ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HICHAM FAKHOURY

Approximation par des opérateurs compacts ou faiblement compacts à valeurs dans $C(X)$

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 4 (1977), p. 147-167

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_147_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 4 (1977), 147-167.

APPROXIMATION PAR DES OPÉRATEURS COMPACTS OU FAIBLEMENT COMPACTS A VALEURS DANS C(X)

par Hicham FAKHOURY

Introduction.

Soit F un sous-espace fermé d'un espace normé E; une application P de E sur F est dite *projection de meilleure approximation* si pour tout x de E la quantité $\|x - \mathrm{P}(x)\|$ coïncide avec la distance de x à F. Cette application, si elle existe, n'est a priori ni linéaire ni continue. On l'appelle « projection » parce qu'elle vérifie nécessairement $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. Étant donnés deux espaces de Banach W et V on note $\mathscr{L}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ (resp. $\mathscr{K}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$, $\mathscr{F}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$) l'espace des opérateurs bornés (resp. compacts, faiblement compacts) de W dans V. On se propose d'étudier l'existence d'une projection de meilleure approximation P de $\mathscr{L}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ sur $\mathscr{K}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ (resp. $\mathscr{F}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$); c'est-à-dire une application P telle que

$$\|\mathrm{T} - \mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \inf \{\|\mathrm{T} - \mathrm{R}\|\,;\ \mathrm{R} \in \mathscr{K}(\mathrm{W}, \mathrm{V})\}$$
$$(\text{resp. } \|\mathrm{T} - \mathrm{P}(\mathrm{T})\| = \inf \{\|\mathrm{T} - \mathrm{R}\|\,;\ \mathrm{R} \in \mathscr{F}(\mathrm{W}, \mathrm{V})\}).$$

La théorie de la meilleure approximation d'opérateurs continus par des opérateurs compacts s'est développée depuis 1971 essentiellement dans le cas des opérateurs entre espaces de Hilbert. En effet, il est établi dans [6] qu'il existe une projection de meilleure approximation de $\mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{H})$ sur $\mathscr{K}(\mathrm{H}, \mathrm{H})$ pour tout espace de Hilbert H. Les propriétés de cette meilleure approximation ont été étudiées dans [7] et [12].

Dans [4] nous avons renforcé le résultat de [6]. En effet, il existe une projection continue de meilleure approximation d'un espace de Banach E sur un sous-espace fermé F s'il existe une projection linéaire Q du dual E′ de E sur le polaire F^o de F vérifiant $\|f\| = \|Q(f)\| + \|f - Q(f)\|$. Ainsi, il suffit de remarquer que pour un espace de Hilbert H l'espace $\mathscr{K}(H, H)$ vérifie cette hypothèse dans $\mathscr{L}(H, H)$. Ceci est prouvé dans [2]; et plus généralement, d'après [5] c'est le cas pour une large classe d'espaces de Banach qui contient les espaces $c_0(\mathbf{N})$ et $l_p(\mathbf{N})$ pour p dans $]1, \infty[$.

Dans ce travail, nous montrons l'existence de projections continues, non linéaires, de meilleure approximation de l'espace des opérateurs bornés $\mathscr{L}(W, V)$ sur les sous-espaces $\mathscr{K}(W, V)$ ou $\mathscr{F}(W, V)$ dès que W est un espace $L^1(\mu)$ et V un espace C(X). Sous les mêmes hypothèses, il existe de telles projections continues non linéaires du bidual $\mathscr{K}''(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}''(W, V)$) de $\mathscr{K}(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}(W, V)$) sur $\mathscr{K}(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}(W, V)$).

En fait, ce résultat est établi sous l'hypothèse que V est un C_σ-espace, c'est-à-dire un espace de fonctions continues sur un compact vérifiant $f(x) = -f(\sigma(x))$ où σ est une homéomorphie involutive de X sur lui-même. Ceci permet de traiter simultanément le cas où V est l'espace $C_0(Y)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact ainsi que le cas où V est un espace C(X).

1. Notations.

Si V est un espace normé, on note B(V) sa boule unité fermée et $B(x, r)$ la boule unité fermée de centre x et de rayon r. Le dual V′ est, sauf mention du contraire, muni de $\sigma(V', V)$. Si A est un ensemble d'un espace vectoriel V, on note conv (A) l'enveloppe convexe de A, et si K est un convexe, on désigne par E(K) l'ensemble de ses points extrémaux.

Si l'espace V est isométrique à l'espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ, on dira que V est un L-*espace*. Un espace de Banach dont le dual est un L-espace est un *espace de Lindenstrauss*. Un espace de Banach est un *espace simplicial* si V′ est isomorphe pour l'ordre et isométrique pour la norme à un espace $L^1(\mu)$. On sait qu'un tel espace s'identifie à l'espace $A_0(K)$ des fonctions affines continues sur la partie positive K de la boule unité de V', nulles à l'origine. De plus K est un simplexe. Un espace simplicial qui est réticulé est un M-*espace*, c'est-à-dire qu'il s'identifie pour l'ordre et la norme à l'espace des fonctions continues sur un compact X qui vérifient des relations de dépendance

$$(*) \qquad f(x_i) = \lambda_i f(y_i) \qquad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$$

où (x_i, y_i) sont des points de X. Suivant [11], on dira que V est un G-*espace* s'il s'identifie à l'espace des fonctions continues sur un compact X qui vérifient des relations de type (*) sans imposer cependant que λ_i est positif. Il est prouvé dans [11] que V est un tel espace si et seulement s'il existe un M-*espace* E contenant V et une projection de norme 1 de E sur V. S'il existe une projection de norme 1 de E sur un sous-espace F on dira que F est 1-*complémenté* dans E.

Si W et V sont deux espaces normés, on note $\mathscr{L}(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}(W, V)$, $\mathscr{K}(W, V)$) l'espace des opérateurs bornés (resp. faiblement compacts, compacts) de W dans V. On écrira $\mathscr{L}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{K}$ si aucune confusion n'est à craindre. On notera $\mathscr{L}'(W, V)$ le dual de $\mathscr{L}(W, V)$ et $\mathscr{K}'(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}'(W, V)$) le dual de $\mathscr{K}(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}(W, V)$).

Pour terminer, disons un mot sur l'organisation de ce travail. Dans la deuxième partie, on étudie, pour deux espaces de Banach W et V, les espaces $\mathscr{K}(W, V)$ et $\mathscr{F}(W, V)$. On commence pour cela par représenter leurs éléments comme des fonctions numériques définies sur un compact et vérifiant certaines conditions de continuité. Ceci permet de montrer que si W et V' sont des L-espaces, alors $\mathscr{K}(W, V)$ est un espace de Lindenstrauss. Il en est de même pour l'espace $\mathscr{F}(W, V)$ si l'on impose de plus que V est un G-espace.

