ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TOSIAKI KORI

La théorie des espaces fonctionnels à nullité 1 et le problème de Neumann sur les espaces harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 4 (1977), p. 45-119

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 4 (1977), 45-119.

LA THÉORIE DES ESPACES FONCTIONNELS A NULLITÉ 1 ET LE PROBLÈME DE NEUMANN SUR LES ESPACES HARMONIQUES

par Tosiaki KORI

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le problème de Dirichlet a été étudié par de nombreux mathématiciens; de la Valée Poussin, Perron et Wiener etc... Ce sont R. S. Martin et M. Brelot qui ont pu le résoudre dans un cadre général, et ce faisant leur recherche a donné naissance à la théorie axiomatique du potentiel dans laquelle se manifeste la structure essentielle de la théorie du potentiel. Si on veut résoudre le problème de Neumann sous une forme aussi générale que possible, il est naturel, comme dans le problème de Dirichlet, que l'on ne veuille pas faire intervenir la frontière de l'espace considéré; elle peut être très singulière. C'est Z. Kuramochi qui a résolu le second problème dans le cas des variétés riemanniennes.

Dans cet article nous résolvons le problème de Neumann dans le cadre de l'axiomatique de Brelot. Notre but général est de développer l'analyse sur les espaces harmoniques de Brelot. Ainsi les résultats obtenus s'appliquent à la vaste classe des opérateurs différentiels elliptiques du second ordre.

Nous allons d'abord développer la théorie générale des espaces fonctionnels non séparés en vue de présenter une méthode naturelle adaptée aux problèmes aux limites *non-coercives*. A. Beurling et J. Deny ont introduit les espaces fonctionnels (séparés) pour faire la théorie de la méthode de projection orthogonale dans la théorie du potentiel, et envisagé les divers principes qui jouent un rôle important dans la théorie du potentiel. Pour atteindre notre but nous devons traiter le cas où la forme de Dirichlet n'est pas séparée. En effet la forme de Dirichlet classique $\int |\nabla u|^2 \, dx$ n'est pas séparée : elle annule les constantes. Ainsi nous sommes amenés à considérer les espaces fonctionnels à nullité 1.

Dans les Chapitres I et II nous cherchons, comme J. Deny l'a fait dans [4], le lien entre les opérations de contraction dans un espace fonctionnel à nullité 1 et le principe semi-complet du maximum satisfait par l'opérateur potentiel associé à cet espace fonctionnel : le théorème principal annonce que, dans un espace fonctionnel E à nullité 1 du type L^2_{loc}, l'opérateur potentiel satisfait au principe semi-complet du maximum si et seulement si toutes les contractions opèrent dans E.

Un des exemples importants de tels espaces fonctionnels est l'espace H des fonctions harmoniques u dont l'intégrale de Dirichlet $D(u, u)$ est finie. La forme bilinéaire $D(u, u)$ sera définie comme la demi-masse totale $\frac{1}{2}\nu(1)$ de la partie potentiel de la fonction sous-harmonique u^2. Notons la formule classique pour une fonction harmonique;

$$|\nabla u|^2 = \Delta(u^2).$$

Nous montrons que l'espace fonctionnel à nullité 1 $(H, D(\ ,\ ))$ a un noyau reproduisant $b_y(x)$ normalisé en un point x_0 :

$$u(y) - u(x_0) = D(b_y, u)$$

pour tout $u \in H$, et en particulier,

$$b_y(x) = D(b_y, b_x).$$

La théorie des espaces fonctionnels à nullité 1 qui sont munis des noyaux reproduisants est donnée dans le Chapitre III, ainsi que la condition de compacité de

$$f \longmapsto Uf = \int b_y(.)f(y)m\,(dy).$$

Les Chapitres IV et V sont consacrés au problème de Neumann sur les espaces harmoniques symétriques de Brelot. Soit $(X, \mathscr{H})$ un tel espace.

Soient Δ la frontière de Martin et $k_\xi(x)$, $\xi \in \Delta$, le noyau-fonction de Poisson-Martin. On définit la dérivée normale de $u \in H$ par la formule (de Green) :

$$D(u, v) = \int_\Delta \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\,dl, \quad \forall v \in H,$$

où $\bar{v}$ est la valeur au bord de v. Alors on peut résoudre le problème de Neumann non-homogène : Étant donnée une fonction φ sur Δ, pour qu'il existe une fonction harmonique u de H dont la dérivée normale sur Δ soit φ, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale de φ sur Δ s'annule. La démonstration découle de l'inégalité

$$\int_\Delta \left|\bar{u} - \int_\Delta \bar{u}\,dl\right|^2 dl \leqslant a\mathrm{D}(u, u)$$

où a est une constante associée à l'espace harmonique considéré.

Les deux résultats suivants sont ceux les plus importants dans le Chapitre VI et V :

1) Pour tout compact K, on a l'estimation

$$\sup_{\mathrm{K}} |u(.) - u(x_0)| \leqslant \sqrt{2}\, a\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\mathrm{D}(u, u)^{1/2}$$

pour tout $u \in \mathrm{H}$, où M_{K} est la constante qui provient de l'inégalité de Harnack.

2) (Principe du minimum). Si une fonction surharmonique s dans un domaine ω, de frontière $\partial\omega$ compact, vérifie les conditions :

$$\liminf s \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega,$$
$$\frac{\partial s}{\partial n} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Delta,$$

alors s est positive.

Pour la démonstration nous aurons besoin de *localiser* l'espace (H, D(,)) au domaine ω : C'est la méthode que nous avons adaptée dans notre article précédent [8].

Le noyau de Neumann est donné par

$$\mathrm{N}f = \mathrm{G}f + \mathrm{U}f,$$

pour toute charge nulle f, i.e. telle que $\int f\,dm = 0$, où

$$\mathrm{G}f = \int p_y(.)f(y)m\,(dy)$$

avec $p_y(x) = p_x(y)$ la fonction de Green sur $(\mathrm{X}, \mathscr{H})$.

N satisfait au principe semi-complet du maximum : Pour tout réel a et toute charge nulle f, si la relation

$$\mathrm{N}f \leqslant a$$

est vraie sur l'ensemble $\{f > 0\}$, elle l'est aussi sur X.

Nous construisons la résolvante $(\mathrm{N}_p)_{p>0}$ du problème de Neumann qui vérifie la relation

$$\mathrm{N}f = \mathrm{N}_pf + p\mathrm{N}\mathrm{N}_pf = \mathrm{N}_pf + p\mathrm{N}_p\mathrm{N}f$$

pour toute charge nulle f. La mesure m est invariante par rapport à (N_p). La méthode de construction est intéressante : Nous nous servons du théorème de l'indice. En effet

$$(I + pG), \qquad p > 0,$$

restreinte aux charges nulles a le noyau 0 et l'image à codimension 1 dans $L^2(X,m)$, et l'opérateur U est compact, ce qui assure l'existence de $(I + pN)^{-1}$ sur un sous-espace de codimension 1.

Nous montrons que (N_p) est une résolvante des noyaux markoviens et que l'on a la décomposition

$$N_p = G_p + (I - pG_p)U_p(I - pG_p),$$

où $(G_p)_{p>0}$ est la résolvante associée à G, et U_p est défini par

$$D(U_p g, u) + p((I - pG_p)U_p g, u)_{L^2(X)} = (g, u)_{L^2(X)},$$

pour tout $u \in H$. La dernière formule exprime la condition limite du problème de Neumann, c'est-à-dire, une expression déformée de

$$\frac{\partial}{\partial n} N_p g = 0.$$

Je suis heureux d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à MM. Brelot et G. Choquet qui m'ont invité dans l'Équipe d'Analyse et qui m'ont soutenu pendant ce travail. Je tiens à exprimer ma gratitude à MM. G. Mokobodzki et A. Ancona pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et pour les discussions que j'ai eues avec eux à ce sujet. Je remercie également MM. D. Feyel et M. Yor qui m'ont aidé à corriger les erreurs linguistiques et qui m'ont encouragé. Ma reconnaissance va également à M. P. A. Meyer qui m'a signalé que le noyau de Naïm donne un exemple d'opérateur carré du champ. Je remercie aussi tous les autres auditeurs du Séminaire de Théorie du Potentiel, dont je ne cite pas les noms, de qui j'ai pu apprendre divers résultats ou aspects de la Théorie du Potentiel. Enfin je remercie Mme Le Perchec qui a reproduit ce travail soigneusement.

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPE SEMI-COMPLET DU MAXIMUM ET CONTRACTIONS

Nous envisageons, dans un espace fonctionnel à nullité 1, la relation entre l'opération de contraction et le principe semi-complet du maximum satisfait par l'opérateur potentiel. Nous donnerons dans le chapitre II la correspondance précise entre les espaces fonctionnels, les opérateurs satisfaisant au principe du maximum et les résolvantes sous-markoviennes, en nous restreignant au cas où les objets sont dans (L^2).

1. Espaces fonctionnels à nullité 1.

Soient X un espace localement compact et m une mesure de Radon positive sur X. On désigne par $L^p_{\mathrm{loc}}(X) = L^p_{\mathrm{loc}}(X, m)$ l'espace des classes de fonctions numériques sur X, dont la puissance p-ème est localement m-intégrable.

Une forme bilinéaire $b(\ ,\ )$ définie sur un espace vectoriel V est dite *à nullité* 1, si la dimension du sous-espace constitué par les éléments φ, tels que $b(\varphi, u) = 0$ pour tout $u \in V$, est égale à 1. Dans cet article nous supposerons toujours qu'un tel sous-espace d'annulation est $\mathbf{R}^1$;

$$\{\varphi \in V;\ b(\varphi, u) = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in V\} = \mathbf{R}^1.$$

Soit H un sous-espace vectoriel de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, m)$, muni d'une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ symétrique, positive et à nullité 1. Nous supposons que les axiomes suivants sont vérifiés;

(i) H est complet par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$,

(ii) à tout compact K de X, avec $m(K) \neq 0$, on peut associer une constante $a(K)$ telle que l'on ait

$$(1.1) \qquad \int_K |u(x) - C_K(u)|\, m\,(dx) \leqslant a(K)\langle u, u\rangle^{1/2},$$

pour tout $u \in \mathrm{H}$, où on a désigné

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(u) = m(\mathrm{K})^{-1} . \int_{\mathrm{K}} u \, dm.$$

Deux fonctions localement presque partout égales (pour m) représentent le même élément de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X}, m)$, et aussi de H.

On dira que $(\mathrm{H}, \langle \ , \ \rangle)$ est *un espace fonctionnel à nullité* 1.

On appellera *charges nulles* les fonctions d'intégrale nulle.

On désignera par $\mathscr{N}_b$ l'ensemble de toutes les charges nulles qui sont bornées et à support compact.

Désormais on fixe un compact K_0 avec $\mathring{\mathrm{K}}_0 \neq \varnothing$. Dans le cas où X lui-même est compact on prendra $\mathrm{K}_0 = \mathrm{X}$.

Voici l'opérateur potentiel associé à l'espace fonctionnel à nullité 1.

On peut associer, à toute fonction $f \in \mathscr{N}_b$, un élément unique $\mathrm{V}f$ de H tel que l'on ait

$$(1.2) \quad \langle \mathrm{V}f, u \rangle = \int fu \, dm, \qquad \text{pour tout} \qquad u \in \mathrm{H},$$

$$(1.3) \qquad \int_{\mathrm{K}_0} \mathrm{V}f \, dm = 0.$$

En effet soit $\mathrm{K} = \mathrm{Supp}.\, f$. D'après l'axiome (ii) on a

$$\left| \int uf \, dm \right| = \left| \int_{\mathrm{K}} f(u - \mathrm{C}_{\mathrm{K}}(u)) \, dm \right| \leqslant a(\mathrm{K}) \sup |f| . \langle u, u \rangle^{1/2}, \qquad \forall u \in \mathrm{H}.$$

Il existe donc $\varphi \in \mathrm{H}$ tel que l'on ait

$$\langle \varphi, u \rangle = \int uf \, dm, \qquad \forall u \in \mathrm{H}.$$

L'opérateur

$$f \longmapsto \mathrm{V}f = \varphi - \mathrm{C}_{\mathrm{K}_0}(\varphi),$$

satisfait donc (1.2) et (1.3). L'unicité est facile à montrer.

On appelle V *l'opérateur potentiel.*

Nous allons introduire maintenant les principes fondamentaux.

Soient u et φ deux fonctions numériques sur X. On dit que φ est *une contraction de* u si on a les relations :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| \quad (x, y \in \mathrm{X}).$$

En particulier

$$|u| \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_1 u = ((u \vee 0) \wedge 1) = \min(\max(u, 0), 1)$$

sont des contractions de u que l'on appelle respectivement *la contraction module de* u et *la contraction unité de* u.

DÉFINITIONS. — (i) *On dit que la contraction module (resp. unité) opère dans* H *si* H *est réticulé et si*

$$\langle |u|, |u| \rangle \leqslant \langle u, u \rangle \tag{1.4}$$

$$(\text{resp. } \langle \mathbf{T}_1 u, \mathbf{T}_1 u \rangle \leqslant \langle u, u \rangle) \tag{1.5}$$

pour tout $u \in \mathrm{H}$.

(ii) *On dit que toutes les contractions opèrent dans* H *si, pour tout* $u \in \mathrm{H}$ *et toute* v *contraction de* u, *on a* $v \in \mathrm{H}$ *et*

$$\langle v, v \rangle \leqslant \langle u, u \rangle.$$

(iii) *On dit que le principe semi-complet du maximum (par rapport à* $\mathcal{N}_b$*) est satisfait dans* H *si, pour tout réel* c *et*

(1.6) *toute* $f \in \mathcal{N}_b$; *la relation* $\langle\langle \mathrm{V}f \leqslant c \rangle\rangle$ *est satisfaite presque partout (localement) sur* X *dès qu'elle l'est presque partout sur* $\{f > 0\}$.

On dit qu'un opérateur satisfait au principe semi-complet du maximum (par rapport à $\mathcal{N}_b$*) s'il vérifie la propriété* (1.6).

Si un opérateur U vérifie le principe semi-complet du maximum l'opérateur $\mathrm{U} + p\mathrm{I}$ le vérifie aussi, quel que soit $p > 0$. Donc la propriété (iii) de H ne dépend pas du choix du compact K_0.

Nous notons aussi que la condition

$$\langle |u|, |u| \rangle \leqslant \langle u, u \rangle$$

équivaut à

$$\langle u_+, u_- \rangle \leqslant 0.$$

THÉORÈME 1.1. — *Si la contraction module opère sur* H, *le principe semi-complet du maximum est satisfait.*

En effet, soient c un réel et $f \in \mathcal{N}_b$ tels que $c \geqslant \mathrm{V}f$ presque partout sur $\{f > 0\}$. Puisque la contraction module opère dans H on a

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \langle (c - \mathrm{V}f)_-, c - \mathrm{V}f \rangle &= - \langle (c - \mathrm{V}f)_-, \mathrm{V}f \rangle \\ &= - \int (c - \mathrm{V}f)_- . f \, dm = \int_{\{f>0\}} (c - \mathrm{V}f)_- . (-f) \, dm \geqslant 0. \end{aligned}$$

De sorte que

$$\langle (c - Vf)_-, c - Vf \rangle = 0,$$

et

$$\langle (c - Vf)_-, (c - Vf)_- \rangle = 0.$$

$(c - Vf)_-$ est une constante, qui est, d'après l'hypothèse, égale à 0 sur $\{f > 0\}$, donc partout. D'où $c - Vf \geqslant 0$. Ce qui montre le principe semi-complet du maximum.

2. Espaces fonctionnels à nullité 1 localement de carré intégrable.

Dans ce paragraphe nous demandons que l'espace fonctionnel à nullité 1 H vérifie la condition suivante, plus forte que (1.1) :

Pour tout compact K (tel que $m(K) \neq 0$) il existe une constante $b(K)$ telle que l'on ait

$$(2.1) \qquad \int_K |u(x) - C_K(u)|^2 m\,(dx) \leqslant b(K)\langle u, u\rangle$$

pour tout $u \in H$.

Cette condition implique que H est un sous-espace de $L^2_{loc}(X, m)$.

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions à support compact, de carré intégrable et d'intégrale nulle.

A toute charge nulle f de $\mathcal{N}$, on peut associer un élément unique Vf de H tel qui satisfasse aux (1.2) et (1.3).

En effet, soit $K = \text{Supp}. f$. On a

$$\begin{aligned}\left|\int uf\,dm\right|^2 = \left|\int_K f(u - C_K(u))\,dm\right|^2 \\ &\leqslant \int f^2\,dm \int_K (u - C_K(u))^2\,dm \\ &\leqslant f(K) . \int f^2\,dm . \langle u, u\rangle, \quad \forall u \in H,\end{aligned}$$

ce qui montre l'existence d'un $\varphi \in H$ tel que

$$\langle \varphi, u\rangle = \int uf\,dm, \quad \forall u \in H.$$

Il suffit de poser $Vf = \varphi - C_{K_0}(\varphi)$.

V est appelé *opérateur potentiel.*

On dira que *le principe semi-complet du maximum* (*par* *rapport à* $\mathcal{N}$) est satisfait dans H si la condition (1.6) est vérifiée pour tout réel c et toute $f \in \mathcal{N}$.

Le même raisonnement que celui du théorème 1.1 montre le

THÉORÈME 2.1. — *Si la contraction module opère dans* H *le principe semi-complet du maximum (par rapport à* $\mathcal{N}$) *est satisfait.*

THÉORÈME 2.2. — *Soit* H *un espace fonctionnel localement de carré intégrable à nullité* 1. *Si le principe semi-complet du maximum est satisfait dans* H *toutes les contractions opèrent dans* H.

(1) *Démonstration dans le cas où* X *est compact.* — Dans ce cas H est un sous-espace de $L^2(X)$ dont l'injection est continue d'après (2.1). De plus puisque le principe semi-complet du maximum ne dépend pas au choix du compact K_0 on peut le supposer identique à X. Donc V est un opérateur de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$. La théorie générale de l'espace fonctionnel dans L^2, que nous donnerons dans ce chapitre suivant, i.e. le théorème 5 du chapitre II, donne la conséquence.

