\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ lipschitzienne dans $\mathbf{R}_+ \times \left[0, \frac{T}{\lambda'}\right]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, (on prendra $r_0 = 1$).

les fonctions $t \to \Phi_{\epsilon_1,\lambda'}(|x|,t)$ et $|x| \to \Phi_{\epsilon_1,\lambda'}(|x|,t)$ sont décroissantes,

la fonction $\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}$ est solution presque partout de :

$$-\Phi\Phi_t - M_3(1 + |x|)^{2-\lambda}\Phi^2 - \frac{32}{2-\mu}(1 + |x|)^{\lambda}\Phi_{|x|}^2 \geqslant 0$$

$$\text{pourvu que } \lambda \geqslant \sup\left(\frac{M_3}{K_1}, \frac{32}{(2-\mu)K_1}, \frac{M_3}{K_1}(2)^{2-\lambda}\right).$$

Il reste à montrer la condition 1.1.6$'$ qui s'exprime ici par : pour tout τ_1, τ_2 $\left(0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \frac{T}{\lambda}\right)$, il existe une suite $(r_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tendant vers l'infini et une suite $(R_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tendant vers zéro telles que :

$$I_{r_m} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left[2\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}^2 WA(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right]_{x=r_m} - \left[2\Phi_{\epsilon_1,\lambda'}^2 WA(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right]_{x=r_m}\right]dt \leqslant R_m .$$

En effet, nous avons, si $r \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_r \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left| \mathrm{W} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} \right|_{x=r} + \left| \mathrm{W} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} \right|_{x=-r} \right] 2\Phi^2_{\epsilon_1 \lambda'} (1 + r)^{\lambda} \, dt = \mathrm{I}'_r$$

Considérons l'intégrale :

$$\mathrm{J}_r = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^r 2\Phi^2_{\epsilon_1 \lambda'} (1 + x)^{\lambda} \left[\left| \mathrm{W}(x, t) \frac{\partial \mathrm{W}(x, t)}{\partial x} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \mathrm{W}(x, t) \frac{\partial \mathrm{W}(-x, t)}{\partial x} \right| \right] dx \, dt.$$

Nous savons que :

$$\exp - |x|^{2-\lambda+\frac{\epsilon_1}{2}} |\mathrm{W}(x, t)| < \mathrm{K}.$$

Nous démontrerons de même (voir le contre-exemple) que :

$$\exp - |x|^{2-\lambda+\frac{\epsilon_1}{2}} \left| \frac{\partial \mathrm{W}(x, t)}{\partial x} \right| \leqslant \mathrm{K}'$$

où K et K′ sont des constantes positives.

Donc l'intégrale J_r converge quand r tend vers l'infini.

Mais nous avons (théorème de Fubini)

$$\mathrm{J}_r = \int_0^r \mathrm{I}'_x \, dx.$$

Soit R et s deux constantes positives quelconques et supposons que pour tout $x > s$, on ait :

$$\mathrm{I}'_x > \mathrm{R}$$

alors,

$$\mathrm{J}_r \geqslant \int_0^s \mathrm{I}'_x \, dx + (r - s) \, \mathrm{R} \text{ pour tout } r > s.$$

Donc J_r tendrait vers l'infini quand r tendrait vers l'infini ; ce qui est impossible car J_r converge.

Donnons-nous une suite $(\mathrm{R}_m)_{m \in \mathrm{N}}$ tendant vers zéro quand m tend vers l'infini et définissons la suite $(r_m)_{m \in \mathrm{N}}$ de la manière suivante :

$$r_1 \text{ défini de telle sorte que } \mathrm{I}'_{r_1} < \mathrm{R}_1 .$$

Si r_m est définie, nous définissons r_{m+1} par $r_{m+1} > r_m + 1$ de telle sorte que $I'_{r_m} < R_m$, une telle suite est bien définie.

Nous avons donc démontré qu'il existe une suite $(r_m)_{m \in N}$ tendant vers l'infini et une suite R_m tendant vers zéro telles que :

$$I_{r_m} \leqslant I'_{r_m} < R_m .$$

On peut donc appliquer le corollaire 1.1.