Dans la troisième partie on établit l'existence de projections continues de meilleure approximation de $\mathscr{L}(W, V)$ sur $\mathscr{K}(W, V)$ et $\mathscr{F}(W, V)$. On démontre aussi l'existence de projection de meilleure approximation de $\mathscr{K}''(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}''(W, V)$) sur $\mathscr{K}(W, V)$ (resp. $\mathscr{F}(W, V)$).

Dans la dernière partie, on étudie les propriétés de ces meilleures approximations en caractérisant les points extrémaux de l'ensemble des opérateurs qui réalisent la meilleure approximation. On verra que dans certains cas, cet ensemble n'a pas de points extrémaux, ce qui prouve qu'il n'est compact pour aucune topologie d'e.l.c.s. On prouvera qu'il est toujours d'intérieur vide ainsi que le cône formé des opérateurs qui admettent 0 comme approximant. On verra enfin que ce cône peut être fortement dense et tout opérateur T fortement adhérent à l'ensemble de ses meilleurs approximants.

La projection de meilleure approximation sur $\mathscr{K}(W, V)$ n'est certainement pas linéaire puisqu'une modification simple des arguments de [13] montre que $\mathscr{K}(W, V)$ n'est pas facteur direct dans $\mathscr{L}(W, V)$.

2. Propriétés des espaces $\mathscr{K}(W, V)$ et $\mathscr{F}(W, V)$.

Pour étudier les propriétés des espaces $\mathscr{F}(W, V)$, $\mathscr{K}(W, V)$ on a besoin de représenter leurs éléments comme fonctions numériques définies sur un compact et vérifiant certaines conditions de continuité.

Notons φ l'injection canonique de $\mathscr{L}(W, V)$ dans l'espace des fonctions bornées séparément linéaires sur le produit $(B(W'') \times B(V'))$, muni de la convergence uniforme, définie par :

$$\varphi(T)(w'', v') = w''(T'(v')), \qquad \forall (w'', v') \in B(W'') \times B(V')$$

où T' est la transposée de T. Il est clair que φ est une isométrie de $\mathscr{L}(W, V)$ sur le sous-espace formé des fonctions continues pour la première variable, et continues pour la deuxième variable en tout point (w, v') si w est dans $B(W)$.

LEMME 1. — *a) L'espace* $\varphi(\mathscr{K})$ *coïncide avec le sous-espace de* $\varphi(\mathscr{L})$ *formé des fonctions continues sur* $B(W'') \times B(V')$;

b) L'espace $\varphi(\mathscr{F})$ *coïncide avec le sous-espace de* $\varphi(\mathscr{L})$ *formé des fonctions séparément continues sur* $B(W'') \times B(V')$.

Démonstration. — On établit seulement l'assertion *a*), l'assertion *b*) se démontre de la même manière et repose sur le fait qu'une partie bornée simplement compacte dans un espace $C(X)$ est faiblement compacte.

Soit (w''_α, v'_α) une famille ultrafiltrée dans $B(W'') \times B(V')$

qui converge vers (w'', v'); alors

$$\begin{aligned}|\varphi(\mathrm{T})(w''_\alpha, v'_\alpha) - \varphi(\mathrm{T})(w'', v')| &= |w''_\alpha(\mathrm{T}'(v'_\alpha)) - w''(\mathrm{T}'(v'))|\\ &\leqslant |w''_\alpha(\mathrm{T}'(v'_\alpha)) - w''_\alpha(\mathrm{T}'(v'))| + |w''_\alpha(\mathrm{T}'(v')) - w''(\mathrm{T}'(v'))|\\ &\leqslant \|\mathrm{T}'(v'_\alpha) - \mathrm{T}'(v')\| + |w''_\alpha(\mathrm{T}'(v')) - w''(\mathrm{T}'(v'))|.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 puisque T est un opérateur compact et le deuxième terme tend vers 0 puisque (w''_α) converge vers w'' pour $\sigma(\mathrm{W}'', \mathrm{W}')$. En effet, T′ est continue de V′ muni de $\sigma(\mathrm{V}', \mathrm{V})$ dans W′ muni de sa norme. Inversement, si $f \in \mathrm{C}(\mathrm{B}(\mathrm{W}'') \times \mathrm{B}(\mathrm{V}'))$ est séparément linéaire, on note T l'opérateur de $\mathscr{L}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ défini par

$$\mathrm{T}(w) = f(w, .), \qquad \forall w \in \mathrm{B}(\mathrm{W})$$

où $f(w, .)$ est la fonction de $\mathrm{C}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'))$ définie par

$$f(w, .)(v') = f(w, v').$$

La fonction $f(w, .)$ étant linéaire et continue sur B(V′), elle correspond à un point de V. Comme f est continue sur le produit, l'ensemble $\{f(w, .);\ w \in \mathrm{B}(\mathrm{W})\}$ est précompact dans C(B(V′)) et ainsi T est un opérateur compact.

Pour tout (w'', v') de $\mathrm{B}(\mathrm{W}'') \times \mathrm{B}(\mathrm{V}')$ on note $y^*_{w'', v'}$ la fonctionnelle définie sur $\mathscr{L}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ par

$$y^*_{w'', v'}(\mathrm{T}) = w''(\mathrm{T}'(v')).$$

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctionnelles $y^*_{w'', v'}$ quand (w'', v') parcourt $\mathrm{E}(\mathrm{B}(\mathrm{W}'')) \times \mathrm{E}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'))$.

Corollaire 2. — *a) L'adhérence de* $\mathscr{E}$ *pour* $\sigma(\mathscr{L}'(\mathrm{W}, \mathrm{V}), \mathscr{L}(\mathrm{W}, \mathrm{V}))$ *contient les points extrémaux de la boule unité de* $\mathscr{L}'(\mathrm{W}, \mathrm{V})$;

b) Tout point extrémal de $\mathrm{B}(\mathscr{K}'(\mathrm{W}, \mathrm{V}))$ *est la restriction à* $\mathscr{K}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ *d'une fonctionnelle de* $\mathscr{E}$.

Démonstration. — *a)* Soit y^* un point de $\mathrm{B}(\mathscr{L}')\setminus\overline{\mathrm{conv}}\,(\mathscr{E})$; il existe un opérateur T de $\mathscr{L}$ tel que

$$y^*(\mathrm{T}) > 1 \qquad \text{et} \qquad y^*_{w'', v'}(\mathrm{T}) \leqslant 1, \qquad \forall y^*_{w'', v'} \in \mathscr{E}.$$

Pour tout $v' \in \mathrm{E}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'))$ la fonction $\varphi(\mathrm{T})(w'', v')$ étant continue sur la première variable, le théorème de Krein-Milman et la deuxième inégalité impliquent $\|\mathrm{T}(v')\| \leqslant 1$.