(2) *Démonstration dans le cas général.* — On se ramène au cas d'un espace compact de la façon suivante : soit K un compact de X. On peut supposer que l'opérateur V est normalisé par

$$\int_K Vf\,dm = 0, \qquad f \in \mathcal{N}.$$

Soit $\mathcal{N}_K$ l'ensemble des charges nulles, de carré intégrable, à support dans K. On désigne par $\mathcal{J}$ le sous-espace (fermé) de H engendré par Vf, $f \in \mathcal{N}_K$, et on pose

$$H_K = \mathrm{Rest}_K\,\mathcal{J} \oplus \mathbf{R},$$

où $\mathrm{Rest}_H \mathcal{J}$ est l'ensemble des restrictions à K des éléments de $\mathcal{J}$. H_K est la somme directe des $\mathrm{Rest}_K\mathcal{J}$ et $\mathbf{R}$, car tout élément u de $\mathcal{J}$ est d'intégrale nulle sur K; $\int_K u\,d\mu = 0$.

On définit la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_K$ sur H_K par

$$\langle h_1, h_2\rangle_K = \langle u_1 + c_1, u_2 + c_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle,$$

où $h_i = u_i|K + c_i$ avec $u_i \in \mathcal{J}$ et $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2$.

D'après la condition (2.1) on voit que $(H_K, \langle\ ,\ \rangle_K)$ est un espace fonctionnel à nullité 1 dans $L^2(K, m|K)$. L'opérateur potentiel associé à cet espace fonctionnel n'est autre que

$$V^K f = \mathrm{Rest}_K\, Vf$$

défini pour $f \in \mathcal{N}_K$. De sorte qu'il satisfait au principe semi-complet du maximum (par rapport à $\mathcal{N}_K$), et la partie (1) ci-dessus montre que toutes les contractions opèrent dans H_K.

Nous notons le fait suivant : la restriction d'un élément $u \in H$ sur le compact K est un élément de H_K. En effet soit u_K la projection de $u \in H$ sur le sous-espace $\mathcal{J}$. Par définition on a

$$\langle u - u_K, Vf\rangle = 0$$

pour toute $f \in \mathcal{N}_K$. Cela implique

$$\int_K (u - u_K) f\, dm = 0,$$

donc $(u - u_K)$ restreinte à K est orthogonale à $\mathcal{N}_K$ (dans $L^2(K, m|K)$), i.e. $u - u_K$ est une constante, soit c, sur K. Mais comme nous avons remarqué précédemment u_K est d'intégrale nulle sur K, donc c est égale à

$$C_K(u) = m(K)^{-1} \int_K u\, dm.$$

On a

$$\mathrm{Rest}_K\, u = \mathrm{Rest}_K\, u_K + C_K(u) \in H_K.$$

Nous commençons la démonstration du théorème. Soit v une contraction de $u \in H$. Il est clair que, pour tout compact K, la restriction de v à K est une contraction de u restreinte à K. D'après (1) on a

$$v|K \in H_K, \qquad \langle v|K, v|K\rangle_K \leqslant \langle u|K, u|K\rangle_K.$$

Il découle de la définition de H_K, que v coïncide sur K avec une fonction de H. Ceci étant pour tout compact, v est un élément de H. On a donc

$$\langle v, v\rangle = \langle v|K, v|K\rangle_K \leqslant \langle u|K, u|K\rangle_K = \langle u, u\rangle.$$

CHAPITRE II

ESPACES FONCTIONNELS A NULLITÉ 1 DANS L^2

1. Résultats.

Soient (X, m) un espace mesurable muni d'une mesure positive et bornée, $L^2 = L^2(X, m)$ l'espace des fonctions sur X de carré intégrable et $\mathcal{N}$ le sous-espace de $L^2(X, m)$ constitué des fonctions d'intégrale nulle. On désigne par (f, g) l'intégrale $\int f.g\, dm$, et on pose $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

Un espace fonctionnel H dans $L^2(X, m)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(X, m)$, muni d'une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ symétrique et positive pour laquelle H est complet. On dit que H est *un espace fonctionnel à nullité* 1 (*dans* L^2) si la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est à nullité 1, et si elle satisfait à l'inégalité suivante pour une constante $a > 0$:

$$\|u\|^2 \leqslant a\langle u, u\rangle, \tag{1.1}$$

pour tout $u \in H \cap \mathcal{N}$.

On peut définir l'*opérateur potentiel* U qui associe à toute fonction $f \in \mathcal{N}$ l'élément $Uf \in H \cap \mathcal{N}$ tel que l'on ait :

$$\langle Uf, u\rangle = (f, u)$$

pour tout $u \in H$. On a alors $\|Uf\| \leqslant a\|f\|$.

Quand nous considérons un opérateur dans L^2 (ou $\mathcal{N}$), il s'agira d'une application linéaire continue de $L^2(X, m)$ (resp. $\mathcal{N}$) dans lui-même. On dit qu'un opérateur V dans L^2 (resp. $\mathcal{N}$) est *symétrique* si $(Vf, g) = (f, Vg)$ pour tout f, g dans L^2 (resp. $\mathcal{N}$).

On appelle (L^2)-*résolvante* une famille d'opérateurs $(V_p)_{p>0}$ dans L^2, telle que l'on ait pour tous $p, q > 0$, (1.2) *a*) V_p est un opérateur symétrique,

b) $V_p - V_q + (p-q)V_pV_q = 0$,

c) V_p est sous-markovienne, i.e. $0 \leqslant pV_pf \leqslant 1$ presque partout si $0 \leqslant f \leqslant 1$ presque partout.

Une résolvante (V_p) est *markovienne* s'il existe un $p > 0$ tel que $pV_p1 = 1$. Cela implique $pV_p1 = 1$ pour tout $p > 0$.

Voici les résultats principaux de ce chapitre :

THÉORÈME 1. — *Soit* V *un opérateur symétrique dans* $\mathcal{N}$ *qui satisfait au principe semi-complet du maximum; i.e. pour tout réel* c *et toute* $f \in \mathcal{N}$, *la relation*

$$Vf \leqslant c$$

est satisfaite presque partout sur X *dès qu'elle l'est presque partout sur l'ensemble* $\{f > 0\}$. *Il existe alors une* (L^2)*-résolvante markovienne* (V_p) *telle que*;

$$Vf = V_pf + pV_pVf = V_pf + pVV_pf \tag{1.3}$$

pour toute $f \in \mathcal{N}$. *En particulier on a*

$$(pV_pg, 1) = (g, 1)$$

pour toute $g \in L^2(X, m)$.

Comme une conséquence de ce théorème on a le

THÉORÈME 2. — *Tout opérateur symétrique dans* $\mathcal{N}$ *qui vérifie le principe semi-complet du maximum est un opérateur positif*;

$$(Vf, f) \geqslant 0, \qquad f \in \mathcal{N}.$$

On a déjà montré dans le Chapitre I que l'opérateur potentiel U associé à l'espace fonctionnel à nullité 1 $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ satisfait au principe semi-complet du maximum si la contraction module opère dans H. Donc, dans ce cas, il existe une (L^2)-résolvante markovienne (V_p) telle que

$$\langle V_pf, u\rangle + (pV_pf - f, u) = 0$$

pour tout $f \in \mathcal{N}$ et $u \in H$. En effet, d'après (1.3),

$$V_pf = U(f - pV_pf) \in H,$$

et

$$\langle V_p f, u\rangle = (f - pV_p f, u),$$

où on a utilisé le fait que V_p applique $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$, ce que nous montrerons. On a, en outre, le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace fonctionnel à nullité* 1 (*dans* L^2) *dans lequel la contraction unité*;

$$T_1 : \quad u \longmapsto (u \vee 0) \wedge 1 = \min(\max(u, 0), 1)$$

opère. Il existe alors une (L^2)*-résolvante markovienne* $(V_p)_{p>0}$ *telle que :*

$$\langle u, u\rangle = \lim_{p\to\infty} p(u - pV_p u, u) \tag{1.4}$$

pour tout $u \in H$.

THÉORÈME 4. — *Si un espace fonctionnel à nullité* 1 $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *et une* (L^2)*-résolvante markovienne* $(V_p)_{p>0}$ *sont reliés par la relation* (1.4), *toutes les contractions opèrent dans* H.

THÉORÈME 5. — *Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la contraction module opère dans* H,

(ii) *la contraction unité opère dans* H,

(iii) *toutes les contractions opèrent dans* H,

(iv) *l'opérateur potentiel associé à* H *vérifie le principe semi-complet du maximum.*

2. Lemmes.

Dans ce paragraphe nous préparons des lemmes pour montrer les théorèmes annoncés précédemment.

LEMME 2.1. — *Si un opérateur dans* $\mathcal{N}$ *satisfait au principe semi-complet du maximum l'opérateur* $(I + pV)$ *dans* $\mathcal{N}$ *est une injection.*

LEMME 2.2 — *Soit* $(V_p)_{p>0}$ *une* (L^2)*-résolvante. On a :*

(i) $\|pV_p\| \leqslant 1, \quad \forall p > 0,$

(ii) $0 \leqslant (pV_p f, f) \leqslant (f, f),$

(iii) *Les fonctions*

$$p \longmapsto p(f - p\mathrm{V}_p f, f),$$
$$p \longmapsto p(f - p\mathrm{V}_p f, p\mathrm{V}_p f),$$

et

$$p \longmapsto (p\mathrm{V}_p f, p\mathrm{V}_p f)$$

sont positives et croissantes dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Lemme 2.3. — *Soit* A *un opérateur symétrique et markovien* (i.e. $\mathrm{A}1 = 1$) *dans* L^2. *Alors* A *applique* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathcal{N}$ *et, pour toute* $g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$,

$$g - \mathrm{A}g \in \mathcal{N}.$$

En effet on a

$$(\mathrm{A}(g - c(g)), 1) = (g - c(g), \mathrm{A}1) = (g - c(g), 1) = 0,$$

où $c(g) = m(1)^{-1}(g, 1)$. D'où $\mathrm{A}(g - c(g)) \in \mathcal{N}$, pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$, en particulier, $\mathrm{A}g \in \mathcal{N}$ si $g \in \mathcal{N}$. On a aussi

$$g - \mathrm{A}g = (g - c(g)) - \mathrm{A}(g - c(g)) \in \mathcal{N}.$$

Lemme 2.4. — *Une* (L^2)-*résolvante vérifie :*

(i) $(|u|, (\mathrm{I} - p\mathrm{V}_p)|u|) \leqslant (u, (\mathrm{I} - p\mathrm{V}_p)u)$,

(ii) $(u_-, (\mathrm{I} - p\mathrm{V}_p)u) \leqslant 0$.

Car on a

$$(|u| + u).p\mathrm{V}_p(|u| - u) \geqslant 0.$$

3. (L^2)-résolvante markovienne et le principe semi-complet du maximum.

Démonstration du Théorème 1.

L'argument qui suit est plus ou moins de routine. Nous procédons comme dans le Chapitre 10 de [11]. On note que, pour tout $r > 0$, il existe au plus un opérateur V_r qui vérifie (1.3), car $\mathrm{I} + r\mathrm{V}$ est injectif.

Supposons d'abord que, pour un $r > 0$, un opérateur V_r dans L^2, qui est symétrique et markovien et qui vérifie (1.3), existe.

(i) V_r satisfait à (1.2)(*c*).

En effet, soit f une fonction à valeur $0 \leqslant f \leqslant 1$ presque partout.

(Désormais nous omettrons la phrase « presque partout »). La fonction $h = f - rV_r f$ appartient à $\mathcal{N}$ d'après le lemme 2.3. D'autre part on a $rVh = f - h = rV_r f$. Donc

$$rVh \leqslant 1 \text{ sur } \{h > 0\}, \quad \text{et} \quad rV(-h) \leqslant 0 \text{ sur } \{-h > 0\}.$$

D'après le principe semi-complet du maximum on a

$$0 \leqslant rVh = rV_r f \leqslant 1.$$

D'où il découle à l'aide du Lemme 2.2 que :

(ii) $\|rV_r\| \leqslant 1$, donc la série d'opérateurs $\sum_{k=0}^{\infty} V_r(-tV_r)^k$ converge pour $0 \leqslant t < r$.

Désignons la somme de cette série par W. On voit que W est symétrique et qu'il laisse le sous-espace $\mathcal{N}$ invariant. On a

$$tV_r W = tWV_r = V_r - W,$$

dans $L^2(X, m)$. De plus W restreint à $\mathcal{N}$ commute avec l'opérateur V. D'où on déduit

$$V - W = (r + t)VW \quad \text{dans} \quad \mathcal{N}.$$

(iii) L'existence de V_r pour un $r > 0$ entraîne celle de V_{r+t} pour $0 \leqslant t < r$.

En effet il suffit de poser $V_{r+t} = W$. V_{r+t} est vraiment markovien. En effet on a

$$(r + t)W1 = \frac{r + t}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{r}\right)^k = 1.$$

Passons alors à l'existence de la résolvante (V_p) : Soit

$$a = \sup \{\|Vf\| ; f \in \mathcal{N} \text{ et } \|f\| \leqslant 1\} < \infty.$$

Pour $0 \leqslant p < a$, la série d'opérateur

$$\sum_{k=0}^{\infty} V(-pV)^k$$

converge vers un opérateur dans $\mathcal{N}$, qui est symétrique.

Le même raisonnement que celui ci-dessus montre qu'il vérifie la relation (1.3). Désignons-le par V_p (sur $\mathcal{N}$). Soit $g \in L^2(X, m)$, $g = f + c$ avec $f \in \mathcal{N}$ et

$$c = m(1)^{-1} \int g \, dm.$$

On définit, pour $0 < p < a$

$$V_p g = V_p f + \frac{1}{p} c.$$

Évidemment V_p est un opérateur dans L^2, symétrique et markovien qui laisse $\mathcal{N}$ invariant et satisfait à (1.3). Un second prolongement de V_p dans l'intervalle $(0, 2a)$ est possible d'après (iii), un troisième prolongement au moyen de la série permet d'atteindre l'intervalle $(0, 4a)$, etc. Enfin l'opérateur V_p peut être défini pour tout $p > 0$. Comme V_p satisfait (1.3) on voit que

$$(I + pV)(V_p - V_q)f = (I + pV)(q - p)V_p V_q f$$

dans $\mathcal{N}$. Encore d'après le Lemme 2.1 on a

$$V_p f - V_q f + (p - q)V_p V_q f = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{N}.$$

Or, la même égalité pour une constante étant banale on a montré que (V_p) est une (L^2)-résolvante.

Propriétés des (L^2)-résolvantes markoviennes.

Corollaire 3.1. — *Soit $(V_p)_{p>0}$ la (L^2)-résolvante markovienne que nous avons construite dans le Théorème 1. On a :*

$$\lim_{p \downarrow 0} pV_p f = c(f) = m(1)^{-1}(f, 1),$$

et

$$\lim_{p \downarrow 0} \|V_p f\| = \infty$$

pour toute $f \in L^2(X, m)$.

En effet, d'après le Lemme 2.2, on a

$$(Vf, f) - (V_p f, f) \geqslant 0,$$

pour toute $f \in \mathcal{N}$. Donc on a

$$0 \leqslant \lim_{p \to 0} (pV_p f, f) \leqslant \lim_{p \to 0} p(Vf, f) = 0,$$

et
$$0 \leqslant \lim_{p\to 0} \|pV_p f\|^2 \leqslant \lim_{p\to 0} (pV_p f, f) = 0,$$
pour toute $f \in \mathcal{N}$. Soit $g \in L^2(X, m)$. On a alors
$$pV_p g = pV_p f + c(g) pV_p 1 = pV_p f + c(g),$$
où
$$f = g - c(g) \in \mathcal{N}.$$
Cela implique
$$\lim_{p\to 0} \|pV_p g - c(g)\| = 0.$$

Démonstration du Théorème 2.

Soit V un opérateur symétrique dans $\mathcal{N}$ vérifiant le principe semi-complet du maximum. D'après le théorème 1 une (L^2)-résolvante $(V_p)_{p>0}$ est associée à V. On a
$$(Vf, f) \geqslant (V_p f, f) \geqslant 0$$
pour toute $f \in \mathcal{N}$. Donc V est positif.

Proposition 3.2. — *Soient* $(V_p)_{p>0}$ *une* (L^2)-*résolvante markovienne et* V *un opérateur symétrique dans* $\mathcal{N}$. *Si on a la relation*
$$Vf = V_p(I + pV)f$$
pour toute $f \in \mathcal{N}$, *l'opérateur* V *satisfait alors au principe semi-complet du maximum.*

D'abord nous montrons que l'opérateur $I + pV$ satisfait à ce principe : Soit $f \in \mathcal{N}$, $\not\equiv 0$. Supposons que la relation
$$a \geqslant (I + pV)f$$
est satisfaite sur l'ensemble $\{f > 0\}$. D'après le Lemme 2.4 on a, en posant $u = a - (I + pV)f$,
$$0 \geqslant (u_-, (I + pV_p)u) = -(u_-, f).$$
Le terme dernier vaut
$$\int_{\{f<0\}} (-f) . u_- \, dm \geqslant 0,$$

car $u_- = 0$ sur $\{f > 0\}$. Donc $u_- = 0$ presque partout sur X, i.e. $a \geqslant (\mathrm{I} + p\mathrm{V})f$ presque partout.

Ensuite nous montrons que V vérifie le principe semi-complet du maximum. Soit la relation

$$a \geqslant \mathrm{V}f$$

vraie sur $\{f > 0\}$. Posons $f_n = f \wedge n$. On a

$$a \geqslant \mathrm{V}f_n \qquad \text{sur} \qquad \{f_n > 0\},$$

on a donc, pour $p > 0$,

$$n + pa \geqslant (\mathrm{I} + p\mathrm{V})f_n \qquad \text{sur} \qquad \{f_n > 0\}.$$

D'après ce que l'on a montré ci-dessus, cette relation est vraie sur X. p étant quelconque, on a

$$a \geqslant \mathrm{V}f_n \qquad \text{et puis} \qquad a \geqslant \mathrm{V}f.$$

Remarque. — Soient V un opérateur symétrique dans L^2 et (V_p) une (L^2)-résolvante telle que

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_p(\mathrm{I} + p\mathrm{V}).$$

V satisfait alors au principe complet du maximum.

4. (L^2)-résolvantes markoviennes et espaces fonctionnels à nullité 1.