Nous avons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2_{\epsilon_1, \lambda'} W^2 \, dx \quad \text{fonction décroissante de } t.$$

Comme $W(x, 0) = 0$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2_{\epsilon_1, \lambda'} W^2 \, dx = 0 \quad \text{pour tout } t, \text{ donc} \quad W \equiv 0 .$$

Ce qui est contraire au résultat prouvé : W n'est pas identiquement nul. Donc, l'hypothèse que $\Phi_{\epsilon_1, \lambda'}$ existe, est fausse ; ce qui démontre le théorème 4.1.1.

La démonstration du théorème 4.1.2 est identique en utilisant un des contre-exemples du théorème 3.1.2 suivant que $\nu \neq 1$ ou que $\nu = 1$.

Unicité dans des cas non-linéaires.

Nous avons utilisé les théorèmes 1.1 et 1.2 pour démontrer des théorèmes d'unicité dans le cas où l'opérateur L_2 était linéaire (chapitre III). Nous pouvons employer la même méthode pour obtenir des théorèmes d'unicité dans le cas non linéaire, mais les conditions exigées pour l'opérateur seraient très complexes. Nous nous limiterons à étudier quelques cas particuliers. Nous supposerons que $N = 1$, pour N quelconque les résultats sont analogues.

Position du problème : Soit l'opérateur du type suivant :

$$L_3 v = \sum_i D_i [\mathcal{R}_i(v)] - \sum_k D_t [\alpha v] + B(v)$$

où B est un opérateur du premier ordre ne faisant pas intervenir les dérivées par rapport à la variable t.

Nous cherchons les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} L_3 v = f \quad \text{dans } \Omega \times [0,T] \text{ où } f \text{ est une fonction donnée.} \\ v(x,t) = 0 \quad \text{pour } (x,t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0,T] \\ v(x,0) = 0. \end{cases}$$

Nous supposerons, dans toute la suite, que u et v sont deux solutions de ce problème, et nous voulons démontrer que $u = v$ dans $\Omega \times [0,T]$.

Nous ramenons toujours le problème à l'étude du problème suivant :

$$\mathrm{I} \begin{cases} L_3 u - L_3(v) = 0 \\ u - v = 0 \quad \text{pour tout point de } \Gamma \times [0,T] \\ u - v = 0 \quad \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Exemple 1. – Si L_3 est un opérateur quasi-linéaire, où

$$\mathcal{L}_i(v) = \sum_j a_{ij} D_j v .$$

Si B est un opérateur qui vérifie la condition suivante :
il existe r_0 (constante positive) telle que pour tout r supérieur ou égal à r_0, et pour tout t appartenant à $[0,T]$ on ait :

$$\int_{\omega_r} (u-v)[B(u) - B(v)]\,dx \leqslant \int_{\omega_r} [C_1(u-v)^2 + \\ + \mu \sum_{i,j} a_{ij} D_i(u-v) D_j(u-v)]dx$$

où C_1 appartient à $C(S)$ et μ une constante positive, inférieure à 2.

Alors les résultats du chapitre III s'appliquent textuellement.

En effet, vu la condition posée, le problème 1 se ramène à l'étude des recherches des solutions d'une inéquation du type 3.1.3, et le résultat s'en déduit facilement.

Exemple 2. – Si les opérateurs $\mathcal{R}_i$ vérifient la condition de monotonie suivante :

pour tout u et v vérifiant certaines propriétés

$$\sum_i D_i(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)] \geqslant 0$$

si $B \equiv 0$.