Maintenant, en fixant $w \in B(W)$ et en appliquant le théorème de Krein-Milman à la fonction $v' \to \varphi(T)(w, v')$ on obtient l'inégalité

$$|v'(T(w))| = |\varphi(T)(w, v')| \leqslant 1.$$

Ce qui montre que $\|T\| \leqslant 1$ et la première inégalité constitue la contradiction recherchée.

b) Soient M_1 le convexe des mesures de masse inférieure à 1 sur $B(W'') \times B(V')$ et R la surjection canonique de M_1 sur $B(\mathcal{K}')$. Comme $\varphi(\mathcal{K})$ sépare les points, la restriction de R à $B(W'') \times B(V')$ est injective. Pour tout point extrémal y^* de $B(\mathcal{K}')$ l'ensemble $R^{-1}(y^*)$ est une face fermée de M_1. Il est, par conséquent, réduit à un point extrémal $\varepsilon_{w'', v'}$ de M_1. Ceci revient à dire que $y^* = y^*_{w'', v'}$. Comme y^* est extrémal, il en est de même pour w'' et v' dans $B(W'')$ et $B(V')$. Sinon, $w'' = \dfrac{w''_1 + w''_2}{2}$ et l'on a

$$y^*_{w'', v'} = \frac{1}{2}\,(y^*_{w_1, v'} + y^*_{w_2^*, v'})\,;$$

le même raisonnement prouve l'extrémalité de v' dans $B(V')$.

THÉORÈME 3. — *Soient* W *un* L-*espace et* V *un espace de Lindenstrauss; alors* $\mathcal{K}(W, V)$ *est un espace de Lindenstrauss. De plus, l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de* $\mathcal{K}'$ *coïncide avec* $\mathcal{E}$, *il est homéomorphe pour* $\sigma(\mathcal{K}', \mathcal{K})$ *au produit* $E(B(W'')) \times E(B(V'))$.

Démonstration. — L'espace W' est isométrique à un espace $C(Y)$ pour un compact Y; c'est donc un espace de Lindenstrauss. Pour tout (w'', v') de $B(W'') \times B(V')$, on pose

$$\mu_{w'', v'} = \mu_{w''} \otimes \mu_{v'}$$

où $\mu_{w''}$ (resp. $\mu_{v'}$) est l'unique mesure maximale sur $B(W'')$ (resp. $B(V')$) impaire de masse $\|w''\|$ (resp. $\|v'\|$) et de résultants w'' (resp. v'). L'application $(w'', v') \to \mu_{w'' v'}$ vérifie les conditions du corollaire 11 de [3] et montre que $\mathcal{K}(W, V)$ est un espace de Lindenstrauss. D'après l'unicité de la sélection linéaire, l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{K}'$ est formé des fonctionnelles $y^*_{w'',v'}$ où (w'', v') parcourt $E(B(W'')) \times E(B(V'))$. L'homéomorphie entre $\mathcal{E}$ et le produit $E(B(W'')) \times E(B(V'))$ se démontre en utilisant le lemme 1 *a*).

Remarquons que ce théorème peut être démontré différemment; il suffit en effet, d'après [10], de montrer que toute famille de 4 boules fermées de $\mathcal{K}$ qui se rencontrent deux à deux admet une intersection non vide. Ce fait peut être établi en construisant une sélection linéaire continue pour une application multivoque définie sur $B(V')$ [9]. Dans le cas où V est un espace simplicial (resp. avec unité) la démonstration peut être aménagée pour obtenir le résultat suivant, qui se trouve aussi dans [1] et [8].

COROLLAIRE 4. — *Soient* V *un espace simplicial (resp. avec unité) et* W *un* L-*espace, alors* $\mathcal{K}(W, V)$ *muni de l'ordre canonique est un espace simplicial (resp. avec unité). Si de plus* V *est réticulé, il en est de même de* $\mathcal{K}(W, V)$.

THÉORÈME 5. — *Soient* W *un* L-*espace et* V *un* G-*espace; l'espace* $\mathcal{F}(W, V)$ *est un* G-*espace. Si* V *est un* M-*espace (resp. avec unité), il en est de même pour* $\mathcal{F}(W, V)$.

Démonstration. — Comme V est un G-espace, il est 1-complémenté dans un M-espace E d'après [11]. Par conséquent, $\mathcal{F}(W, V)$ est 1-complémenté dans $\mathcal{F}(W, E)$. Il suffit donc d'établir la deuxième assertion. Il existe un compact X, des points (x_i, x'_i) de X et des scalaires (λ_i) de $[0, 1]$ tels que

$$V = \{f \in C(X);\ f(x_i) = \lambda_i f(x'_i)\}.$$

Par hypothèse, on a $W' = C(Y)$ pour un compact hyperstonien Y; soit $P(Y)$ le convexe des mesures de probabilité sur Y muni de la topologie vague. L'espace $\mathcal{F}(W, V)$ est isométrique à l'espace F des fonctions bornées, séparément continues sur $Y \times X$ qui vérifient les relations :

$$(*) \qquad f(y, x_i) = \lambda_i f(y, x'_i) \qquad \forall y \in Y.$$

Le lemme 1 implique que $\mathcal{F}(W, V)$ est isométrique à l'espace des fonctions bornées séparément continues sur $P(Y) \times X$, affines par rapport à la première variable, et vérifiant

$$(**) \qquad f(\mu, x_i) = \lambda_i f(\mu, x'_i) \qquad \forall \mu \in \mathrm{P(Y)}.$$

Il est clair que la restriction $\mathrm{R}(f)$ d'une telle fonction à $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$ est séparément continue et vérifie (*). De plus R est une isométrie. Pour montrer que R est surjective, il suffit de montrer que toute fonction bornée séparément continue sur $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$ admet une extension séparément continue sur $\mathrm{P(Y)} \times \mathrm{X}$ définie par

$$(\mu, x) \to \int f(y, x)\, d\mu(y).$$

Cette fonction est continue pour la première variable et vérifie (**) si f vérifie (*).

Considérons l'application $x \to f(.,\, x)$ de X dans C(Y), où $f(.,\, x)$ est la fonction définie par $f(.,\, x)(y) = f(y,\, x)$. Cette application est continue de X dans C(Y) muni de sa topologie simple. Or les ensembles bornés de C(Y) simplement compacts sont faiblement compacts et les topologies simples et faibles y coïncident, d'après un résultat classique de Grothendieck. Ainsi $x \to f(.,\, x)$ est faiblement continue, ce qui prouve que l'application $x \to \int f(y,\, x)\, d\mu(y)$ est continue pour toute μ dans P(Y). Or l'espace des fonctions séparément continues sur $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$, vérifiant (*), et muni de l'ordre naturel, est un M-espace. L'ordre naturel coïncide d'ailleurs avec l'ordre canonique des opérateurs définis sur $\mathscr{F}(\mathrm{W}, \mathrm{V})$.

3. Existence de projections de meilleure approximation.

Lemme 6. — *Soit* M *un sous-espace* 1-*complémenté dans* V. *On suppose que* V *est canoniquement plongé dans* V″. *S'il existe une projection (continue) de meilleure approximation de* V″ *sur* V, *il existe une telle projection de* M″ *sur* M.