Considérons la forme quadratique suivante définie dans un espace fonctionnel à nullité 1 $(\mathrm{H}, \langle\ ,\ \rangle)$:

$$\mathrm{F}_f(u) = \langle u, u\rangle + p\|u - f\|^2, \tag{4.1}$$

où f est un élément de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$. Par une méthode classique basée sur l'égalité :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{F}_f(u) + \frac{1}{2}\,\mathrm{F}_f(v) - \mathrm{F}_f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\langle u - v, u - v\rangle + \frac{p}{4}\,\|u - v\|^2,$$

on peut montrer l'existence de l'unique élément u_f de H qui rend minimum cette forme quadratique. u_f est aussi l'unique élément qui vérifie la relation

$$\langle u_f, \varphi\rangle + p(u_f - f, \varphi) = 0 \tag{4.2}$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{H}$. Soit V_p opérateur qui associe $\dfrac{1}{p}\, u_f$ à toute $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$:

$$\mathrm{V}_p f = \frac{1}{p}\, u_f \in \mathrm{H}.$$

D'après (4.2) on a

$$\langle \mathrm{V}_p f, \mathrm{V}_p g\rangle + p(\mathrm{V}_p f, \mathrm{V}_p g) = (f, \mathrm{V}_p g),$$

et

$$\|\mathrm{V}_p f\|^2 \leqslant \frac{1}{p}(\mathrm{V}_p f, f) \leqslant \frac{1}{p}\|\mathrm{V}_p f\| \cdot \|f\|.$$

Donc V_p est un opérateur symétrique dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$ qui est borné par $\dfrac{1}{p}$; $\|\mathrm{V}_p\| \leqslant \dfrac{1}{p}\cdot$ D'après l'unicité de u_f dans (4.2), on a

$$\mathrm{V}_p f - \mathrm{V}_q f + (p - q)\mathrm{V}_p \mathrm{V}_q f = 0.$$

Enfin, on a

$$0 = \mathrm{F}_1(1) \leqslant \mathrm{F}_1(p\mathrm{V}_p 1).$$

Donc, $p\mathrm{V}_p 1$ étant l'unique élément de H qui rend minimum la forme F_1, on a $p\mathrm{V}_p 1 = 1$.

Démonstration du Théorème 3.

D'après l'hypothèse que la contraction unité $\mathbf{T}_1$ opère dans H, on a

$$\mathrm{F}_f(\mathbf{T}_1(p\mathrm{V}_p f)) \leqslant \mathrm{F}_f(p\mathrm{V}_p f),$$

pour toute $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$ telle que $\mathbf{T}_1 f = f$, i.e. telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$. $p\mathrm{V}_p f$ étant l'unique élément qui rend minimum la forme F_f, on a $p\mathrm{V}_p f = \mathbf{T}_1(p\mathrm{V}_p f)$;

$$0 \leqslant p\mathrm{V}_p f \leqslant 1 \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant f \leqslant 1.$$

Nous avons montré l'existence d'une (L^2)-résolvante markovienne qui satisfait à

$$\langle \mathrm{V}_p f, \varphi\rangle + (p\mathrm{V}_p f - f, \varphi) = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{H}$.

Nous allons montrer la relation (1.4).

Soit $u \in \mathrm{H}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_u(u) &= \langle u, u\rangle \geqslant \mathrm{F}_u(p\mathrm{V}_p u)\\ &= \langle p\mathrm{V}_p u, p\mathrm{V}_p u\rangle + p\|p\mathrm{V}_p u - u\|^2\\ &= p(u - p\mathrm{V}_p u, p\mathrm{V}_p u) + p\|p\mathrm{V}_p u - u\|^2\\ &= p(u - p\mathrm{V}_p u, u).\end{aligned}$$

De cette inégalité on tire que

$$\|u - p\mathrm{V}_p u\| \to 0 \quad (p \uparrow \infty) \tag{4.3}$$

et

$$\lim_{p\to\infty} p(u - p\mathrm{V}_p u, u) \leqslant \langle u, u\rangle,$$

qui montre que si une suite converge dans H elle converge aussi pour la (pseudo-)norme

$$\mathrm{R}(u, u) = \lim_{p\to\infty} \uparrow p(u - p\mathrm{V}_p u, u).$$

Soit maintenant $\mathscr{D}$ l'image $\mathrm{V}_p(\mathscr{N})$ de $\mathscr{N}$ par la résolvante. $\mathscr{D}$ ne dépend pas de p, et, d'après le Lemme 2.3, $\mathscr{D} \subset \mathscr{N}$, donc $\mathscr{D} \subset \mathrm{H} \cap \mathscr{N}$. Pour tout élément u, soit $u = \mathrm{V}_p f$, de $\mathscr{D}$, on a

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= \langle \mathrm{V}_p f, \mathrm{V}_p f\rangle = (f - p\mathrm{V}_p f, \mathrm{V}_p f)\\ &= \lim_{q\to\infty} (f - p\mathrm{V}_p f, q\mathrm{V}_q\mathrm{V}_p f)\\ &= \lim_{q\to\infty} q((\mathrm{I} - q\mathrm{V}_q)\mathrm{V}_p f, \mathrm{V}_p f) = \mathrm{R}(u, u).\end{aligned}$$

On va montrer, d'autre part, que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathrm{H} \cap \mathscr{N}$. En effet, soit $u \in \mathrm{H} \cap \mathscr{N}$ orthogonale à $\mathscr{D}$. On a, d'après (4.2),

$$p(f, u - p\mathrm{V}_p u) = p(f - p\mathrm{V}_p f, u) = \langle p\mathrm{V}_p f, u\rangle = 0,$$

pour toute $f \in \mathscr{N}$. Il en résulte que $u - p\mathrm{V}_p u$ est une constante, qui se trouve être nulle car $u - p\mathrm{V}_p u \in \mathscr{N}$. Encore une fois d'après (4.2) on a

$$\langle u, u\rangle = \langle p\mathrm{V}_p u, u\rangle = p(u - p\mathrm{V}_p u, u) = 0,$$

de sorte que $u = 0$.

Enfin il découle de ce que l'on vient de montrer que

$$\langle u, u\rangle = \mathrm{R}(u, u)$$

pour tout $u \in \mathrm{H} \cap \mathscr{N}$.

D'autre part, évidemment

$$\langle 1, 1\rangle = 0 = \mathrm{R}(1, 1).$$

On a donc, pour tout $u \in \mathrm{H}$

$$\langle u, u\rangle = \mathrm{R}(u, u). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 4.1. — *Pour tout* $u \in \mathrm{H}$,

$$\lim_{p\to\infty} p\mathrm{V}_p u = u$$

à la fois dans H *et dans* L^2.

En effet (4.3) montre que $p\mathrm{V}_p u$ converge vers u dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$. D'autre part, on a

$$\langle u - p\mathrm{V}_p u, u - p\mathrm{V}_p u\rangle \leqslant \langle u, u\rangle - p(u - p\mathrm{V}_p u, u).$$

La dernière décroît vers 0 avec $p \uparrow \infty$.

Démonstration du Théorème 4.

C'est une conséquence de l'expression suivante :

$$p(u - p\mathrm{V}_p u, u) = \frac{p}{2}\iint_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} (u(y) - u(x))^2 n_p\,(dx\,dy),$$

où $n_p\,(dx\,dy)$ est la mesure définie par la relation

$$\iint f(x)g(y)n_p\,(dx\,dy) = (p\mathrm{V}_p f, g).$$

En effet, soit v une contraction de $w \in \mathrm{H}$. D'après la relation ci-dessus, on a

$$p(v - p\mathrm{V}_p v, v) \leqslant p(w - p\mathrm{V}_p w, w) \leqslant \langle w, w\rangle,$$

donc

$$\langle v, v\rangle = \mathrm{R}(v, v) \leqslant \langle w, w\rangle.$$

Ici, il faudrait remarquer que u est dans H si $\mathrm{R}(u, u) < \infty$. En effet, la relation

$$\frac{d}{dp}\, p(u - p\mathrm{V}_p u, u) = \|u - p\mathrm{V}_p u\|^2$$

implique

$$\int_{0+}^{\infty} \|u - p\mathrm{V}_p u\|^2\, dp = \mathrm{R}(u, u) < \infty,$$

donc

$$\lim_{p\to\infty} \|u - pV_p u\| = 0.$$

D'autre part on a, en posant $u_p = pV_p u$,

$$\langle u_p, u_p\rangle = p((I - pV_p)u, u_p)$$

et

$$\langle u_p - u_q, u_p - u_q\rangle = (p(I - pV_p)u - q(I - qV_q)u, u_p - u_q)$$
$$\leqslant 2\,(2R(u, u))^{1/2}\|u_p - u_q\|,$$

où on a utilisé l'inégalité

$$p\|(I - pV_p)u\| \leqslant 2p(u - pV_p u, u)^{1/2} \leqslant 2R(u, u)^{1/2}.$$

Il en résulte que $\{u_p\}$ est une suite de Cauchy dans H qui converge vers un $\varphi \in H$. Mais, d'après (1.1) on a

$$\|(u_p - c) - \varphi\| \leqslant a\langle u_p - \varphi, u_p - \varphi\rangle,$$

où

$$c = m(1)^{-1}(u, 1),$$

et

$$u_p = pV_p u = pV_p(u - c) + c$$

avec $pV_p(u - c) \in \mathcal{N} \cap H$. D'où, en faisant tendre p vers l'infini on obtient $u = \varphi + c \in H$.

Démonstration du Théorème 5.

Les implications; (i) $\Longrightarrow$ (iv), (ii) $\Longrightarrow$ (iii), (iii) $\Longrightarrow$ (i) et (iii) $\Longrightarrow$ (ii) ont été établies. Supposons que l'opérateur potentiel V associé à (H, $\langle\,,\,\rangle$) satisfait au principe semi-complet du maximum. D'après le Théorème 1 une (L^2)-résolvante markovienne $(V_p)_{p>0}$ vérifiant (1.3) existe et, comme nous avons expliqué dans la section 1, elle satisfait à

$$\langle V_p f, u\rangle = (f - pV_p f, u)$$

pour toute $f \in \mathcal{N}$ et $u \in H$. Mais puisque on a

$$\langle V_p 1, u\rangle = \left\langle \frac{1}{p}, u\right\rangle = 0 = (1 - pV_p 1, u),$$

la formule ci-dessus est satisfaite pour tout $f \in L^2(X, m)$, et ce n'est autre que (4.2). Ensuite on a

$$F_f(u) = F_f(pV_pf) + \langle u - pV_pf, u - pV_pf\rangle + \|u - pV_pf\|^2,$$

i.e. pV_pf rend minimum la forme F_f. L'argument dans la démonstration du Théorème 3 pour établir la formule

$$\langle u, u\rangle = \lim_{p\to\infty} p(u - pV_pu, u),$$

s'adapte sans aucun changement. Donc, d'après le Théorème 4, on voit que toutes les contractions opèrent dans H, ce qui montre l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (iii).

CHAPITRE III

NOYAUX REPRODUISANTS DANS LES ESPACES FONCTIONNELS A NULLITÉ 1

1. Noyaux reproduisants.

Dans ce paragraphe nous étudions des espaces fonctionnels un peu spéciaux. Nous nous intéressons au cas où l'espace fonctionnel considéré a un noyau reproduisant.

Soit H un espace vectoriel des fonctions continues dans X, muni d'une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ symétrique, positive, et à nullité 1. Nous supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) H est complet par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$

(ii) A tout couple de points $x, y \in X$ on peut associer une constante $c(x, y)$ telle que l'on ait

(1.1)
$$|u(y) - u(x)| \leqslant c(x, y)\langle u, u\rangle^{1/2} \qquad \text{pour tout} \qquad u \in H.$$

On dit que H est *un espace fonctionnel à nullité* 1 *du type noyau*, car nous montrerons ci-dessous que l'espace H a un noyau-fonction.

On pose
$$H_x = \{u \in H,\ u(x) = 0\}.$$

Théorème 1.1. — *A tout couple de points x, y on peut associer un élément unique $k_x(y, .) \in H_x$ tel que l'on ait*

$$(1.2) \qquad \langle u, k_x(y, .)\rangle = u(y) - u(x)$$

pour tout $u \in H$.

De plus on a

$$(1.3) \qquad k_x(y, z) = k_x(z, y) = \langle k_x(y, .), k_x(z, .)\rangle.$$

En effet on a, d'après le (1.1),
$$|u(y)| \leqslant c(x, y)\langle u, u\rangle^{1/2}$$

pour tout $u \in H_x$. H_x étant un sous-espace vectoriel de H, le théorème de Hahn-Banach montre que, quel que soit $y \in X$, il existe un élément

$$\varphi = \varphi_{x,y}(.) \in H \text{ tel que } u(y) = \langle \varphi, u \rangle \quad \text{pour tout} \quad u \in H_x.$$

Soit

$$k_x(y, .) = \varphi - \varphi(x).$$

Évidemment on a $k_x(y, .) \in H_x$ et

$$u(y) = \langle k_x(y, .), u \rangle$$

pour tout $u \in H_x$. Puisque la forme $\langle \ , \ \rangle$ annule les constantes on a

$$u(y) - u(x) = \langle k_x(y, .), u \rangle$$

pour tout $u \in H$. En particulier on a

$$k_x(y, z) = \langle k_x(z, .), k_x(y, .) \rangle,$$

ce qui montre que

$$k_x(y, z) = k_x(z, y).$$

Montrons l'unicité : soit $h(y, z)$ un autre élément de H_x avec la propriété (1.2). On a

$$\langle k_x(y, .) - h(y, .), k_x(y, .) - h(y, .) \rangle \\ = k_x(y, y) - h(y, y) - k_x(y, y) + h(y, y) = 0,$$

donc $k_x(y, .) - h(y, .)$ est une constante qui s'annule car $k_x(y, .) - h(y, .) \in H_x$.

La fonction $(y, z) \longmapsto k_x(y, z)$ est appelée *noyau reproduisant* associé à H, et *normalisé en* x.

Corollaire 1.2. — *Pour tout* $u \in H$, *on a*

$$(1.4) \qquad |u(y) - u(x)|^2 \leqslant \langle u, u \rangle . k_x(y, y).$$

Corollaire 1.3. — *Pour* $y \neq x$ *on a*

$$k_x(y, y)^{-1/2} = \inf \{ \langle u, u \rangle^{1/2} ; \ u \in H_x \ \textit{et} \ u(y) = 1 \},$$

où le minimum est atteint pour

$$u = k_x(y, y)^{-1} . k_x(y, .).$$

En effet, pour $u \in H_x$ avec $u(y) = 1$, on a

$$1 = u(y) = \langle k_x(y, .), u \rangle \leqslant k_x(y, y)^{1/2} . \langle u, u \rangle^{1/2},$$

et l'égalité est valable si et seulement si

$$u = k_x(y, y)^{-1} . k_x(y, .).$$

Dans la suite nous fixons un point x_0 et nous supposons que le noyau-fonction $k(y, z)$ est normalisé au point x_0, i.e.

$$k(y, z) = k_{x_0}(y, z).$$

Ici nous notons que H est un espace fonctionnel à nullité 1 dans $L^1_{loc}(X, m)$ (resp. $L^2_{loc}(X, m)$) au sens du Chapitre I pour toute mesure m dans X telle que la fonction $y \longmapsto c(x_0, y)$ soit localement intégrable (resp. de carré intégrable), et que $m(U) > 0$ pour tout ouvert U.

En effet on a, pour tout compact K et tout $u \in H$,

$$|u(x_0) - c_K(u)|^p \leqslant m(K)^{-p} . \int_K c(x_0, y)^p m\,(dy) . \langle u, u \rangle^{p/2},$$

et

$$\begin{aligned} \int_K |u(y) - c_K(u)|^p m\,(dy) & \\ \leqslant \int_K |u(y) - u(x_0)|^p m\,(dy) &+ |u(x_0) - c_K(u)|^p . m(K) \\ \leqslant (1 + m(K)^{1-p}) \int_K c(x_0, y)^p\, dm &. \langle u, u \rangle^{p/2}, \end{aligned}$$

où $p = 1$ ou 2, ce qui montre l'inégalité (1.1) (resp. (2.1)) du Chapitre I.

Ainsi, l'opérateur potentiel U^m associé à une telle mesure m existe et,

$$\int fu\, dm = \langle U^m f, u \rangle,$$

où f est une charge nulle par rapport à m. Mais dans le cas présent l'hypothèse forte faite ci-dessus entraîne de meilleurs résultats.

Proposition 1.4. — *Soit* ν *une mesure dans* X *telle que la fonction* $y \longmapsto c(x_0, y)$ *soit intégrable. Il existe un élément unique* U^ν *de* H_{x_0} *tel que*

$$\int u\, d\nu = \langle U^\nu, u \rangle \tag{1.5}$$

pour tout $u \in H_{x_0}$.

De plus on a la relation

$$\mathrm{U}^{\nu}(y) = \int k(y, z)\nu\,(dz). \tag{1.6}$$

En effet, dans la démonstration du théorème 1.1, on a

$$k(y, y)^{1/2} = \langle k(y, .), k(y, .)\rangle^{1/2} \leqslant c(x_0, y). \tag{1.7}$$

D'autre part on a, pour tout $u \in \mathrm{H}_{x_0}$,

$$\int u(y)\nu\,(dy) = \int \langle k(y, .), u\rangle\nu\,(dy),$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int u\,d\nu\right| &\leqslant \int |\langle k(y, .), u\rangle|\nu\,(dy)\\ &\leqslant \int \langle k(y, .), k(y, .)\rangle^{1/2}\nu\,(dy).\langle u, u\rangle^{1/2}\\ &\leqslant \int c(x_0, y)\nu\,(dy).\langle u, u\rangle^{1/2}.\end{aligned}$$

Il existe alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, un élément $w \in \mathrm{H}$ tel que

$$\langle w, u\rangle = \int u\,d\nu, \quad \forall u \in \mathrm{H}_{x_0}.$$

$\mathrm{U}^{\nu} = w - w(x_0)$ est l'élément que l'on désire. Cela montre la première partie de la proposition.

D'après l'inégalité (1.7) on a

$$|k(y, z)| \leqslant c(x_0, z).k(y, y)^{1/2},$$

donc, quel que soit y fixé, $k(y, .)$ est ν-intégrable.

Enfin on a, d'après (1.2),

$$\mathrm{U}^{\nu}(y) = \langle k(y, .), \mathrm{U}^{\nu}\rangle,$$

ce qui vaut, d'après (1.5),

$$\int k(y, z)\nu\,(dz), \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque. — Si ν ci-dessus satisfait en outre à $\nu(1) = 0$, la relation (1.5) est valable pour tout $u \in \mathrm{H}$.

2. Compacité des opérateurs potentiels.

Nous montrons que, pour une mesure bornée m dans X telle que la fonction $c(x_0, .)$ soit m-intégrable, l'espace fonctionnel à nullité 1 et du type noyau H est un espace fonctionnel dans $L^2(X, m)$, et que l'opérateur potentiel associé est compact.