Nous obtenons par un calcul analogue au calcul du chapitre I

$$-2\,\Phi\Phi_t\,\alpha\,(u-v)^2 + \sum_i 4\,\Phi\Phi_i\,(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)] +$$

$$+\,2\,\Phi^2\sum_i D_i\,(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i D_i\,[2\,\Phi^2\,(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)]] - D_t\,[\Phi^2\,\alpha\,(u-v)^2].$$

Si nous considérons que Φ n'est une fonction que de la variable t, alors nous avons :

$$0 \leqslant -2\Phi\Phi_t\,\alpha(u-v)^2 + 2\Phi^2\sum_i D_i(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i D_i\,[2\Phi^2(u-v)\,(\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v))] - D_t\,[\Phi^2\,\alpha(u-v)^2]\,.$$

En intégrant sur $\omega_r \times [\tau_1\,,\tau_2]$, nous obtenons, en supposant que nous puissions appliquer le lemme 0.3 :

$$0 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} [-2\Phi\Phi_t\,\alpha(u-v)^2 + 2\Phi^2\sum_i D_i(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u) -$$

$$-\mathcal{R}_i(v)]\,]\,dx\,dt \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r}\sum_i 2\Phi^2(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)]\,\frac{x_i}{r}\,ds\,dt\,+$$

$$+\left[\int_{\omega_r}\Phi^2\,\alpha(u-v)^2\,dx\right]_{t=\tau_1} - \left[\int_{\omega_r}\Phi^2\,\alpha(u-v)^2\,dx\right]_{t=\tau_2}$$

Si, par exemple, nous supposons que u et $\mathcal{R}_i(u)$ appartiennent à $L^2(\Omega \times [0\,,T])$, alors nous démontrerions qu'il existe deux suites $(r_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tendant vers l'infini et $(R_m)_{m\in\mathbf{N}}$ tendant vers zéro telles que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r_m}}\sum_i 2\Phi^2(u-v)\,[\mathcal{R}_i(u)-\mathcal{R}_i(v)]\,\frac{x_i}{r}\,ds\,dt \leqslant R_m$$

et ceci pour tout τ_1, τ_2.

Nous démontrerions donc que :

$t \to \int_\Omega \Phi^2 \alpha(u-v)^2 \, dx$ est une fonction décroissante de t et nous en déduirions que $u \equiv v$.

Exemple 3. – Si à la place de la monotonie, nous supposions que $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition suivante :

$$\sum_i (\xi_i - \xi_i')[\mathrm{P}_i(u,\beta_j) - \mathrm{P}_i(v,\beta_j)] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \mathrm{F} \sum_i (\xi_i - \xi_i')^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_i (\beta_i - \beta_i')(\mathrm{P}_i(u,\beta_j) - \mathrm{P}_i(v,\beta_j')),$$

et ceci pour tout $\lambda > 0$, où F est une fonction définie dans S.

si $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition i et ii

si α vérifie les conditions iv et v,

si B vérifie la condition donnée dans l'exemple 1, alors nous avons les mêmes résultats que dans le chapitre III.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon et L. Nirenberg, Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, *Comm. Pure Appl. Math.*, XVI (1963), 121-239.

[2] D.G. Aronson et P. Besala, Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients, *Coll. Math.*, XVIII (1967) 125-135.

[3] J. Chabrowski, Sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire du type parabolique, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa,* Série III, XXIII, Fasc. IV, (1969), 547-552.

[4] D.E. Edmunds et Valérie Williams, Hyperbolic differential inequalities, *Journal London Math. Soc.*, 42 (1967).

[5] I.M. Guelfand–G.E. Chilov, Les distributions, Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod.

[6] M. LEES, Asymptotic behavior of solutions of parabolic differential inequalities, *Canadian J. of Maths.*, 14 (1962).

[7] M. LEES et M.H. PROTTER, Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities, *Duke Math. J.*, 28 (1961), 369-382.

[8] P. MUSTATA, Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique du second ordre, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa,* XXI (1967), 507-526.

[9] M.H. PROTTER, Asymptotic behavior and uniqueness theorems for hyperbolic equations and inequalities, Tech. Rep. Contract AF 49 (638) – 398, Univ. of Calif., Berkeley, Calif., 1960.

[10] F. RIESZ et B.SZ. NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars.

[11] Séminaire SCHWARTZ 1959/1960.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1972
Révisé le 25 juillet 1975
Proposé par B. Malgrange.

Gérard REYNAUD,
Université d'Aix-Marseille
U.E. R. scientifique de Luminy
Département de Mathématique-Informatique
70, rue Léon Lachamp
13288 Marseille Cedex 2.