Démonstration. — Soient π une projection de norme 1 de V sur M et P une projection de meilleure approximation de V″ sur V. L'espace M″ est canoniquement identifiable à M^{oo}, bipolaire de M dans V″. Pour tout m'' de M″, le point $\pi(\mathrm{P}(m''))$ réalise la meilleure approximation de m''

dans M. Soit π'' la projection de V'' sur M'' bitransposée de π; alors :

$$\begin{aligned}\|m'' - \pi(P(m''))\| &= \|\pi''(m'' - P(m''))\| \\ &\leqslant \|m'' - P(m'')\| \leqslant \|m'' - v\| \qquad \forall v \in V.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout m de M on a

$$\|m'' - \pi(P(m''))\| \leqslant \|m'' - m\|.$$

De plus la projection $\pi \circ P$ est continue si on suppose que P est continue.

Le théorème suivant est dû à Blatter dans le cas d'un espace C(X). La généralisation suivante repose sur les résultats de [4]; une projection de meilleure approximation P est dite homogène si $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ pour tout λ réel.

THÉORÈME 7. — *Soit* M *un espace de Lindenstrauss canoniquement plongé dans* M''. *Si* M *est* 1-*complémenté dans un espace simplicial* V, *il existe une projection de meilleure approximation homogène continue de* M'' *sur* M. *Dans le cas d'un espace simplicial, on peut trouver une projection positive qui vérifie les conditions précédentes.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, il suffit de se restreindre au cas d'un espace simplicial V plongé dans son bidual. D'après le théorème 3.9 de [4], il suffit de montrer que si R est l'application canonique de V''' sur V' on a

$$R(E[B(V'''^+)]) \subset E(B(V'^+)),$$

où $B(V'^+)$ et $B(V'''^+)$ sont les parties positives des boules unités de V' et V'''.

L'espace V'' s'identifie pour l'ordre et la norme à un espace C(Y) pour un compact hyperstonien Y et V' à l'espace N(Y) des mesures normales sur Y. Ainsi la restriction R s'identifie à la projection π de l'espace M(Y) des mesures sur Y sur le sous-espace N(Y). Les projections π et $(I - \pi)$ sont positives, puisque $0 \leqslant \pi(\mu) \leqslant \mu$ pour toute mesure positive. Si k est sur une génératrice extrémale de V'''^+, les points k et $\pi(k)$ sont proportionnels. Comme $\pi(k)$ et $k - \pi(k)$ sont étrangers, on arrive à l'alternative suivante : ou bien $k = \pi(k)$, ou bien $\pi(k) = 0$. Dans le dernier cas, ceci revient à dire $R(k) = 0$ et c'est un point de $E(B(V'^{+}))$; dans le premier cas, si $R(k)$ n'est pas extrémal dans $B(V'^{+})$ le point k ne peut être extrémal dans $B(V'''^{+})$ ce qui contredit l'hypothèse.

Remarquons que l'hypothèse faite sur V dans le théorème précédent n'est pas très restrictive puisque tout G-espace vérifie cette condition ainsi que tout espace de Lindenstrauss séparable. En fait, le problème de l'existence d'espaces de Lindenstrauss qui ne soient pas 1-complémentés dans un espace simplicial est toujours ouvert.

En combinant les théorèmes 3, 5 et 7, on a :

Théorème 8. — *Soient* W *un* L-*espace et* V *un espace de Lindenstrauss qui est* 1-*complémenté dans un espace simplicial. Il existe une projection de meilleure approximation continue homogène de* $\mathscr{K}''(W, V)$ *sur* $\mathscr{K}(W, V)$. *Si de plus* V *est un* G-*espace, il existe une telle projection de* $\mathscr{F}''(W, V)$ *sur* $\mathscr{F}(W, V)$.

La proposition suivante sera renforcée dans la suite.

Proposition 9. — *Soient* W *un* L-*espace et* V *un* G-*espace. Il existe une projection de meilleure approximation continue homogène de* $\mathscr{F}(W, V)$ *sur* $\mathscr{K}(W, V)$.

Démonstration. — Il existe une isométrie canonique de $\mathscr{F}(W, V)$ dans $\mathscr{K}''(W, V)$. En effet, tout T de $\mathscr{F}$ correspond à une fonction $\varphi(T)$ bornée séparément continue sur $Y \times X$ vérifiant les relations (*). D'après un résultat de Mokobodzki, cette fonction est universellement mesurable; d'où le résultat, puisque $\mathscr{K}$ est isométrique au sous-espace de $C(Y \times X)$ formé des fonctions vérifiant les relations (*).

Soient W et V deux espaces de Banach et $\mathscr{G}(W, V)$ un sous-espace de $\mathscr{L}(W, V)$; on dira que $\mathscr{G}(W, V)$ est un idéal si pour tout T_0 de $\mathscr{G}(W, V)$, et tout T_1 de $\mathscr{L}(W, W)$ (resp. T_2 de $\mathscr{L}(V, V)$), l'opérateur composé $T_2 \circ T_0 \circ T_1$ est dans $\mathscr{G}(W, V)$. C'est le cas, par exemple, si $\mathscr{G}(W, V)$ est égal à $\mathscr{K}(W, V)$ ou bien $\mathscr{F}(W, V)$.

LEMME 10. — *Soient* W *et* V *deux espaces de Banach,* N (*resp.* M) *un sous-espace* 1-*complémenté dans* W (*resp.* V) *par une projection* π_N (*resp.* π_M) *et* $\mathcal{G}(W, V)$ *un idéal de* $\mathcal{L}(W, V)$.

a) *Pour tout opérateur* T *de* $\mathcal{L}(W, V)$ (*resp.* $\mathcal{L}(N, V)$) *on a l'égalité suivante :*

$$d(T, \mathcal{G}(W, M)) = d(T, \mathcal{G}(W, V))$$
$$(\textit{resp. } d(T, \mathcal{G}(N, V)) = d(T \circ \pi_N, \mathcal{G}(W, V))).$$

b) *S'il existe une projection (continue) de meilleure approximation de* $\mathcal{L}(W, V)$ *sur* $\mathcal{G}(W, V)$ *il en est de même pour* $\mathcal{L}(W, M)$ *et* $\mathcal{G}(W, M)$ (*resp.* $\mathcal{L}(N, V)$ *et* $\mathcal{G}(N, V)$).

c) *Soit* T *un opérateur de* $\mathcal{L}(N, V)$; *si* G *est une approximation de* T *dans* $\mathcal{G}(N, V)$, *alors* $G \circ \pi_N$ *est une approximation de* $T \circ \pi_N$ *dans* $\mathcal{G}(W, V)$. *Inversement, si* G *est une approximation de* $T \circ \pi_N$ *dans* $\mathcal{G}(W, V)$ *alors* $G|_N$ *est une approximation de* T *dans* $\mathcal{G}(N, V)$.