Soit m une telle mesure. D'après (1.1), on a

$$\int |u(y)| m\,(dy) \leqslant |u(x_0)| m(1) + \int c(x_0, y) m\,(dy)\, \langle u, u\rangle^{1/2} < \infty,$$
$$\int |u(x_0) - m(1)^{-1} m(u)|^2\, dm \leqslant \int |u(x_0) - u(y)|^2 m\,(dy)$$
$$\leqslant \int c(x_0, y) m\,(dy)\, \langle u, u\rangle < \infty,$$

et

$$\|u - m(1)^{-1} m(u)\|^2_{L^2(X,m)}$$
$$\leqslant 2\int |u - u(x_0)|^2\, dm + 2\int |u(x_0) - m(1)^{-1}.m(u)|^2\, dm$$
$$\leqslant 4\int c(x_0, y) m\,(dy)\, \langle u, u\rangle < \infty.$$

D'où H est un espace fonctionnel dans L^2.

Soient $\mathcal{N}$ le sous-espace des charges nulles et V l'opérateur potentiel associé :

$$\langle Vf, u\rangle = \int uf\, dm \qquad \text{pour tous} \qquad f \in N \quad \text{et} \quad u \in H.$$

On a donc :

$$Vf(y) - Vf(x_0) = \langle Vf, k(y, .)\rangle = \int k(y, z) f(z) m\,(dz), \quad f \in N.$$

Ou, plutôt, si on note que $Vf \in \mathcal{N}$, on a

$$(2.1) \qquad Vf(y) = \int (k(y, z) - c[k(z, .)]) f(z) m\,(dz),$$

où

$$c[g] = m(1)^{-1} \int g\, dm.$$

Soit j l'injection de $H \cap \mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$. Elle est en dualité avec V, i.e.

$$\langle Vf, u\rangle = (f, ju).$$

Théorème 2.1. — *Les applications*

$$j: \ H \cap \mathcal{N} \to \mathcal{N} \qquad et \qquad V: \ \mathcal{N} \to H \cap \mathcal{N}$$

sont compactes.

En effet, il suffit de montrer que l'injection j est compacte, car d'après le théorème de Schauder, la transposée $V = {}^tj$ sera compacte. Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de la boule unité de $H \cap \mathcal{N}$. On peut en extraire une suite $\{\varphi_n\}$ qui converge faiblement dans H vers $\varphi \in H \cap \mathcal{N}$. Les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0) &= -\, m(1)^{-1} \int (\varphi_n - \varphi_n(x_0))\, dm \\ &= -\, m(1)^{-1} \int \langle k(y, .), \varphi_n \rangle\, dm(y) \end{aligned}$$

convergent donc vers $\varphi(x_0)$ en vertu du théorème de Lebesgue et de l'estimation :

$$|\langle k(y, .), \varphi_n\rangle| \leqslant k(y, y)^{1/2} \langle \varphi_n, \varphi_n\rangle^{1/2} \leqslant k(y, y)^{1/2}.$$

Donc, pour tout $y \in X$,

$$\varphi_n(y) = \varphi_n(x_0) + \langle k(y, .), \varphi_n\rangle$$

converge vers $\varphi(y)$. D'autre part on a

$$|\varphi_n(x_0)|^2 \leqslant m(1)^{-1} \int k(y, y) m\,(dy)$$

et donc, d'après (1.4), on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n(y)|^2 &\leqslant 2|\varphi_n(y) - \varphi_n(x_0)|^2 + 2|\varphi_n(x_0)|^2 \\ &\leqslant 2k(y, y) + 2m(1)^{-1} \int k(y, y) m\,(dy). \end{aligned}$$

En appliquant encore une fois le théorème de Lebesgue on sait que la suite $\{\varphi_n\}$ converge vers φ dans $L^2(X, m)$. Cela montre que l'injection j est compacte.

Corollaire 2.2. — *L'application*

$$U : \mathcal{N} \to H_{x_0},$$

définie par $Uf(x) = \int k(x, y) f(y) m\,(dy)$, *est compacte.*

En effet, on a

$$Uf = Vf - Vf(x_0), \qquad \text{et} \qquad \langle Uf, Uf\rangle = \langle Vf, Vf\rangle.$$

D'où le corollaire.

Corollaire 2.3. — *L'opérateur* U *considéré comme une application de* $\mathcal{N}$ *dans* $L^2(X, m)$ *est compact, ainsi que l'application,*

$$f \longmapsto U(f - c(f))$$

dans $L^2(X, m)$.

Nous montrons quelques résultats concernant la continuité de l'opérateur U.

Proposition 2.4. — *Si une suite* $\{f_n\}$ *dans la boule unité de* $L^\infty(X, m)$ *converge en mesure* m, *alors* $\{Uf_n\}$ *converge dans* H_{x_0}.

L'application

$$U : (L^\infty(X, m), \tau(L^\infty, L^1)) \rightarrow H_{x_0}$$

est donc continue.

En effet on peut supposer que la suite $\{f_n\}$ converge vers 0 en mesure, i.e.

$$\lim_{n \to \infty} m(|f_n| > \varepsilon) = 0.$$

Nous allons montrer que $H = \{f_n . Uf_n ; n = 1, 2, \ldots\}$ est un ensemble uniformément intégrable. En effet

$$\begin{aligned} \int_A |f_n| . |Uf_n| \, dm &\leqslant \int_A \int_X c(x_0, y)|f_n(y)| \, |f_n(x)| m\,(dy) m\,(dx) \\ &\leqslant m(1) \int_A c(x_0, y) m\,(dy) \end{aligned}$$

pour tout A mesurable, ce qui montre l'assertion.

D'autre part, de l'inégalité suivante;

$$\begin{aligned} |Uf_n(x)| &\leqslant \int_{\{|f_n| > \varepsilon\}} |k(x, y)| \, |f_n(y)| m\,(dy) + \varepsilon \int |k(x, y)| m\,(dy) \\ &\leqslant \int_{\{|f_n| > \varepsilon\}} c(x_0, y) m\,(dy) + \varepsilon \int c(x_0, y) m\,(dy) \end{aligned}$$

il vient que $\{f_n . Uf_n\}$ converge vers 0 en mesure.

De sorte que

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n . Uf_n| \, dm = 0.$$

Enfin on a

$$\langle Uf_n, Uf_n \rangle = \int Uf_n(x) f_n(x) \, dm(x) \rightarrow 0 \quad (n \uparrow \infty).$$

Proposition 2.5. — *Si une suite* $\{f_n\}$ *est bornée et converge en mesure, la suite* $\{Uf_n\}$ *converge uniformément sur* X.

En effet l'inégalité que nous avons utilisée ci-dessus entraîne la proposition.

CHAPITRE IV

PROBLÈME DE NEUMANN SUR LES ESPACES HARMONIQUES

1. Espace fonctionnel à nullité 1 sur la frontière de Martin.

D'abord nous rappelons quelques préliminaires de la théorie axiomatique du potentiel et ensuite nous donnons les résultats dans notre article précédent [8], mais à l'aide d'un point de vue différent.

a) Soit $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Brelot muni d'un potentiel strictement positif dans X. Nous supposons que la constante 1 est harmonique dans X, que les potentiels à support ponctuel sont proportionnels, et que, pour tout $y \in X$, il existe un potentiel $p_y(.)$ à support $\{y\}$ tel que

$$(x, y) \longmapsto p_y(x)$$

est s.c.i., et continue hors de $\{x = y\}$.

Comme hypothèse supplémentaire, nous supposons la symétrie :

$$p_y(x) = p_x(y).$$

Nous désignons $\mathscr{H}_\omega(\mathscr{S}_\omega, \mathscr{P}_\omega^+)$ l'ensemble des fonctions harmoniques (des fonctions surharmoniques, des potentiels) dans l'ouvert ω. Les potentiels dans X se représentent selon

$$\int p_y(.) m\,(dy)$$

par une mesure positive. Concernant la représentation des fonctions harmoniques on connaît le résultat suivant :

Il existe une compactification $\overline{X} = X \cup \Delta$ de X, unique à un homéomorphisme près, telle que, quel que soit $x \in X$,

$$y \longmapsto k_y(x) = (p_y(x_0))^{-1} . p_y(x)$$

admette une extension continue et que les extensions

$$\xi \longmapsto k_\xi(x),\ x \in \mathrm{X},$$

séparent les points de $\overline{\mathrm{X}}$. La fonction $x \longmapsto k_\xi(x)$ est harmonique dans X pour tout $\xi \in \Delta$, et toute fonction harmonique positive (ou bornée) dans X se représente selon

$$\int_\Delta k_\xi(\,.\,)\mu\,(d\xi)$$

à l'aide d'une mesure μ positive (ou bornée) sur Δ, concentrée sur l'ensemble Δ_1 des points minimaux de Δ.

On appelle Δ *frontière de Martin* de l'espace harmonique X.

Soit dl la mesure sur Δ, à support Δ_1, associé à 1 :

$$1 = \int k_\xi(\,.\,)\ l(d\xi).$$

On a $l(\Delta_1) = 1$ car $k_\xi(x_0) = 1$.

Un ensemble A de X est dit *effilé* au point $\xi \in \Delta$ s'il existe un voisinage ω de ξ tel que la fonction $k_\xi(x)$ ne soit pas conservée par le balayage sur $\mathrm{A} \cap \omega$;

$$k_\xi \not\equiv \hat{R}^{\mathrm{A}\cap\omega}k_\xi;\quad \text{la régularisé s.c.i. de}\quad R^{\mathrm{A}\cap\omega}k_\xi,$$

où, pour toute fonction f sur un ensemble B,

$$R^{\mathrm{B}}f = \inf\,\{u;\ u \text{ est surharmonique dans X et } u \geqslant f \text{ sur B}\}.$$

La *pseudo limite* d'une fonction f au point $\xi \in \Delta_1$ est la limite de f le long du filtre

$$\mathscr{F}_\xi = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{X};\ \mathrm{X} - \mathrm{A} \text{ est effilé en } \xi\},$$

elle s'écrit $ps.\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$.

On pose, pour toute fonction f finie ou non sur Δ, $Hf = \inf$ $\{u;\ u \in \mathscr{S}_{\mathrm{X}},$ bornée inférieurement et

$$\liminf_{x\to\xi} u(x) \geqslant f(\xi),\quad \forall\xi \in \Delta\}.$$

Si f est dl-intégrable on a [6] ;

$$Hf = \int_{\Delta_1} k_\xi(\,.\,)f(\xi)l\,(d\xi), \tag{1.1}$$

et

(1.2) $ps.\lim\limits_{x\to\xi} Hf(x) = f(\xi)$, dl-presque partout sur Δ_1.

b) Nous avons introduit [8] le noyau Θ de Naïm sur $\overline{X}$ qui joue un rôle important dans les problèmes au bord, en théorie axiomatique du potentiel, aussi bien que dans l'étude du comportement à la frontière des fonctions surharmoniques.

On a les propriétés suivantes :

(1.3) (i) $\Theta(x, y) = \dfrac{p_y(x)}{p_y(x_0) \cdot p_{x_0}(x)}, \qquad \forall x, y \in X,$

(ii) $\Theta(\eta, \xi) = \Theta(\xi, \eta), \forall \xi, \eta \in \overline{X}$.

(iii) Pour chaque $\xi \in \overline{X}$, la fonction $\eta \longmapsto \Theta(\eta, \xi)$ est s.c.i. sur $\overline{X}$.

(iv) $\Theta(\eta, \xi) = \liminf\limits_{X \ni y \to \xi} \Theta(\eta, y), \forall \xi, \eta \in \overline{X}$.

LEMME 1.1. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait*

$$\Theta(\eta, \xi) \geqslant c, \quad \forall \xi, \quad \eta \in \Delta.$$

De plus $(\eta, \xi) \longmapsto \Theta(\eta, \xi)$ *est s.c.i. sur* $\overline{X} \times \overline{X}$.

Démonstration. — Rappelons d'abord la construction du noyau Θ. Soit $\hat{R}^K k_\xi$, $\xi \in \overline{X}$, la balayée de k_ξ sur le compact K. $\hat{R}^K k_\xi$ s'écrit

$$\hat{R}^K k_\xi = \int_{\partial K} p_y(\,.\,) \nu_\xi^K (dy)$$

à l'aide d'une mesure ν_ξ^K à support ∂K. Pour tout $\eta \in \overline{X}$, on définit

$$\Theta^K(\eta, \xi) = \int_{\partial K} k_\eta(z) \nu_\xi^K (dz),$$

dont on peut vérifier qu'il est égal à :

$$\lim_{x \to} \frac{1}{p_{x_0}(x)} \hat{R}^K k_\xi(x).$$

$\Theta(\eta, \xi)$ est obtenu comme la limite croissante de $\Theta^K(\eta, \xi)$ lorsque K tend vers X en croissant.

Il suffira de montrer $\Theta^K(\eta, \xi) > c$ pour une constante $c > 0$, donc que $\Theta^K(\eta, \xi)$ est strictement positif en chaque point $(\eta, \xi) \in \overline{X} \times \overline{X}$ car, comme nous le verrons, la fonction

$(\eta, \xi) \longmapsto \Theta^{K}(\eta, \xi)$ est continue sur l'espace compact $\overline{X} \times \overline{X}$.

Montrons que : (i) la famille des fonctions $\{\Theta^{K}(x, .) : x \in X\}$ est équicontinue sur $\overline{X}$, (ii) la famille $\{\Theta^{K}(., \xi) : \xi \in \overline{X}\}$ l'est aussi et (iii) Θ^{K} est symétrique;

$$\Theta^{K}(\xi, \eta) = \Theta^{K}(\eta, \xi), \quad \forall \xi, \quad \eta \in \overline{X}.$$

(ii) est une conséquence de la définition de Θ^{K} et du fait que $\eta \longmapsto k_{\eta}(z)$ est continue uniformément par rapport à $z \in \partial K$. En effet, soient $\eta \in \overline{X}$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$\sup_{z \in \partial K} |k_{\eta}(z) - k_{\eta'}(z)| \leqslant \varepsilon \inf_{z \in \partial K} p_{z}(x_0)$$

pour η' assez voisin de η. Donc

$$\begin{aligned} |\Theta^{K}(\eta, \xi) - \Theta^{K}(\eta', \xi)| &\leqslant \varepsilon \int_{\partial K} p_{z}(x_0) \nu_{\xi}^{K}(dz) \\ &= \varepsilon \hat{R}^{K} k_{\xi}(x_0) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

pour tous $\xi \in \overline{X}$ et η' assez voisin de η. Soit maintenant $\sigma_{x}^{K}(dz)$ la mesure balayée de ε_{x} sur ∂K;

$$\hat{R}^{K} s(x) = \int_{\partial K} s(y) \sigma_{x}^{K}(dy)$$

pour toute $s \in \mathscr{S}_{X}^{+}$. On a alors

$$\Theta^{K}(x, \xi) = \frac{1}{p_{x_0}(x)} \hat{R}^{K} k_{\xi}(x) = \frac{1}{p_{x_0}(x)} \int_{\partial K} k_{\xi}(y) \sigma_{x}^{K}(dy).$$

Le même argument que celui de (ii) entraîne que

$$\begin{aligned} |\Theta^{K}(x, \eta) - \Theta^{K}(x, \eta')| &\leqslant \frac{\varepsilon}{p_{x_0}(x)} \int_{\partial K} p_{x_0}(z) \sigma_{x}^{K}(dz) \\ &= \varepsilon \frac{\hat{R}^{K} p_{x_0}(x)}{p_{x_0}(x)} \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

pour tous $x \in X$ et η' assez voisin de η, d'où (i). Enfin d'après (i) (ii) et du fait que $R^{K} p_{y}(x) = R^{K} p_{x}(y)$, ((X, $\mathscr{H}$) est symétrique !), Θ^{K} est symétrique.

De sorte que l'on a vérifié la continuité de

$$(\xi, \eta) \longmapsto \Theta^{K}(\xi, \eta).$$

Montrons ensuite que $\Theta^{K}(\xi, \eta) > 0$ en chaque point $(\xi, \eta) \in \overline{X} \times \overline{X}$. Soit α une constante (dépendant de ξ)

telle que

$$\inf_{\partial K} \hat{R}^K k_\xi \geqslant \alpha \sup_{\partial K} p_{x_0}.$$

Évidemment $\alpha > 0$. La fonction $s = \hat{R}^K k_\xi - \alpha p_{x_0}$ est harmonique sur l'ouvert $X - K$, et vérifie les conditions suivantes :

$$\liminf_{y \to x} s(y) \geqslant 0, \qquad \forall x \in \partial(X - K), \qquad s + \alpha p_{x_0} \geqslant 0.$$

D'après le principe du minimum s est positive, donc

$$\frac{1}{p_{x_0}(x)} \hat{R}^K k_\xi(x) \geqslant \alpha \qquad \text{pour tout} \qquad x \in X - K.$$

Il en résulte $\Theta^K(\eta, \xi) \geqslant \alpha > 0$ pour tout $\eta \in \overline{X - K}$. D'autre part $\Theta^K(\eta, \xi) > 0$ pour tout $\eta \in K$ de manière évidente. D'où le lemme.

c) Introduisons l'espace fonctionnel à nullité 1 sur la frontière de Martin.

On pose

$$B = \{f \in L^2(\Delta, dl) : \iint_{\Delta \times \Delta} \Theta(\eta, \xi)(f(\xi) - f(\eta))^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) < \infty\}.$$

On définit la forme bilinéaire $\langle \ , \ \rangle$ sur B par

$$(1.4) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \iint_{\Delta \times \Delta} \Theta(\eta, \xi)(f(\xi) - f(\eta))(g(\xi) - g(\eta)) \, l(d\xi)\, l(d\eta)$$

pour $f, g \in B$.

Cette forme bilinéaire est symétrique et positive.

D'après le lemme 1.1 on a

$$(1.5) \qquad \langle f, f \rangle \geqslant \frac{c}{2} \iint (f(\xi) - f(\eta))^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta),$$

i.e.

$$c \int \left(f(\xi) - \int f\, dl\right)^2 l(d\xi) \leqslant \langle f, f \rangle.$$

L'inégalité ci-dessus n'est autre que l'inégalité fondamentale (1.1) des Chapitres I et II. Elle montre aussi que $\langle f, f \rangle = 0$ si et seulement si f est une constante.