Démonstration. — *a*) Soit T un opérateur dans $\mathcal{L}(W, V)$, il est clair que

$$d(T, \mathcal{G}(W, M)) \geqslant d(T, \mathcal{G}(W, V)).$$

Inversement, soient $\varepsilon > 0$ et G un opérateur de $\mathcal{G}(W, V)$ tels que

$$\|T - G\| \leqslant d(T, \mathcal{G}(W, V)) + \varepsilon.$$

Comme $T = \pi_M \circ T$, on a

$$d(T, \mathcal{G}(W, M)) \leqslant \|T - \pi_M \circ G\| \leqslant \|T - G\| \leqslant d(T, \mathcal{G}(W, V)) + \varepsilon,$$

ce qui démontre la première partie de *a*).

Soient T un opérateur de $\mathcal{L}(N, V)$, $\varepsilon > 0$ et G un opérateur de $\mathcal{G}(N, V)$ tel que

$$\|T - G\| \leqslant d(T, \mathcal{G}(N, V)) + \varepsilon.$$

Les inégalités

$$d(T \circ \pi_N, \mathcal{G}(W, V)) \leqslant \|T \circ \pi_N - G \circ \pi_N\| = \|T - G\| \leqslant d(T, \mathcal{G}(N, V)) + \varepsilon$$

montrent que $d(T \circ \pi_N, \mathcal{G}(W, V)) \leqslant d(T, \mathcal{G}(N, V))$.

Inversement, si G est un opérateur de $\mathscr{G}(W, V)$ tel que

$$\|T \circ \pi_N - G\| \leqslant d(T \circ \pi_N, \mathscr{G}(W, V)) + \varepsilon$$

les inégalités

$$d(T, \mathscr{G}(N, V)) \leqslant \|T - G|_N\| \leqslant (T \circ \pi_N - G)|_N\| \\ \leqslant d(T \circ \pi_N, \mathscr{G}(W, V)) + \varepsilon$$

prouvent l'inégalité opposée et achèvent la démonstration de a), et démontrent par là même l'assertion c).

b) Soit P une projection (continue) qui réalise la meilleure approximation de $\mathscr{L}(W, V)$ sur $\mathscr{G}(W, V)$ alors l'application $T \to \pi_M \circ P(T)$ (resp. $T \to P(T \circ \pi_N)|_N$) est une projection (continue) de $\mathscr{L}(W, M)$ sur $\mathscr{G}(W, M)$ (resp. $\mathscr{L}(N, V)$ sur $\mathscr{G}(N, V)$) qui réalise la meilleure approximation.

On dira qu'un espace de Banach V est un C_σ-espace s'il existe un compact X muni d'une homéomorphie involutive σ tel que V soit isométrique à l'espace des fonctions continues sur X vérifiant $f(x) = -f(\sigma(x))$. La classe des C_σ-espaces contient donc les espaces $C(X)$ ainsi que les espaces $C_0(Y)$ formés des fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact Y. D'après [11], l'espace V est un C_σ-espace si et seulement s'il est 1-complémenté dans un espace $C(X)$.

L'espace $\mathscr{L}(W, V)$ où W est un L-espace et V un M-espace est 1-normal mais il n'est pas nécessairement positivement engendré; il ne peut pas, a fortiori, être réticulé. Le contre-exemple suivant est classique. Soit T l'opérateur continu de $L^1([0, 1)]$ dans $c_0(\mathbf{N})$ défini par

$$T(f) = \left(\int_0^1 f(t) \sin nt \, dt\right)_{n \in \mathbf{N}}.$$

S'il existe deux opérateurs positifs T_1 et T_2 tels que $T = T_1 - T_2$, l'image par T de tout intervalle d'ordre $[-f, f]$ contenant la suite $(\sin nt)_{n\in\mathbf{N}}$ serait inclus dans le segment d'ordre $[-T_1 + T_2)f, (T_1 + T_2)f]$ de $c_0(\mathbf{N})$. Or ceci est impossible, puisque $T([-f, +f])$ contient la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des vecteurs de la base canonique de $c_0(\mathbf{N})$.

Cependant, il est aisé d'établir les résultats suivants :

a) Si $W = l^1(\Gamma)$ et V un M-espace, alors $\mathscr{L}(l^1(\Gamma), W)$ est réticulé.

b) Si W est un L-espace et $V = C(X)$ pour un compact stonien X alors $\mathscr{L}(W, C(X))$ est réticulé.

THÉORÈME 11. — *Soient* W *un* L-*espace et* V *un* C_σ-*espace. Il existe une projection de meilleure approximation continue homogène de* $\mathscr{L}(W, V)$ *sur* $\mathscr{K}(W, V)$ (*resp.* $\mathscr{F}(W, V)$). *Si* V *est un espace* $C(X)$ *ou* $C_0(Y)$ *on peut trouver une projection positive qui vérifie les conditions précédentes.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, il suffit de se limiter au cas où $V = C(X)$. Comme $\mathscr{F}(W, V)$ et $\mathscr{K}(W, V)$ sont, d'après le corollaire 4 et le théorème 5, des M-espaces avec unité, il suffit d'après le théorème 3.9 de [4] de montrer que la restriction de toute forme linéaire extrémale k de $B(\mathscr{L}')$ est extrémale dans $B(\mathscr{K}')$ et $B(\mathscr{F}')$.

Soit k une telle forme linéaire. Si k est dans l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{y^*_{w''v'};\ (w'', v') \in E(B(W'')) \times E(B(V'))\}$$

alors $k|_{\mathscr{K}}$ est extrémale dans $B(\mathscr{K}')$ d'après le corollaire 2. De même, $k|_{\mathscr{F}}$ est extrémale dans $B(\mathscr{F}')$ puisqu'elle s'identifie à la fonctionnelle $f \longmapsto f(y, x)$ qui est une forme linéaire extrémale dans $B(\mathscr{F}')$ d'après la représentation de $\mathscr{F}$ comme l'espace des fonctions bornées séparément continues sur $Y \times X$.

Si k est un point quelconque de $E(B(\mathscr{L}'))$, il existe une famille ultrafiltrée $y^*_{w''_\alpha, v'_\alpha}$ qui converge vers k. Comme l'application de restriction à $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{K}$) est faiblement continue, il est clair que $k|_{\mathscr{F}}$ (resp. $k|_{\mathscr{K}}$) est la limite des restrictions de $y^*_{w''_\alpha, v'_\alpha}$ à $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{K}$). Or les ensembles de points extrémaux de $B(\mathscr{F}')$ et $B(\mathscr{K}')$ sont fermés; par suite $k|_{\mathscr{F}}$ (resp. $k|_{\mathscr{K}}$) est extrémal dans $B(\mathscr{F}')$ (resp. $B(\mathscr{K}')$).

4. Propriétés de la projection de meilleure approximation.

Dans la suite, on se propose d'étudier les propriétés de cette meilleure approximation. Certaines de ces propriétés sont vraies aussi pour l'approximation d'éléments de $\mathscr{L}(H, H)$ par des opérateurs de $\mathscr{K}(H, H)$ pour un espace hilbertien H

([7] et [12]). Les espaces W et V seront, sauf mention du contraire, des espaces de Banach quelconques.