THÉORÈME 1.2. — $(B, \langle\ ,\ \rangle)$ *est un espace fonctionnel à nullité* 1 *dans* $L^2(\Delta, dl)$, *sur lequel toutes les contractions opèrent.*

En effet la définition de la forme bilinéaire, elle-même, montre que toutes les contractions opèrent. Il ne reste alors qu'à montrer que B est complet. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $(B, \langle\ ,\ \rangle)$. Il résulte de (1.5) que la suite des fonctions

$$g_n = f_n - \int f_n \, dl$$

est une suite de Cauchy dans $L^2(\Delta, dl)$. Soit g sa limite dans $L^2(\Delta, dl)$. Évidemment g est d'intégrale nulle. On pose

$$G_n(\xi, \eta) = g_n(\xi) - g_n(\eta) = f_n(\xi) - f_n(\eta)$$

et

$$G(\xi, \eta) = g(\xi) - g(\eta).$$

On a alors

$$\frac{1}{2}\iint |G_n(\xi, \eta) - G(\xi, \eta)|^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) = \int (g_n(\xi) - g(\xi))^2 \, l(d\xi),$$

de sorte que la suite $\{G_n\}$ converge vers G dans $L^2(\Delta \times \Delta)$. Ensuite d'après le Lemme de Fatou (on prend au besoin une sous-suite de G_n) on a

$$\begin{aligned}
&\iint \Theta(\eta, \xi) G(\eta, \xi)^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&\qquad \leqslant \liminf_{n\to\infty} \iint \Theta(\eta, \xi) G_n(\xi, \eta)^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&\qquad = \liminf_{n\to\infty} \iint \Theta(\eta, \xi)(f_n(\xi) - f_n(\eta))^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&\qquad \leqslant \sup_n \langle f_n, f_n\rangle < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $g \in B$. Le calcul suivant termine la démonstration

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle f_n - g, f_n - g\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \iint \Theta(\eta, \xi) \\
&\qquad [(f_n(\xi) - g(\xi)) - (f_n(\eta) - g(\eta))]^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \iint \Theta(\eta, \xi)(G_n(\xi, \eta) - G(\xi, \eta))^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \iint \Theta(\eta, \xi)(G_n(\xi, \eta) - G_m(\xi, \eta))^2 \, l(d\xi)\, l(d\eta) \\
&= \lim_{, m\to\infty} \langle f_n - f_m, f_n - f_m\rangle = 0.
\end{aligned}$$

d) Appliquons l'espace fonctionnel B sur la frontière de Martin dans l'espace des fonctions harmoniques sur X.

On pose

$$H^0 = \{u \in \mathscr{H}_X : u = H\bar{u} = \int k_\xi(.)\bar{u}(\xi)\, l(d\xi)$$

avec

$$\bar{u}(\xi) = ps.\lim_{x \to \xi} u(x) \in L^2(\Delta, dl)\},$$

et

$$H = \{u \in H^0 : \bar{u}(\xi) = ps.\lim_{x \to \xi} u(x) \in B\}.$$

Nous définissons une forme bilinéaire qui fait de H un espace fonctionnel à nullité 1, isomorphe à $(B, \langle\ ,\ \rangle)$. (L'isomorphisme est au sens des espaces hilbertiens, mais, au lieu de la condition de séparation, on demande la correspondance bijective des espaces d'annulation.)

Soit $u \in H^0$. On a la décomposition de la fonction sous-harmonique u^2;

$$u^2 = H(\bar{u}^2) - p, \tag{1.6}$$

où

$$p \in \mathscr{P}_X^+, \quad H(\bar{u}^2) = \int k_\xi(.)\bar{u}(\xi)^2\, l(d\xi),$$

et

$$\bar{u}(\xi) = ps.\lim_{x \to \xi} u(x) \in L^2(\Delta, dl).$$

Nous avons montré [8] la formule de Doob-Osborn qui s'énonce

$$\frac{1}{2}\,\mu(1) = \langle\bar{u}, \bar{u}\rangle, \tag{1.7}$$

où μ est la mesure positive associée au potentiel p;

$$p = \int p_y \mu\,(dy).$$

Soient u et v deux fonctions de H^0. Le produit $u \circ v$ s'écrit comme différence de deux fonctions surharmoniques, soit :

$$u \circ v = h + p_1 - p_2$$

avec $h \in \mathscr{H}_X$ et $p_i \in \mathscr{P}_X^+$ $(i = 1, 2)$. On notera μ_i $(i = 1, 2)$ les mesures associées aux p_i $(i = 1,2)$.

Si $\mu_1(1)$ est fini, on pose

$$D(u, v) = \frac{1}{2}(\mu_2(1) - \mu_1(1)).$$

D'après (1.7) on a $D(u, u) = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$, donc $D(u, v)$ est finie pour tous $u, v \in H$, donc c'est une forme bilinéaire symétrique sur $H \times H$. En tenant compte du fait que $D(u, u) = 0$ équivaut à $u^2 \in \mathscr{H}_X$, on peut vérifier que cette forme bilinéaire est à nullité 1.

On a

$$H = \{u \in H^0;\ D(u, u) < \infty\}.$$

Il s'ensuit que $(H, D(\ ,\ ))$ et $(B, \langle\ ,\ \rangle)$ sont isométriques et isomorphes, où l'isomorphisme est donné par :

$$\begin{array}{rcl} H & & B \\ \Psi & & \Psi \\ u & \to & f = ps.\lim u, \\ Hf & \leftarrow & f. \end{array}$$

Pour voir que $(H, D(\ ,\ ))$ est un espace fonctionnel il faut vérifier l'inégalité (1.1) du Chapitre I. En effet nous montrerons en section 2 l'inégalité suivante plus forte que (1.1) du Chapitre I : à chaque compact K de X on peut associer une constante $M(K)$ telle que

$$\sup_{x \in K} |u(x) - u(x_0)| \leqslant M(K)\, D(u, u), \tag{1.8}$$

pour tout $u \in H$.

En laissant la vérification de cette inégalité importante et intéressante nous terminerons ce paragraphe par la remarque suivante :

H est muni d'une *structure réticulée* définie par

$$u \curlyvee v = \int k_\xi(.)\max(\bar{u}(\xi), \bar{v}(\xi))\, l(d\xi).$$

H muni de cet ordre et B sont isomorphes comme espaces vectoriels réticulés, donc la contraction module (par rapport à cet ordre) opère dans H.

e) Dans ce paragraphe nous expliquons le concept de dérivée normale d'une fonction harmonique en un point frontière. Ce concept n'est pas nécessaire pour établir les divers résultats qui suivent, i.e. la forme bilinéaire ci-dessus suffit pour la théorie générale. Mais si l'on écrit certaines formules à l'aide de la dérivée normale, on trouve les mêmes formules que celles de l'analyse classique et on comprend facilement ce qu'une telle formule signifie.

On pose

$$\mathscr{D} = \{u \in \mathrm{H}^0 :$$

il existe une constante $a = a(u) > 0$ telle que l'on ait

$$\langle \bar{u}, g \rangle \leqslant a \left(\int g^2 \, dl \right)^{1/2}$$

pour tout $g \in \mathrm{B}\}$, où $\bar{u}(\xi) = ps.\lim\limits_{x \to \xi} u(x) \in \mathrm{L}^2(\Delta, dl)$.

Pour un $u \in \mathscr{D}$, le théorème de Hahn-Banach montre l'existence d'une $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Delta, dl)$ telle que

$$\mathrm{D}(u, H\psi) = \langle \bar{u}, \psi \rangle = \int \varphi\psi \, dl$$

pour tout $\psi \in \mathrm{B}$.

Définitions. — *La dérivée normale* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *de* $u \in \mathscr{D}$ *est la classe des fonctions* $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Delta, dl)$ *vérifiant la condition*

$$\mathrm{D}(u, H\psi) = \int_\Delta \varphi\psi \, dl \tag{1.9}$$

pour tout $\psi \in \mathrm{B}$.

Une fonction $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Delta, dl)$ *est dite négligeable si* $\int_\Delta \varphi g \, dl = 0$ *pour tout* $g \in \mathrm{B}$.

Pour les données $u \in \mathscr{D}$ et $\psi \in \mathrm{B}$ nous emploierons la notation abusive

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} \psi \, dl$$

pour indiquer l'intégrale $\displaystyle\int \varphi\psi \, dl$, où $\varphi \in \dfrac{\partial u}{\partial n}$. En effet cette intégrale ne dépend pas du choix de $\varphi \in \dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Nous emploierons aussi la convention

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \qquad \text{ou} \qquad \text{« } \frac{\partial u}{\partial n} - f \text{ est négligeable »}$$

pour indiquer que $\varphi - f$ est négligeable pour un (donc pour tout) $\varphi \in \dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Dans un cas un peu restreint on peut donner une expression qui justifie la terminologie. Supposons un moment qu'une fonction négligeable soit nulle presque partout sur Δ.

D'après (1.4) et (1.9) on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_\Delta \frac{\partial u}{\partial n}\,\psi\,dl &= \langle \bar{u}, \psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}\iint \Theta(\eta, \xi)(\bar{u}(\xi) - \bar{u}(\eta))(\psi(\xi) - \psi(\eta))\,l(d\xi)\,l(d\eta) \\ &= \int\left(\int \Theta(\eta, \xi)(\bar{u}(\xi) - \bar{u}(\eta))\,l(d\eta)\right)\psi(\xi)\,l(d\xi),\end{aligned}$$

pour tous $u \in \mathscr{D}$ et $\psi \in \mathrm{B}$.

De sorte que notre hypothèse provisoire entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) = \int \Theta(\eta, \xi)(\bar{u}(\xi) - \bar{u}(\eta))\,l(d\eta) \tag{1.10}$$

pour presque tout $\xi \in \Delta$. Cette fonction $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est aussi dans $\mathrm{L}^2(\Delta, dl)$.

D'autre part nous avons montré [8] que, pour toute $s \in \mathscr{S}^+_{\mathrm{X}}$;

$$s = \int_{\mathrm{X} \cup \Delta_1} k_\eta(\,.\,)\nu\,(d\eta),$$

on a

$$ps.\lim_{x \to \xi} \frac{s(x)}{p_{x_0}(x)} = \int \Theta(\xi, \eta)\nu\,(d\eta),$$

pour presque tout $\xi \in \Delta_1$.

C'est une extension d'un théorème de Naïm]12].

Soit maintenant $u \in \mathscr{D}$ et $u \geqslant 0$. D'après le théorème ci-dessus (1.10) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) = -\,ps.\lim_{x \to \xi} \frac{u(x) - \bar{u}(\xi)}{p_{x_0}(x)},$$

ce qui donne effectivement l'interprétation de la dérivée normale au point frontière.

Désormais on n'aura pas besoin de cette interprétation. Les fonctions négligeables nous la donneront exactement.

Voici le problème de Neumann non-homogène.

THÉORÈME 1.3. — *Soit* $\varphi \in L^2(\Delta, dl)$. *Pour qu'il existe une fonction harmonique* $u \in \mathcal{D}$ *telle que* $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi$ *il est nécessaire et suffisant que* $\int \varphi \, dl = 0$.

En effet, pour tout $u \in \mathcal{D}$, on a

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} \, dl = D(u, 1) = 0,$$

ce qui montre la nécessité.

Soit inversement $\varphi \in L^2(\Delta, dl)$ telle que $\int \varphi \, dl = 0$. On a alors d'après (1.5)

$$\left|\int_\Delta \varphi\psi \, dl\right| = \left|\int_\Delta \varphi \left(\psi - \int_\Delta \psi \, dl\right) dl\right| \leqslant C^{-1/2} \left(\int_\Delta \varphi^2 \, dl\right)^{1/2} \langle \psi, \psi \rangle^{1/2},$$

pour tout $\psi \in B$. De sorte qu'il existe $f \in B$ tel que $\langle f, \psi \rangle = \int \varphi\psi \, dl$ pour tout $\psi \in B$. Il en résulte que $Hf \in \mathcal{D}$ et $\left(\dfrac{\partial}{\partial n} Hf\right) - \varphi$ est négligeable.

PROPOSITION 1.4. — $\mathcal{D}_b = \{f \in B ; Hf \in \mathcal{D}\}$ *est dense dans* B.

En effet soit $g \in B$, orthogonal à $\mathcal{D}_b$. Étant donnée une $\varphi \in L^2(\Delta, dl)$, d'intégrale nulle, d'après le théorème ci-dessus, il existe un $u \in \mathcal{D}$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi$. Soit $\bar{u} \in \mathcal{D}_b$ avec $u = H\bar{u}$. On a

$$\int \varphi g \, dl = \langle \bar{u}, g \rangle = 0.$$

φ étant une fonction arbitraire d'intégrale nulle, g est une constante.

Soit $f \in \mathcal{D}_b$. On dit qu'une fonction $\Gamma(f, f)(\xi)$ sur Δ est *le carré du champ de* f associé à $\dfrac{\partial}{\partial n} H$, si on a l'expression

$$\int_\Delta \left(\frac{\partial}{\partial n} Hf\right) f \, dl = \int_\Delta \Gamma(f, f)(\xi) \, l(d\xi).$$

D'après la discussion que l'on a faite, et d'après (1.10), on a la propriété suivante.

PROPOSITION 1.5. — *Soit* $f \in \mathscr{D}_b$. *La fonction*

$$\Gamma(f, f)(.) = \frac{1}{2} \int_{\Delta} \Theta(., \eta)(f(.) - f(\eta))^2 \, l(d\eta)$$

est le carré du champ.

Si, de plus, $f^2 \in \mathscr{D}_b$ *et si toute fonction négligeable est nulle presque partout, on a*

$$\Gamma(f, f) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} Hf^2 - f \frac{\partial}{\partial n} Hf.$$

f) La dérivée normale du potentiel au point frontière est plus facile à définir.

Soit p un potentiel qui se représente selon

$$p = \int p_y \, d\nu(y).$$

On a montré [8] l'existence de la limite suivante :

$$-\, ps.\lim_{x \to \xi} \frac{p}{p_{x_0}}(x) = -\int k_\xi(y) \nu\,(dy)$$

en presque tout point $\xi \in \Delta_1$, que l'on désignera par $\dfrac{\partial p}{\partial n}(\xi)$, si ν est une mesure (non nécessairement positive) à support compact dans X, la limite

$$-\lim_{x \to \xi} \frac{1}{p_{x_0}(x)} \int p_y(x) \nu\,(dy) = -\int k_\xi(y) \nu\,(dy)$$

définit une fonction continue sur Δ; $\dfrac{\partial p}{\partial n} \in C(\Delta)$.

PROPOSITION 1.6. — *Soient* p *la différence de deux potentiels,* μ *la mesure associée à* p :

$$p = \int p_y \mu\,(dy),$$

et h *une fonction harmonique dans* X. *Si* $\dfrac{\partial p}{\partial n}$ *est dans* $L^\infty(\Delta, l)$ *et si*

$$\bar{h}(\xi) = ps.\lim_{x \to \xi} h(x) \in L^1(\Delta, l),$$

alors

$$\int h \, d\mu + \int \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \bar{h} \, dl = 0.$$

2. Noyau-fonction du problème de Neumann.

Considérons l'espace fonctionnel $(\mathrm{B}, \langle\ ,\ \rangle)$ sur la frontière de Martin Δ introduit en section 1. C'est un espace fonctionnel dans $\mathrm{L}^2(\Delta, dl)$ donc nous pouvons appliquer les résultats des Chapitres 1 et 2.

Soit K l'opérateur potentiel associé à $(\mathrm{B}, \langle\ ,\ \rangle)$:

$$(2.1) \qquad \langle \mathrm{K}\varphi, f\rangle = \int f.\varphi \qquad \text{pour tout} \qquad f \in \mathrm{B},$$

où φ est dans $\mathcal{N}_\Delta = \{\varphi \in \mathrm{L}^2(\Delta, dl); \int \varphi\, dl = 0\}$.

Il en résulte

$$H\mathrm{K}\varphi = \int \mathrm{K}\varphi(\xi)k_\xi(.)\, l(d\xi) \in \mathcal{D},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial n} H\mathrm{K}\varphi = \varphi.$$

K satisfait au principe semi-complet du maximum.

De (2.1) et (1.5) on tire :

$$(2.2) \qquad \|\mathrm{K}\varphi\| \leqslant c^{-1}\|\varphi\| \qquad \text{pour tout} \qquad \varphi \in \mathcal{N}_\Delta.$$

Nous cherchons le noyau-fonction qui donnera une représentation intégrale des solutions du problème de Neumann non-homogène (théorème 1.3).

On pose

$$\varphi_x(\xi) = k_\xi(x) - 1.$$

$\xi \longmapsto \varphi_x(\xi)$ est une fonction continue sur Δ et d'intégrale nulle. Soit

$$b_x(\xi) = (\mathrm{K}\varphi_x)(\xi).$$

b_x est dans $\mathrm{B} \cap \mathcal{N}_\Delta$. De la définition on a

$$\langle b_x, f\rangle = \int (k_\xi(x) - 1)f(\xi)\, l(d\xi) = Hf(x) - Hf(x_0),$$

pour tout $f \in \mathrm{B}$.

Si on désigne

$$b_x(y) = (Hb_x)(y) = \int_\Delta k_\xi(y) b_x(\xi)\, l(d\xi),$$

on a alors

$$y \longmapsto b_x(y) \in \mathrm{H},$$

et

$$(2.3) \qquad h(x) - h(x_0) = \mathrm{D}(b_x, h)$$

pour toute fonction harmonique h de H. En particulier on a

$$(2.4) \qquad \mathrm{D}(b_x, b_y) = b_y(x) = b_x(y).$$

car
$$b_y(x_0) = \int_\Delta b_y(\xi)\, l(d\xi) = 0.$$

Cela signifie que $b_y(x)$ est un noyau reproduisant associé à (H, D(,)) et normalisé en x_0.

Théorème 2.1. — (H, D(,)) *est un espace fonctionnel à nullité* 1 *du type noyau. De plus, pour tout compact* K *et tout* $u \in \mathrm{H}$ *on a :*

$$(2.5) \qquad \sup_{\mathrm{K}} |u(y) - u(x_0)| \leqslant c^{-1/2}\mathrm{M}_{\mathrm{K}}.\mathrm{D}(u, u)^{1/2},$$

où M_{K} *est la constante de Harnack, i.e. la constante* $\mathrm{M}_{\mathrm{K}} > 1$ *telle que*

$$\sup_{\mathrm{K}} h \leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}} h(x_0)$$

pour toute $h \in \mathscr{H}^+_{\mathrm{X}}$.

En effet, d'après le paragraphe ***d***) de la section 1, il ne nous faut montrer que l'inégalité (2.5). D'abord on a :

$$\sup_{y \in \mathrm{K}} k_\xi(y) \leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}}$$

et

$$\sup_{y \in \mathrm{K}} \|\varphi_y\| = \sup_{y \in \mathrm{K}} \left(\int (k_\xi(y) - 1)^2\, l(d\xi)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \sup_{y \in \mathrm{K}} \left(\int k_\xi(y)^2\, l(d\xi) - 1\right)^{1/2} \leqslant (\mathrm{M}_{\mathrm{K}})^{1/2}.$$

Donc on a

$$|b_y(y)| = \left|\int k_\xi(y) b_y(\xi)\, l(d\xi)\right|$$
$$\leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}}.\int |b_y(\xi)|\, l(d\xi) \leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}}\|\mathrm{K}\varphi_y\| \leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}}.c^{-1}\|\varphi_y\| \leqslant c^{-1}\mathrm{M}_{\mathrm{K}}^2$$

où on a utilisé l'estimation (2.2).

Il en résulte que

$$\sup_{y \in \mathrm{K}} |u(y) - u(x_0)| \leqslant \sup_{y \in \mathrm{K}} b_y(y)^{1/2}.\mathrm{D}(u, u)^{1/2}$$
$$\leqslant \mathrm{M}_{\mathrm{K}} \left(\frac{1}{c}\right)^{1/2} \mathrm{D}(u, u)^{1/2}.$$

PROPOSITION 2.2. — $(x, y) \longmapsto b_y(x)$ *est continue et, pour tout compact* K, *on a :*

$$\sup_{x,y \in K} |b_y(x)| \leqslant M_K^2 . c^{-1}.$$

En effet une autre forme du principe de Harnack affirme que la famille

$$\{h \in \mathscr{H}_X^+ ; h(y) = 1\}$$

est équi-continue en y. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|k_\xi(y) - k_\xi(z)| < \varepsilon k_\xi(y)$$

lorsque z est dans un voisinage (indépendant de ξ) de y. Soit K un compact assez grand qui contienne les points x et y. On a, grâce à la symétrique de $b_x(y)$,

$$\begin{aligned}
&|b_u(z) - b_x(y)| \\
&\quad \leqslant \int |k_\xi(y) - k_\xi(z)|\, |b_x(\xi)|\, l(d\xi) + \int |k_\xi(x) - k_\xi(u)|\, |b_z(\xi)|\, l(d\xi) \\
&\quad \leqslant \varepsilon \Big(\int k_\xi(y) |\, b_x(\xi)|\, l(d\xi) + \int k_\xi(x) |b_z(\xi)|\, l(d\xi) \Big) \\
&\quad \leqslant 2\varepsilon M_K \sup_{z \in K} \int |b_z(\xi)|\, l(d\xi) \leqslant 2\varepsilon M_K^2 c^{-1},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le calcul de la démonstration du théorème ci-dessus. Donc $(x, y) \longmapsto b_y(x)$ est continue uniformément sur tout compact.

Enfin on a, pour tous $x, y \in K$,

$$b_y(x) = D(b_y, b_x) \leqslant (b_y(y) . b_x(x))^{1/2} \leqslant c^{-1} M_K^2.$$

Nous allons envisager l'opérateur potentiel de l'espace fonctionnel à nullité 1 du type noyau (H, D(,)).

Soit ν une mesure dans X à support compact. D'après la Proposition 2.2 ci-dessus et la Proposition 1.4 du Chapitre III il existe un élément unique de H tel que

$$D(U^\nu, u) = \int (u - u(x_0))\, d\nu$$

pour tout $u \in H$, et que $U^\nu(x_0) = 0$.

Voici la représentation intrinsèque de U^ν.

THÉORÈME 2.3. — *Soient* ν *une mesure à support compact dans* X *et*

$$p = \int p_y \nu\, (dy).$$

On a les formules :

$$\text{(2.6)}\quad \mathrm{D}\left(H\mathrm{K}\left(\frac{\partial p}{\partial n} - \int \frac{\partial p}{\partial n}\, dl\right), u\right) = \int (u(x_0) - u)\, d\nu, \quad \forall u \in \mathrm{H}$$

et

$$\text{(2.7)}\quad -H\mathrm{K}\left(\frac{\partial p}{\partial n} - \int \frac{\partial p}{\partial n}\, dl\right)(x) = \mathrm{U}^{\nu}(x) = \int b_y(x)\nu\,(dy).$$

Démonstration. — D'après le *f*) de la section précédente la dérivée normale $\frac{\partial p}{\partial n}$ est une fonction continue sur Δ et

$$\int (u(x_0) - u)\, d\nu = \int \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \left(\bar{u} - \int \bar{u}\, dl\right) dl = \int \left(\frac{\partial p}{\partial n} - \int \frac{\partial p}{\partial n}\, dl\right) \cdot \bar{u}\, dl, \quad \forall u \in \mathrm{H}.$$

Soit

$$\varphi = \frac{\partial p}{\partial n} - \int \frac{\partial p}{\partial n}\, dl \in \mathcal{N}_\Delta.$$

On a alors, pour tout $u \in \mathrm{H}$,

$$\mathrm{D}(H\mathrm{K}\varphi, u) = \langle \mathrm{K}\varphi, \bar{u} \rangle = \int \varphi . \bar{u}\, dl.$$

Donc on a montré (2.6). De la formule (1.6) du Chapitre III on déduit (2.7).

COROLLAIRE 2.4 *(appelé condition limitée du problème de Neumann). — Si* ν *est une mesure à support compact dans* X *et si* $\nu(1) = 0$ *on a*

$$\text{(2.8)}\qquad \mathrm{D}\left(H\mathrm{K}\frac{\partial p}{\partial n}, u\right) + \int u\, d\nu = 0$$

pour tout $u \in \mathrm{H}$.

En effet, d'après la Proposition 1.5,

$$\int \frac{\partial p}{\partial n}\, dl = -\nu(1) = 0.$$

Donc (2.8) suit (2.6).

Nous allons poursuivre l'étude du *noyau du problème de* Neumann.

On pose

$$n_y(x) = p_y(x) + b_y(x).$$

$n_y(x)$ est une fonction symétrique de (x, y) telle que

(i) $(x, y) \longmapsto n_y(x)$ est s.c.i. et continue hors $x = y$,

(ii) pour tout y, $n_y(.)$ est surharmonique dans X et harmonique dans $X - \{y\}$,

(iii) $\left(\frac{\partial}{\partial n} n_y\right) + 1$ est une fonction négligeable sur Δ.

Comme application on peut étudier le problème classique concernant l'existence d'une fonction f dont on impose Δf et la constante $\frac{\partial}{\partial n} f$.

Proposition 2.5. — *Soit* ν *une mesure à support compact dans* X. *La fonction surharmonique*

$$\int n_y(.)\nu\,(dy)$$

a sa dérivée normale égale à $-\nu(1)$.

En effet,

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\xi) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\int p_y \nu\,(dy)\right)(\xi) = -\int k_\xi(y)\nu(dy)$$

est une fonction continue sur Δ, et la fonction

$$\int b_y(.)\nu\,(dy) = -HK\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \nu(1)\right)$$

est dans $\mathcal{D}$, d'après le théorème 2.3. De sorte que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\int n_y(.)\nu\,(dy)\right) + \nu(1) = 0,$$

i.e. une fonction négligeable.

Définissons l'opérateur potentiel du problème de Neumann. Pour toute mesure ν à support compact telle que $\nu(1) = 0$, on pose

$$N^\nu = \int n_y(.)\nu\,(dy).$$

Du Corollaire 2.4 on a

$$N^{\nu} = G^{\nu} - HK \frac{\partial}{\partial n} G^{\nu}, \tag{2.9}$$

où on a posé :

$$G^{\mu} = \int p_y \mu\,(dy)$$

pour toute mesure μ, s'il est bien défini.

On dit que $N : \nu \longmapsto N^{\nu}$, est *l'opérateur de Neumann* et G est appelé *opérateur de Green.*

On a l'estimation suivante :

$$\sup_{K} |N^{\nu}| \leqslant \sup_{K} (G^{|\nu|}) + M_K^2 c^{-1} |\nu|(1),$$

où $K = \operatorname{supp} \nu$.

CHAPITRE V

PRINCIPE DU MINIMUM DU TYPE NEUMANN

Nous montrons le principe du minimum du type suivant : si une fonction surharmonique hors d'un compact a sa valeur positive sur la frontière et si sa dérivée normale est positive sur la frontière de Martin, elle est positive.

1. Espace de Dirichlet localisé des fonctions harmoniques.

Nous allons expliquer l'espace de Dirichlet des fonctions harmoniques dans un domaine ω, complémentaire d'un compact de X. Tel espace a été introduit dans [8] pour résoudre le problème de Dirichlet extérieur dans ω, dont la condition à l'infini est celle de Neumann. Ici nous l'adaptons pour montrer le principe du minimum ci-dessus. La propriété que la contraction module (d'ordre spécifique) opère dans un tel espace est la clef de voûte.

On pose, pour toute fonction f finie ou non sur $\partial\omega$,

$$\overline{H}^{\omega}\varphi = \inf \{s :$$

s est surharmonique dans ω et

$$\begin{aligned} &\liminf s \geqslant \varphi \quad \text{sur } \partial\omega, \\ &\liminf s \geqslant 0 \quad \text{au point à l'infini}\}. \end{aligned}$$

On dit qu'une fonction harmonique f dans un domaine ω, complémentaire d'un compact, est *régulière* si l'on a

$$f = \overline{H}^{X-K}[f \mid \partial K] \qquad \text{dans} \qquad X - K,$$

pour un compact K extérieurement régulier tel que $X - K \subset \omega$.

Si f est une fonction harmonique régulière dans ω, pour tout ouvert ω', $\overline{\omega}' \subset \omega$, on peut trouver une mesure ν sur $\partial\omega'$ telle que

$$f = G^{\nu} \equiv \int p_y \nu\,(dy) \qquad \text{dans} \qquad \omega'.$$

On sait [7, 13] que toute fonction harmonique f dans un ouvert ω complémentaire d'un compact s'écrit uniquement

$$f = h + g \qquad \text{dans} \qquad \omega$$

où $h \in \mathscr{H}_X$ et $g \in \mathscr{H}_\omega$, régulière. Si f est continue dans $\overline{\omega}$, on a

$$(1.1) \qquad f - \overline{H}^{\omega} f = h - \overline{H}^{\omega} h, \qquad g = \overline{H}^{\omega}(f - h).$$

On l'appelle *décomposition de Cousin.*

Soient $f \in \mathscr{H}_\omega \cap C(\overline{\omega})$ et $h \in \mathscr{H}_X$ telles que

$$f - \overline{H}^{\omega} f = h - \overline{H}^{\omega} h.$$

$\overline{H}^{\omega} h$ se représente, hors d'un compact K, selon

$$\overline{H}^{\omega} h = G^{\nu}$$

où ν est une mesure sur ∂K. On sait que, pour toute $u \in \mathscr{H}_X$ l'intégrale

$$I = I(u, \overline{H}^{\omega} h) = \int u \, d\nu$$

ne dépend pas du compact K, ni de la mesure ν. Si h et u sont, en particulier, données par

$$h = H\overline{h} = \int_\Delta k_\xi(\,.\,)\overline{h}(\xi)\, l(d\xi), \qquad u = H\overline{u},$$

on peut représenter I par le noyau $\Theta^{X-\omega}(\xi, \eta)$;

$$\Theta^{X-\omega}(\xi, \eta) = \int k_\xi(y) \nu_\eta^{X-\omega}\,(dy),$$

où $\nu_\eta^{X-\omega}$ est la mesure telle que

$$\hat{R}^{X-\omega} k_\eta = \int p_y \nu_\eta^{X-\omega}\,(dy).$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \overline{H}^{\omega} h = \hat{R}^{X-\omega} h &= \int_\Delta \hat{R}^{X-\omega} k_\eta(\,.\,)\overline{h}(\eta)\, l(d\eta) \\ &= \int p_y\, m(dy) \quad \text{dans } \omega, \end{aligned}$$

où m est donnée par

$$m(.) = \int_\Delta \nu_\eta^{X-\omega}(.)\bar{h}(\eta)\, l(d\eta).$$

De sorte que l'on a

$$(1.2)\quad \mathrm{I} = \int u\, dm = \int \left(\int_\Delta k_\xi(y)\, m(dy)\right) \bar{u}(\xi)\, l(d\xi)$$
$$= \iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{X-\omega}(\xi, \eta)\bar{u}(\xi)\bar{h}(\eta)\, l(d\xi)\, l(d\eta).$$

L'espace de Dirichlet localisé à ω sera donné comme un sous-espace des fonctions harmoniques dans ω qui sont continues dans $\bar{\omega}$ et s'annulent sur $\partial\omega$. D'après (1.1) telle fonction harmonique s'écrit

$$f = (\mathrm{I} - \bar{H}^\omega)h, \quad h \in \mathscr{H}_X.$$

On pose

$$\mathrm{H}_\omega = \{f \in \mathscr{H}_\omega;$$

continue dans $\bar{\omega}$ et $f = (\mathrm{I} - \bar{H}^\omega)h$ pour $h \in \mathrm{H}\}$.

Soient

$$h_i \in \mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad f_i = (\mathrm{I} - \bar{H}^\omega)h_i \in \mathrm{H}_\omega \quad (i = 1,2).$$

On pose

$$(1.3)\qquad \mathrm{D}_\omega(f_1, f_2) = \mathrm{D}(h_1, h_2) + \mathrm{I}(h_1, \bar{H}^\omega h_2).$$

Comme on l'a fait pour $\mathrm{D}(.,.)$, on cherche des propriétés de la forme $\mathrm{D}_\omega(.,.)$ par une forme équivalente définie dans l'espace B sur la frontière Δ.

On pose, pour tous $\varphi, \psi \in \mathrm{B}$,

$$(1.4)\quad \langle\varphi, \psi\rangle_\omega = \langle\varphi, \psi\rangle + \iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{X-\omega}(\xi, \eta)\varphi(\xi)\psi(\eta)\, l(d\xi)\, l(d\eta),$$

(voir ***b***), ***c***) de IV-1).

D'après (1.2) $\sim$ (1.4), on a

$$(1.5)\qquad \mathrm{D}_\omega(f_1, f_2) = \langle\bar{h}_1, \bar{h}_2\rangle_\omega,$$

où

$$f_i = (\mathrm{I} - \bar{H}^\omega)h_i \qquad \text{et} \qquad h_i = \int k_\xi(.)\bar{h}_i(\xi)\, l(d\xi) \in \mathrm{H},$$

(donc $\bar{h}_i \in \mathrm{B}$), $i = 1,2$.

LEMME 1.1. — *La forme quadratique* $\langle u, u\rangle_\omega$, $u \in \mathrm{B}$, *définit une norme dans* B *équivalente à* $\langle u, u\rangle + \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Delta)}$.

Démonstration. — $\Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)$ étant une fonction continue et strictement positive sur $\Delta \times \Delta$, on a

$$m = \max_{\xi, \eta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta) < \infty$$

et

$$l = \min_{\xi, \eta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta) > 0.$$

Pour tout $u \in \mathrm{B}$, on a

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle_\omega &= \langle u, u\rangle + \iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)u(\xi)u(\eta)\, l(d\xi)\, l(d\eta)\\ &\geqslant \iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)\left[\frac{1}{2}(u(\xi)-u(\eta))^2 + u(\xi)u(\eta)\right] l(d\xi)\, l(d\eta)\\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)(u(\xi)^2 + u(\eta)^2)\, l(d\xi)\, l(d\eta),\end{aligned}$$

car $\Theta(\xi, \eta) \geqslant \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)$. La dernière intégrale est plus grande que

$$\left|\iint_{\Delta\times\Delta} \Theta^{\mathrm{X}-\omega}(\xi, \eta)u(\xi)u(\eta)\, l(d\xi)\, l(d\eta)\right|,$$

et que

$$l\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Delta)}.$$

De sorte que l'on ait

$$2\langle u, u\rangle_\omega \geqslant \langle u, u\rangle$$

et

$$3\langle u, u\rangle_\omega \geqslant \langle u, u\rangle + l\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Delta)}.$$

D'autre part il est facile à voir que

$$\langle u, u\rangle_\omega \leqslant \langle u, u\rangle + m\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Delta)}.$$

THÉORÈME 1.2. — $(\mathrm{H}_\omega, \mathrm{D}_\omega(.,.))$ et $(\mathrm{B}, \langle .,.\rangle_\omega)$ *sont des espaces hilbertiens qui sont isométriques et isomorphes.*

Démonstration. — D'après (1.5) il nous suffit de montrer que $(\mathrm{B}, \langle\ ,\ \rangle_\omega)$ est complet. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $(\mathrm{B}, \langle\ ,\ \rangle_\omega)$. D'après le lemme ci-dessus les fonctions f_n convergent vers une limite g dans $\mathrm{L}^2(\Delta, dl)$ et convergent aussi vers une limite u dans $(\mathrm{B}, \langle\ ,\ \rangle)$. L'inégalité (1.5) du Chapitre IV montre que la suite des fonctions $f_n - \int f_n \, dl$ converge vers $u - \int u \, dl$ dans $L^2(\Delta, dl)$. Donc on a

$$g = u + \int (g - u) \, dl.$$

Il en résulte que g est la limite de f_n à la fois dans $L^2(\Delta, dl)$ et dans $(B, \langle \, , \, \rangle)$. D'après le lemme ci-dessus la suite $\{f_n\}$ converge vers g dans $(B, \langle \, , \, \rangle_\omega)$.

Voici l'inégalité fondamentale associée à l'espace fonctionnel (séparé) $(H_\omega, D_\omega(\, , \,))$.

LEMME 1.3. — *Soit* K *un compact de* $\overline{\omega}$. *On a*

$$\sup_K |u| \leqslant .\text{const}.D_\omega(u, u)^{1/2}, \quad \forall u \in H_\omega.$$

En effet, d'après le théorème 2.1 du chapitre IV, on a

$$\begin{aligned} \sup_K |u| = \sup_K |h - \overline{H}^\omega h| &\leqslant 2 \sup_{K \cup \partial\omega} |h| \\ &\leqslant 2 \sup_{K \cup \partial\omega} |h - h(x_0)| + |2h(x_0)| \\ &\leqslant \text{const.} \, \langle \overline{h}, \overline{h} \rangle^{1/2} + 2 \int |\overline{h}| \, dl \\ &\leqslant \text{const.} \, (\langle \overline{h}, \overline{h} \rangle_\omega)^{1/2} = \text{const.} \, D_\omega(u, u)^{1/2}. \end{aligned}$$

La *structure réticulée* dans H_ω est définie comme suit : $u > 0$ si et seulement si $u = (I - \overline{H}^\omega)Hf$ avec un $f \in B$, positif sur Δ.

Soient $u \in H_\omega$; $u = (I - \overline{H}^\omega)Hf$, $f \in B$.