Soient T un opérateur de $\mathscr{L}(W, V)$ et $\mathscr{G}$ un sous-espace de $\mathscr{L}(W, V)$; on note $\mathscr{G}(T)$ l'ensemble des opérateurs de $\mathscr{G}$ qui réalisent la meilleure approximation de T. Cet ensemble est un convexe fermé pour la norme sur $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{G}^{(0)}$ le cône fermé (non convexe) de $\mathscr{L}(W, V)$ formé des opérateurs qui admettent 0 comme meilleur approximant. Cet ensemble est déterminé par l'équation

$$\mathscr{G}^{(0)} = \{T \in \mathscr{L};\ d(T, \mathscr{G}) = \|T\|\}.$$

On ignore la nature topologique de $\mathscr{G}^{(0)}$, en particulier, s'il est homéomorphe au quotient $\mathscr{L}/\mathscr{G}$. Grâce au théorème 11, on sait que $\mathscr{G}^{(0)}$ contient un sous-ensemble homéomorphe à $\mathscr{L}/\mathscr{G}$ quand $\mathscr{G}$ coïncide avec $\mathscr{K}(W, V)$ ou bien $\mathscr{F}(W, V)$ dès que W et V vérifient les conditions du théorème 11.

Théorème 12. — *Soient* W *et* V *deux espaces de Banach et* $\mathscr{G}$ *un sous-espace de* $\mathscr{L}$ *qui contient les opérateurs de rang fini. Alors* $\mathscr{G}^{(0)}$ *est d'intérieur vide ainsi que le convexe* $\mathscr{G}(T)$ *pour tout* T *de* $\mathscr{L}$.

Démonstration. — Si $\mathscr{G} = \mathscr{L}$ il n'y a rien à prouver puisque $\mathscr{G}^{(0)} = 0$ et $\mathscr{G}(T) = \{T\}$. Si $\mathscr{G}(T)$ est vide, il est évidemment d'intérieur vide. Comme $\mathscr{G}^{(0)}$ est un cône fermé, l'origine ne peut être intérieure à $\mathscr{G}^{(0)}$ sans qu'il soit égal à $\mathscr{L}$, ce qui est impossible puisque $\mathscr{G}$ n'est pas réduit à 0. Soient T un opérateur non nul de $\mathscr{G}^{(0)}$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe un point z de B(W) tel que

$$\|T(z)\| > \|T\| - \delta^2 > 0 \qquad (\text{avec } \delta^2 < \|T\|)$$

et un point f de B(V′) tel que

$$f(T(z)) > \|T(z)\| - \delta.$$

Notons T_δ l'opérateur de $\mathscr{L}$ défini par

$$T_\delta(x) = \delta f(T(x)).T(z)/\|T(z)\| \qquad \forall x \in W.$$

Il est clair que $\|T_\delta\| = \delta\|T\|$; ainsi $T + T_\delta$ appartient à la boule ouverte de centre T et de rayon ε dès que $\delta\|T\| < \varepsilon$.

De plus, comme T_δ est de rang 1, on a :

$$d(T + T_\delta, \mathscr{G}) = d(T, \mathscr{G}) = \|T\|.$$

On va montrer que $T + T_\delta \notin \mathscr{G}^{(0)}$ dès que $\delta^2 + 2\delta < \|T\|$ ce qui prouvera la première assertion; en effet :

$$\begin{aligned}\|T + T_\delta\| \geqslant \|T(z) + T_\delta(z)\| &= \left(1 + \frac{\delta f(T(z))}{\|T(z)\|}\right)\|T(z)\| \\ &> (1 + \delta)\|T(z)\| - \delta^2 \\ &> (\|T\| - \delta^2)(1 + \delta) - \delta^2 \\ &= \|T\| + \delta(\|T\| - \delta(2 + \delta)).\end{aligned}$$

Or le dernier terme est strictement positif puisque $\delta(2 + \delta) < \|T\|$. Ainsi $\|T + T_\delta\| > d(T + T_\delta, \mathscr{G})$ ce qui prouve qu'il n'est pas dans $\mathscr{G}^{(0)}$. La deuxième assertion est immédiate d'après le lemme suivant.

Lemme 13. — *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach* E. *On suppose que tout* x *de* $M^{(0)}$ *est limite d'une suite* $(x_n) \notin M^{(0)}$ *telle que* $x - x_n \in M$. *Alors, pour tout* x *de* E *l'ensemble* $M(x)$ *des points qui réalisent la meilleure approximation est d'intérieur vide.*

Démonstration. — Sinon, il existe un point x de E, un point m de $M(x)$ et $\alpha > 0$ tels que $B(m, \alpha) \subset M(x)$. En effectuant une translation, on a $M(x - m) \supset B(0, \alpha)$. Par conséquent, le point $x - m$ est dans $M^{(0)}$ ainsi que $x - m + m'$ pour tout m' de M de norme inférieure à α, ce qui contredit l'hypothèse.

Comme W est un L-espace, il se peut fort bien que B(W) ne possède pas de points extrémaux, néanmoins on a le résultat suivant.

Proposition 14. — *Soient* W *un* L-*espace*, V *un espace de Banach et* $\mathscr{G}$ *un sous-espace de* $\mathscr{L}(W, V)$ *qui contient les opérateurs de rang fini. Soient* T *un opérateur de* $\mathscr{L}$ *et* T_0 *dans* $\mathscr{G}(T)$. *On a les implications* $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c)$. *Ces assertions sont équivalentes si de plus* $W = l^1(\Gamma)$.

a) $T - T_0$ *est extrémal dans la boule de* $\mathscr{L}$ *de centre* 0 *et de rayon* $\|T - T_0\|$.

b) T_0 *est extrémal dans* $\mathscr{G}(T)$.

c) L'image par $T - T_0$ *de tout point extrémal de* $B(W)$ *est extrémal dans la boule de* V *de centre* 0 *et de rayon* $\|T - T_0\|$.