On a, d'après (1.5),

$$D_\omega(|u|, |u|) = \langle |f|, |f| \rangle_\omega \leqslant \langle f, f \rangle_\omega = D_\omega(u, u),$$

donc la contraction module opère dans H_ω.

Nous appelons $(H_\omega, D_\omega(\, , \,))$ *espace de Dirichlet* sur ω.

2. Principe du minimum.

Soit f une fonction harmonique dans un domaine ω complémentaire d'un compact. La décomposition de Cousin de f est donnée par

$$f = h + g$$

où $h \in \mathscr{H}_X$ et $g \in \mathscr{H}_\omega$, régulière dans ω. g s'écrit hors d'un compact K selon

$$g = G^\nu$$

par une mesure ν sur ∂K. Pour toute $u \in \mathscr{H}_X$ on considère l'intégrale

$$I(u, g) = \int u \, d\nu.$$

$I(u, g)$ ne dépend pas du choix des K et ν [7, 13].

En particulier la fonction sur Δ

$$\xi \longmapsto \varphi(\xi) = -\int k_\xi(y) \, d\nu(y)$$

est déterminée par g. La mesure ν étant à support compact φ est continue. Dans f) de la section IV-1 on l'appelle dérivée normale de

$$G^\nu = \int p_y \nu \, (dy).$$

Puisque φ ne dépend que de g nous appelons φ *dérivée normale* de g;

$$\frac{\partial g}{\partial n}(.) = -\int k.(y) \nu \, (dy) \in C(\Delta).$$

Rappelons d'autre part que, dans le cas où $h \in \mathscr{D}$, la dérivée normale de h est bien définie;

$$(2.1) \qquad \int_\Delta \frac{\partial h}{\partial n} \cdot \bar{u} \, dl = D(h, u) \qquad \text{pour toute} \qquad u \in H.$$

Dans ce cas nous définissons la dérivée normale de f par

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{\partial g}{\partial n} \subset L^2(\Delta, dl).$$

$\left(\text{Notons que } \dfrac{\partial h}{\partial n} \text{ est définie comme une classe dans } L^2(\Delta, dl) \text{ ainsi } \dfrac{\partial f}{\partial n}\right)$.

On pose

$$\mathscr{D}_\omega = \{f \in \mathscr{H}_\omega;\ f = h + g \text{ avec } h \in \mathscr{D} \text{ et } g \in \mathscr{H}_\omega, \text{ régulière}\}.$$

On dit que $\frac{\partial f}{\partial n}$, $f \in \mathcal{D}_\omega$, est *non-négative* sur Δ si

$$\int_\Delta \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \varphi \, dl \geqslant 0 \tag{2.2}$$

pour toute $\varphi \in \mathrm{B}, \geqslant 0$.

Théorème 2.1 *(Principe du minimum). — Soient* ω *un ouvert complémentaire d'un compact et* $f \in \mathcal{D}_\omega$. *Si*

$$\liminf_{x \to y} f(x) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad y \in \partial\omega,$$

et si $\frac{\partial f}{\partial n}$ *est non-négative sur* Δ, *alors* f *est non-négative dans* ω.

La démonstration s'effectuera à l'aide de l'espace de Dirichlet H_ω sur ω.

Lemme 2.2. — *Soit* $f \in \mathcal{D}_\omega \cap \mathrm{H}_\omega$. *On a*

$$\int_\Delta \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \varphi \, dl = \mathrm{D}_\omega(f, (\mathrm{I} - \overline{H}^\omega)H\varphi)$$

pour toute $\varphi \in \mathrm{B}$.

En effet $f \in \mathcal{D}_\omega \cap \mathrm{H}_\omega$ s'écrit

$$f = (\mathrm{I} - \overline{H}^\omega)h, \quad h \in \mathcal{D}.$$

D'après (1.3) et (2.1) on a

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\omega(f, (\mathrm{I} - \overline{H}^\omega)H\varphi) &= \mathrm{D}(h, H\varphi) + \mathrm{I}(H\varphi, \overline{H}^\omega h) \\ &= \int_\Delta \frac{\partial h}{\partial n} \cdot \varphi \, dl + \int H\varphi(y)\nu\,(dy)\end{aligned}$$

où ν est une mesure représentant $\overline{H}^\omega h$ selon

$$\overline{H}^\omega h = \mathrm{G}^\nu \quad \text{hors d'un compact.}$$

La proposition 1.6 du chagitre IV et la définition de $\frac{\partial}{\partial n}\overline{H}^\omega h$ entraînent que

$$\int H\varphi(y)\nu\,(dy) = -\int_\Delta \frac{\partial}{\partial n}\overline{H}^\omega h(\xi)\varphi(\xi)\, l(d\xi).$$

Donc on a

$$D_\omega(f, (I - \overline{H}^\omega)H\varphi) = \int_\Delta \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \varphi \, dl.$$

Démonstration du théorème 2.1.

D'abord nous le montrons lorsque $f \in \mathcal{D}_\omega$ est continue sur $\overline{\omega}$. On pose $u = f - \overline{H}^\omega f$. Comme $f \in \mathcal{D}_\omega$, f s'écrit $f = h + \overline{H}^\omega(f - h)$ avec $h \in \mathcal{D}$. Donc $u = h - \overline{H}^\omega h \in H_\omega$. Puisque $f \geqslant 0$ sur $\partial\omega$ par hypothèse, on obtient une mesure positive ν qui représente $\overline{H}^\omega f$ selon G^ν. Donc

$$\frac{\partial}{\partial n} \overline{H}^\omega f = - \int k.(y)\nu\,(dy) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \overline{H}^\omega f$$

est non-négative (au sens qu'on a expliqué avant le théorème).

De sorte que l'on a, d'après le Lemme 2.2,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_\Delta \frac{\partial u}{\partial n} \cdot (\overline{h})_- \, dl &= D_\omega(u, ((I - \overline{H}^\omega)H)(\overline{h})_-) \\ &= D_\omega(u, u_-) \leqslant 0, \end{aligned}$$

car, si l'on écrit $u = (I - \overline{H}^\omega)h = (I - \overline{H}^\omega)H\overline{h}$ on a par définition $u_- = ((I - \overline{H}^\omega)H)(\overline{h}_-)$ et la contraction module opère dans H_ω. Il en résulte $D_\omega(u_-, u_-) = 0$ et $u_- = 0$. Ce qui montre $(\overline{h})_- = 0$, donc h est non-négative. Mais, pour une fonction surharmonique $s \geqslant 0$, on montre facilement que $(I - \overline{H}^\omega)s \geqslant 0$. D'où $u = (I - \overline{H}^\omega)h \geqslant 0$ et $f \geqslant 0$.

Dans le cas général, d'après l'hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage δ de $\partial\omega$ tel que $f + \varepsilon > 0$ dans $\delta \cap \omega$. Soit ω' un sous-domaine de ω tel que

$$\omega - \delta \subset \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \omega.$$

Puisque

$$\frac{\partial(f + \varepsilon)}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \Delta,$$

en appliquant le cas spécial ci-dessus à la fonction $f + \varepsilon$ restreinte à ω', on voit que $f + \varepsilon \geqslant 0$ sur ω', donc sur ω. $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, il vient $f \geqslant 0$ sur ω, c.q.f.d.

THÉORÈME 2.3 *(Principe du Minimum).* — *Soit* s *une fonction surharmonique dans un ouvert* ω *telle que* $s = f + p$ *avec* $f \in \mathcal{D}_\omega$ *et* p *potentiel dans* ω. *Si*

$$\liminf s \geqslant 0 \qquad \textit{sur} \qquad \partial\omega,$$

et

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} \geqslant 0 \qquad \textit{sur} \qquad \Delta,$$

on a $s \geqslant 0$.

En effet la dérivée du potentiel

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\int k.(y)\mu\,(dy)$$

est toujours non-positive, donc l'hypothèse implique $\dfrac{\partial f}{\partial n} \geqslant 0$ sur Δ. D'autre part on a

$$\liminf p = 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\omega,$$

car p est un potentiel sur ω, donc on a

$$\liminf f \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\omega.$$

Le théorème découle alors du précédent.

CHAPITRE VI

RÉSOLVANTE DU NEUMANN

1. Construction de la résolvante du Neumann.

Nous allons construire une résolvante markovienne qui donne la solution du problème de Neumann. Celle-ci est classifiquement la solution de

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta)u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

D'abord nous montrons le principe semi-complet du maximum de l'opérateur N.

THÉORÈME 1.1. — *Soit* ν *une mesure à support compact telle que* $\nu(1) = 0$ *et que* G^ν *est continue. Si la relation*

$$N^\nu \leqslant c$$

est vraie sur le support de ν_+, *elle est aussi vraie partout dans* X.

En effet, soient

$$p_\pm = G^{\nu\pm} = \int p_y(.)\nu_\pm\,(dy),$$

et $h = HK\dfrac{\partial}{\partial n}G^\nu$. L'hypothèse s'écrit, d'après le (2.9) du Chapitre IV,

$$c + p_- + h \geqslant p_+ \qquad \text{sur} \qquad \text{supp.}\, p_+ = \text{supp.}\, \nu_+.$$

Or $c + p_- + h$ est surharmonique dans X et p_+ est harmonique hors de supp. ν_+, donc $c - N^\nu = c - p + h$ est surharmonique hors de supp. ν_+. Elle est continue dans X d'après l'hypothèse. On a alors

$$\liminf_{\omega \ni y \to x} (c - \mathrm{N}^{\nu}) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \partial\omega,$$

où $\omega = \mathrm{X} - \operatorname{supp} \nu_{+}$. D'autre part, d'après la Proposition 2.5 du Chapitre IV,

$$\frac{\partial}{\partial n}(c - \mathrm{N}^{\nu}) = -\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{N}^{\nu} = \nu(1) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Delta.$$

Le principe du minimum précédent montre que

$$c - \mathrm{N}^{\nu} \geqslant 0.$$

Étant donnée une mesure m dans X, on écrit, s'ils sont bien définis

$$\mathrm{N}f = \mathrm{N}^{f.m} = \int n_y(.)f(y)\, m(dy),$$

et

$$\mathrm{U}f = \mathrm{U}^{f.m} = \int b_y(.)f(y)\, m(dy),$$

pour toute charge nulle f.

On pose aussi

$$\mathrm{G}g = \mathrm{G}^{g.m} = \int p_y(.)g(y)\, m(dy),$$

pour toute fonction g s'il est bien défini.

Si m est une mesure de Radon sur X telle que $\mathrm{G}g$ soit continue pour toute g borélienne bornée, les applications linéaires N, U et G définissent des noyaux propres fortement felleriens, que nous désignerons par les mêmes symboles. Le théorème ci-dessus et le même raisonnement que dans [11, Chapitre X] montrent la

Proposition 1.2. — *Le noyau* N *satisfait au principe semi-complet du maximum; pour toute fonction mesurable* f *telle que* $m(f)$ *(soit définie et) soit nulle, et pour tout réel* c, *la relation :*

$$c \geqslant \mathrm{N}f \qquad \textit{sur} \qquad \{f > 0\}$$

entraîne :

$$c \geqslant \mathrm{N}f \qquad \textit{sur} \qquad \mathrm{X}.$$

Notre but est le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Il existe une résolvante fortement fellerienne* $(N_p)_{p>0}$ *des noyaux markoviens et une mesure bornée* m *invariante par rapport à* (N_p) *telles que l'on ait :*

(i) $Nf = N_pf + pN_pNf = N_pf + pNN_pf$ *pour tout* $f \in \mathcal{N} = \{f \in L^2(X, m) : (f, 1) = 0\}$,

(ii) *toute fonction* (N_p)*-excessive est une constante.*

La résolvante (N_p) est appelée *résolvante du problème de Neumann.*

Avant de commencer la construction de la résolvante du problème de Neumann il nous faut préciser les arbitraires qui se présentent.

Soit $\mathbf{Q} = (p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite des potentiels continus à support compact telle que toute fonction continue à support compact puisse s'approcher par les fonctions de $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}$ uniformément, et soit m_k la mesure correspondante :

$$p_k = \int p_y(\,.\,)m_k\,(dy).$$

On désigne par $M_k(> 1)$ la constante de Harnack :

$$\sup \{u(x)\,;\ x \in \text{supp. } m_k\} \leqslant M_k u(x_0)$$

pour tout $u \in \mathcal{H}^+_X$.

Soit $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ une partition de l'unité en fonctions boréliennes subordonnée à la famille des compacts $\{\text{supp. } m_k\}$. On choisit les nombres a_k, $k \geqslant 1$, de telle manière que l'on ait :

(1.1) (i) $\sum_k a_k \sup p_k < \infty$

(ii) $\sum_k a_k {M^2}_k \int \psi_k\, dm_k < \infty$.

Il en résulte que :

(iii) la mesure $dm = \Sigma\, a_k \psi_k\, dm_k$ est bornée, et à support X tout entier,

(iv) le potentiel $p_0 = \int p_y\, m(dy)$ est borné continu,

(v) la dérivée normale de p_0 à la frontière est bien définie dans $L^2(\Delta, dl)$, car

$$\sup_\xi \int k_\xi(y)\, m(dy) \leqslant \sum_k a_k M_k \int \psi_k\, dm_k < \infty,$$

(vi) (H, D(,)) est un espace fonctionnel à nullité 1 dans $L^2(X, m)$, et du type noyau, car on a

$$\int |b_y(y)|\, dm(y) \leqslant c^{-1} \sum_k a_k M_k^2 \int \psi_k\, dm < \infty$$

d'après l'estimation de $b_y(y)$ donnée dans la démonstration du théorème IV 2.1, donc l'argument en section 2 du chapitre III montre que H est du type L^2.

On sait [9, 10] qu'il existe une résolvante, appelée *résolvante minimale*, $(G_p)_{p \geqslant 0}$ telle que :

(1.2) (i) $G_0 1 = p_0 = \int p_y\, m(dy)$,

(ii) G_p applique les fonctions boréliennes bornées dans les fonctions continues bornées, et

$$\lim_{p \to \infty} p G_p f = f \quad \text{uniformément sur} \quad X$$

pour toute fonction f dans l'adhérence (par rapport à la convergence uniforme) de l'ensemble des fonctions

$$\{h \in C_b(X);\ h = \overline{H}^{X-K} h \quad \text{hors d'un compact} \quad K = K_h\},$$

en particulier, pour toute $f \in C_c(X)$,

(iii) l'ensemble des fonctions (G_p)-excessives sont les fonctions surharmoniques non-négatives dans X.

Évidemment $(G_p)_{p>0}$ donne une (L^2)-résolvante symétrique et sous-markovienne au sens strict.

Lemme 1.4.

(i) *L'opérateur* U;

$$f \longmapsto Uf = \int b_y(\,.\,) f(y)\, m(dy)$$

de $\mathcal{N}$ *dans* $L^2(X, m)$ *(resp. dans* H *et dans* $\mathcal{H}_X$*) est compact.*

(ii) *Si* $(I + pN)f$ *est une constante pour un* $f \in \mathcal{N}$, f *est alors nulle.*

En effet (i) est déjà montré, (le Corollaire 2.3 en section 2 du Chapitre III). (ii) est une propriété générale des opérateurs vérifiant le principe semi-complet du maximum et sera aisée à démontrer.

La résolvante $(N_p)_{p>0}$.

a) On considère l'opérateur $I + pG$ pour un $p > 0$. Comme $(G_p)_{p>0}$ est sous-markovienne au sens strict $(I + pG)$ est une bijection dans $L^2(X, m)$ avec son inverse $(I - pG_p)$. Montrons que l'opérateur $(I + pG)$ restreint à $\mathcal{N}$ est d'indice -1. En effet, le noyau est évidemment nul. Soit g un élément de $L^2(X, m)$ orthogonal à l'image $(I + pG)\mathcal{N}$. $(I + pG)$ étant symétrique, $(I + pG)g$ est orthogonal à $\mathcal{N}$, donc une constante. g est alors un multiple de $(1 - pG_p 1)$. Ce qui montre que l'image $(I + pG)\mathcal{N}$ est de codimension 1, et l'indice est -1.

Comme pU est un opérateur compact, d'après le théorème de l'indice l'opérateur

$$I + pN : \quad \mathcal{N} \to L^2(X, m)$$

est aussi d'indice -1. Le noyau de $I + pN$ étant, d'après le lemme ci-dessus, nul, l'image $(I + pN)\mathcal{N}$ est de codimension 1. De sorte qu'il existe un ℓ de $L^2(X, m)$ orthogonal à l'image $(I + pN)\mathcal{N}$. On le normalise par $(\ell, 1) = 1$. C'est possible, car $1 \notin (I + pN)\mathcal{N}$ d'après le lemme. Un élément g de $L^2(X, m)$ s'écrit $g = (I + pN)f$ pour un certain $f \in \mathcal{N}$ si et seulement si $(\ell, g) = 0$. (ℓ dépend de p).

On pose maintenant, pour $p > 0$,

$$(1.3) \qquad N_p g(x) = Nf(x) + \frac{1}{p}(\ell, g) \qquad \text{sur} \qquad X,$$

pour tout $g \in L^2(X, m)$, où

$$(I + pN)f = g - (\ell, g).$$

D'où il vient :

$$(1.3') \qquad g - f = pN_p g,$$

que l'on utilisera souvent.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de (1.3') :

(1.4) (i) N_p applique $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$.

(ii) $\int g\, dm = \int p\mathrm{N}_p g\, dm.$

(iii) $\mathrm{N}f = \mathrm{N}_p f + p\mathrm{N}_p \mathrm{N}f$ pour tout $f \in \mathcal{N}$.

(iv) $\mathrm{N}f = \mathrm{N}_p f + p\mathrm{N}\mathrm{N}_p f$ pour tout $f \in \mathcal{N}$,
car on a $\mathrm{N}h = \mathrm{N}_p f \in \mathcal{N}$ si $f = (\mathrm{I} + p\mathrm{N})h$ avec f, h dans $\mathcal{N}$. Donc $p\mathrm{N}\mathrm{N}_p f = p\mathrm{N}\mathrm{N}h = \mathrm{N}f - \mathrm{N}h = \mathrm{N}f - \mathrm{N}_p f$.

On a aussi, par définition,

$$p\mathrm{N}_p 1 = 1.$$

Il en résulte que $g - p\mathrm{N}_p g \in \mathcal{N}$ pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$. Par la même méthode que celle de la section 3 du Chapitre II on a

$$0 \leqslant p\mathrm{N}_p g \leqslant 1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant g \leqslant 1$$

(la propriété est vraie ponctuellement).

Montrons l'équation résolvante. Soient

$$g - (\mathfrak{l}, g) = f + q\mathrm{N}f$$

avec $f \in \mathcal{N}$, donc $\mathrm{N}_q g = \mathrm{N}f + \frac{1}{q}(\mathfrak{l}, g)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_p g &= \mathrm{N}_p(\mathrm{I} + q\mathrm{N})f + \frac{1}{p}(\mathfrak{l}, g) \\ &= \mathrm{N}f + (q - p)\mathrm{N}_p\mathrm{N}f + \frac{1}{p}(\mathfrak{l}, g), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_p g - \mathrm{N}_q g &= (q - p)\mathrm{N}_p\mathrm{N}f + \frac{q-p}{pq}(\mathfrak{l}, g) \\ &= (q - p)\mathrm{N}_p\left(\mathrm{N}f + \frac{1}{q}(\mathfrak{l}, g)\right) \\ &= (q - p)\mathrm{N}_p\mathrm{N}_q g. \end{aligned}$$

Nous avons montré que $(\mathrm{N}_p)_{p>0}$ est une (L^2)-résolvante markovienne dont la mesure invariante est la mesure m.

b) Montrons que N_p est un noyau fortement fellerien. On remarque que, d'après le théorème des isomorphismes de Banach, l'application $(\mathrm{I} + p\mathrm{N})$ de $\mathcal{N}$ dans le complément orthogonal de $\mathbf{R}\mathfrak{l}$ est un isomorphisme, i.e. l'application inverse est continue.

Soit $\{g_n\}$ une suite décroissante de fonctions positives bornées, qui converge vers 0 en chaque point. La suite $\{g_n\}$ converge aussi vers 0 dans $L^2(X, m)$. Ainsi que

$$\{g_n - (\mathfrak{l}, g_n)\}.$$

De sorte, que, si les éléments f_n de $\mathcal{N}$ sont tels que

$$(I + pN)f_n = g_n - (\mathfrak{l}, g_n),$$

les f_n convergent vers 0 dans $\mathcal{N}$, d'après la remarque ci-dessus. Donc la suite

$$Uf_n(x) = \int b_y(x)f_n(y)\, m(dy), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

converge vers 0 pour tout $x \in X$.

D'autre part, en prenant une sous-suite $f_{n'}$ qui converge presque partout vers 0, on voit que les

$$Gf_{n'}(x) = \int p_y(x)f_{n'}(y)\, m(dy)$$

convergent vers 0, et la suite

$$N_p g_{n'}(x) = Nf_{n'}(x) + \frac{1}{p}(g_{n'}, \mathfrak{l})$$

converge vers 0. Mais, la suite $\{N_p g_n(x)\}$, étant décroissante, converge vers 0. Il en résulte que N_p est un noyau. D'après (1.3) ce noyau est fortement fellerien.

On va montrer la propriété (ii). Soit g une fonction (N_p)-excessive;

$$\lim_{p \to 0} \uparrow pN_p g(x) = g(x).$$

D'après le Corollaire 3.1 du Chapitre II on a

$$\lim_{p \downarrow 0} pN_p g = c(g) \qquad \text{dans} \qquad L^2(X, m),$$

donc g est égale à la constante $c(g)$ presque partout. Il en résulte

$$g(x) = \lim_{p \to 0} \uparrow pN_p g(x) = c(g) \lim_{p \to 0} pN_p 1(x) = c(g)$$

pour tout x.

2. Décomposition de la résolvante (N_p).

Nous allons présenter la décomposition de la résolvante (N_p) :

$$N_p = G_p + (I - pG_p)U_p(I - pG_p),$$

où U_p est un opérateur dans $L^2(X, m)$ dont l'image est dans H et tel que $\|pU_p\|$ est borné.

On pose, pour toute $f \in L^2(X, m)$,

$$R_p(f, f) = p(f - pG_p f, f), \qquad p > 0,$$

qui est une forme bilinéaire bornée, symétrique et positive. On a la relation

$$R_p(V_p f, g) = (f, g),$$

où

$$V_p f = \frac{1}{p}(I + pG)f.$$

On pose aussi

$$A_p f = p(I - pG_p)f.$$

Cela implique

$$V_p A_p = A_p V_p = I.$$

La forme bilinéaire $R_p(\ ,\ )$ n'est pas en général coercive, mais on a l'estimation suivante :

LEMME 2.1. — *Il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que*

$$D(u, u) + R_t(u, u) \geqslant t\delta \int_\Delta \overline{u}(\xi)^2 \, dl(\xi),$$

pour tout $u \in H$, *et tout* $t > 0$.

Démonstration. — Rappelons la définition de la forme bilinéaire $D(u, u)$;

$$D(u, u) = \frac{1}{2}\mu(1)$$

où μ est la mesure qui donne le potentiel

$$p = \int p_y \mu\,(dy)$$

tel que

$$u^2 = H(\overline{u}^2) - p. \quad \text{(Chapitre IV, 1 — } \boldsymbol{d}\text{)).}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
R_t(u, u) &= \frac{t}{2}\int G_t(u - u(x))^2(x)\, m(dx) \\
&\quad + \frac{t}{2}\int u^2(x)(1 - tG_t1)(x)\, m(dx) \\
&\geqslant -\frac{t}{2}\int p(x)(1 - tG_t1)(x)\, m(dx) \\
&\quad + \frac{t}{2}\int H(\overline{u}^2)(x)(1 - tG_t1)(x)\, m(dx) \\
&= -\frac{t}{2}\int G(1 - tG_t1)(y)\, \mu(dy) + \frac{t}{2}(H(\overline{u}^2), 1 - tG_t1) \\
&= -\frac{1}{2}\int tG_t1(y)\, \mu(dy) + \frac{t}{2}(H(\overline{u}^2), 1 - tG_t1).
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
&D(u, u) + R_t(u, u) \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{2}\int (1 - tG_t1)(y)\, u(dy) + \frac{t}{2}(H(\overline{u}^2), 1 - tG_t1) \\
&\qquad \geqslant \frac{t}{2}(H(\overline{u}^2), 1 - tG_t1) \geqslant \frac{t}{2}(H(\overline{u}^2), 1 - G_1 1)
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est égal à

$$\frac{t}{2}\int_\Delta \overline{u}(\xi)^2 \int_X k_\xi(x)(1 - G_1 1)(x)\, m(dx)\, l(d\xi).$$

Or la fonction

$$\xi \longmapsto \frac{1}{2}\int_X k_\xi(x)(1 - G_1 1)(x)\, m(dx)$$

est s.c.i. et strictement positive, donc plus grand qu'une constante positive δ. On a montré que

$$D(u, u) + R_t(u, u) \geqslant t\delta \int_\Delta |\overline{u}(\xi)|^2\, l(d\xi).$$

Corollaire 2.2. — *Il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que*

$$D(u, u) + R_t(u, u) \geqslant t\gamma \|u\|^2$$

pour tout $u \in H$.

En effet, on a, d'après (1.1),

$$dm = \Sigma a_k \psi_k \, dm_k$$

et

$$0 < \beta = \Sigma a_k \mathrm{M}_k \int \psi_k \, dm_k < \infty.$$

On a d'autre part

$$\sup_{\mathrm{K}_k} H(\bar{u}^2) \leqslant \mathrm{M}_k H(\bar{u}^2)(x_0) = \mathrm{M}_k \int_\Delta |\bar{u}|^2(\xi) \, l(d\xi),$$

où $\mathrm{K}_k = \mathrm{Supp.}\, m_k$, car M_k est la constante de Harnack. Donc

$$\|u\|^2 \leqslant \int_\mathrm{X} H(\bar{u}^2)(x) \, dm(x) \leqslant \beta \int_\Delta |\bar{u}|^2 \, dl,$$

d'où

$$\mathrm{D}(u, u) + \mathrm{R}_p(u, u) \geqslant p\left(\frac{\delta}{\beta}\right) \|u\|^2.$$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du Théorème A et de la Proposition B de l'appendice.

Proposition 2.3. — *Il existe une famille* $(\mathrm{U}_p)_{p>0}$ *d'opérateurs bornés, symétriques et positifs dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$ *tels que l'on ait :*

(i) $\mathrm{U}_p f$ *est dans* H *pour toute* $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$, *et vérifie*

$$\mathrm{D}(\mathrm{U}_p f, u) + \mathrm{R}_p(\mathrm{U}_p f, u) = (f, u)_\mathrm{X},$$

pour tout $u \in \mathrm{H}$,

(ii) $\mathrm{U}_p f - \mathrm{U}_q f + \mathrm{U}_p(\mathrm{A}_p - \mathrm{A}_q)\mathrm{U}_q f = 0, \; (p, q > 0)$,

(iii) $\|\mathrm{U}_p\| \leqslant \dfrac{1}{p\gamma}$, *où* γ *est la constante du Corollaire* 2.2, *et* $\mathrm{U}_p \mathrm{A}_p 1 = 1$,

(iv) $\mathrm{A}_p \mathrm{U}_p$ *applique* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathcal{N}$ *et on a*

$$\mathrm{U}f = \mathrm{U}_p f + \mathrm{U}_p \mathrm{A}_p \mathrm{U} f \quad \text{sur} \quad \mathrm{X},$$

pour toute $f \in \mathcal{N}$. *En outre*

$$\mathrm{U}f = \mathrm{U}_p f - \mathrm{U}_p f(x_0) + \mathrm{U}\mathrm{A}_p \mathrm{U}_p f.$$

Les formules ci-dessus sont vraies ponctuellement, car toutes les fonctions sont harmoniques sur X. La formule (i) n'est autre que la condition limite du problème de Neumann. (Voir le Corollaire 2.4 du Chapitre IV.)

THÉORÈME 2.4. — *Pour toute* $g \in L^2(X, m)$,

$$N_p g(x) = G_p g(x) + (I - pG_p)U_p(I - pG_p)g(x)$$

sur X.

En effet g s'écrit

$$g = (I + pN)f + (l, g).$$

donc il suffit de vérifier le théorème pour une fonction g de la forme $g = (I + pN)f$, et pour une constante. On a d'une part

$$N_p(I + pN)f = Nf.$$

D'autre part, en utilisant la formule

$$I + pN = (I + pG) + pU,$$

on a

$$\begin{aligned}(G_p + (I - pG_p)U_p(I - pG_p))(I + pN)f \\ = Gf + pG_pUf + (I - pG_p)U_pf + (I - pG_p)U_pA_pUf \\ = Nf + (I - pG_p)(- U + U_p + U_pA_pU)f = Nf,\end{aligned}$$

ce qui montre le théorème pour $g = (I + pN)f$.

Vérifions-le pour la constante 1

$$\begin{aligned}G_p1 + (I - pG_p)U_p(I - pG_p)1 &= G_p1 + \left(\frac{1}{p}(I - pG_p)U_pA_p1\right) \\ &= G_p1 + \frac{1}{p}(I - pG_p)1 = \frac{1}{p} = N_p1.\end{aligned}$$

Remarque. — Le Théorème 2.4 n'est autre que le Théorème de Feller-Ueno :

$$N_p = G_p + (I - pG_p)HK_p\frac{\partial}{\partial n}G_p,$$

où l'opérateur K_p: $L^2(\Delta, l) \to B$ est donné ci-dessous : On pose

$$\Theta_p(\xi, \eta) = \int (I - pG_p)k_\xi(x)k_\eta(x)\, m(dx),$$

et définit une forme bilinéaire sur $L^2(\Delta, m)$ par

$$\Theta_p(\varphi, \psi) = \iint_{\Delta\times\Delta} \Theta_p(\xi, \eta)\varphi(\xi)\psi(\eta)\, l(d\xi)\, l(d\eta).$$

$K_p\varphi$ est l'unique élément de B tel que

$$\langle K_p\varphi, \psi\rangle + \Theta_p(K_p\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_\Delta,$$

pour tout $\psi \in B$. Comme dans le Théorème 2.3 du Chapitre IV, on peut montrer que

$$U_p f = HK_p \frac{\partial}{\partial n} Gf,$$

au moins si f est à support compact. L'existence de K_p découle du Lemme 2.1.

Conjecture. — L'image $\mathscr{R}$ de la résolvante $(N_p)_{p>0}$ opérant sur les fonctions continues bornées sera caractérisée comme suit :

Soit

$\mathscr{Q} = \{f \in C_b(X) : f$ appartient à $\mathscr{D}_{X-K}$ pour un compact K et $\dfrac{\partial f}{\partial n} = 0\}$.

Alors les fermetures (par la topologie de la convergence uniforme sur X) de $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ coïncident, en particulier,

$$\lim_{p\to\infty} pN_p f = f \quad \text{uniformément sur} \quad X,$$

pour toute $f \in \mathscr{Q}$.

APPENDICE

MÉTHODE DES FORMES QUADRATIQUES DE GAUSS

Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace fonctionnel dans $L^2(X, m)$ séparé ou à nullité 1.

On considère une forme bilinéaire $b(\ ,\ )$ symétrique dans $L^2(X, m)$ vérifiant les conditions :

$(a.1)$ $\langle\ ,\ \rangle + b(\ ,\ )$ est coercive, i.e. il y a une constante $c > 0$ telle que l'on ait

$$\langle u, u\rangle + b(u, u) \geqslant c\|u\|^2$$

pour tout $u \in H$,

$(a.2)$ $b(\ ,\ )$ définit un opérateur $V = V_b$ dans $L^2(X, m)$ tel que

$$b(Vf, u) = (f, u), \ u \in L^2(X, m).$$

Ces conditions sont vérifiées lorsque $b(\ ,\ )$ est une forme coercive. Mais nous nous sommes intéressés au cas où elle ne l'est pas. (voir le Chapitre VI).

On pose

$$\mathscr{D}_b = \{u;\ \text{il existe une constante } a \ \text{telle que } |b(u, v)| \leqslant a\|v\| \ \text{pour tout } v \in H\}$$

et, pour $u \in \mathscr{D}_b$, $A_b u$ représente l'unique élément qui satisfait à $(A_b u, v) = b(u, v)$ pour toute $v \in L^2(X, m)$. L'élément $V_b f$ est dans $\mathscr{D}_b$ et on a $A_b V_b f = f$. Lorsque $b(.,.)$ est une forme bornée, $\mathscr{D}_b = L^2(X, m)$.

Théorème A. — *a) Étant donnée* $f \in L^2(X, m)$. *Il existe un unique élément* $Jf = J_b f$ *de* H *qui rend minimum la forme quadratique*

$$\Psi_f(u) = \langle u, u \rangle + b(u - f, u - f);$$

Jf *est aussi l'unique élément de* H *tel que*

$$\langle Jf, u \rangle + b(Jf - f, u) = 0$$

pour tout $u \in H$, *donc* $b(Jf, g) = b(Jg, f)$.

b) $K_b = J_b V_b$ *est un opérateur borné (par* c^{-1}*), symétrique et positif dans* $L^2(X, m)$.

c) Soient $b_i(.,.)$, $i = 1, 2$, *deux formes bilinéaires bornées vérifiant a.*1) *et a.*2). *On désigne par* K_i *et* A_i $(i = 1,2)$ *les opérateurs ci-dessus correspondants aux* $b_i(\ ,\ )$. *On a alors :*

$$K_1 - K_2 + K_1(A_1 - A_2)K_2 = 0.$$

La démonstration est basée sur la formule

$$\frac{1}{2}\Psi_f(u) + \frac{1}{2}\Psi_f(v) - \Psi_f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left\langle \frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2} \right\rangle + b\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Les *b*) et *c*) résultent du fait que Kf est l'unique élément de H tel que

$$\langle Kf, u \rangle + b(Kf, u) = (f, u), \qquad u \in H.$$

Proposition B. — *Soient* H *un espace fonctionnel à nullité* 1 *et* L *l'opérateur potentiel associé, i.e.* L *est défini pour les charges nulles et vérifie la relation :*

$$\langle Lf, u \rangle = (f, u), \qquad u \in H.$$

Soient, en outre, $b(\ ,\ )$ *une forme bilinéaire bornée qui vérifie a.*1) *et a.*2). *On a :*

(i) $K_b A_b 1 = 1$,

$A_b K_b$ *laisse invariant les charges nulles.*

(ii) *Pour toute charge nulle* f,

$$Lf = K_b f + K_b A_b Lf.$$

(Cette formule ne dépend pas de la normalisation de L, *soit*

que L *laisse invariant les charges nulles, soit que* $Lf(x_0) = 0$ *en quelque point* x_0.)

(iii) $Lf = K_b f + LA_b K_b f$ *à une constante près, pour toute charge nulle* f. *La constante est déterminée par la normalisation de* L.

En effet (i) est une conséquence de

$$\begin{aligned}(A_b K_b f, 1) &= (f, K_b A_b 1) \\ &= b(K_b f, 1) = \langle K_b f, 1\rangle + b(K_b f, 1) = (f, 1),\end{aligned}$$

pour toute $f \in L^2(X, m)$. De sorte que l'on peut définir $LA_b K_b f$ lorsque f est une charge nulle.

D'après un calcul on a

$$\langle Lf - K_b f - LA_b K_b f, u\rangle = 0, \qquad \forall u \in H.$$

Donc, si L laisse invariant les charges nulles, on a

$$Lf = K_b f + LA_b K_b f - k,$$

avec une constante k qui est égale à

$$\int K_b f\, dm = (K_b f, 1).$$

L'autre formule est facile à montrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, *Trans. A.M.S.*, 68 (1950), 337-404.

[2] M. Brelot, Lectures on Potential Theory, Tata Institute, Bombay (1960).

[3] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, (1959), 208-215.

[4] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, *Ann. Inst. Fourier*, 15 (1965), 259-272.

[5] J. L. Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 573-621.

[6] K. Gowrisankaran, Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 2 (1963), 307-356.

[7] T. Kori, Sheaf cohomology theory on harmonic spaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, 14, 3 (1974), 555-595.

[8] T. Kori, Problème de Neumann sur les espaces harmoniques, *Math. Ann.*, 224 (1976), 53-76.
[9] T. Kori, Axiomatic theory of non-negative full-superharmonic functions, *J. Math. Soc. Japan*, 23 (1971), 481-526.
[10] P. A. Meyer, Brelot's axiomatic theory of Dirichlet problem and Hunt's theory, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 2 (1963), 357-372.
[11] P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Hermann, Paris (1966).
[12] L. Naim, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957), 183-281.
[13] B. Walsh, Flux in axiomatic potential theory I: Cohomologie, *Inventiones Math.*, 8 (1969), 175-221.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1976
Proposé par G. Choquet.

Tosiaki Kori,
Faculté des Sciences et Technologies
Université de Waseda
Nishi-Okubo 4-170, Shinjuku
Tokyo (Japon).