Démonstration. — Si T est dans $\mathcal{G}$ les trois assertions sont trivialement équivalentes. On suppose donc $T \notin \mathcal{G}$.

a) $\Longrightarrow$ *b)*. Si T_0 n'est pas extrémal dans $\mathcal{G}(T)$, il existe $T_1 \neq T_2$ dans $\mathcal{G}(T)$ tels que $T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. Mais alors $T - T_0 = \frac{1}{2}((T - T_1) + (T - T_2))$; et comme T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{G}(T)$, on a

$$\|T - T_0\| = \|T - T_1\| = \|T - T_2\|.$$

b) $\Longrightarrow$ *c)*. On peut, sans diminuer la généralité, supposer $\|T - T_0\| = 1$. L'espace $W = L^1(\mu)$ se décompose en somme directe $W = L^1(\mu_1) \oplus L^1(\mu_2)$ où μ_1 et μ_2 sont respectivement les parties diffuse et discrète de la mesure μ. Ainsi $L^1(\mu_2) = l^1(\Gamma)$ et les points extrémaux de $B(W)$ sont exactement les atomes $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de la mesure μ. S'il existe γ_0 de Γ tel que $(T - T_0)(e_{\gamma_0})$ ne soit pas extrémal dans $B(V)$, il existe un point v de $B(V) \setminus \{0\}$ tel que

$$\|(T - T_0)(e_{\gamma_0}) \pm v\| \leqslant 1.$$

Soit T_v l'opérateur de $\mathcal{L}$ de rang 1 défini par

$$T_v(w) = P_2(w)(\gamma_0) . v, \qquad \forall w \in W$$

où P_2 est la projection canonique de W sur $L^1(\mu_2) = l^1(\Gamma)$. Alors $T_0 \pm T_v$ sont dans $\mathcal{G}(T)$ puisque $\|T - T_0 \pm T_v\| \leqslant 1$. En effet, tout w de $B(W)$ s'écrit de façon canonique

$$w = w_1 + \Sigma \lambda_\gamma e_\gamma \qquad \text{où} \qquad w_1 \in L^1(\mu_1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|(T - T_0 \pm T_v)(w)\| &\leqslant \|(T - T_0)(w_1)\| + \|(T - T_0)\Big(\sum_{\gamma \neq \gamma_0}\Big)\lambda_\gamma e_\gamma\| \\ &\quad + |\lambda_{\gamma_0}|\, \|(T - T_0)e_\gamma \pm v\| \leqslant \|w_1\| + \Big(\sum_{\gamma \neq \gamma_0} |\lambda_\gamma| + |\lambda_{\gamma_0}| = \|w\|\end{aligned}$$

ce qui montre bien que T_0 n'est pas extrémal dans $\mathcal{G}(T)$.

c) $\Longrightarrow$ *a)*. Ici on suppose $W = l^1(\Gamma)$. On sait que $B(W)$ est l'enveloppe convexe normiquement fermée de ses points extrémaux. L'hypothèse montre que, s'il existe un opérateur R de norme inférieure à 1 tel que $\|T - T_0 \pm R\| \leqslant 1$, alors $R(e_\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ceci implique $R = 0$, et $T - T_0$ est extrémal dans la boule de $\mathscr{L}$ de centre 0 et de rayon $\|T - T_0\| = 1$.

Corollaire 15. — *Soient* W *un* L-*espace tel que* B(W) *possède des points extrémaux, et* V *tel que* B(V) *n'en possède pas. Alors pour tout* T *de* $\mathscr{L} \setminus \mathscr{G}$ *le convexe* $\mathscr{G}(T)$ *ne possède pas de points extrémaux. Par conséquent,* $\mathscr{G}(T)$ *est de dimension infinie et il ne peut être compact pour aucune topologie d'e.l.c.s.*

Rappelons à propos de ce corollaire qu'un G-espace dont la boule unité possède un point extrémal est en fait isométrique à un espace C(X).

Il est facile de construire des opérateurs T de $l^1(\mathbf{N})$ dans $c(\mathbf{N}^*)$ (espace des suites numériques convergentes) tels que $\mathscr{K}(T)$ et $\mathscr{F}(T)$ possèdent des éléments extrémaux. C'est le cas, par exemple, pour l'injection canonique I de $l^1(\mathbf{N})$ dans $c(\mathbf{N}^*)$. En effet, on peut vérifier que

$$d(I, \mathscr{K}) = d(I, \mathscr{F}) = \frac{1}{2}$$

et l'opérateur T_0 de rang 1 défini par

$$T_0(e_n)(p) = \frac{1}{2} \qquad \forall n, \quad \forall p \in \mathbf{N},$$

où $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$, est extrémal dans $\mathscr{K}(I)$ et $\mathscr{F}(I)$.

Proposition 16. — *Soient* X *un espace compact ayant un nombre fini de composantes connexes,* $W = l^1(\mathbf{N})$ *et* $V = C(X)$. *Soit* $\mathscr{G}$ *l'espace* $\mathscr{K}(W, V)$ *ou* $\mathscr{F}(W, V)$. *Pour tout* T *de* $\mathscr{L} / \mathscr{G}$, *l'ensemble* $\mathscr{G}(T)$ *n'a pas de points extrémaux.*

Démonstration. — On fera la démonstration dans le cas où $\mathscr{G} = \mathscr{K}(W, V)$; elle s'adapte facilement pour $\mathscr{G} = \mathscr{F}(W, V)$. Supposons pour commencer que X est connexe. Soit $f_n = T(e_n)$; comme T n'est pas compact, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas relativement compacte. Il existe donc une sous-suite $(f_p)_{p \in A \subset \mathbf{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui n'a pas de valeurs d'adhérence.

Si T_0 est extrémal dans $\mathscr{G}(T)$, la proposition 14 implique

$$|(T - T_0)(e_n)(x)| = \lambda \qquad \forall x \in X$$

où $\lambda = d(T, \mathscr{K})$, sachant que les points extrémaux de $B(C(X))$ sont les fonctions constantes ± 1. On devrait donc avoir, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$T_0(e_n)(x) = f_n(x) + \varepsilon_n \lambda \qquad |\varepsilon_n| = 1.$$

Mais alors, T_0 n'est pas un opérateur compact puisque la suite $(T_0(e_p))_{p \in A}$ contient une sous-suite qui n'a pas de valeur d'adhérence.

En effet, si pour une infinité d'indice $p \in B \subset A$ on a $\varepsilon_p = +1$ la sous-suite $(T_0(e_p))_{p \in B}$ est une translatée de la suite $(f_p)_{p \in B'}$. Sinon $\varepsilon_p = 1$ pour un nombre fini d'indices et $\varepsilon_p = -1$ pour une infinité d'indices $B' \subset A$, et $(T_0(e_p))_{p \in B'}$ est la sous-suite recherchée.

Supposons maintenant que X possède un nombre fini de composantes connexes $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'étant pas relativement compacte, il existe un indice i_0 tel que la suite des restrictions de (f_n) à X_{i_0} n'est pas relativement compacte. On continue le raisonnement comme précédemment en utilisant uniquement X_{i_0}.

Proposition 17. — *Soient* W *et* V *deux espaces de Banach et* $\mathscr{G}$ *un idéal de* $\mathscr{L}(W, V)$ *qui contient les opérateurs de rang fini.*

a) Si $W = l^1(\Gamma)$ *alors* T *est adhérent à* $\mathscr{G}(T)$ *pour la topologie forte d'opérateurs dès que* $\mathscr{G}(T)$ *n'est pas vide.*

b) Si $V = c_0(\Gamma)$ *alors* $\mathscr{G}^{(0)}$ *est fortement dense dans* $\mathscr{L}(W, V)$. *Si de plus* $\mathscr{G}(T)$ *n'est pas vide alors* T *est fortement adhérent à* $\mathscr{G}(T)$.

Dans les deux cas, $\mathscr{G}(T)$ *n'est compact pour aucune des topologies naturelles sur* $\mathscr{G}$ *dès qu'il n'est pas vide et que* $T \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{G}$.

Démonstration. — *a*) Supposons $\mathscr{G}(T)$ non vide; si $T \in \mathscr{G}$, il n'y a rien à prouver. Soit $T \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{G}$; pour toute partie finie A de Γ on note E_A la projection canonique de $l^1(\Gamma)$

sur l'espace $l^1(A)$ engendré par $(e_\gamma)_{\gamma \in A}$. Soit T_0 un opérateur de $\mathscr{G}(T)$; la famille $(T_A)_{A \subset \Gamma}$ définie par

$$T_A = TE_A + T_0(I - E_A)$$

appartient à l'idéal $\mathscr{G}$ et elle converge fortement vers T selon le filtre des sections finissantes de Γ. De plus, on a

$$\|T - T_A\| = \|(T - T_0)(I - E_A)\| \leqslant \|T - T_0\|,$$

ce qui signifie que T_A est dans $\mathscr{G}(T)$.

b) Si $V = c_0(\Gamma)$, on note E_A la projection canonique sur l'espace vectoriel engendré par $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$; on considère la famille $T_A = E_A T + (I - E_A)T_0$ et on a les mêmes propriétés.

Remarquons que si $T \in \mathscr{G}^{(0)}$, il en est de même pour $(I - E_A)T$. En effet, T est dans $\mathscr{G}^{(0)}$ si et seulement si, pour tout opérateur T_0 de $\mathscr{G}$, on a

$$\|T - T_0\| \geqslant \|T\|.$$

En particulier, pour $T_0 = E_A T$, on a les inégalités

$$\|T\| \geqslant \|(I - E_A)T\| \geqslant \|T\|.$$

Maintenant, pour tout opérateur T_0 de $\mathscr{G}$, on a

$$\|T - E_A T - T_0\| = \|T - (E_A T + T_0)\| \geqslant \|T\| = \|T - E_A T\|,$$

ce qui implique que $T - E_A T \in \mathscr{G}^{(0)}$.

Soient maintenant T un opérateur de $\mathscr{L}$ et T_0 un opérateur de norme 1 de $\mathscr{G}^{(0)}$; on pose

$$T_A = E_A T + \|T\|(I - E_A)T_0.$$

La famille $(T_A)_{A \subset \Gamma}$ est fortement convergente vers T; de plus, on a

$$d(T_A, \mathscr{G}) = d(\|T\|(I - E_A)T_0, \mathscr{G}) = \|T\|,$$

sachant que $\|(I - E_A)T_0\| = 1$. Cependant, pour tout w de W, on a

$$\begin{aligned} \|T_A(w)\| &= \|E_A T(w) + \|T\|(I - E_A)T_0(w)\| \\ &\leqslant \|E_A T(w)\| v \|(I - E_A)T_0(w)\| \; \|T\| \leqslant \|T\| \; \|w\|, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|T_A\| \leqslant \|T\|$, et montre que T_A est dans $\mathcal{G}^{(0)}$.

Dans les deux cas *a*) et *b*), l'ensemble $\mathcal{G}(T)$ n'est pas fortement compact dès que $T \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{G}$. Il n'est a fortiori pas normiquement compact. La démonstration prouve aussi que T est adhérent à $\mathcal{G}(T)$ pour la topologie faible d'opérateurs et que $\mathcal{G}(T)$ n'est non plus pas faiblement compact.

Remarquons que l'assertion *a*) (resp. la deuxième assertion de *b*)) repose uniquement sur le fait qu'il existe une famille de projection (E_A) sur des espaces de dimension finie, dont la borne supérieure est l'identité de W (resp. V). C'est le cas, par exemple, pour les espaces classiques de suites $(l_p(I))_{1 \leqslant p < \infty}$. Il est sans espoir d'adapter la démonstration au cas d'un espace C(X) où X n'a pas de point isolé puisque Wulbert a établi dans [14] que dans ce cas aucun sous-espace de codimension finie n'est l'image de C(X) par une projection de norme 1. Le même résultat peut être établi par dualité pour un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure diffuse. La proposition 17 permet d'énoncer :

COROLLAIRE 18. — *Soient* W *et* V *deux espaces de Banach et* $\mathcal{G}$ *un idéal de* $\mathcal{L}(W, V)$ *qui vérifient l'une des deux conditions suivantes :*

a) $W = L^1(\mu)$ *relatif à une mesure* μ *ayant une infinité d'atomes.*

b) $V = C(X)$ *relativement à un compact* X *ayant une infinité de points isolés.*

Alors, si $\mathcal{G}(T)$ *n'est pas vide, il est de dimension infinie pour tout* T *de* $\mathcal{L}\setminus\mathcal{G}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. DAVIES et G. VINCENT SMITH, Tensor products, infinite products and projective limits of simplexes, *Math. Scand.*, 22 (1968), 145-164.

[2] J. DIXMIER, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, *Ann. of Math.*, 51 (1950), 387-408.

[3] H. FAKHOURY, Caractérisation des L-espaces duaux, *Bull. Sci. Math.*, 96 (1972), 129-144.

[4] H. FAKHOURY, Existence d'une projection continue de meilleure approximation dans certains espaces de Banach, *J. Math. Pures et Appl.*, 53 (1974), 1-16.

[5] J. Hennefeld, A decomposition for B(X)* and unique Hahn-Banach extension, *Pacific J. Math.*, 46 (1973), 197-199.
[6] R. Holmes et B. Kripke, Best approximation by compact operators, *Ind. Univ. Math. J.*, 21 (1971-1972), 255-263.
[7] R. Holmes, B. Scranton et J. Ward, Approximation from the space of compact operators and other M-ideals, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 259-269.
[8] A. Lazar, Affine products of simplexes, *Math. Scand.*, 22 (1968), 165-175.
[9] A. Lazar et J. Lindenstrauss, Banach spaces whose duals are L_1 and their representing matrices, *Acta Math.*, 126 (1971), 165-193.
[10] J. Lindenstrauss, Extension of compact operators, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 48 (1964).
[11] J. Lindenstrauss et D. Wulbert, Banach spaces whose duals are L_1, *J. Funct. Analysis*, 4 (1969), 332-349.
[12] C. Olsen, Extremal points and finite rank operators in the set of compact approximants, *Ind. Univ. Math. J.*, 24 (1974), 409-416.
[13] E. Thorp, Projections onto the subspace of compact operators, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 693-696.
[14] D. Wulbert, Projections of norm 1 on C(X), *Notices Amer. Math. Soc.*, 15 (1968), 362.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1976
Révisé le 20 décembre 1976
Proposé par G. Choquet.

Hicham Fakhoury,
Équipe d'Analyse
Université Paris VI
2, Place Jussieu (Tour 46)
75005 Paris.

Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
Bd du Onze Novembre 1918
69621 Villeurbanne.